Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Я. Б. Воробец, Эргодичность бильярдов в многоугольниках, *Матем. сб.*, 1997, том 188, номер 3, 65–112

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm211>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.239.49.27

26 апреля 2023 г., 10:11:14

УДК 517.987.5

Я. Б. Воробец

Эргодичность бильярдов в многоугольниках

В пространстве всех многоугольников явно указывается топологически массивное подмножество, состоящее из многоугольников, бильярдный поток в которых эргодичен. Элементы этого подмножества допускают вполне определенный порядок аппроксимации рациональными многоугольниками.

В качестве промежуточных результатов доказываются конструктивные варианты эргодической теоремы для бильярда в рациональном многоугольнике и геодезического потока на поверхности с плоской структурой, а также конструктивная квадратичная оценка роста числа седлосвязок (особых траекторий) плоской структуры.

Библиография: 6 названий.

1. Введение

Бильярдом в плоской области Q с кусочно гладкой границей называется динамическая система, описывающая движение в Q без трения точечного шарика, отражающегося от границы Q по закону “угол падения равен углу отражения”. Бильярдный поток обычно рассматривается на поверхности уровня энергии, соответствующей движению с единичной скоростью. Таким образом, фазовым пространством потока считается прямое произведение $Q \times S^1$ (S^1 – окружность единичных скоростей), в котором отождествлены элементы вида (x, v_1) и (x, v_2) , где x – точка на границе области Q , v_1 и v_2 – векторы, симметричные относительно касательной к ∂Q в точке x . Бильярд сохраняет естественную меру $\mu \times \lambda$ на фазовом пространстве (μ, λ – меры Лебега, соответственно, на Q и на S^1).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Бильярд в области Q называется *эргодическим*, если каждое измеримое подмножество фазового пространства, инвариантное относительно бильярдного потока, имеет нулевую или полную меру.

Предметом настоящей работы являются бильярдные потоки в многоугольных областях общего вида. Для таких областей условие отражения бильярдного шара от границы особенно просто, однако наличие угловых точек приводит к тому, что, за несколькими исключениями, бильярд в многоугольнике является динамической системой с особенностями. Ввиду этого изучение эргодических свойств потока оказывается сложной задачей. Общие результаты здесь получены лишь для бильярдов в так называемых рациональных многоугольниках.

Для каждого многоугольника Q через $G(Q)$ обозначим группу ортогональных операторов, порожденную линейными частями отражений относительно сторон Q .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2. Многоугольник Q называется *рациональным*, если $G(Q)$ – конечная группа. Эквивалентное условие – угол между любыми двумя сторонами многоугольника (не обязательно соседними или принадлежащими одной компоненте границы) рационально соизмерим с π .

Фазовое пространство бильярда в рациональном многоугольнике Q расслаивается на инвариантные поверхности вида $Q \times G(Q)v$, $v \in S^1$ (см. [1]). Керкгоф, Мазур и Смайли показали в [2], что сужение бильярдного потока на почти каждую из этих поверхностей строго эргодично, т.е. имеет единственную инвариантную нормированную борелевскую меру (см. теорему 3.3 ниже). В частности, указанные поверхности являются эргодическими компонентами потока. Заметим, что чем больше мощность группы $G(Q)$, тем более равномерно распределены в фазовом пространстве бильярда поверхности $Q \times G(Q)v$ и тем более близок бильярд в Q к эргодичности. Исходя из этого соображения, с помощью аппроксимационных методов было показано (см. [2], [3]), что в пространстве всех многоугольников (а также в некоторых его подпространствах) найдется массивное множество (множество второй категории), состоящее из многоугольников, бильярд в которых эргодичен. А именно, это множество образуют многоугольники, достаточно хорошо аппроксимируемые рациональными. Рассуждения из [2], [3] не дают никакой информации о том, насколько хорошей должна быть аппроксимация.

В настоящей работе аналогичное множество строится в явном виде, а именно, указывается, какой порядок аппроксимации многоугольника рациональными многоугольниками достаточен для эргодичности бильярдного потока в нем (теорема 1.1).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.3. Пусть $\delta(N)$ – убывающая к нулю положительная функция натурального аргумента. Скажем, что многоугольник Q допускает *аппроксимацию рациональными многоугольниками* со скоростью $\delta(N)$, если найдутся сколь угодно большие номера N с тем свойством, что попарные углы $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ между сторонами многоугольника Q с точностью $\delta(N)$ аппроксимируются углами вида $\pi \frac{n}{N}$, где n – целое число, причем дроби $\frac{n_1}{N}, \frac{n_2}{N}, \dots, \frac{n_k}{N}$, соответствующие разным углам, нельзя сократить на одно и то же число.

ТЕОРЕМА 1.1. Если многоугольник Q допускает аппроксимацию рациональными многоугольниками со скоростью

$$\delta(N) = \left(2^{2^{2^N}} \right)^{-1},$$

то бильярдный поток в Q эргодичен.

Многоугольники, удовлетворяющие условию теоремы, образуют массивное множество в пространстве всех многоугольников. В качестве простого примера такого многоугольника можно взять прямоугольный треугольник с острым углом $\pi(a_5^{-1} + a_{10}^{-1} + \dots + a_{5n}^{-1} + \dots)$, где $\{a_n\}$ – последовательность, заданная соотношениями $a_0 = 1$, $a_{n+1} = 2^{a_n}$ при $n = 0, 1, 2, \dots$.

План доказательства теоремы 1.1 таков: во-первых, проводятся конструктивные оценки, касающиеся аппроксимации многоугольников и бильярдных потоков

в них (предложение 2.3) – это более легкая часть доказательства, ей посвящен раздел 2; во-вторых, доказываемый конструктивный вариант эргодической теоремы для бильярдного потока в рациональном многоугольнике (теорема 3.1) – это составляет содержание раздела 3. Теорема 3.1 сводится к аналогичному утверждению о геодезическом потоке на поверхности с плоской структурой (теорема 3.2). Для доказательства теоремы 3.2 оказывается необходимым иметь конструктивный вариант теоремы Мазура [4] о квадратичном росте числа седлосвязок (особых траекторий) плоской структуры – такая оценка получена в разделе 4. Собственно доказательство теоремы 1.1 приведено в конце раздела 2.

Поскольку рассуждения из [2], в особенности используемые там методы теории Тайхмюллера, оставляют мало надежд на конструктивизацию, в настоящей статье в основном используются идеи работ Бошерниана [5] и Мазура [4].

Идея получения конкретных примеров многоугольников, бильярдный поток в которых эргодичен, путем устранения неконструктивности в рассуждениях Керкгофа, Мазура, Смайли, связанной с употреблением теории Тайхмюллера, принадлежит А. М. Стёпину. Автор благодарен ему за постановку задачи и постоянную поддержку в течении работы.

Результаты этой статьи были анонсированы в [6].

2. Аппроксимация рациональными многоугольниками

В этом разделе проводятся количественные оценки, относящиеся к аппроксимации многоугольников и бильярдных потоков в них, после чего доказываемая сформулированная в разделе 1 основная теорема. Доказательство опирается на эргодические свойства бильярдных потоков в рациональных многоугольниках (теорему 3.1), которые будут установлены в разделе 3.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Многоугольник $\tilde{Q}$ называется δ -возмущением многоугольника Q , если найдется гомеоморфизм $\varphi: Q \rightarrow \tilde{Q}$, который устанавливает взаимно однозначное соответствие между вершинами двух многоугольников так, что расстояния между соответствующими вершинами не больше δ .

Через $d(Q)$ обозначим минимальное среди ненулевых расстояний между вершинами, сторонами и диагоналями многоугольника Q . Если многоугольник $\tilde{Q}$ есть δ -возмущение многоугольника Q , то, очевидно, $|d(\tilde{Q}) - d(Q)| \leq 2\delta$. Через $k(Q)$ обозначим число сторон многоугольника Q , через $D(Q)$ – его диаметр.

Следующая лемма обосновывает введенный ранее термин “аппроксимация рациональными многоугольниками”.

ЛЕММА 2.1. Пусть для некоторого целого $N > 0$ углы между сторонами многоугольника Q с точностью δ приближаются углами вида $\pi \frac{n}{N}$, где n – также целое число. Если $\delta < \frac{d(Q)}{2k(Q)D(Q)}$, то найдется многоугольник $\tilde{Q}$ – $k(Q)D(Q)\delta$ -возмущение Q , у которого углы между сторонами в точности имеют вид $\pi \frac{n}{N}$, где n – целое число.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть граница многоугольника Q состоит из l компонент и $A_{i1}, A_{i2}, \dots, A_{ik_i}$ – последовательные вершины i -й компоненты ($1 \leq i \leq l$). Определим точки $\tilde{A}_{ij}$, $1 \leq i \leq l$, $1 \leq j \leq k_i$, исходя из следующих требований:

- 1) $\tilde{A}_{i1} = A_{i1}$, а также $\tilde{A}_{12} = A_{12}$;
- 2) угол между отрезками $\tilde{A}_{i1}\tilde{A}_{i2}$ и $\tilde{A}_{11}\tilde{A}_{12}$, а также углы, которые образуют отрезки $\tilde{A}_{i,j-1}\tilde{A}_{ij}$ и $\tilde{A}_{ij}\tilde{A}_{i,j+1}$ ($1 < j < k_i$), имеют вид $\pi \frac{n}{N}$, где n – целое число, и не более чем на δ отличаются от углов между отрезками $A_{i1}A_{i2}$ и $A_{11}A_{12}$, или, соответственно, между отрезками $A_{i,j-1}A_{ij}$ и $A_{ij}A_{i,j+1}$;
- 3) длины отрезков $\tilde{A}_{ij}\tilde{A}_{i,j+1}$ и $A_{ij}A_{i,j+1}$ равны.

По построению расстояние между точками $\tilde{A}_{ij}$ и A_{ij} не больше $(j-1)D(Q)\delta < k(Q)D(Q)\delta$. Поскольку $k(Q)D(Q)\delta < \frac{1}{2}d(Q)$, $k(Q)$ отрезков $\tilde{A}_{i1}\tilde{A}_{i2}, \dots, \tilde{A}_{i,k_i-1}\tilde{A}_{ik_i}, \tilde{A}_{ik_i}\tilde{A}_{i1}$ ($1 \leq i \leq l$) попарно не пересекаются, поэтому они являются сторонами некоторого многоугольника $\tilde{Q}$. Многоугольник $\tilde{Q}$ – искомый.

ЛЕММА 2.2. Пусть целое число $K > 0$ таково, что величина любого угла многоугольника Q не меньше π/K . Тогда сумма длин K последовательных звеньев произвольной бильярдной траектории в Q не меньше $d(Q)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вначале рассмотрим бильярд в угле величины α . Применим конструкцию выпрямления бильярдной траектории: при достижении траекторией стороны угла отражаем угол относительно этой стороны и продолжаем траекторию в отраженном угле. В результате получим прямолинейную траекторию, последовательно проходящую через несколько копий исходного угла. Описанная конструкция сразу показывает, что бильярдная траектория в угле может иметь K конечных звеньев лишь при $K\alpha < \pi$. Тем самым, K последовательных звеньев бильярдной траектории в многоугольнике Q не могут отражаться относительно сторон одного и того же угла многоугольника. Следовательно, найдется некоторое звено, концы которого лежат на сторонах Q , не имеющих общего конца, или же три последовательные вершины A, B, C , принадлежащие трем разным сторонам a, b, c . В первом случае длина соответствующего звена не меньше $d(Q)$. Во втором случае сумма длин звеньев AB и BC не меньше расстояния между стороной a и отрезком $\tilde{c}$, симметричным c относительно стороны b . Указанное расстояние, как легко заметить, не меньше $d(Q)$.

Пусть многоугольник Q каким-то образом разбит диагоналями на треугольники. Рассмотрим произвольный многоугольник $\tilde{Q}$, являющийся δ -возмущением Q . Предположим, что для любых двух вершин многоугольника Q , которые можно соединить диагональю (лежащей внутри Q), соответствующие вершины многоугольника $\tilde{Q}$ также можно соединить диагональю (это верно по крайней мере при $\delta < \frac{1}{2}d(Q)$). Тогда существует разбиение многоугольника $\tilde{Q}$ на треугольники, соответствующее упомянутому выше разбиению Q . Обозначим через φ гомеоморфизм многоугольника Q на $\tilde{Q}$, который каждый треугольник триангуляции Q аффинным образом переводит в соответствующий треугольник триангуляции $\tilde{Q}$. Очевидно, для любой точки $x \in Q$ расстояние между x и $\varphi(x)$ не больше δ .

Пусть $\{T_Q^t\}$ и $\{\tilde{T}_{\tilde{Q}}^t\}$ – бильярдные потоки, соответственно, в Q и $\tilde{Q}$. Для каждого $t \geq 0$ определим функции $x_t, v_t, \tilde{x}_t, \tilde{v}_t$ на пространстве $Q \times S^1$ посредством следу-

ющих формул: $(x_t(x, v), v_t(x, v)) = T_Q^t(x, v)$, $(\tilde{x}_t(x, v), \tilde{v}_t(x, v)) = T_{\tilde{Q}}^t(\varphi(x), v)$ для любого $(x, v) \in Q \times S^1$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3. *Для каждого $t \geq 0$ найдется некоторое множество $B \subset Q \times S^1$ меры не больше $C_3(C_1t + C_2)^3\delta$, зависящее от многоугольников $Q, \tilde{Q}$, от отображения φ и от t , такое, что для любого $(x, v) \in Q \times S^1$, не входящего в B , и для любого τ , $0 \leq \tau \leq t$, имеет место хотя бы одна из двух возможностей:*

- 1) *расстояние между точками $x_t(x, v)$ и $\varphi^{-1}(\tilde{x}_t(x, v))$ не больше $C_4(C_1t + C_2)^2\delta$, угол между направлениями $v_t(x, v)$ и $\tilde{v}_t(x, v)$ не больше $C_5(C_1t + C_2)\delta$;*
- 2) *точки $x_t(x, v)$ и $\tilde{x}_t(x, v)$ находятся на расстоянии не больше $C_6(C_1t + C_2)^2\delta$ от границы многоугольников Q и $\tilde{Q}$, соответственно.*

Здесь $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6$ – положительные постоянные, зависящие от многоугольника Q .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Занумеруем стороны многоугольников Q и $\tilde{Q}$ согласованным образом числами $1, 2, \dots, k(Q)$. Пусть α_i – угол между сторонами с номером i . Поскольку многоугольники Q и $\tilde{Q}$ являются δ -возмущениями друг друга, выполнено неравенство $\sin \alpha_i \leq 2\delta/l_i$, где l_i – длина i -й стороны многоугольника Q . Отсюда $\alpha_i \leq \pi/2 \cdot 2\delta/l_i \leq \pi\delta/d(Q)$.

Пусть $i_1, i_2, \dots, i_n$ – произвольная последовательность номеров, $1 \leq i_j \leq k(Q)$. Обозначим через Q_1 многоугольник, симметричный Q относительно стороны с номером i_1 , через Q_2 – многоугольник, симметричный Q_1 относительно стороны с номером i_2 (нумерация сторон многоугольника Q_1 переносится с Q), и т. д. Аналогичным образом по многоугольнику $\tilde{Q}$ строим последовательность отраженных многоугольников $\tilde{Q}_1, \tilde{Q}_2, \dots, \tilde{Q}_n$. Положим также $Q_0 = Q$, $\tilde{Q}_0 = \tilde{Q}$. Пусть R_i и $\tilde{R}_i$ – отражения относительно i -ых сторон многоугольников Q и $\tilde{Q}$, соответственно. Тогда движение плоскости, переводящее многоугольник Q в Q_j (с учетом нумерации сторон), есть, очевидно, $R_{i_1}R_{i_2} \cdots R_{i_j}$. Точно так же отображение $\tilde{R}_{i_1}\tilde{R}_{i_2} \cdots \tilde{R}_{i_j}$ переводит многоугольник $\tilde{Q}$ в $\tilde{Q}_j$.

В последующих рассуждениях для произвольных многоугольников Q' и Q'' , полученных с помощью изометричных преобразований из многоугольников Q и $\tilde{Q}$, через $\beta(Q', Q'')$ обозначается наибольший среди углов между соответствующими сторонами Q' и Q'' , через $\rho(Q', Q'')$ – наибольшее среди расстояний между соответствующими вершинами этих многоугольников.

Докажем индукцией по j , что

$$\beta(Q_j, \tilde{Q}_j) \leq \pi \frac{\delta}{d(Q)}(4j + 1), \quad \rho(Q_j, \tilde{Q}_j) \leq 2\pi \frac{D(Q)}{d(Q)}(j + 1)^2\delta$$

при $0 \leq j \leq n$. Для $j = 0$ приведенные оценки следуют из уже имеющихся. Пусть теперь утверждение доказано при некотором значении j , $0 \leq j < n$. Обозначим через Q'_j и Q'_{j+1} образы многоугольника Q под действием изометрий $\tilde{R}_{i_1}\tilde{R}_{i_2} \cdots \tilde{R}_{i_j}$

и $\tilde{R}_{i_1} \tilde{R}_{i_2} \cdots \tilde{R}_{i_{j+1}}$, соответственно, через Q''_{j+1} — многоугольник, симметричный Q'_j относительно стороны с номером i_{j+1} . Тогда

$$\begin{aligned}\rho(Q'_j, \tilde{Q}_j) &= \rho(Q'_{j+1}, \tilde{Q}_{j+1}) = \rho(Q, \tilde{Q}) \leq \delta, \\ \beta(Q'_j, \tilde{Q}_j) &= \beta(Q'_{j+1}, \tilde{Q}_{j+1}) = \beta(Q, \tilde{Q}) \leq \pi \frac{\delta}{d(Q)}.\end{aligned}$$

Пусть p' — вершина многоугольника Q'_{j+1} , являющаяся концом стороны с номером i_{j+1} , p'' и p — соответствующие вершины многоугольников Q''_{j+1} и Q_{j+1} . Многоугольник Q''_{j+1} получается из Q'_{j+1} в результате параллельного переноса, переводящего точку p' в p'' , с последующим поворотом вокруг точки p'' . Точки p' и p'' удалены от соответствующей вершины многоугольника $\tilde{Q}_{j+1}$ (или $\tilde{Q}_j$) не более, чем на δ , поэтому расстояние между ними не больше 2δ . Угол, на который нужно повернуть многоугольник Q'_{j+1} после сдвига, равен удвоенному углу между сторонами с номером i_{j+1} многоугольников Q'_j и $\tilde{Q}_j$, и, следовательно, не превосходит $2\pi \frac{\delta}{d(Q)}$. В результате

$$\begin{aligned}\beta(Q''_{j+1}, \tilde{Q}_{j+1}) &\leq \beta(Q''_{j+1}, Q'_{j+1}) + \beta(Q'_{j+1}, \tilde{Q}_{j+1}) \leq 2\pi \frac{\delta}{d(Q)} + \pi \frac{\delta}{d(Q)} = 3\pi \frac{\delta}{d(Q)}, \\ \rho(Q''_{j+1}, \tilde{Q}_{j+1}) &\leq \rho(Q''_{j+1}, Q'_{j+1}) + \rho(Q'_{j+1}, \tilde{Q}_{j+1}) \leq \left(2\delta + D(Q) \cdot 2\pi \frac{\delta}{d(Q)}\right) + \delta.\end{aligned}$$

Далее, по предположению индукции

$$\beta(Q_j, \tilde{Q}_j) \leq \pi \frac{\delta}{d(Q)}(4j+1), \quad \rho(Q_j, \tilde{Q}_j) \leq 2\pi \frac{D(Q)}{d(Q)}(j+1)^2\delta.$$

Тогда

$$\beta(Q_j, Q'_j) \leq \pi \frac{\delta}{d(Q)}(4j+2), \quad \rho(Q_j, Q'_j) \leq 2\pi \frac{D(Q)}{d(Q)}(j+1)^2\delta + \delta.$$

Поскольку $\beta(Q_j, Q'_j) = \beta(Q_{j+1}, Q''_{j+1})$, имеем:

$$\beta(Q_{j+1}, \tilde{Q}_{j+1}) \leq \beta(Q_{j+1}, Q''_{j+1}) + \beta(Q''_{j+1}, \tilde{Q}_{j+1}) \leq \pi \frac{\delta}{d(Q)}(4(j+1)+1).$$

Многоугольник Q_{j+1} получается из Q''_{j+1} посредством параллельного переноса, переводящего точку p'' в p , с последующим поворотом вокруг точки p . Расстояние между точками p'' и p не больше $\rho(Q_j, Q'_j)$, угол, на который осуществляется поворот, не больше $\beta(Q_j, Q'_j)$; следовательно, $\rho(Q_{j+1}, Q''_{j+1}) \leq \rho(Q_j, Q'_j) + D(Q) \cdot \beta(Q_j, Q'_j)$. Отсюда:

$$\begin{aligned}\rho(Q_{j+1}, \tilde{Q}_{j+1}) &\leq \rho(Q_j, Q'_j) + D(Q) \cdot \beta(Q_j, Q'_j) + \rho(Q''_{j+1}, \tilde{Q}_{j+1}) \\ &\leq \left(2\pi \frac{D(Q)}{d(Q)}(j+1)^2\delta + \delta\right) + \pi \frac{D(Q)}{d(Q)}(4j+2)\delta + \left(3\delta + 2\pi \frac{D(Q)}{d(Q)}\delta\right) \\ &\leq 2\pi \frac{D(Q)}{d(Q)}(j+2)^2\delta.\end{aligned}$$

На этом шаг индукции завершен.

Зафиксируем произвольное значение $t \geq 0$. Пусть $(x, v) \in Q \times S^1$, t_1 – некоторый момент времени, $0 \leq t_1 \leq t + D(Q)$. Рассмотрим случай, когда к моменту времени t_1 бильiardные траектории $(x_\tau(x, v), v_\tau(x, v))$ и $(\tilde{x}_\tau(x, v), \tilde{v}_\tau(x, v))$ испытали одинаковое число отражений от границы, соответственно, многоугольников Q и $\tilde{Q}$, причем относительно сторон с одинаковыми для обеих траекторий номерами $i_1, i_2, \dots, i_n$. Применим к рассматриваемым траекториям конструкцию выпрямления, ранее использованную в доказательстве леммы 2.2. В результате получим на плоскости две прямолинейные траектории X_τ и $\tilde{X}_\tau$, выходящие в направлении v из точек x и $\varphi(x)$ и последовательно проходящие через многоугольники $Q_0 = Q, Q_1, \dots, Q_n$ или, соответственно, $\tilde{Q}_0 = \tilde{Q}, \tilde{Q}_1, \dots, \tilde{Q}_n$, где $Q_j = R_{i_1} R_{i_2} \dots R_{i_j}(Q)$, $\tilde{Q}_j = \tilde{R}_{i_1} \tilde{R}_{i_2} \dots \tilde{R}_{i_j}(\tilde{Q})$, $1 \leq j \leq n$. Расстояние между точками X_τ и $\tilde{X}_\tau$ при любом τ равно расстоянию между точками x и $\varphi(x)$, которое, как следует из определения отображения φ , не превосходит δ . Пусть Q' – образ многоугольника Q_n под действием отображения $(\tilde{R}_{i_1} \tilde{R}_{i_2} \dots \tilde{R}_{i_n})^{-1}$, x' – образ точки X_{t_1} при том же отображении. Расстояние между точками x' и $\tilde{x}_{t_1}$ равно расстоянию между X_{t_1} и $\tilde{X}_{t_1}$, и потому не больше δ . Преобразование $R = (R_{i_1} R_{i_2} \dots R_{i_n})^{-1} \tilde{R}_{i_1} \tilde{R}_{i_2} \dots \tilde{R}_{i_n}$ переводит многоугольник Q' в Q , при этом точка x' многоугольника Q' переходит в точку x_{t_1} . Поскольку R – изометрия, расстояние между точками x' и x_{t_1} не больше $\rho(Q', Q)$. Тогда расстояние между точками x_{t_1} и $\tilde{x}_{t_1}$ не превосходит

$$\delta + \rho(Q', Q) \leq \delta + \rho(Q', \tilde{Q}) + \rho(\tilde{Q}, Q) \leq 2\delta + \rho(Q', \tilde{Q}).$$

Величина $\rho(Q', \tilde{Q})$ совпадает с $\rho(Q_n, \tilde{Q}_n)$, что, как было доказано выше, не превосходит $2\pi \frac{D(Q)}{d(Q)}(n+1)^2\delta$. В результате расстояние между точками x_{t_1} и $\tilde{x}_{t_1}$ не больше

$$2\delta + 2\pi \frac{D(Q)}{d(Q)}(n+1)^2\delta \leq C(N_t + 1)^2\delta,$$

где $C = 3\pi \frac{D(Q)}{d(Q)}$, а N_t – максимальное число отражений, которое бильiardная траектория в многоугольнике Q может испытать за время $t + D(Q)$. При этом расстояние между точками x_{t_1} и $\varphi^{-1}(\tilde{x}_{t_1})$ не больше $(C+1)(N_t+1)^2\delta$.

Что касается направлений v_{t_1} и $\tilde{v}_{t_1}$, то они переводятся в направление v отображениями $R_{i_1} R_{i_2} \dots R_{i_n}$ и $\tilde{R}_{i_1} \tilde{R}_{i_2} \dots \tilde{R}_{i_n}$, соответственно, поэтому угол между ними не больше величины $2(\alpha_{i_1} + \alpha_{i_2} + \dots + \alpha_{i_n})$, которая, в свою очередь, не превосходит $2n \cdot \pi \frac{\delta}{d(Q)} \leq \frac{2\pi}{d(Q)} N_t \delta$.

Теперь разберем случай, когда в момент времени t_1 , $0 \leq t_1 \leq t$, одна из траекторий (x_τ, v_τ) и $(\tilde{x}_\tau, \tilde{v}_\tau)$ имеет n отражений от границы соответствующего многоугольника, а другая – на 1 меньше, причем некоторое время спустя обе траектории будут иметь по n отражений, и эти n отражений происходят относительно сторон с одними и теми же номерами. Пусть t_- и t_+ ($t_- \leq t_+$) – моменты n -х отражений траекторий, i – номер соответствующих сторон многоугольников Q и $\tilde{Q}$. Очевидно,

$0 \leq t_- \leq t_1 \leq t_+ \leq t + D(Q)$. Из доказанного ранее следует, что в моменты времени t_- и t_+ расстояние между точками x_τ и $\tilde{x}_\tau$ не больше $C(N_t + 1)^2\delta$. В каждый из этих двух моментов одна из точек находится на i -й стороне соответствующего многоугольника, тогда другая точка удалена от i -й стороны своего многоугольника не больше, чем на

$$C(N_t + 1)^2\delta + \rho(Q, \tilde{Q}) \leq C(N_t + 1)^2\delta + \delta \leq (C + 1)(N_t + 1)^2\delta.$$

Поскольку в интервале времени между t_- и t_+ траектории (x_τ, v_τ) и $(\tilde{x}_\tau, \tilde{v}_\tau)$ не испытывают отражений, в любой момент времени из промежутка $[t_-, t_+]$, в частности, при $\tau = t_1$, расстояние от точек x_τ и $\tilde{x}_\tau$ до границы, соответственно, многоугольников Q и $\tilde{Q}$ не превосходит $(C + 1)(N_t + 1)^2\delta$.

Разобьем множество $Q \times S^1$ на два подмножества $A(t)$ и $B(t)$. Элемент $(x, v) \in Q \times S^1$ отнесем к множеству $A(t)$, если для некоторого $t' \geq t$ бильярдные траектории $(x_\tau(x, v), v_\tau(x, v))$ и $(\tilde{x}_\tau(x, v), \tilde{v}_\tau(x, v))$ к моменту времени t' испытывают одно и то же число отражений, к тому же относительно одноименных сторон многоугольников Q и $\tilde{Q}$, и если, кроме того, числа отражений, произведенных траекториями к произвольному моменту времени τ , $0 \leq \tau \leq t'$, различаются не более чем на 1. Множество $B(t)$ образуют элементы $Q \times S^1$, не вошедшие в $A(t)$.

Из леммы 2.2 следует, что число $N_t + 1$ не превосходит $C_1 t + C_2$, где C_1, C_2 – некоторые постоянные, зависящие от Q . Положив $C_4 = C_6 = C + 1$, $C_5 = 2\pi/d(Q)$, получаем, с учетом доказанного выше, что для каждой пары $(x, v) \in A(t)$ в произвольный момент времени τ , $0 \leq \tau \leq t$, выполнено одно из свойств 1) и 2) из условия предложения.

Для каждого элемента $(x, v) \in B(t)$ найдется некоторый момент времени t_1 , $0 \leq t_1 \leq t$, в который бильярдные траектории $(x_\tau(x, v), v_\tau(x, v))$ и $(\tilde{x}_\tau(x, v), \tilde{v}_\tau(x, v))$ имеют одинаковое число отражений, причем относительно сторон Q и $\tilde{Q}$ с одними и теми же номерами, но после которого либо а) одна из траекторий сразу попадает в вершину соответствующего многоугольника, либо б) следующее отражение двух траекторий происходит относительно сторон с разными номерами, либо, наконец, в) одна из траекторий делает два отражения, прежде чем другая траектория – хотя бы одно. Обозначим через $B_0(t, C')$ множество тех пар $(y, u) \in Q \times S^1$, для которых прямая, проведенная через точку y в направлении u , проходит на расстоянии менее $C'(C_1 t + C_2)^2\delta$ от какой-нибудь вершины многоугольника Q . Как легко показать, в каждом из перечисленных выше случаев а), б), в) пара (x_{t_1}, v_{t_1}) входит в множество $B_0(t, C')$ при достаточно большом, в зависимости от Q (но не от t), значении C' . Следовательно, множество $B_1(t, C')$ элементов $(x, v) \in Q \times S^1$, попадающих в $B_0(t, C')$ под действием бильярдного потока в Q за время t или ранее, содержит в себе множество $B(t)$ при том же значении C' .

Для произвольного направления $v \in S^1$ мера множества тех точек $x \in Q$, для которых $(x, v) \in B_0(t, C')$, очевидно, не превосходит $2C'(C_1 t + C_2)^2\delta \cdot D(Q) k(Q)$. Отсюда

$$\mu \times \lambda(B_0(t, C')) \leq 2\pi \cdot 2C'(C_1 t + C_2)^2\delta \cdot D(Q) k(Q).$$

Используя конструкцию выпрямления бильярдной траектории, можно получить такую же оценку для меры множества тех $(x, v) \in Q \times S^1$, которые попадают в $B_0(t, C')$ под действием бильярдного потока, совершив при этом отражения

относительно какой-либо фиксированной последовательности сторон. Пусть K – число, удовлетворяющее условию леммы 2.2. Элементы $(x, v) \in Q \times S^1$, которые переводятся бильярдным потоком в $B_0(t, C')$ за время ранее $d(Q)$, испытывают при этом менее K отражений от сторон многоугольника Q . Ввиду вышесказанного мера множества таких элементов не больше $(k(Q) + 1)^K 4\pi C' (C_1 t + C_2)^2 \delta \cdot D(Q) k(Q)$. Тогда из инвариантности меры $\mu \times \lambda$ относительно бильярдного потока получаем:

$$\mu \times \lambda(B_1(t, C')) \leq (t/d(Q) + 1) (k(Q) + 1)^K 4\pi C' (C_1 t + C_2)^2 \delta \cdot D(Q) k(Q),$$

что не превосходит $C_3 (C_1 t + C_2)^3 \delta$ для некоторой постоянной C_3 , зависящей от Q . Поскольку множество $B(t)$ содержится в $B_1(t, C')$, это заканчивает доказательство предложения.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.1. Ввиду статистической эргодической теоремы для доказательства эргодичности бильярдного потока в Q достаточно установить, что для любой функции $F(x, v)$ на $Q \times S^1$, интегрируемой по мере $\mu \times \lambda$, имеет место сходимость

$$\frac{1}{t} \int_0^t F(T_Q^\tau(x, v)) d\tau \rightarrow \frac{1}{2\pi \cdot \text{Area}(Q)} \int_{Q \times S^1} F d(\mu \times \lambda) \quad \text{при } t \rightarrow \infty$$

в пространстве $L_1(Q \times S^1, \mu \times \lambda)$. Сходимость достаточно доказать для некоторого семейства функций, линейные комбинации которых плотны в $L_1(Q \times S^1, \mu \times \lambda)$. В качестве такого семейства возьмем функции вида $F(x, v) = f(x) h(v)$, где f – липшицева функция на многоугольнике Q , которая обращается в нуль на границе Q , а h – липшицева функция на окружности S^1 . Далее, из инвариантности меры $\mu \times \lambda$ относительно потока $\{T_Q^t\}$ следует, что функция

$$q(t) = \int_{Q \times S^1} \left| \frac{1}{t} \int_0^t F(T_Q^\tau(x, v)) d\tau - \frac{1}{2\pi \cdot \text{Area}(Q)} \int_{Q \times S^1} F d(\mu \times \lambda) \right| d\mu(x) d\lambda(v)$$

удовлетворяет соотношению $(t + t') q(t + t') \leq t q(t) + t' q(t')$ ($t, t' > 0$), откуда $\lim_{t \rightarrow \infty} q(t) = \inf_{t > 0} q(t)$. Следовательно, достаточно показать, что $q(t)$ принимает сколь угодно малые значения.

Пусть целое число $N > 0$ таково, что углы между сторонами многоугольника Q с точностью $\delta(N)$ приближаются углами вида $\pi \frac{n}{N}$, где n – целое число, причем дроби $\frac{n_1}{N}, \frac{n_2}{N}, \dots, \frac{n_k}{N}$, соответствующие разным углам, нельзя сократить на одно и то же число. По условию N может быть выбрано сколь угодно большим.

Положим $\Delta = k(Q) D(Q) \delta(N)$. При достаточно большом значении N величина Δ будет меньше $\frac{1}{2} d(Q)$, тогда согласно лемме 2.1 найдется многоугольник $\tilde{Q}$ – Δ -возмущение Q , у которого углы между сторонами имеют вид $\pi \frac{n}{N}$, где n – целое число. Углы между соответствующими друг другу парами сторон многоугольников Q и $\tilde{Q}$ различаются не более чем на $\pi \cdot \Delta / d(Q)$ (см. доказательство предложения 2.3). Для достаточно больших N эта величина меньше π / N . Тогда углы между сторонами многоугольника $\tilde{Q}$ определены однозначно, т.е. совпадают с указанными выше углами $\pi \frac{n_1}{N}, \pi \frac{n_2}{N}, \dots, \pi \frac{n_k}{N}$. Заметим, что повороты на вдвое

большие углы порождают подгруппу поворотов в группе $G(\tilde{Q})$. Ввиду совместной несократимости дробей $\frac{n_1}{N}, \frac{n_2}{N}, \dots, \frac{n_k}{N}$ эта подгруппа – циклическая группа, порожденная поворотом на угол $2\pi/N$. При этом порядок $r(\tilde{Q})$ группы $G(\tilde{Q})$ равен $2N$.

Возьмем произвольное разбиение многоугольника Q диагоналями на треугольники, соответствующее разбиение многоугольника $\tilde{Q}$ (оно существует, так как $\Delta < \frac{1}{2} d(Q)$) и определим отображение φ многоугольника Q на $\tilde{Q}$, которое каждый треугольник разбиения Q аффинным образом переводит в соответствующий треугольник разбиения $\tilde{Q}$. Расстояние между точками x и $\varphi(x)$ не превосходит Δ для любого $x \in Q$. Пусть P – какой-либо треугольник разбиения Q , φ_P – линейная часть сужения отображения φ на P . Каков бы ни был вектор v , в треугольник P можно поместить параллельный v отрезок длины $d(Q)$. Отсюда следует, что $|\varphi_P(v) - v| \leq 2\Delta/d(Q)|v|$. Начиная с этого места, считаем число N настолько большим, чтобы выполнялось неравенство $\Delta < \frac{1}{10} d(Q)$. Тогда $|\varphi_P(v)| \geq \frac{4}{5}|v|$, т.е. отображение φ^{-1} является липшицевым на треугольнике $\varphi(P)$ с постоянной Липшица $\frac{5}{4}$. Ввиду произвольности выбора P отображение φ^{-1} липшицево на всем многоугольнике $\tilde{Q}$. Теперь оценим определитель оператора φ_P , т.е. якобиан $J(\varphi)$ отображения φ . В ортонормированном базисе оператору φ_P соответствует матрица, элементы которой отличаются от элементов единичной матрицы не более чем на $2\Delta/d(Q)$. Отсюда:

$$|J(\varphi) - 1| \leq \left(1 + \frac{2\Delta}{d(Q)}\right)^2 + \left(\frac{2\Delta}{d(Q)}\right)^2 - 1 = 4 \frac{\Delta}{d(Q)} \left(\frac{\Delta}{d(Q)} + 1\right) < 5 \frac{\Delta}{d(Q)}.$$

В частности, $\frac{1}{2} \leq J(\varphi) \leq \frac{3}{2}$.

Определим функцию $\tilde{F}$ на $\tilde{Q} \times S^1$ по формуле: $\tilde{F}(x, v) = F(\varphi^{-1}(x), v)$ для каждого элемента $(x, v) \in \tilde{Q} \times S^1$. Напомним, что функция $F(x, v)$ имеет вид $f(x)h(v)$, где f и h – липшицевы функции, соответственно, на Q и на S^1 , причем f обращается в нуль на границе многоугольника Q . Пусть числа $L_0, E_0 > 0$ таковы, что L_0 – постоянная Липшица для функций f и h , а $|f(x)|$ и $|h(v)|$ не превосходят E_0 для любых $x \in Q, v \in S^1$. Ввиду доказанного выше функция $f(\varphi^{-1}(x))$ при этом является липшицевой функцией на $\tilde{Q}$ с постоянной $\frac{5}{4}L_0$. В результате функции $F(x, v)$ и $\tilde{F}(x, v)$ не превосходят по абсолютной величине постоянной $E = E_0^2$, являются липшицевыми по обоим переменным с постоянной Липшица $L = \frac{5}{4}L_0E_0$, и обращаются в нуль, если x лежит на границе многоугольника Q или $\tilde{Q}$, соответственно.

Определим следующие постоянные: $C' = 4 \text{ Area}(Q) \cdot L/E$, $C'' = \alpha/\pi$, где α – сумма всех внутренних углов многоугольника Q , $C''' = 16 \text{ Area}(Q)/d^2(Q)$. Далее, положим $t_N = C'N \cdot N^{(H(C''N) \cdot C'''N^2)^{C''N+5}}$, где $H(n) = (500n)^{(2n)^{2n}}$.

Число $q(t_N)$ оценим следующим образом:

$$q(t_N) \leq q_1(t_N) + q_2(t_N) + q_3 + q_4,$$

где

$$\begin{aligned}
q_1(t) &= \int_{Q \times S^1} \left| \frac{1}{t} \int_0^t F(T_Q^\tau(x, v)) d\tau - \frac{1}{t} \int_0^t \tilde{F}(T_{\tilde{Q}}^\tau(\varphi(x), v)) d\tau \right| d\mu(x) d\lambda(v), \\
q_2(t) &= \int_{Q \times S^1} \left| \frac{1}{t} \int_0^t \tilde{F}(T_{\tilde{Q}}^\tau(\varphi(x), v)) d\tau \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{r(\tilde{Q}) \text{Area}(\tilde{Q})} \sum_{g \in G(\tilde{Q})} \int_{\tilde{Q}} \tilde{F}(y, gv) d\mu(y) \right| d\mu(x) d\lambda(v), \\
q_3 &= \frac{\text{Area}(Q)}{\text{Area}(\tilde{Q})} \int_{S^1} \left| \frac{1}{r(\tilde{Q})} \sum_{g \in G(\tilde{Q})} \int_{\tilde{Q}} \tilde{F}(y, gv) d\mu(y) - \frac{1}{2\pi} \int_{\tilde{Q} \times S^1} \tilde{F} d(\mu \times \lambda) \right| d\lambda(v), \\
q_4 &= \text{Area}(Q) \left| \frac{1}{\text{Area}(\tilde{Q})} \int_{\tilde{Q} \times S^1} \tilde{F} d(\mu \times \lambda) - \frac{1}{\text{Area}(Q)} \int_{Q \times S^1} F d(\mu \times \lambda) \right|.
\end{aligned}$$

Убедимся, что каждое из четырех слагаемых в приведенной сумме при больших значениях N становится сколь угодно малым. Проще всего оценить слагаемое q_4 . В самом деле,

$$q_4 \leq \left| \frac{\text{Area}(Q)}{\text{Area}(\tilde{Q})} - 1 \right| \cdot E + \left| \int_{\tilde{Q} \times S^1} \tilde{F} d(\mu \times \lambda) - \int_{Q \times S^1} F d(\mu \times \lambda) \right|.$$

Но

$$\text{Area}(\tilde{Q}) = \int_Q J(\varphi) d\mu, \quad \int_{\tilde{Q} \times S^1} \tilde{F} d(\mu \times \lambda) = \int_{Q \times S^1} F(x, v) J(\varphi)(x) d\mu(x) d\lambda(v).$$

Отсюда, во-первых,

$$\left| \int_{\tilde{Q} \times S^1} \tilde{F} d(\mu \times \lambda) - \int_{Q \times S^1} F d(\mu \times \lambda) \right| \leq 5E \frac{\Delta}{d(Q)} \cdot 2\pi \text{Area}(Q),$$

кроме того, $|\text{Area}(\tilde{Q}) - \text{Area}(Q)| \leq 5 \frac{\Delta}{d(Q)} \cdot \text{Area}(Q)$, в частности, $\frac{1}{2} \text{Area}(Q) \leq \text{Area}(\tilde{Q}) \leq 2 \text{Area}(Q)$. В результате $q_4 \leq 2 \cdot 5 \frac{\Delta}{d(Q)} \cdot E + 5E \frac{\Delta}{d(Q)} \cdot 2\pi \text{Area}(Q)$, что мало при больших значениях N .

Слагаемое q_3 оценим, воспользовавшись тем, что группа $G(\tilde{Q})$ содержит поворот на угол $2\pi/N$. При этом для произвольных направлений $v, v_0 \in S^1$ можно подобрать элемент g_0 группы $G(\tilde{Q})$ так, чтобы угол между v и $g_0 v_0$ был не больше $2\pi/N$. С учетом свойств функции $\tilde{F}$, $|\tilde{F}(y, gv) - \tilde{F}(y, gg_0 v_0)| \leq 2\pi L/N$ для любых $g \in G(\tilde{Q})$ и $y \in \tilde{Q}$. Суммируя это неравенство по всем $g \in G(\tilde{Q})$, а затем интегрируя по y , приходим к оценке:

$$\left| \sum_{g \in G(\tilde{Q})} \int_{\tilde{Q}} \tilde{F}(y, gv) d\mu(y) - \sum_{g \in G(\tilde{Q})} \int_{\tilde{Q}} \tilde{F}(y, gv_0) d\mu(y) \right| \leq 2\pi \frac{L}{N} \cdot r(\tilde{Q}) \text{Area}(\tilde{Q}).$$

Проинтегрировав еще и по v_0 , получаем, что $q_3 \leq 2\pi L/N \cdot \text{Area}(Q)$.

Далее, в интеграле $q_2(t_N)$ перейдем от переменных x, v к переменным $\varphi(x), v$. С учетом того, что $J(\varphi^{-1}) = J(\varphi)^{-1} \leq 2$, получим:

$$q_2(t) \leq 2 \int_{\tilde{Q} \times S^1} \left| \frac{1}{t} \int_0^t \tilde{F}(T_{\tilde{Q}}^\tau(x, v)) d\tau - \frac{1}{r(\tilde{Q}) \text{Area}(\tilde{Q})} \sum_{g \in G(\tilde{Q})} \int_{\tilde{Q}} \tilde{F}(y, gv) d\mu(y) \right| d\mu(x) d\lambda(v).$$

Положив $\varepsilon = 1/N$ в теореме 3.1 (см. раздел 3), получаем оценку

$$q_2(t_N) \leq 2 \cdot 8\pi E/N \cdot \text{Area}(\tilde{Q}) \leq 32 E/N \cdot \text{Area}(Q)$$

при условии, что

$$t_N \geq \frac{L \cdot S(\tilde{Q})}{E} N^{(H(m) \cdot S(\tilde{Q})/d^2(\tilde{Q}) \cdot N)^{m+5}},$$

где $S(\tilde{Q}) = r(\tilde{Q}) \text{Area}(\tilde{Q})$, $m = r(\tilde{Q}) \cdot \tilde{\alpha}/(2\pi)$, $\tilde{\alpha}$ — сумма всех внутренних углов многоугольника $\tilde{Q}$. Это условие выполнено, так как $r(\tilde{Q}) = 2N$, $S(\tilde{Q}) = 2N \text{Area}(\tilde{Q}) \leq 4N \text{Area}(Q)$, $d(\tilde{Q}) \geq d(Q)/2$, $\tilde{\alpha} = \alpha$, и, следовательно, $L \cdot S(\tilde{Q})/E \leq C'N$, $m = C''N$, $S(\tilde{Q})/d^2(\tilde{Q}) \leq C'''N$.

Наконец, оценка на $q_1(t_N)$ будет получена с помощью предложения 2.3. Пусть $B \subset Q \times S^1$ — доставляемое этим предложением множество, соответствующее многоугольникам Q и $\tilde{Q}$, отображению φ и моменту времени t_N . Мера множества B не превосходит $C_3(C_1 t_N + C_2)^3 \Delta$, где C_1, C_2, C_3 — постоянные, зависящие от Q . Возьмем произвольный элемент $(x, v) \in Q \times S^1$, не входящий в B . Для каждого τ , $0 \leq \tau \leq t_N$, положим $(x_\tau, v_\tau) = T_{\tilde{Q}}^\tau(x, v)$, $(\tilde{x}_\tau, \tilde{v}_\tau) = T_{\tilde{Q}}^\tau(\varphi(x), v)$. Согласно предложению 2.3 расстояние между точками x_τ и $\varphi^{-1}(\tilde{x}_\tau)$ не больше $C_4(C_1 t_N + C_2)^2 \Delta$, а угол между направлениями v_τ и $\tilde{v}_\tau$ не больше $C_5(C_1 t_N + C_2) \Delta$, или же точки x_τ и $\tilde{x}_\tau$ находятся на расстоянии не более $C_6(C_1 t_N + C_2)^2 \Delta$ от границы многоугольников Q и $\tilde{Q}$, соответственно (C_4, C_5, C_6 — постоянные, зависящие от Q). В первом случае

$$|F(x_\tau, v_\tau) - \tilde{F}(\tilde{x}_\tau, \tilde{v}_\tau)| \leq L \cdot (C_4(C_1 t_N + C_2)^2 + C_5(C_1 t_N + C_2)) \Delta,$$

во втором случае $|F(x_\tau, v_\tau)|$ и $|\tilde{F}(\tilde{x}_\tau, \tilde{v}_\tau)|$ не превосходят $L \cdot C_6(C_1 t_N + C_2)^2 \Delta$. Ввиду произвольности выбора τ получаем, что подынтегральное выражение в интеграле $q_1(t_N)$ для рассматриваемых значений x и v не больше $L \cdot C (C_1 t_N + C_2)^2 \Delta$, где C — некоторая постоянная, зависящая от Q . Отсюда:

$$q_1(t_N) \leq L \cdot C (C_1 t_N + C_2)^2 \Delta \cdot 2\pi \text{Area}(Q) + 2E \cdot C_3(C_1 t_N + C_2)^3 \Delta.$$

Функция $\delta(N)$ выбрана таким образом, чтобы правая часть полученного неравенства стремилась к нулю при $N \rightarrow \infty$.

Итак, функция $q(t)$ принимает сколь угодно малые значения, что и требовалось.

3. Бильярд в рациональном многоугольнике

В этом разделе доказываются теоремы об эргодических свойствах бильярда в рациональном многоугольнике и геодезического потока на поверхности с плоской структурой.

Пусть Q – рациональный многоугольник произвольного вида, $G(Q)$ – группа, порожденная линейными частями отражений относительно его сторон, $r(Q)$ – порядок группы $G(Q)$, $\alpha(Q)$ – сумма всех внутренних углов многоугольника, $s(Q)$ – длина кратчайшей обобщенной диагонали (т.е. бильярдной траектории с концами в вершинах Q). Положим также $m(Q) = \frac{r(Q) \cdot \alpha(Q)}{2\pi}$ ($m(Q)$ – целое число), $S(Q) = r(Q) \cdot \text{Area}(Q)$.

Через $\{T^\tau\}$ обозначим бильярдный поток в Q . Для любой измеримой функции $F(x, v)$ на фазовом пространстве $Q \times S^1$ бильярда через $S^t F(x, v)$ обозначим ее среднее значение за время t под действием потока $\{T^\tau\}$:

$$S^t F(x, v) = \frac{1}{t} \int_0^t F(T^\tau(x, v)) d\tau.$$

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть $L, E > 0$. Предположим, что для любого направления $v \in S^1$ функция $f_v(x) = F(x, v)$ является липшицевой функцией на Q с постоянной Липшица L ; пусть, кроме того, $F(x, v) = 0$ при $x \in \partial Q$ и $|F(x, v)| \leq E$ для всех $x \in Q$, $v \in S^1$. Тогда для любого ε , $0 < \varepsilon \leq 0.999$, имеем:

$$\frac{1}{\text{Area}(Q)} \int_{Q \times S^1} \left| S^t F(x, v) - \frac{1}{S(Q)} \sum_{g \in G(Q)} \int_Q F(y, gv) d\mu(y) \right| d\mu(x) d\lambda(v) \leq 8\pi E \cdot \varepsilon$$

$$\text{при } t \geq \frac{L \cdot S(Q)}{E} \left(\frac{1}{\varepsilon} \right)^{\left(H(m(Q)) \cdot S(Q) / s^2(Q) \cdot 1/\varepsilon \right)^{m(Q)+5}},$$

где $H(1) = 2^{60}$, $H(m) = (500m)^{(2m)^{2m}}$ при $m > 1$, μ – мера Лебега на Q , λ – мера Лебега на S^1 , нормированная так, что $\lambda(S^1) = 2\pi$.

Сформулированная теорема будет сведена к теореме 3.2, в которой речь идет о плоских структурах.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. Плоская структура на компактной связной ориентируемой поверхности M – это атлас карт $\omega = \{(U_\alpha, f_\alpha)\}$ (где U_α – область на поверхности M , f_α – гомеоморфизм U_α на область в $\mathbb{R}^2$) такой, что:

- все функции замены координат – сдвиги в $\mathbb{R}^2$;
- области U_α покрывают всю поверхность M , кроме конечного числа точек, называемых *особыми*;
- проколота окрестность каждой особой точки m -листно накрывает проколотую окрестность точки в $\mathbb{R}^2$ посредством отображения, являющегося сдвигом в координатах из атласа ω ;

число m называется *кратностью* особой точки.

Эквивалентно, плоская структура – это метрика нулевой кривизны на M с конечным числом особых точек, в каждой из которых – коническая особенность с углом $2\pi t$, где t – целое число (кратность особой точки). Плоская структура ω задает геодезический поток на поверхности. Этот поток определен не всюду (для траекторий, попадающих в особые точки, дальнейшее продолжение не определено), а лишь на множестве полной меры (имеется в виду мера μ_ω , соответствующая метрике). Скорость является интегралом потока, т.е. фазовое пространство $M \times S^1$ геодезического потока (с единичной скоростью) расслаивается на инвариантные поверхности $M \times \{v\}$. Сужение потока на инвариантную поверхность можно рассматривать как поток на M (поток в направлении v).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.2. *Седлосвязка* плоской структуры ω – это геодезический отрезок, соединяющий две особые точки (возможно, совпадающие) и не содержащий особых точек внутри себя.

Пусть ω – произвольная плоская структура на поверхности M . Через S обозначим площадь поверхности M относительно меры μ_ω , через s – длину кратчайшей седлосвязки ω , через t – сумму кратностей особых точек плоской структуры. В дальнейшем считаем, что $t > 0$. Это не ограничивает общности, так как произвольную неособую точку можно объявить особой точкой кратности 1.

Через $\{T_\omega^\tau\}$ обозначим геодезический поток на поверхности M , определяемый плоской структурой ω . Для любой измеримой функции $F = F(x, v)$ на $M \times S^1$ через $S_\omega^t F$ обозначим ее среднее значение за время t под действием потока $\{T_\omega^\tau\}$.

ТЕОРЕМА 3.2. *Пусть $L, E > 0$. Предположим, что для любого направления $v \in S^1$ функция $f_v(x) = F(x, v)$ есть липшицева функция на M с постоянной Липшица L ; пусть также $|F(x, v)| \leq E$ для всех $x \in M, v \in S^1$. Тогда для любого $\varepsilon, 0 < \varepsilon \leq 0.999$, имеем:*

$$\frac{1}{S} \int_{M \times S^1} \left| S_\omega^t F(x, v) - \frac{1}{S} \int_M F(y, v) d\mu_\omega(y) \right| d\mu_\omega(x) d\lambda(v) \leq 8\pi E \cdot \varepsilon$$

$$\text{при } t \geq \frac{LS}{E} \left(\frac{1}{\varepsilon} \right)^{(H(m) \cdot S/s^2 \cdot 1/\varepsilon)^{m+5}},$$

где функция $H(m)$ – та же, что и в теореме 3.1.

Следующая теорема не используется при доказательстве основной теоремы, однако она непосредственно следует из рассуждений, проводимых в этом разделе.

ТЕОРЕМА 3.3 [2]. а) Пусть Q – рациональный многоугольник. Для почти всех направлений $v \in S^1$ сужение бильярдного потока в Q на инвариантную поверхность $Q \times G(Q)v$ строго эргодично.

б) Пусть ω – плоская структура на поверхности M . Для почти всех направлений $v \in S^1$ сужение геодезического потока $\{T_\omega^\tau\}$ на инвариантную поверхность $M \times \{v\}$ строго эргодично.

ЗАМЕЧАНИЕ. Обычно строгая эргодичность определяется как свойство гомеоморфизмов. В данном случае строгая эргодичность означает, что существует единственная нормированная борелевская мера μ такая, что соответствующий поток определен почти всюду относительно меры μ и оставляет ее инвариантной.

Прежде всего применим конструкцию Землякова и Катка [1] и сведем утверждения, касающиеся рациональных многоугольников, к аналогичным утверждениям о плоских структурах.

ЛЕММА 3.4. *Теорема 3.1 следует из теоремы 3.2. Утверждение а) теоремы 3.3 является следствием утверждения б).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть Q – рациональный многоугольник. В прямом произведении $Q \times G(Q)$ отождествим элементы вида (x, g) и (x, gg_a) , где x – точка на стороне a многоугольника Q , g_a – линейная часть отражения относительно этой стороны, $g \in G(Q)$. При этом получим компактную связную ориентируемую поверхность M . Набор карт $\{(U_g, f_g)\}_{g \in G(Q)}$, где $U_g = \text{int } Q \times \{g\}$, $f_g(x, g) = gx$, единственным образом дополняется до некоторой плоской структуры ω на M . Особые точки плоской структуры соответствуют вершинам многоугольника Q . Пусть m – сумма кратностей особых точек. Тогда сумма полных углов во всех особых точках равна $2\pi m$, с другой стороны, согласно построению эта сумма равна $r(Q) \cdot \alpha(Q)$, откуда $m = m(Q)$. Площадь S поверхности M относительно плоской структуры ω равна $r(Q) \cdot \text{Area}(Q) = S(Q)$. При естественной проекции поверхности M на многоугольник Q седлосвязки переходят в обобщенные диагонали такой же длины, причем каждая обобщенная диагональ является образом некоторой седлосвязки. Следовательно, длина s кратчайшей седлосвязки ω равна $s(Q)$.

Имеется естественная проекция φ множества $M \times S^1$ на $Q \times S^1$: $\varphi((x, g), v) = (x, g^{-1}v)$. Отображение φ сопрягает геодезический поток на поверхности M с бильярдным потоком в многоугольнике Q . Для всех $v \in S^1$, за исключением конечного числа направлений, инвариантных относительно отражений из $G(Q)$, поверхность $M \times \{v\}$ отображается на поверхность $\varphi(M \times \{v\}) = Q \times G(Q)v$ гомеоморфно, следовательно, сужения геодезического потока на поверхность $M \times \{v\}$ и бильярдного – на поверхность $Q \times G(Q)v$ одновременно строго эргодичны или нет. Тем самым, утверждение а) теоремы 3.3 сведено к ее утверждению б).

Пусть $F(x, v)$ – функция на $Q \times S^1$, удовлетворяющая условиям теоремы 3.1. Тогда функция $\tilde{F} = F \circ \varphi$, заданная на $M \times S^1$, удовлетворяет условиям теоремы 3.2 (здесь существенно то, что $F(x, v) = 0$ при $x \in \partial Q$). Далее, для любого $v \in S^1$

$$\frac{1}{S(Q)} \sum_{g \in G(Q)} \int_Q F(x, gv) d\mu(x) = \frac{1}{S} \int_M \tilde{F}(x, v) d\mu_\omega(x).$$

Кроме того, $S_\omega^t \tilde{F} = (S^t F) \circ \varphi$. Наконец, $\mu \times \lambda(\varphi(A)) = \mu_\omega \times \lambda(A)$ для любого измеримого множества $A \subset M \times S^1$, взаимно однозначно отображающегося на $\varphi(A)$. В результате

$$\begin{aligned} \int_{Q \times S^1} \left| S^t F(x, v) - \frac{1}{S(Q)} \sum_{g \in G(Q)} \int_Q F(y, gv) d\mu(y) \right| d\mu(x) d\lambda(v) \\ = \int_{M \times J} \left| S_\omega^t \tilde{F}(x, v) - \frac{1}{S} \int_M \tilde{F}(y, v) d\mu_\omega(y) \right| d\mu_\omega(x) d\lambda(v), \end{aligned}$$

где J – дуга окружности, фундаментальная для действия группы $G(Q)$ на S^1 . Окружность разбивается на $r(Q)$ таких дуг, следовательно,

$$\begin{aligned} \int_{Q \times S^1} \left| S^t F(x, v) - \frac{1}{S(Q)} \sum_{g \in G(Q)} \int_Q F(y, gv) d\mu(y) \right| d\mu(x) d\lambda(v) \\ = \frac{1}{r(Q)} \int_{M \times S^1} \left| S_\omega^t \tilde{F}(x, v) - \frac{1}{S} \int_M \tilde{F}(y, v) d\mu_\omega(y) \right| d\mu_\omega(x) d\lambda(v). \end{aligned}$$

Отсюда, как только доказана теорема 3.2, следует утверждение теоремы 3.1.

Далее рассматривается геодезический поток, соответствующий плоской структуре ω на поверхности M . Конечной целью является получение теоремы 3.12, из которой затем выводятся теоремы 3.2 и 3.36).

Для любого $v \in S^1$ обозначим через $\{T_v^\tau\}$ геодезический поток на M в направлении v . Пусть f – непрерывная функция на M . Для произвольных $t > 0$ и $x \in M$ положим:

$$S_v^t f(x) = \frac{1}{t} \int_0^t f(T_v^\tau x) d\tau.$$

Среднее $S_v^t f(x)$ определено, если $T_v^\tau x$ определено при $0 \leq \tau \leq t$, т.е. если траектория в направлении v , выпущенная из точки x , не попадает в особые точки за время t (в частности, x сама должна быть неособой). Введем следующую величину, отражающую степень равномерного усреднения функции f под действием потока $\{T_v^\tau\}$:

$$M_t = M_t(f, v) = \sup_{\tau \geq t} \sup_{x \in M} \left| S_v^\tau f(x) - \frac{1}{S} \int_M f(y) d\mu_\omega(y) \right|.$$

M_t – невозрастающая непрерывная функция от t при $t > 0$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.5. Пусть для любой точки $x \in M$ найдется содержащий ее отрезок I , ортогональный v , такой, что траектории, выпускаемые из его внутренних точек в направлении v ,

- (1) попадают в особые точки не ранее, чем через время t_0 ;
- (2) возвращаются на I не ранее, чем через время $2t_0$;
- (3) попадают в особые точки или возвращаются на I не позднее, чем через время Ct_0 .

Если поток на M в направлении v минимален, то

$$M_{t_0}(f, v) < \frac{LS}{t_0} \quad \text{либо} \quad M_{3Ct_0}(f, v) \leq M_{t_0}(f, v) \cdot \left(1 - \frac{1}{8C}\right)$$

для любой липшицевой функции f с постоянной L .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Не ограничивая общности, считаем, что $\int_M f(y) d\mu_\omega(y) = 0$.

Так как

$$\int_M S_v^{t_0} f(y) d\mu_\omega(y) = \int_M f(y) d\mu_\omega(y) = 0,$$

найдется точка $x \in M$, в которой $S_v^{t_0} f(x) \leq 0$. Выберем для этой точки отрезок I , соответствующий условиям леммы. Из условия (1) следует, что среднее $S_v^{t_0} f$ определено на всем отрезке I (кроме, возможно, концов). При этом $S_v^{t_0} f$ — липшицева функция на I с постоянной L ; в частности, $S_v^{t_0} f(y) \leq L \cdot |I|$ для любой точки $y \in I$. Из условия (2) следует, что $2t_0 \cdot |I| \leq S$, отсюда: $S_v^{t_0} f(y) \leq \frac{LS}{2t_0}$. Предположим,

что $M_{t_0} \geq \frac{LS}{t_0}$, тогда $S_v^{t_0} f(y) \leq M_{t_0}/2$.

Рассмотрим теперь произвольную траекторию J длины $t > 3Ct_0$, идущую в направлении v . Точки пересечения с отрезком I разбивают траекторию J на отрезки $J_1, J_2, \dots, J_n$. Ввиду минимальности потока $\{T_v^\tau\}$ из условия (3) следует, что длины отрезков J_i не превышают Ct_0 . В частности, $t \leq Cnt_0$, откуда $n \geq 4$. Каждый из отрезков J_i , $1 \leq i \leq n$, кроме двух первых и последнего, разобьем на две части: начальный отрезок J_i^1 длины t_0 и остаток J_i^2 . Отрезки $J_1 + J_2, J_i^2, 3 \leq i \leq n-2, J_{n-1}^2 + J_n$ траектории J имеют согласно условию (2) длину не меньше t_0 , поэтому среднее значение функции f на каждом из них не больше M_{t_0} . Среднее же значение функции f на отрезке J_i^1 равно $S_v^{t_0} f(y)$ для некоторой точки $y \in I$, и потому не превосходит $M_{t_0}/2$. Итого, среднее значение функции f на траектории J не больше, чем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{t} \left(\frac{M_{t_0}}{2} t_0 (n-3) + M_{t_0} (t - t_0 (n-3)) \right) \\ &= M_{t_0} \cdot \left(1 - \frac{t_0 (n-3)}{2t} \right) \leq M_{t_0} \cdot \left(1 - \frac{t_0 (n-3)}{2 \cdot Cnt_0} \right) \\ &= M_{t_0} \cdot \left(1 - \left(1 - \frac{3}{n} \right) \frac{1}{2C} \right) \leq M_{t_0} \cdot \left(1 - \frac{1}{8C} \right). \end{aligned}$$

Повторив все приведенные рассуждения применительно к функции $-f$, получим, что среднее значение функции f на J ограничено снизу величиной $-M_{t_0} \left(1 - \frac{1}{8C} \right)$. Ввиду произвольности выбора траектории J

$$M_t \leq M_{t_0} \cdot \left(1 - \frac{1}{8C} \right) \quad \text{при } t > 3Ct_0,$$

а тогда и $M_{3Ct_0} \leq M_{t_0} \left(1 - \frac{1}{8C} \right)$.

Условия, при которых применимо предложение 3.5, будут установлены ниже, в предложении 3.8. Перед тем как формулировать предложение 3.8, приведем ряд определений и вспомогательных утверждений.

Каждому геодезическому отрезку I плоской структуры ω (например, седловязке) сопоставляется изображающий вектор в $\mathbb{R}^2$, определенный с точностью до изменения направления на противоположное. Для произвольного направления $v \in S^1$ через $v(I)$ и $v_\perp(I)$ обозначим длины проекций этого вектора, соответственно, на направление v и ему ортогональное. Длину отрезка I обозначим через $|I|$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.3. Пусть $t, \varepsilon > 0$. Через $B(t, \varepsilon)$ обозначим множество направлений $v \in S^1$ таких, что $v(\gamma) \leq t$ и $v_\perp(\gamma) \leq \varepsilon/t$ хотя бы для одной седлосвязки γ . Множество направлений, дополнительное к $B(t, \varepsilon)$, обозначим через $A(t, \varepsilon)$.

В последующих рассуждениях многократно используется приводимая ниже очевидная лемма.

ЛЕММА 3.6. Пусть I – отрезок, ортогональный направлению v и не содержащий внутри себя особых точек. Выпустим из всех точек отрезка траектории в направлении v . Предположим, что хотя бы две из этих траекторий попадают в особые точки; пусть t_1 и t_2 – время первого и второго попадания ($0 \leq t_1 \leq t_2$). Тогда существует седлосвязка γ такая, что $v(\gamma) = t_2 - t_1$, $v_\perp(\gamma) \leq |I|$.

Следующая лемма понадобится, кроме всего прочего, в разделе 4.

ЛЕММА 3.7. Если $\varepsilon \geq S$, то для любого $t > 0$ множество $A(t, \varepsilon)$ пусто. В частности, $s^2/2 \leq S$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для произвольного направления v требуется найти седлосвязку γ , для которой $v(\gamma) \leq t$, $v_\perp(\gamma) \leq \varepsilon/t$. Пусть x – особая точка плоской структуры ω . Проведем из точки x отрезок I длины ε/t в направлении, ортогональном v . Если, проводя этот отрезок, мы приходим в особую точку, требуемая седлосвязка построена. Если же нет, выпустим из всех точек отрезка I траектории в направлении v . При этом из точки x можно провести, вообще говоря, несколько траекторий; выбираем ту из них, которая ограничивает пучок (ленту) траекторий, выпущенных из остальных точек отрезка I . Пусть T – время первого возвращения на отрезок I траекторий пучка. Согласно принципу возвращения Пуанкаре $T \leq S/|I| = S/\varepsilon \cdot t \leq t$. Возможны два случая. Первый – хотя бы одна из проведенных траекторий попадает в особую точку в момент времени T или раньше. Пусть y – точка отрезка I , из которой выпущена эта траектория. Если $y = x$, мы получаем седлосвязку, которая является искомой. При $y \neq x$ искомая седлосвязка существует ввиду леммы 3.6. Второй случай – траектории пучка не попадают в особые точки за время T . При этом, легко видеть, траектория, выпущенная из точки x , в момент времени T пересекает отрезок I в некоторой точке z , $z \neq x$. Тем самым, траектория, выпущенная из точки z в направлении, противоположном v , попадает в особую точку за время $T \leq t$, так что искомая седлосвязка опять находится с помощью леммы 3.6.

Итак, $A(t, \varepsilon)$ пусто при $\varepsilon \geq S$. В частности, пусто множество $A(\sqrt{S}, S)$, т.е. для любого направления v найдется седлосвязка γ такая, что $v(\gamma) \leq \sqrt{S}$, $v_\perp(\gamma) \leq S/\sqrt{S} = \sqrt{S}$. Длина этой седлосвязки не превосходит $\sqrt{2S}$; с другой стороны, $|\gamma| \geq s$. Тем самым, $s \leq \sqrt{2S}$ и $s^2/2 \leq S$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.8. Пусть направление v таково, что нет седлосвязок, параллельных v . Если для некоторого $\varepsilon > 0$ направление v принадлежит каждому из множеств $A(2t_0, \varepsilon)$, $A(24t_0 \cdot (3i+1)(S/\varepsilon)^{i+1}, \varepsilon)$, $0 \leq i \leq m+2$, то выполнены все условия предложения 3.5 с постоянной C , равной:

$$C = 24(3m+7)(S/\varepsilon)^{m+4}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предложение будет доказано в три этапа. На первом этапе для произвольной точки $x \in M$ строится ортогональный направлению v отрезок I длины $\Delta = \varepsilon/(8t_0)$, концом которого является точка x . Отрезок I таков, что траектории, выпущенные из его внутренних точек в направлении v , не попадают в особые точки и не возвращаются на I в течение времени $2t_0$. Вторым этапом – находится подотрезок I_0 отрезка I длины не меньше $\Delta/3$ такой, что траектории, выпущенные из концов I_0 , достигают особых точек не позднее времени $T = 24t_0 \cdot 3(S/\varepsilon)^2$. Третьим этапом – доказываем, что траектории, выпущенные из точек отрезка I_0 в направлении v , попадают в особые точки или возвращаются на I_0 к моменту времени Ct_0 , где C указано в условии.

Итак, пусть x – произвольная точка поверхности M . Проведем из точки x в двух направлениях, ортогональных v , отрезки длины $2\Delta = \varepsilon/(4t_0)$. Если какой-то из отрезков приходит в особую точку, дальше его не продолжаем. Если сама точка x – особая, проводим только один (какой-нибудь) отрезок. Объединение проведенных отрезков обозначим через I' . I' не может быть ни седлосвязкой, ни замкнутой траекторией, так как при этом найдется ортогональная v седлосвязка длины не больше $|I'| \leq 4\Delta = \varepsilon/(2t_0)$, что противоречит условию $v \in A(2t_0, \varepsilon)$. Итак, I' – отрезок, не содержащий особых точек внутри себя, причем хотя бы один его конец – неособая точка. Поскольку $|I'| \leq \frac{\varepsilon}{2t_0}$, из леммы 3.6 и условия $v \in A(2t_0, \varepsilon)$ следует, что среди траекторий, выпущенных из точек отрезка I' в направлении v , не более чем одна за время $2t_0$ попадает в особую точку. Тогда среди отрезков, на которые точка x разбивает отрезок I' , найдется отрезок, длина которого равна 2Δ , и, более того, траектории, выпущенные из его внутренних точек в направлении v , не достигают особых точек за время $2t_0$. Обозначим через I'' этот отрезок, через I – его половину, концом которой является точка x , через I''' – другую его половину, через y – середину отрезка I''' . Покажем, что отрезок I – искомый для первого этапа доказательства, т.е. траектории, выпущенные из его внутренних точек в направлении v , не возвращаются на I за время $2t_0$. В самом деле, пусть это условие не выполнено, и первое возвращение на I происходит в момент времени $t \leq 2t_0$. Траектории, выпущенные из внутренних точек отрезка I'' , в момент времени t еще образуют один пучок, поэтому в этот момент либо все траектории, выпущенные с отрезка I , либо все траектории, выпущенные с отрезка I''' , пересекают отрезок I'' . Отсюда следует, что траектории, выпущенные из точки y в направлении v и противоположном ему, в момент времени t пересекают отрезок I'' в точках z_+ и z_- , соответственно. Точки z_+ и z_- не совпадают, так как иначе получается замкнутая траектория, параллельная v , а тогда существует и параллельная v седлосвязка. Точка y – середина отрезка z_-z_+ . Далее, ввиду того, что нет седлосвязок, параллельных v , поток на M в направлении v минимален (см., например, [1]). В частности, хотя бы одна из траекторий, выпущенных с отрезка z_-z_+ в направлении v , попадает в особую точку. Пусть t' – время первого попадания в особую точку, z_1 – точка отрезка z_-z_+ , из которой проведена соответствующая траектория. Точка z_1 принадлежит отрезку yz_+ , так как по построению все траектории, выпущенные из точек отрезка z_-y , в момент времени t пересекают отрезок yz_+ , до этого не попадая в особые точки. Обозначим через z_2 точку отрезка z_-y , из которой выходит траектория, приходящая через время t в точку z_1 (расстояние между

точками z_1 и z_2 равно длине отрезка yz_+). Через время $t' + t$ указанная траектория попадает в особую точку. Ввиду леммы 3.6 найдется седлосвязка γ такая, что $v(\gamma) \leq t \leq 2t_0$, $v_\perp(\gamma) \leq |z_- z_+| \leq \varepsilon/(4t_0)$. Это, однако же, противоречит условию $v \in A(2t_0, \varepsilon)$.

Перейдем ко второму этапу доказательства. Пусть I_1 – произвольный подотрезок отрезка I , имеющий длину $\Delta/3$. Покажем, что первое попадание в особую точку для траекторий, выпущенных с отрезка I_1 в направлении v , происходит не позднее времени $T = 24t_0 \cdot 3(S/\varepsilon)^2$. Заметим, что ввиду минимальности потока в направлении v хотя бы одно попадание в особую точку имеет место. Первое возвращение на I_1 внутренних точек этого отрезка под действием потока в направлении v происходит за некоторое время t'_1 , не превосходящее $t_1 = \frac{S}{\Delta/3} = 24t_0 \cdot S/\varepsilon$.

Если до этого произошло попадание в особую точку, доказывать нечего, так как согласно лемме 3.7 $\varepsilon < S$ и, следовательно, $t_1 \leq T$. Если же нет, то в момент времени t'_1 все точки отрезка I_1 продолжают двигаться одним пучком. Не все они в этот момент возвращаются на I_1 (иначе попадания в особую точку не будет вообще). Поэтому ситуация такова: на I_1 возвращаются точки некоторого подотрезка с концами w_0 и w_1 , где w_0 – внутренняя, а w_1 – конечная точка отрезка I_1 . По возвращении все точки отрезка $w_0 w_1$ оказываются сдвинутыми на некоторое расстояние от своего начального расположения таким образом, что точка w_0 переходит в точку w_2 – конец отрезка I_1 , отличный от w_1 . Докажем, что длина Δ'_1 отрезка $w_2 w_0$ не меньше величины $\Delta_1 = \frac{\varepsilon}{2S} \cdot \frac{\Delta}{3}$. Если $\Delta'_1 \geq |I_1|/2$, доказывать нечего, так как $|I_1|/2 = 1/2 \cdot \Delta/3 \geq \Delta_1$. Если же нет, возьмем точки $u_1, u_2 \in I_1$ на расстоянии, соответственно, Δ'_1 и $2\Delta'_1$ от конца w_1 . Все точки отрезка $u_1 w_1$ за время t'_1 переводятся потоком в направлении v в точки отрезка $u_2 u_1$. Отсюда следует, что время между первым и вторым попаданием в особые точки траекторий, выпущенных с отрезка $u_2 w_1$ в этом направлении, не больше t'_1 . Ввиду условия $v \in A(t_1, \varepsilon)$ из леммы 3.6 получаем, что $|u_2 w_1| > \varepsilon/t_1 = \varepsilon/S \cdot \Delta/3$, т.е. $\Delta'_1 = |u_2 w_1|/2 > \Delta_1$.

Первое возвращение на I_1 внутренних точек отрезка $w_2 w_0$ под действием потока в направлении v происходит в некоторый момент времени t'_2 , не позднее времени $t_2 = S/\Delta_1 = 24t_0 \cdot 2(S/\varepsilon)^2$ и не ранее t'_1 . При этом все возвратившиеся точки по возвращении находятся на расстоянии менее Δ'_1 от конца w_1 отрезка I_1 , так как иначе за время t'_1 до этого они посетили бы отрезок $w_0 w_1$. Следовательно, если попадания в особую точку все еще не было, то в этот момент некоторая точка w отрезка $w_2 w_0$ оказывается в точке w_1 . Вместе с ней на отрезок I_1 возвращаются все точки отрезка $w_2 w$. В момент времени $t'_1 + t'_2$ точка w опять попадает на отрезок I_1 , и если до этого не произошло попадание в особую точку, то в этот же момент на I_1 возвращаются все точки отрезка $w w_0$. Тем самым, к моменту времени $t'_1 + t'_2$ либо все точки отрезка I_1 успеют вернуться на него, либо хотя бы одна из них попадет в особую точку. Поскольку попадание в особую точку должно когда-либо произойти, справедлива вторая альтернатива, т.е. первое попадание произойдет не позднее времени $t'_1 + t'_2 \leq t_1 + t_2$, что не превышает T .

Разделим отрезок I на три равные части. На каждой из двух крайних третей выберем точку, которая под действием потока в направлении v не позднее времени T попадает в особую точку. Пусть I_0 – отрезок с концами в выбранных точках.

Длина I_0 не меньше $\Delta/3$, так что он — искомый.

Переходим к третьему этапу доказательства. Пусть $p_1, \dots, p_k$ — внутренние точки отрезка I_0 , которые под действием потока в направлении v попадают в особые точки до возвращения на I_0 или же попадают в конец отрезка I_0 при первом возвращении. Число точек, попадающих в особые точки до возвращения на I_0 , не больше суммы кратностей особых точек, поэтому $k \leq m + 2$. Через $\tau_1, \dots, \tau_k$ обозначим время попадания точек $p_1, \dots, p_k$ в особые точки или в концы отрезка I_0 . Считаем точки $p_1, \dots, p_k$ упорядоченными таким образом, что $\tau_1 \leq \tau_2 \leq \dots \leq \tau_k$. Через δ_i ($0 \leq i \leq k$) обозначим длину кратчайшего отрезка из тех, на которые точки $p_1, \dots, p_i$ разбивают отрезок I_0 . Докажем индукцией по i , что $\tau_i \leq 24t_0 \cdot (3i - 2)(S/\varepsilon)^{i+1}$ при $1 \leq i \leq k$, а $\delta_i \geq \frac{\varepsilon}{24t_0 \cdot (3i + 1)(S/\varepsilon)^{i+1}}$ при $0 \leq i \leq k$. При $i = 0$ нужно доказать лишь, что $\delta_0 = |I_0| \geq \frac{\varepsilon}{24t_0 \cdot S/\varepsilon}$. И действительно, $|I_0| \geq \Delta/3 = \frac{\varepsilon}{24t_0} \geq \frac{\varepsilon}{24t_0 \cdot S/\varepsilon}$. Теперь пусть $0 < i \leq k$ и уже доказано, что $\delta_{i-1} \geq \frac{\varepsilon}{24t_0 \cdot (3i - 2)(S/\varepsilon)^i}$. Среди отрезков, на которые точки $p_1, \dots, p_{i-1}$ разбивают отрезок I_0 , через J_i обозначим отрезок, содержащий точку p_i . Поскольку $|J_i| \geq \delta_{i-1}$, время T_i первого возвращения на I_0 траекторий, выпущенных из внутренних точек отрезка J_i в направлении v , не больше $S/\delta_{i-1} \leq 24t_0 \cdot (3i - 2)(S/\varepsilon)^{i+1}$. Некоторые из указанных траекторий в момент времени T_i не возвращаются во внутренние точки отрезка I_0 (например, такова траектория, выпущенная из точки p_i). Это, однако же, возможно лишь в том случае, когда к этому времени какая-либо из траекторий попала в особую точку или в конец отрезка I_0 , т.е. когда $\tau_i \leq T_i$. Тем самым, требуемая оценка на τ_i получена. Далее, пусть J'_i — кратчайший среди отрезков, получаемых при разбиении отрезка I_0 точками $p_1, \dots, p_i$. Траектории, выпущенные из концов отрезка J'_i , попадают в особые точки не позднее времени

$$\tau_i + T \leq 24t_0 \cdot (3i - 2)(S/\varepsilon)^{i+1} + 24t_0 \cdot 3(S/\varepsilon)^2 \leq 24t_0 \cdot (3i + 1)(S/\varepsilon)^{i+1}.$$

Ввиду условия $v \in A(24t_0 \cdot (3i + 1)(S/\varepsilon)^{i+1}, \varepsilon)$ из леммы 3.6 следует, что

$$\delta_i = |J'_i| > \frac{\varepsilon}{24t_0 \cdot (3i + 1)(S/\varepsilon)^{i+1}},$$

как и требовалось.

Пусть J — один из отрезков, на которые разбивают I_0 точки $p_1, \dots, p_k$. Внутренние точки отрезка J под действием потока в направлении v возвращаются на отрезок I_0 , не попадая в его концы и в особые точки. Отсюда следует, что возвращение происходит одновременно для всех точек. Поскольку

$$|J| \geq \delta_k \geq \frac{\varepsilon}{24t_0 \cdot (3k + 1)(S/\varepsilon)^{k+1}},$$

время возвращения не превосходит

$$S/|J| \leq S/\delta_k \leq 24t_0 \cdot (3k + 1)(S/\varepsilon)^{k+2} \leq 24t_0 \cdot (3m + 7)(S/\varepsilon)^{m+4}.$$

Итак, траектории, выпущенные из точек отрезка I_0 в направлении v , не позднее времени $24t_0 \cdot (3m+7)(S/\varepsilon)^{m+4}$ попадают в особые точки или возвращаются на I_0 . Поскольку поток в направлении v минимален, это же утверждение справедливо и в отношении отрезка I , содержащего I_0 .

Таким образом, отрезок I удовлетворяет условиям (1)–(3) предложения 3.5 с требуемой постоянной C .

Для произвольного $\varepsilon > 0$ обозначим число $24(3m+7)(S/\varepsilon)^{m+4}$ через $C(\varepsilon)$. Через $B_1(t, \varepsilon)$ обозначим объединение $m+4$ множеств $B(2t, \varepsilon)$, $B(24t(3i+1)(S/\varepsilon)^{i+1}, \varepsilon)$, $0 \leq i \leq m+2$. Для любого целого $n > 0$ пусть $B_2(t, \varepsilon, n)$ – множество тех направлений, которые входят хотя бы в n из $2n$ множеств $B_1(t, \varepsilon), B_1(3C(\varepsilon)t, \varepsilon), \dots, B_1((3C(\varepsilon))^{2n-1}t, \varepsilon)$.

ЛЕММА 3.9. Пусть f – липшицева с постоянной L функция на поверхности M , $|f(x)| \leq E$ для всех $x \in M$. Если $t \geq LS/E$, то для любого направления v , которое не параллельно ни одной седлосвязке и не входит в множество $B_2(t, \varepsilon, n)$, имеем:

$$M_{(3C(\varepsilon))^{2n}t}(f, v) \leq 2E \cdot \left(1 - \frac{1}{8C(\varepsilon)}\right)^n.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно условию направление v не принадлежит множествам

$$B_1((3C)^{i_0}t, \varepsilon), B_1((3C)^{i_1}t, \varepsilon), \dots, B_1((3C)^{i_{n-1}}t, \varepsilon),$$

где $i_0, i_1, \dots, i_{n-1}$ – некоторые номера, $0 \leq i_0 < i_1 < \dots < i_{n-1} \leq 2n-1$. Докажем, что

$$M_{(3C)^{i_j}t} \leq 2E \cdot \left(1 - \frac{1}{8C}\right)^j \quad \text{при } 0 \leq j \leq n,$$

где, по определению, $i_n = 2n$. Доказываем индукцией по j . При $j = 0$ неравенство тривиально, так как $M_{t'}(f, v') \leq 2E$ для любого $t' > 0$ и любого направления v' . Далее, пусть неравенство имеет место при некотором значении j , $0 \leq j < n$. Поскольку направление v не параллельно седлосвязкам и $v \notin B_1((3C)^{i_j}t, \varepsilon)$, из предложений 3.5 и 3.8 следует, что

$$\begin{aligned} M_{(3C)^{i_j+1}t} &\leq \max\left(\frac{LS}{(3C)^{i_j}t}, M_{(3C)^{i_j}t}\left(1 - \frac{1}{8C}\right)\right) \\ &\leq \max\left(\frac{LS}{(3C)^{j}t}, 2E\left(1 - \frac{1}{8C}\right)^{j+1}\right). \end{aligned}$$

Ввиду леммы 3.7 $\varepsilon < S$, тогда $C = C(\varepsilon) > 24(3m+7) \geq 240$, в частности, $\frac{1}{3C} < 1 - \frac{1}{8C}$, $2\left(1 - \frac{1}{8C}\right) > 1$. Отсюда

$$\frac{LS}{(3C)^{j}t} \leq \frac{E}{(3C)^j} \leq E\left(1 - \frac{1}{8C}\right)^j \leq 2E\left(1 - \frac{1}{8C}\right)^{j+1}.$$

Тем самым,

$$M_{(3C)^{i_j+1}t} \leq 2E \left(1 - \frac{1}{8C}\right)^{j+1}.$$

Поскольку $i_j + 1 \leq i_{j+1}$, имеем: $M_{(3C)^{i_j+1}t} \leq M_{(3C)^{i_{j+1}}t}$, что завершает шаг индукции. Утверждение леммы получается из доказанного неравенства при $j = n$.

Далее оценивается мера множеств $B(t, \varepsilon)$, $B_1(t, \varepsilon)$, $B_2(t, \varepsilon, n)$. При этом используется теорема 4.1, которая будет доказана в разделе 4. Рассуждение, с помощью которого доказывается лемма 3.10, принадлежит Бошерниану [5].

ЛЕММА 3.10. $\lambda(B(t, \varepsilon)) \leq C_1 \cdot \varepsilon$, где $C_1 = 2\pi h(m)/s^2$, $h(m) = (400m)^{(2m)^{2m}}$ при $m > 1$, $h(1) = (3 \cdot 2^7)^6$ (λ – мера Лебега на S^1).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Множество направлений $B(\varepsilon/t, \varepsilon)$ получается из множества $B(t, \varepsilon)$ поворотом последнего на прямой угол, поэтому меры этих множеств равны. Тем самым, не ограничивая общности, можно считать, что $t \geq \varepsilon/t$.

Пусть γ – седлосвязка, а v – направление, такие что $v(\gamma) \leq t$, $v_\perp(\gamma) \leq \varepsilon/t$. Оценим длину седлосвязки γ и угол между γ и v (считая, что $0 \leq \angle(\gamma, v) \leq \pi/2$):

$$|\gamma| \leq v(\gamma) + v_\perp(\gamma) \leq t + \varepsilon/t \leq 2t,$$

$$\angle(\gamma, v) \leq \frac{\pi}{2} \sin \angle(\gamma, v) = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{v_\perp(\gamma)}{|\gamma|} \leq \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\varepsilon}{t|\gamma|}.$$

Мера множества направлений, угол между которыми и седлосвязкой γ не превышает $\frac{\pi}{2} \cdot \frac{\varepsilon}{t|\gamma|}$, равна $\min\left(2\pi, 4 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\varepsilon}{t|\gamma|}\right) \leq \frac{2\pi\varepsilon}{t|\gamma|}$. С учетом полученных выше оценок

$$\lambda(B(t, \varepsilon)) \leq \frac{2\pi\varepsilon}{t} \sum_{\gamma} |\gamma|^{-1},$$

где суммирование производится по всем седлосвязкам длины не более $2t$.

Пусть $\gamma_1, \gamma_2, \dots$ – седлосвязки плоской структуры ω , занумерованные так, что $|\gamma_1| \leq |\gamma_2| \leq \dots$. Согласно теореме 4.1 число седлосвязок, длина которых не больше l , не превосходит $h(m) (l/s)^2$. Отсюда для любого номера n получаем: $n \leq h(m) \cdot (|\gamma_n|/s)^2$ и $|\gamma_n| \geq \frac{s}{\sqrt{h(m)}} \sqrt{n}$. Далее, если выполнено условие $|\gamma_n| \leq 2t$, то $n \leq h(m) (2t/s)^2$. Тем самым, положив $N(t) = h(m) (2t/s)^2$, получим:

$$\begin{aligned} \sum_{|\gamma| \leq 2t} |\gamma|^{-1} &\leq \sum_{n \leq N(t)} |\gamma_n|^{-1} \leq \frac{\sqrt{h(m)}}{s} \sum_{n \leq N(t)} \frac{1}{\sqrt{n}} \\ &\leq \frac{\sqrt{h(m)}}{s} \int_0^{N(t)} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{h(m)}}{s} \frac{\sqrt{N(t)}}{2} = \frac{h(m)}{s^2} t. \end{aligned}$$

В результате $\lambda(B(t, \varepsilon)) \leq 2\pi\varepsilon/t \cdot h(m)/s^2 \cdot t = 2\pi\varepsilon/s^2 \cdot h(m)$, как и требовалось.

СЛЕДСТВИЕ 3.11. $\lambda(B_1(t, \varepsilon)) \leq (m+4)C_1\varepsilon$, $\lambda(B_2(t, \varepsilon, n)) \leq 2(m+4)C_1\varepsilon$, где C_1 – то же, что и в лемме 3.10.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первая оценка очевидна, так как $B_1(t, \varepsilon)$ есть объединение $m + 4$ множеств вида $B(t', \varepsilon)$. Далее, для каждого направления v через $g(v)$ обозначим число тех множеств среди $B_1(t, \varepsilon), B_1(3C(\varepsilon)t, \varepsilon), \dots, B_1((3C(\varepsilon))^{2n-1}t, \varepsilon)$, которые содержат v . Функция $g(v)$ является суммой характеристических функций $2n$ множеств вида $B_1(t', \varepsilon)$, поэтому

$$\int_{S^1} g(v) d\lambda(v) \leq 2n(m + 4)C_1\varepsilon.$$

Поскольку $g(v) \geq n$ при $v \in B_2(t, \varepsilon, n)$, имеем: $n \cdot \lambda(B_2(t, \varepsilon, n)) \leq 2n(m + 4)C_1\varepsilon$, откуда $\lambda(B_2(t, \varepsilon, n)) \leq 2(m + 4)C_1\varepsilon$.

Следующая теорема подытоживает результаты, полученные ранее в этом разделе.

ТЕОРЕМА 3.12. Пусть $\varepsilon_1, \varepsilon_2, L, E$ – положительные постоянные, $0 < \varepsilon_1 \leq 1, 0 < \varepsilon_2 \leq 0.999$. Найдется зависящее от этих постоянных множество направлений B , мера которого не больше $2\pi\varepsilon_1$, такое, что для любой функции f на поверхности M , липшицевой с постоянной L и ограниченной по модулю постоянной E , а также для любого направления $v \notin B$ имеем:

$$M_t(f, v) \leq 2E \cdot \varepsilon_2 \quad \text{при} \quad t \geq \frac{LS}{E} \left(\frac{1}{\varepsilon_2} \right)^{(H(m) \cdot S/s^2 \cdot 1/\varepsilon_1)^{m+5}},$$

где $H(1) = 2^{60}$, $H(m) = (500m)^{(2m)^{2m}}$ при $m > 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $\varepsilon = \frac{s^2}{2(m+4)h(m)} \varepsilon_1$ ($h(m)$ – то же, что и в лемме 3.10), $n = \left\lceil \frac{\log 1/\varepsilon_2}{\log(1 - \frac{1}{8C(\varepsilon)})^{-1}} \right\rceil$ (здесь $\lceil x \rceil$ – наименьшее целое число, которое не меньше x), $T = \frac{LS}{E} (3C(\varepsilon))^{2n}$. Ввиду следствия 3.11 $\lambda(B_2(T, \varepsilon, n)) \leq 2\pi\varepsilon_1$. Если направление v не принадлежит множеству $B_2(T, \varepsilon, n)$ и не находится среди счетного числа направлений, параллельных седлосвязкам, то согласно лемме 3.9 $M_T(f, v) \leq 2E \left(1 - \frac{1}{8C}\right)^n$, что не больше $2E \cdot \varepsilon_2$ ввиду выбора n . Тем самым, доказательство теоремы сводится к проверке истинности неравенства

$$T \leq \frac{LS}{E} \left(\frac{1}{\varepsilon_2} \right)^{(H(m) \cdot S/s^2 \cdot 1/\varepsilon_1)^{m+5}}.$$

Оценим снизу число $C = C(\varepsilon)$. Имеем:

$$C = 24(3m + 7) (2(m + 4) h(m) \cdot S/s^2 \cdot 1/\varepsilon_1)^{m+4},$$

$1/\varepsilon_1 \geq 1$, а согласно лемме 3.7 $S/s^2 \geq 1/2$, поэтому

$$C \geq 24(3m + 7) ((m + 4) h(m))^{m+4},$$

что очевидным образом больше 1000. Отсюда: $\left(1 - \frac{1}{8C}\right)^{-1} \leq 1.001 < 1/\varepsilon_2$, тогда:

$$n < \frac{\log 1/\varepsilon_2}{\log(1 - \frac{1}{8C})^{-1}} + 1 < 2 \frac{\log 1/\varepsilon_2}{\log(1 - \frac{1}{8C})^{-1}}.$$

Далее,

$$\begin{aligned} \log\left(1 - \frac{1}{8C}\right)^{-1} &= \log\left(1 + \frac{1}{8C-1}\right) \geq \frac{1}{8C-1} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{8C-1}\right)^2 \\ &= \frac{1}{8C}\left(1 + \frac{8C-2}{2(8C-1)^2}\right) > \frac{1}{8C}. \end{aligned}$$

В результате $n \leq 2 \cdot 8C \cdot \log 1/\varepsilon_2$, и

$$T \leq \frac{LS}{E} (3C)^{32C \cdot \log 1/\varepsilon_2} = \frac{LS}{E} (1/\varepsilon_2)^{32C \cdot \log(3C)}.$$

Функция $g(x) = x^{1/x}$ убывает при $x \geq e$. Из этого следует, что $(m+4)^{\frac{1}{m+4}} \leq 5^{1/5}$, $(3m+7)^{\frac{1}{m+4}} < (3m+12)^{\frac{1}{3m+12} \cdot 3} \leq 15^{\frac{1}{15} \cdot 3} = 15^{1/5}$. Вдобавок $(32 \cdot 24)^{\frac{1}{m+4}} \leq (32 \cdot 24)^{1/5}$. Итого: $(32 \cdot 24(3m+7)(m+4))^{\frac{1}{m+4}} \leq (32 \cdot 24 \cdot 15 \cdot 5)^{1/5} < 10$. Отсюда $3C = 3 \cdot 24(3m+7)(2(m+4)h(m)S/s^2 \cdot 1/\varepsilon_1)^{m+4} \leq (20(m+4)h(m)S/s^2 \cdot 1/\varepsilon_1)^{m+4}$,

тогда

$$\begin{aligned} 32C \cdot \log(3C) &\leq 32C \cdot (m+4) \cdot \log(20(m+4)h(m)S/s^2 \cdot 1/\varepsilon_1) \\ &= 32 \cdot 24(3m+7)(m+4)(2(m+4)h(m)S/s^2 \cdot 1/\varepsilon_1)^{m+4} \\ &\quad \times \log(20(m+4)h(m)S/s^2 \cdot 1/\varepsilon_1) \\ &\leq (20(m+4)h(m)S/s^2 \cdot 1/\varepsilon_1)^{m+4} \log(20(m+4)h(m)S/s^2 \cdot 1/\varepsilon_1) \\ &\leq (20(m+4)h(m)S/s^2 \cdot 1/\varepsilon_1)^{m+5}. \end{aligned}$$

При $m = 1$ имеем:

$$20(m+4)h(m) = 20 \cdot 5 \cdot (3 \cdot 2^7)^6 < 2^{60} = H(1).$$

Если же $m > 1$, то $20(2m)^{-2m} \leq 20^{4^{-4}} < 20^{1/120}$,

$$(m+4)^{(2m)^{-2m}} = (m+4)^{\frac{1}{m+4} \cdot \frac{m+4}{(2m)^{2m}}} \leq (6^{1/6})^{\frac{3m}{(2m)^4}} < (6^{1/6})^{1/32} < 6^{1/120}.$$

Отсюда $(20(m+4))^{(2m)^{-2m}} < 120^{1/120} < 16^{1/16} = 2^{1/4} < 5/4$ и

$$20(m+4)h(m) = 20(m+4)(400m)^{(2m)^{2m}} < (5/4 \cdot 400m)^{(2m)^{2m}} = H(m).$$

В результате при любом значении m имеем:

$$32C \cdot \log(3C) \leq (20(m+4)h(m)S/s^2 \cdot 1/\varepsilon_1)^{m+5} < (H(m) \cdot S/s^2 \cdot 1/\varepsilon_1)^{m+5},$$

тогда

$$T \leq \frac{LS}{E} \left(\frac{1}{\varepsilon_2}\right)^{32C \cdot \log(3C)} < \frac{LS}{E} \left(\frac{1}{\varepsilon_2}\right)^{(H(m) \cdot S/s^2 \cdot 1/\varepsilon_1)^{m+5}},$$

как и было нужно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3.2. Имеет место следующая оценка:

$$\frac{1}{S} \int_{M \times S^1} \left| S_{\omega}^t F(x, v) - \frac{1}{S} \int_M F(y, v) d\mu_{\omega}(y) \right| d\mu_{\omega}(x) d\lambda(v) \leq \int_{S^1} M_t(f_v, v) d\lambda(v).$$

Положим $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$. Пусть B – соответствующее параметрам $\varepsilon_1, \varepsilon_2, L, E$ множество направлений, существование которого устанавливает теорема 3.12. Тогда $M_t(f_v, v) \leq 2E\varepsilon$ при

$$t \geq \frac{LS}{E} (1/\varepsilon)^{(H(m) \cdot S/s^2 \cdot 1/\varepsilon)^{m+5}},$$

если $v \notin B$. Если же $v \in B$, воспользуемся простейшей оценкой $M_t(f_v, v) \leq 2E$. Учитывая, что $\lambda(B) \leq 2\pi\varepsilon$, при указанных значениях t получаем:

$$\int_{S^1} M_t(f_v, v) d\lambda(v) \leq 2E \cdot \lambda(B) + (2\pi - \lambda(B)) \cdot 2E\varepsilon \leq 8\pi E \cdot \varepsilon.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3.3б). Пусть $f_1, f_2, \dots, f_n, \dots$ – счетное семейство липшицевых функций на поверхности M , плотное в пространстве непрерывных функций по равномерной норме. Ввиду теоремы 3.12 множество B_n тех направлений v , для которых $M_t(f_n, v) \not\rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, имеет меру нуль. Тем самым, $M_t(f_n, v) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ для любого номера n , если направление v не принадлежит некоторому множеству $B \subset S^1$ меры нуль. Далее, если функции f и $\tilde{f}$ таковы, что $|f(x) - \tilde{f}(x)| \leq \varepsilon$ для всех $x \in M$, то, очевидно, $|M_t(f, v) - M_t(\tilde{f}, v)| \leq 2\varepsilon$ для любого $t > 0$ и любого $v \in S^1$.

Рассмотрим произвольное направление $v \notin B$. Любая непрерывная функция f на M равномерно приближается функциями из последовательности $f_1, \dots, f_n, \dots$, поэтому ввиду вышесказанного $M_t(f, v) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. С учетом эргодической теоремы мера μ_{ω} – единственная (с точностью до скалярного множителя) конечная борелевская мера на M , инвариантная относительно потока в направлении v .

4. Квадратичный рост числа седлосвязок

Пусть ω – плоская структура на компактной связной поверхности M . Через m обозначим сумму кратностей особых точек плоской структуры ω , через s – длину кратчайшей седлосвязки.

Целью этого раздела является получение оценки на число $N(L)$ седлосвязок плоской структуры ω , длина которых не больше L . Окончательный результат здесь таков.

ТЕОРЕМА 4.1. $N(L) \leq h(m) \cdot \left(\frac{L}{s}\right)^2$, где $h(1) = (3 \cdot 2^7)^6$, $h(m) = (400m)^{(2m)^{2m}}$ при $m > 1$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Мазур доказал в [4], что $N(L) = O(L^2)$ при $L \rightarrow \infty$ для произвольной плоской структуры. Индуктивная схема подсчета числа седлосвязок, используемая в настоящей работе, целиком взята из [4]. Конкретное воплощение этой схемы, однако же, существенно отличается от исходного. К тому же, надо заметить, ниже совсем не используется язык теории Тайхмюллера, характерный для [2], [4]. Вместо этого используется язык проекций, более удобный для получения эффективных оценок.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1. *Комплекс K – это либо седлосвязка, либо область на поверхности M , ограниченная попарно непересекающимися седлосвязками (седлосвязки не пересекаются, если они не имеют общих внутренних точек). Среди ограничивающих K седлосвязок допускаются *надрезы*, т.е. седлосвязки, с обеих сторон окруженные комплексом.*

ω -треугольник – это треугольник на поверхности M , у которого вершины – особые точки, стороны – седлосвязки и внутри которого особых точек нет.

Сформулируем в виде предложения геометрические свойства комплексов и седлосвязок, которые понадобятся в дальнейшем.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.2. а) *Любой набор попарно непересекающихся седлосвязок можно дополнить до ω -триангуляции поверхности M , т.е. ее разбиения на ω -треугольники.*

б) *Число ω -треугольников в произвольной ω -триангуляции равно $2t$, число седлосвязок равно $3t$.*

в) *Произвольный комплекс K можно разбить седлосвязками на ω -треугольники; число $d(K)$ получившихся ω -треугольников не зависит от способа разбиения, $0 \leq d(K) \leq 2t$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение а) очевидно, утверждение в) следует из а) и б). Докажем утверждение б). Пусть m_2 и m_3 – число, соответственно, седлосвязок и ω -треугольников в некоторой ω -триангуляции поверхности M . Сумма Σ всех углов всех ω -треугольников равна $m_3\pi$. С другой стороны, сумма всех углов с вершиной в фиксированной особой точке кратности n равна $2\pi n$, отсюда $\Sigma = 2\pi t$ и $m_3 = 2t$. Равенство $m_2 = 3t$ получается из очевидного соотношения $2m_2 = 3m_3$.

Напомним, что длины проекций седлосвязки γ (точнее, ее изображающего вектора в $\mathbb{R}^2$) на направление v и ортогональное ему обозначаются, соответственно, через $v(\gamma)$ и $v_\perp(\gamma)$, длина γ – через $|\gamma|$. Если K – комплекс, то через $v(K)$ (соответственно, $v_\perp(K)$, $|K|$) обозначим максимум величин $v(\gamma)$ (соответственно, $v_\perp(\gamma)$, $|\gamma|$) по всем седлосвязкам γ , ограничивающим комплекс K .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.2. Пусть l, δ, C – положительные числа, d – целое число, $0 \leq d \leq 2t$. Седлосвязка γ называется (l, δ, C, d) -*близкой* к направлению v , если

$$v(\gamma) \leq (C + 2)^d l, \quad v_\perp(\gamma) \leq (C + 2)^d \delta / l.$$

Седлосвязка γ называется (l, δ, C, d) -*изолированной* относительно направления v , если она (l, δ, C, d) -близка к v , и любая седлосвязка $\tilde{\gamma} \neq \gamma$, удовлетворяющая условиям

$$v(\tilde{\gamma}) \leq C(C + 2)^d l, \quad v_\perp(\tilde{\gamma}) \leq C(C + 2)^d \delta / l,$$

не пересекает γ .

Пусть K – комплекс, содержащий седлосвязку γ . Изменим определение изолированности, потребовав, чтобы рассматриваемые в нем седлосвязки $\tilde{\gamma}$ также содержались в K . При этом получим определение более слабого свойства, которое назовем *изолированностью γ в пределах комплекса K* . Первоначальное определение относится к тому случаю, когда K – вся поверхность M (без надрезов).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.3. Комплекс K называется (l, δ, C) -*близким* к направлению v , если каждая из ограничивающих его седлосвязок $(l, \delta, C, d(K))$ -близка к v .

Аналогичным образом определяется (l, δ, C) -*изолированность* комплекса K относительно направления v – как простая, так и в пределах комплекса $\tilde{K}$, содержащего K .

ЛЕММА 4.3. Пусть комплекс K содержится в большем комплексе $\tilde{K}$, и γ – ограничивающая K седлосвязка, которая не является надрезом. Предположим, что комплекс K (l, δ, C) -близок к некоторому направлению v , но в то же время седлосвязка γ не $(l, \delta, C, d(K))$ -изолирована относительно v в пределах комплекса $\tilde{K}$. Тогда найдется (l, δ, C) -близкий к v комплекс K_1 такой, что:

- а) $K \subset K_1 \subset \tilde{K}$;
- б) K_1 отличается от K единственным ω -треугольником T , причем γ – одна из сторон T ;
- в) $\text{Area}(T) \leq \frac{1}{2} \delta (C + 2)^{4m}$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Похожая по содержанию лемма доказана в [2]. Особенность сформулированной леммы состоит в дополнительном условии, что γ – одна из сторон пристраиваемого ω -треугольника T . В дальнейшем это условие будет существенно использовано.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ввиду $(l, \delta, C, d(K))$ -неизолированности седлосвязки γ относительно направления v в пределах комплекса $\tilde{K}$ найдется седлосвязка $\tilde{\gamma}$, которая содержится в $\tilde{K}$, пересекает γ и удовлетворяет условиям

$$v(\tilde{\gamma}) \leq C(C + 2)^{d(K)} l, \quad v_{\perp}(\tilde{\gamma}) \leq C(C + 2)^{d(K)} \delta / l.$$

Седлосвязка γ не является надрезом в K , поэтому можно выбрать отрезок AB седлосвязки $\tilde{\gamma}$, лежащий вне комплекса K , такой, что A – внутренняя точка седлосвязки γ , а B – либо особая точка, либо внутренняя точка другой седлосвязки γ_1 , ограничивающей K .

В первую очередь найдем отрезок AB_0 , лежащий вне комплекса K , но внутри $\tilde{K}$, такой, что B_0 – особая точка, внутри AB_0 особых точек нет и, кроме того,

$$v(AB_0) \leq (C + 1)(C + 2)^{d(K)} l, \quad v_{\perp}(AB_0) \leq (C + 1)(C + 2)^{d(K)} \delta / l.$$

Если B – особая точка, то искать нечего, так как $v(AB) \leq v(\tilde{\gamma})$, $v_{\perp}(AB) \leq v_{\perp}(\tilde{\gamma})$. Если же B – внутренняя точка седлосвязки γ_1 , ограничивающей K , возьмем на этой седлосвязке две точки E_1 и E_2 , лежащие по разные стороны от B . При E_1 и E_2 , близких к B , можно провести отрезки AE_1 и AE_2 , которые вместе с отрезком AB и частью седлосвязки γ_1 ограничивают треугольники на поверхности M , не содержащие особых точек. Если же удалять точку E_i ($i = 1$ или 2) от точки B , то в некоторый момент на отрезок AE_i попадет одна или несколько особых точек. Обозначим через B_i ту из них, которая ближе всего к A . Отрезок AB_i есть

подотрезок AE_i , последний же образует треугольник с отрезком AB и частью седлосвязки γ_1 , отсюда:

$$v(AB_i) \leq v(AB) + v(\gamma_1) \leq C(C+2)^{d(K)}l + (C+2)^{d(K)}l = (C+1)(C+2)^{d(K)}l$$

и, аналогично, $v_\perp(AB_i) \leq (C+1)(C+2)^{d(K)}\delta/l$. По построению отрезок AB_i содержится в комплексе $\tilde{K}$ и не имеет внутри себя особых точек, т.е. он — искомый, если только не окажется частью седлосвязки γ . Последнее во всяком случае невозможно сразу для обеих отрезков AB_1 и AB_2 , так что требуемый отрезок AB_0 может быть найден.

Далее, на отрезке AB_0 возьмем точку B' . В случае, когда B' достаточно близка к A , ее можно соединить с концами седлосвязки γ отрезками $B'F_1$ и $B'F_2$ таким образом, что $B'F_1$, $B'F_2$ и γ ограничат треугольник T' , содержащий отрезок AB' и не имеющий внутри себя особых точек. Теперь удалим точку B' от A на максимальное расстояние, при котором такой треугольник T' все еще существует. При этом выборе B' либо один из отрезков $B'F_1$ и $B'F_2$ содержит внутри себя особую точку, либо $B' = B_0$ и отрезки $B'F_1$ и $B'F_2$ являются седлосвязками. В любом случае T' содержит некоторый ω -треугольник T , для которого γ — одна из сторон.

По построению ω -треугольник T лежит вне комплекса K , но внутри $\tilde{K}$. Добавив T к комплексу K , получим новый комплекс $K_1 \subset \tilde{K}$ (точки седлосвязки γ рассматриваются как внутренние точки комплекса K_1). Покажем, что этот комплекс является искомым. Пусть γ' — сторона треугольника T , отличная от γ . Поскольку γ' лежит внутри треугольника T' , ее проекция на направление седлосвязки γ параллельно отрезку AB_0 имеет длину не больше, чем длина γ ; аналогично, проекция γ' на направление отрезка AB_0 параллельно седлосвязке γ не длиннее AB_0 . Отсюда:

$$v(\gamma') \leq v(AB_0) + v(\gamma) \leq (C+1)(C+2)^{d(K)}l + (C+2)^{d(K)}l = (C+2)^{d(K)+1}l$$

и, аналогично, $v_\perp(\gamma') \leq (C+2)^{d(K)+1}\delta/l$.

Каждая седлосвязка, ограничивающая комплекс K_1 , ограничивает K или является стороной T . Тем самым, с учетом равенства $d(K_1) = d(K) + 1$ показано, что комплекс K_1 (l, δ, C) -близок к направлению v . Кроме того, из полученных оценок следует, что

$$\text{Area}(T) \leq \frac{1}{2}v(T) \cdot v_\perp(T) \leq \frac{1}{2}(C+2)^{d(K_1)}l \cdot (C+2)^{d(K_1)}\delta/l \leq \frac{1}{2}\delta(C+2)^{4m},$$

как и требовалось.

$$\text{Для каждого } C > 0 \text{ положим } l_{\min} = l_{\min}(C) = \frac{s}{\sqrt{2}(C+2)^{2m}}.$$

ЛЕММА 4.4. Пусть седлосвязка γ (l, δ, C, d) -близка к направлению v . При выполнении условий $l \geq l_{\min}(C)$ и $\delta \leq l_{\min}^2(C)$ имеем:

- а) $v(\gamma) \geq v_\perp(\gamma)$ и $|\gamma| \leq \sqrt{2}v(\gamma)$;
- б) $\frac{v(\gamma)}{(C+2)^{2m}} \geq l_{\min}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. $v_{\perp}(\gamma) \leq (C+2)^d \delta / l \leq (C+2)^{2m} \frac{l_{\min}^2}{l_{\min}} = \frac{s}{\sqrt{2}}$, откуда $|\gamma| \geq s \geq \sqrt{2} v_{\perp}(\gamma)$. Это влечет неравенства $v(\gamma) \geq v_{\perp}(\gamma)$ и $|\gamma| \leq \sqrt{2} v(\gamma)$, кроме того, $v(\gamma) \geq \frac{|\gamma|}{\sqrt{2}} \geq \frac{s}{\sqrt{2}} = (C+2)^{2m} l_{\min}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.5. Пусть K – комплекс, не являющийся седлосвязкой, γ – седлосвязка, содержащаяся в K , v – направление этой седлосвязки, C и δ – положительные постоянные.

Если $\delta \leq l_{\min}^2(C)$ и $\delta \leq \frac{\text{Area}(K)}{2m(C+2)^{4m}}$, то найдутся попарно непересекающиеся седлосвязки $\gamma_0 = \gamma, \gamma_1, \dots, \gamma_n$ ($n > 0$) и комплекс $\tilde{K} \subset K$, которые вместе с некоторой последовательностью целых чисел $d_0, d_1, \dots, d_n$ и последовательностью действительных чисел $l_0, l_1, \dots, l_n$ удовлетворяют следующим условиям:

- 1) $l_0 = |\gamma| \geq l_1 \geq \dots \geq l_n \geq l_{\min}$; $d_0 = 0 < d_1 < \dots < d_n \leq d(\tilde{K}) < d(K)$;
- 2) $v(\gamma_i) = (C+2)^{d_i} l_i$; седлосвязка γ_i ограничивает некоторый комплекс K_i , (l_i, δ, C) -близкий к v , причем $d(K_i) = d_i$, $\gamma_0 \subset K_i \subset K$;
- 3) седлосвязки γ_i и γ_{i+1} являются сторонами одного ω -треугольника, этот треугольник содержится в комплексе $\tilde{K}$;
- 4) седлосвязка γ_n (l_n, δ, C, d_n) -изолирована относительно направления v в пределах комплекса K ;
- 5) комплекс $\tilde{K}$ (l_n, δ, C) -изолирован относительно направления v в пределах K ;
- 6) $\text{Area}(\tilde{K}) \leq \frac{1}{2} 2m(C+2)^{4m} \delta \leq \frac{1}{2} \text{Area}(K)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим всевозможные последовательности седлосвязок $\gamma_0 = \gamma, \gamma_1, \dots, \gamma_t$ и комплексов $K_0 = \gamma \subset K_1 \subset \dots \subset K_t \subset K$, которые удовлетворяют следующим условиям:

- A1) комплекс K_i не имеет надразов, седлосвязка γ_i ограничивает K_i , и $v(K_i) = v(\gamma_i)$;
- A2) $l_0 = |\gamma| \geq l_1 \geq \dots \geq l_t \geq l_{\min}$, где $l_i = \frac{v(\gamma_i)}{(C+2)^{d(K_i)}}$, $0 \leq i \leq t$;
- A3) комплекс K_i (l_i, δ, C) -близок к направлению v ; при $i < t$ комплекс K_{i+1} также (l_i, δ, C) -близок к v ;
- A4) комплекс K_{i+1} отличается от K_i единственным ω -треугольником T_i , причем γ_i – одна из сторон T_i и $\text{Area}(T_i) \leq \frac{1}{2} \delta (C+2)^{4m}$.

Хотя бы одна такая пара последовательностей существует (например, для $t = 0$). Среди всех пар выберем ту, для которой t максимально (такая найдется, поскольку $t = d(K_t) \leq 2m$). Утверждается, что выбранная пара последовательностей удовлетворяет дополнительному условию:

- A5) седлосвязка γ_t (l_t, δ, C, t) -изолирована относительно направления v в пределах комплекса K .

Действительно, в противном случае мы воспользуемся леммой 4.3 и построим (l_t, δ, C) -близкий к v комплекс $K_{t+1} \subset K$, который содержит комплекс K_t и отличается от последнего единственным ω -треугольником T_t , причем γ_t – одна из сто-

рон T_t , а $\text{Area}(T_t) \leq \frac{1}{2}\delta(C+2)^{4m}$. Устраним в комплексе K_{t+1} все надрезы, если таковые имеются (т.е. добавим точки надрезов к внутренности комплекса). По построению $\text{Area}(K_{t+1}) \leq (t+1)\frac{1}{2}\delta(C+2)^{4m} \leq \frac{1}{2}2m(C+2)^{4m}\delta$, что не превосходит $\frac{1}{2}\text{Area}(K)$ ввиду выбора δ . В частности, граница комплекса K_{t+1} все еще непуста. Пусть γ_{t+1} — седлосвязка на границе K_{t+1} , для которой $v(\gamma_{t+1}) = v(K_{t+1})$. Положим $l_{t+1} = \frac{v(\gamma_{t+1})}{(C+2)^{t+1}}$. Из (l_t, δ, C) -близости K_{t+1} к направлению v следует, что $l_{t+1} \leq l_t$; при этом комплекс K_{t+1} также и (l_{t+1}, δ, C) -близок к v . Наконец, $l_{t+1} \geq l_{\min}$ ввиду леммы 4.4. Тем самым, последовательности седлосвязок $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{t+1}$ и комплексов $K_0, K_1, \dots, K_{t+1}$ удовлетворяют условиям A1)–A4), что противоречит выбору t .

Теперь, исходя из свойства A4), подберем номера $t_0 < t_1 < \dots < t_n = t$ так, чтобы $\gamma_{t_0} = \gamma$, а при $0 \leq i \leq n-1$ седлосвязка $\gamma_{t_{i+1}}$ была отличной от γ_{t_i} стороной треугольника T_{t_i} . Не уменьшая общности, можно считать седлосвязки $\gamma_{t_0} = \gamma, \gamma_{t_1}, \dots, \gamma_{t_n}$ попарно различными. Тогда из условия A1) и вложенности друг в друга комплексов $K_0, K_1, \dots, K_t$ следует, что эти седлосвязки попарно не пересекаются.

Продолжим построение. Рассмотрим последовательности комплексов $\tilde{K}_0 = K_t \subset \tilde{K}_1 \subset \dots \subset \tilde{K}_u \subset K$, удовлетворяющие условиям:

- B1) $\tilde{K}_i$ не имеет надрезов и (l_t, δ, C) -близок к направлению v ;
- B2) $\tilde{K}_{i+1}$ отличается от $\tilde{K}_i$ единственным треугольником, площадь которого не больше $\frac{1}{2}\delta(C+2)^{4m}$.

Такие последовательности существуют, например, одноэлементная (при $u = 0$). Выберем среди них последовательность наибольшей длины. Для этой последовательности выполнено еще одно свойство:

- B3) комплекс $\tilde{K}_u$ (l_t, δ, C) -изолирован относительно направления v в пределах K .

Оно устанавливается так же, как и свойство A5) выше. По построению $d(\tilde{K}_u) = t + u \geq t$. Далее,

$$\text{Area}(\tilde{K}_u) \leq d(\tilde{K}_u) \cdot \frac{1}{2}\delta(C+2)^{4m} \leq 2m \cdot \frac{1}{2}\delta(C+2)^{4m} \leq \frac{1}{2}\text{Area}(K),$$

отсюда, в частности, $d(\tilde{K}_u) < d(K)$.

Подытоживая все сказанное, получаем, что седлосвязки $\gamma, \gamma_{t_1}, \dots, \gamma_{t_n}$ и комплекс $\tilde{K}_u$ вместе с последовательностью номеров $0, t_1, \dots, t_n$ и последовательностью действительных чисел $l_0, l_1, \dots, l_n$ удовлетворяют условиям 1)–6).

Пусть K — некоторый комплекс, Γ — ограничивающая его седлосвязка. Для каждого $L > 0$ обозначим через $N_1(K, \Gamma; L)$ число седлосвязок γ , удовлетворяющих следующим условиям:

- S1) $|\gamma| \leq L|\Gamma|$;
- S2) γ и Γ — стороны некоторого ω -треугольника T_γ , содержащегося в K .

Через $N_2(K, \Gamma; L)$ обозначим число седлосвязок γ , которые дополнительно удовлетворяют еще двум условиям:

- S3) угол между γ и Γ в треугольнике T_γ острый;
- S4) $|\gamma| \geq |\Gamma|/2$.

Промежуточным этапом на пути к доказательству теоремы 4.1 будет получение оценки на величину $N_1(K, \Gamma; L)$, к чему мы и приступаем. Конечным результатом здесь является теорема 4.15.

ЛЕММА 4.6. $N_1(K, \Gamma; L) \leq 3 \cdot N_2(K, \Gamma; L + 1)$ для любого $L > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для каждой седлосвязки γ , удовлетворяющей условиям S1) и S2), через $\tilde{\gamma}$ обозначим отличную от γ и Γ сторону треугольника T_γ . Если γ не удовлетворяет хотя бы одному из условий S3) и S4), то, очевидно, $\tilde{\gamma}$ удовлетворяет обоим. Кроме того, $\tilde{\gamma}$ удовлетворяет условию S2) и $|\tilde{\gamma}| \leq |\gamma| + |\Gamma| \leq (L + 1)|\Gamma|$. Далее заметим, что ω -треугольник со сторонами $\tilde{\gamma}$ и Γ определен однозначно, если указано, по какую сторону от каждой из этих седлосвязок он находится. Тем самым, таких треугольников не более четырех, причем, как легко видеть, не более чем в двух из них угол между $\tilde{\gamma}$ и Γ острый. Следовательно, произвольная седлосвязка может выступать в роли $\tilde{\gamma}$ для не более чем двух седлосвязок γ , не удовлетворяющих условию S3) или S4), что и влечет требуемую оценку.

Пусть C, δ, L – положительные числа, а n, n_1, n_2 – целые числа, $0 \leq n, n_1, n_2 < 2m$. Скажем, что попарно непересекающиеся седлосвязки $\gamma_0, \dots, \gamma_n$ и комплекс $\tilde{K} \subset K$ обладают свойством $P_3 = P_3(K, \Gamma; C, \delta, L; n, n_1, n_2)$, если для некоторого направления v , последовательности номеров $d_0, \dots, d_n$ и последовательности чисел $l_0, \dots, l_n$ имеем следующее:

- а) выполнены условия 1)–6) из предложения 4.5;
- б) $d_n = n_1, d(\tilde{K}) = n_2$;
- в) γ_0 удовлетворяет свойствам S1)–S4).

Число всех таких наборов обозначим через $N_3(K, \Gamma; C, \delta, L; n, n_1, n_2)$.

ЛЕММА 4.7. Если $\delta \leq l_{\min}^2(C)$ и $\delta \leq \frac{\text{Area}(K)}{2m(C+2)^{4m}}$, то

$$N_2(K, \Gamma; L) \leq \sum_{0 \leq n, n_1, n_2 < d(K)} N_3(K, \Gamma; C, \delta, L; n, n_1, n_2) \quad \text{для любого } L > 0.$$

Доказательство немедленно следует из предложения 4.5.

Далее, пусть $\tilde{L}, \sigma$ – положительные числа, $0 < \sigma < 1$; $k_0, \dots, k_n$ – неотрицательные целые числа. Определение свойства

$$\tilde{P}_3 = \tilde{P}_3(K, \Gamma; C, \delta, L, \sigma, \tilde{L}; n, n_1, n_2; k_0, \dots, k_n)$$

получается из определения свойства P_3 , если заменить пункт в) последнего следующими двумя:

- в') γ_0 удовлетворяет свойствам S1) и S2);
- г') $\sigma L_i |\Gamma| \leq v(\gamma_i) \leq L_i |\Gamma|$, где $L_i = \sigma^{k_i} \tilde{L}$, $0 \leq i \leq n$.

Число наборов со свойством $\tilde{P}_3$ обозначим через

$$\tilde{N}_3(K, \Gamma; C, \delta, L, \sigma, \tilde{L}; n, n_1, n_2; k_0, \dots, k_n).$$

ЛЕММА 4.8. Пусть седлосвязки $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_n$ и комплекс $\tilde{K}$ удовлетворяют свойству $P_3(K, \Gamma; C, \delta, L; n, n_1, n_2)$. Если $\delta \leq l_{\min}^2(C)$, то

$$\frac{1}{4}|\Gamma| \leq v(\gamma_i) \leq (C+2)^{n_1}L|\Gamma|, \quad 0 \leq i \leq n.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оценка сверху очевидна:

$$v(\gamma_i) = (C+2)^{d_i}l_i \leq (C+2)^{n_1}|\gamma_0| \leq (C+2)^{n_1}L|\Gamma|.$$

Далее, согласно свойствам S2)–S4), γ_0 и Γ – стороны одного ω -треугольника $T \subset K$, причем угол между ними в этом треугольнике острый и $|\gamma_0| \geq |\Gamma|/2$. Ввиду условия 2) предложения 4.5 седлосвязка γ_i ограничивает некий комплекс K_i , $\gamma_0 \subset K_i \subset K$. Если одна из седлосвязок γ_0, Γ ограничивает K_i , то $|K_i| \geq \frac{1}{2}|\Gamma|$. В противном случае γ_0 лежит внутри комплекса K_i , а Γ – снаружи. Тогда на границе K_i найдется седлосвязка $\tilde{\gamma}$, которая пересекает треугольник T , выходя из общей вершины сторон γ_0 и Γ . Поскольку угол между γ_0 и Γ острый, длина $\tilde{\gamma}$ не меньше $\frac{1}{\sqrt{2}} \min(|\gamma_0|, |\Gamma|) \geq \frac{1}{2\sqrt{2}}|\Gamma|$.

Итак, в любом случае $|K_i| \geq \frac{1}{2\sqrt{2}}|\Gamma|$. Согласно тому же условию 2) комплекс K_i (l_i, δ, C) -близок к направлению v , поэтому ввиду леммы 4.4 $v(K_i) \geq \frac{1}{\sqrt{2}}|K_i| \geq \frac{1}{4}|\Gamma|$. Наконец, $v(\gamma_i) = v(K_i)$.

СЛЕДСТВИЕ 4.9. При $\delta \leq l_{\min}^2(C)$ имеем:

$$N_3(K, \Gamma; C, \delta, L; n, n_1, n_2) \leq \sum_{0 \leq k_0, \dots, k_n \leq k(L, \sigma, C; n_1)} \tilde{N}_3(K, \Gamma; C, \delta, L, \sigma, (C+2)^{n_1}L; n, n_1, n_2; k_0, \dots, k_n),$$

$$\text{где } k(L, \sigma, C; n_1) = \log_{1/\sigma}(4(C+2)^{n_1}L).$$

Обозначим через $S_4(K, \Gamma; C, \delta, \sigma, L; n, n_1)$ множество седлосвязок, которые входят в качестве γ_n в наборы $\gamma_0, \dots, \gamma_n, \tilde{K}$, удовлетворяющие свойству

$$\tilde{P}_3 = \tilde{P}_3(K, \Gamma; C, \delta, L', \sigma, \tilde{L}; n, n_1, n_2; k_0, \dots, k_n)$$

для каких-либо значений $L', \tilde{L}; n_2; k_0, \dots, k_n$ таких, что $\sigma^{k_n}\tilde{L} = L$. Мощность этого множества обозначим через $N_4(K, \Gamma; C, \delta, \sigma, L; n, n_1)$.

ЛЕММА 4.10. Пусть γ и $\tilde{\gamma}$ – седлосвязки из множества $S_4(K, \Gamma; C, \delta, \sigma, L; n, n_1)$, которые пересекаются. Если $\delta \leq l_{\min}^2(C)$ и $C\sigma \geq \sqrt{2}$, то

$$\angle(\gamma, \tilde{\gamma}) > \delta \left(\frac{C}{\sqrt{2}} - 1 \right) \frac{(C+2)^{2n_1}}{L^2|\Gamma|^2}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Здесь и в дальнейшем угол между двумя седлосвязками, между седлосвязкой и направлением, между двумя направлениями выбирается лежащим в пределах от 0 до $\pi/2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 4.10. Согласно определению множества S_4 седлосвязка $\gamma(l, \delta, C, n_1)$ -изолирована относительно некоторого направления v в пределах комплекса K , а седлосвязка $\tilde{\gamma}(\tilde{l}, \delta, C, n_1)$ -изолирована относительно некоторого направления $\tilde{v}$ в пределах K , причем $v(\gamma) = (C+2)^{n_1}l$, $\tilde{v}(\tilde{\gamma}) = (C+2)^{n_1}\tilde{l}$, $\sigma L|\Gamma| \leq v(\gamma)$, $\tilde{v}(\tilde{\gamma}) \leq L|\Gamma|$, $l \geq l_{\min}(C)$, $\tilde{l} \geq l_{\min}(C)$.

Пусть для определенности $l \geq \tilde{l}$. Поскольку седлосвязка $\gamma(l, \delta, C, n_1)$ -близка к направлению v , $v_{\perp}(\gamma) \leq (C+2)^{n_1}\delta/l$. Тогда:

$$\angle(\gamma, v) \leq \operatorname{tg} \angle(\gamma, v) = \frac{v_{\perp}(\gamma)}{v(\gamma)} \leq \frac{(C+2)^{n_1}\delta/l}{(C+2)^{n_1}l} = \frac{\delta}{l^2}.$$

Далее, $\tilde{v}(\tilde{\gamma}) \leq \frac{1}{\sigma}v(\gamma)$, а с учетом леммы 4.4 $|\tilde{\gamma}| \leq \sqrt{2}\tilde{v}(\tilde{\gamma})$; отсюда

$$v(\tilde{\gamma}) \leq |\tilde{\gamma}| \leq \sqrt{2}\tilde{v}(\tilde{\gamma}) \leq \frac{\sqrt{2}}{\sigma}v(\gamma).$$

Поскольку $C\sigma \geq \sqrt{2}$, имеем: $v(\tilde{\gamma}) \leq C v(\gamma) = C(C+2)^{n_1}l$. Ввиду изолированности седлосвязки γ относительно направления v из полученной оценки следует, что $v_{\perp}(\tilde{\gamma}) > C(C+2)^{n_1}\delta/l$. Тогда

$$\angle(\tilde{\gamma}, v) \geq \sin \angle(\tilde{\gamma}, v) = \frac{v_{\perp}(\tilde{\gamma})}{|\tilde{\gamma}|} > \frac{C(C+2)^{n_1}\delta/l}{\sqrt{2}\tilde{v}(\tilde{\gamma})} = \frac{C}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\delta}{l\tilde{l}} \geq \frac{C}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\delta}{l^2}.$$

Осталось заметить, что $\angle(\gamma, \tilde{\gamma}) \geq \angle(\tilde{\gamma}, v) - \angle(\gamma, v)$, а согласно доказанному выше

$$\angle(\tilde{\gamma}, v) - \angle(\gamma, v) > \left(\frac{C}{\sqrt{2}} - 1\right) \frac{\delta}{l^2} = \delta \left(\frac{C}{\sqrt{2}} - 1\right) \frac{(C+2)^{2n_1}}{(v(\gamma))^2} \geq \delta \left(\frac{C}{\sqrt{2}} - 1\right) \frac{(C+2)^{2n_1}}{L^2|\Gamma|^2}.$$

ЛЕММА 4.11. Если $\delta \leq l_{\min}^2(C)$ и $C\sigma \geq \sqrt{2}$, то

$$N_4(K, \Gamma; C, \delta, \sigma, L; n, n_1) \leq 3m \left(\frac{2\pi \cdot \operatorname{Area}(K) \cdot 1/\sigma}{\delta \left(\frac{C}{\sqrt{2}} - 1\right)(C+2)^{n_1}} L + \frac{2(1/\sigma)^2}{\frac{C}{\sqrt{2}} - 1} + 1 \right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть γ -седлосвязка из множества $S_4(K, \Gamma; C, \delta, \sigma, L; n, n_1)$, $\gamma_0, \dots, \gamma_n = \gamma$, $\tilde{K}$ -соответствующий набор, удовлетворяющий свойству $\tilde{P}_3$, v -направление седлосвязки γ_0 . Седлосвязки γ_0 и Γ -стороны одного треугольника T , который содержится в комплексе K , поэтому

$$\sin \angle(\Gamma, \gamma_0) = \frac{2 \operatorname{Area}(T)}{|\Gamma| |\gamma_0|} \leq \frac{2 \operatorname{Area}(K)}{|\Gamma| |\gamma_0|}.$$

Отсюда

$$\angle(\Gamma, v) = \angle(\Gamma, \gamma_0) \leq \frac{\pi}{2} \sin \angle(\Gamma, \gamma_0) \leq \frac{\pi \operatorname{Area}(K)}{|\Gamma| |\gamma_0|}.$$

Ввиду свойства $\tilde{P}_3$ $\sigma L|\Gamma| \leq v(\gamma) \leq L|\Gamma|$ и $v(\gamma) \leq (C+2)^{n_1}|\gamma_0|$, тогда:

$$\angle(\Gamma, v) \leq \frac{\pi \text{Area}(K)}{\sigma L|\Gamma|^2} (C+2)^{n_1}.$$

Далее,

$$\angle(\gamma, v) \leq \text{tg } \angle(\gamma, v) = \frac{v_\perp(\gamma)}{v(\gamma)} \leq \frac{(C+2)^{n_1}\delta/l}{(C+2)^{n_1}l} = \frac{\delta}{l^2},$$

где $v(\gamma) = (C+2)^{n_1}l$. Еще раз применяя неравенство $\sigma L|\Gamma| \leq v(\gamma)$, получим:

$$\angle(\gamma, v) \leq \frac{\delta(C+2)^{2n_1}}{\sigma^2 L^2 |\Gamma|^2}.$$

Итого:

$$\angle(\Gamma, \gamma) \leq \angle(\Gamma, v) + \angle(\gamma, v) \leq \frac{\pi \text{Area}(K)}{\sigma L|\Gamma|^2} (C+2)^{n_1} + \frac{\delta(C+2)^{2n_1}}{\sigma^2 L^2 |\Gamma|^2}.$$

Правую часть полученного неравенства обозначим через φ . Ввиду доказанного направления всех седлосвязок из множества S_4 принадлежат некоторой дуге угловой длины 2φ . Разобьем эту дугу на поддуги длины

$$\varphi_0 = \delta \left(\frac{C}{\sqrt{2}} - 1 \right) \frac{(C+2)^{2n_1}}{L^2 |\Gamma|^2}$$

и, возможно, еще одну поддугу длины меньше φ_0 . Количество поддуг не больше $\frac{2\varphi}{\varphi_0} + 1$. Согласно лемме 4.10 седлосвязки из множества S_4 , направления которых принадлежат одной поддуге, не пересекаются; тогда согласно предложению 4.2 число таких седлосвязок не превосходит $3m$. Отсюда

$$N_4(K, \Gamma; C, \delta, \sigma, L; n, n_1) \leq 3m \left(\frac{2\varphi}{\varphi_0} + 1 \right),$$

что после подстановки выражений для φ и φ_0 дает утверждение леммы.

Пусть γ – произвольная седлосвязка, K – некоторый комплекс. Скажем, что комплекс $\tilde{K} \subset K$ обладает свойством $P_5(K, \gamma; C, \delta; n_1, n_2)$, если для некоторого направления v и действительного числа $l \geq l_{\min}(C)$ имеем следующее:

- а) седлосвязка $\gamma(l, \delta, C, n_1)$ -близка к направлению v и $v(\gamma) = (C+2)^{n_1}l$;
- б) комплекс $\tilde{K}(l, \delta, C)$ -изолирован относительно v в пределах комплекса K и $d(\tilde{K}) = n_2$.

Через $N_5(K, \gamma; C, \delta; n_1, n_2)$ обозначим число комплексов со свойством P_5 . Множество седлосвязок, ограничивающих такие комплексы, обозначим через $\tilde{S}_5(K, \gamma; C, \delta; n_1, n_2)$.

ЛЕММА 4.12. Если $\delta \leq l_{\min}^2(C)$ и $C \geq 4\sqrt{2}$, то множество $\tilde{S}_5(K, \gamma; C, \delta; n_1, n_2)$ состоит из попарно непересекающихся седлосвязок.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное: две седлосвязки γ' и γ'' из множества $\tilde{S}_5(K, \gamma; C, \delta; n_1, n_2)$ пересекаются. Пусть K' и K'' — удовлетворяющие свойству P_5 комплексы, на границе которых лежат, соответственно, γ' и γ'' . Пусть v', v'' и l', l'' — соответствующие комплексам K' и K'' направления и действительные числа. Согласно условию а) из определения свойства P_5 имеем:

$$\begin{aligned} v'(\gamma) &= (C+2)^{n_1} l', & v'_\perp(\gamma) &\leq (C+2)^{n_1} \delta / l', \\ v''(\gamma) &= (C+2)^{n_1} l'', & v''_\perp(\gamma) &\leq (C+2)^{n_1} \delta / l'', \end{aligned}$$

отсюда

$$\angle(v', \gamma) \leq \operatorname{tg} \angle(v', \gamma) = \frac{v'_\perp(\gamma)}{v'(\gamma)} \leq \frac{(C+2)^{n_1} \delta / l'}{(C+2)^{n_1} l'} = \frac{\delta}{(l')^2},$$

и, аналогично,

$$\angle(v'', \gamma) \leq \frac{\delta}{(l'')^2}.$$

Тогда

$$\angle(v', v'') \leq \angle(v', \gamma) + \angle(v'', \gamma) \leq \frac{\delta}{(l')^2} + \frac{\delta}{(l'')^2}.$$

Из леммы 4.4 следует, что $\frac{1}{\sqrt{2}}|\gamma| \leq v'(\gamma), v''(\gamma) \leq |\gamma|$. В частности, $\frac{1}{\sqrt{2}} \leq l'/l'' \leq \sqrt{2}$, поэтому угол $\angle(v', v'')$ не превосходит как $3\frac{\delta}{(l')^2}$, так и $3\frac{\delta}{(l'')^2}$.

Теперь используем условие б) из определения свойства P_5 . Пусть для определенности $l' \geq l''$. Седлосвязка γ' ограничивает комплекс K' , поэтому $v'(\gamma') \leq (C+2)^{n_2} l', v'_\perp(\gamma') \leq (C+2)^{n_2} \delta / l'$, отсюда

$$\angle(v', \gamma') \leq \operatorname{tg} \angle(v', \gamma') \leq \frac{(C+2)^{n_2} \delta / l'}{v'(\gamma')}.$$

С другой стороны, γ' пересекает границу комплекса K'' , поэтому $v''(\gamma') > C(C+2)^{n_2} l''$ или $v''_\perp(\gamma') > C(C+2)^{n_2} \delta / l''$. Первое из этих двух неравенств не имеет места, так как ввиду леммы 4.4

$$v''(\gamma') \leq |\gamma'| \leq \sqrt{2} v'(\gamma') \leq \sqrt{2} (C+2)^{n_2} l' \leq 2(C+2)^{n_2} l'',$$

а $C \geq 2$. Тем самым, выполнено второе неравенство, из которого следует, что

$$\angle(v'', \gamma') \geq \sin \angle(v'', \gamma') > \frac{C(C+2)^{n_2} \delta / l''}{|\gamma'|} \geq \frac{C(C+2)^{n_2} \delta / l'}{\sqrt{2} v'(\gamma')}.$$

В результате

$$\angle(v', v'') \geq \angle(v'', \gamma') - \angle(v', \gamma') > \left(\frac{C}{\sqrt{2}} - 1 \right) \frac{(C+2)^{n_2} \delta / l'}{v'(\gamma')} \geq \left(\frac{C}{\sqrt{2}} - 1 \right) \frac{\delta}{(l')^2},$$

что при $C \geq 4\sqrt{2}$ противоречит полученной ранее оценке $\angle(v', v'') \leq 3\frac{\delta}{(l')^2}$.

СЛЕДСТВИЕ 4.13. Если $\delta \leq l_{\min}^2(C)$ и $C \geq 4\sqrt{2}$, то

$$N_5(K, \gamma; C, \delta; n_1, n_2) \leq 2^{3m+1}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как седлосвязки из множества $\tilde{S}_5(K, \gamma; C, \delta; n_1, n_2)$ попарно не пересекаются, их число согласно предложению 4.2 не превосходит $3m$. Далее, седлосвязки, ограничивающие произвольный комплекс со свойством P_5 , образуют подмножество в $\tilde{S}_5(K, \gamma; C, \delta; n_1, n_2)$, поэтому число всевозможных границ не больше 2^{3m} . Наконец, произвольный набор седлосвязок может выступать в качестве границы для не более чем двух комплексов.

Пусть K – комплекс, не являющийся седлосвязкой, Γ – седлосвязка на границе K . Пусть функция $\tilde{N}(L)$ такова, что для любого комплекса $\tilde{K} \subset K$, $0 < d(\tilde{K}) < d(K)$, $\text{Area}(\tilde{K}) \leq m(C+2)^{4m}\delta$, с седлосвязкой $\tilde{\Gamma}$ на границе и для любого $L > 0$ имеем

$$N_1(\tilde{K}, \tilde{\Gamma}; L) \leq \tilde{N}(L).$$

ЛЕММА 4.14. Если $\delta \leq l_{\min}^2(C)$ и $C \geq 4\sqrt{2}$, то

$$\begin{aligned} \tilde{N}_3(K, \Gamma; C, \delta, L, \sigma, \tilde{L}; n, n_1, n_2; k_0, \dots, k_n) \\ \leq N_4(K, \Gamma; C, \delta, \sigma, L_n; n, n_1) \cdot 2^{3m+1} \cdot \prod_{i=0}^{n-1} \tilde{N}\left(\frac{\sqrt{2}}{\sigma} \frac{L_i}{L_{i+1}}\right), \end{aligned}$$

где $L_i = \sigma^{k_i} \tilde{L}$, $0 \leq i \leq n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нужно оценить число наборов $\gamma_0, \dots, \gamma_n, \tilde{K}$, для которых выполнено свойство

$$\tilde{P}_3(K, \Gamma; C, \delta, L, \sigma, \tilde{L}; n, n_1, n_2; k_0, \dots, k_n).$$

Число седлосвязок, которые могут выступать в качестве γ_n в таком наборе, не больше $N_4(K, \Gamma; C, \delta, \sigma, L_n; n, n_1)$. При фиксированной седлосвязке γ_n число комплексов, могущих выступать в качестве $\tilde{K}$, не превосходит $N_5(K, \gamma_n; C, \delta; n_1, n_2)$, что ввиду следствия 4.13 не больше 2^{3m+1} . При $n = 0$ доказательство на этом заканчивается. При $n > 0$ еще остается показать, что при фиксированных седлосвязках $\gamma_{i+1}, \dots, \gamma_n$ и комплексе $\tilde{K}$ множество S седлосвязок, которые входят в качестве γ_i в набор со свойством $\tilde{P}_3$, содержит не более $\tilde{N}\left(\frac{\sqrt{2}}{\sigma} \frac{L_i}{L_{i+1}}\right)$ элементов.

Добавим седлосвязку γ_{i+1} к границе комплекса $\tilde{K}$ в качестве надреза (если только она уже не ограничивает $\tilde{K}$); полученный комплекс обозначим через $\tilde{K}_{i+1}$. Он содержится в K , $\text{Area}(\tilde{K}_{i+1}) = \text{Area}(\tilde{K}) \leq m(C+2)^{4m}\delta$ и $0 < d(\tilde{K}_{i+1}) = d(\tilde{K}) < d(K)$, поэтому $N_1(\tilde{K}_{i+1}, \gamma_{i+1}; L) \leq \tilde{N}(L)$ для любого $L > 0$. Пусть γ – седлосвязка из множества S . Тогда седлосвязки γ и γ_{i+1} суть две стороны одного ω -треугольника, который содержится в $\tilde{K}$, а потому и в $\tilde{K}_{i+1}$. Далее,

$\sigma L_{i+1}|\Gamma| \leq v(\gamma_{i+1}) \leq L_{i+1}|\Gamma|$, $\sigma L_i|\Gamma| \leq v(\gamma) \leq L_i|\Gamma|$ для соответствующего направления v , причем $|\gamma| \leq \sqrt{2} v(\gamma)$ ввиду леммы 4.4. Отсюда

$$\begin{aligned} |\gamma| &\leq \sqrt{2} v(\gamma) \leq \sqrt{2} L_i |\Gamma| = \frac{\sqrt{2}}{\sigma} \frac{L_i}{L_{i+1}} \sigma L_{i+1} |\Gamma| \\ &\leq \frac{\sqrt{2}}{\sigma} \frac{L_i}{L_{i+1}} v(\gamma_{i+1}) \leq \frac{\sqrt{2}}{\sigma} \frac{L_i}{L_{i+1}} |\gamma_{i+1}|. \end{aligned}$$

Таким образом, мощность множества S не превышает

$$N_1\left(\tilde{K}_{i+1}, \gamma_{i+1}; \frac{\sqrt{2}}{\sigma} \frac{L_i}{L_{i+1}}\right) \leq \tilde{N}\left(\frac{\sqrt{2}}{\sigma} \frac{L_i}{L_{i+1}}\right).$$

Положим $\tilde{N}_1(1; L) = A_1 L$, а при $d > 1$:

$$\tilde{N}_1(d; L) = A_d L (\log_4(B_d L))^{r_d},$$

где $A_d = (3 \cdot 2^6)^{(2m)^d}$, $B_d = (2^{6m})^{d-1}$, $r_d = (2m)^{d-1}$. Заметим, что $2 \leq \tilde{N}_1(d; L) \leq \tilde{N}_1(d+1; L)$ при $L \geq 1$, $d = 1, 2, \dots$

ТЕОРЕМА 4.15. Пусть K – комплекс, $0 < d(K) < 2m$, и Γ – ограничивающая его седлосвязка. Если $\text{Area}(K) \leq m \cdot s^2$, то

$$N_1(K, \Gamma; L) \leq \tilde{N}_1(d(K); L) \quad \text{при} \quad L \geq 1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проводим индукцию по $d(K)$. При $d(K) = 1$ комплекс K есть ω -треугольник и $N_1(K, \Gamma; L) \leq 2$ при любом $L > 0$; в частности, утверждение теоремы верно.

Теперь предположим, что $d = d(K) > 1$, а утверждение теоремы доказано для всех комплексов $\tilde{K}$ с $d(\tilde{K}) < d$. Положим $C = 6$, $\sigma = 1/4$, $\delta = \frac{\text{Area}(K)}{2m \cdot 8^{4m}}$. При таком выборе постоянных имеют место неравенства $\delta \leq \frac{\text{Area}(K)}{2m(C+2)^{4m}}$, $\delta \leq l_{\min}^2(C)$, $C\sigma \geq \sqrt{2}$, $C \geq 4\sqrt{2}$, что позволяет использовать все ранее доказанные в этом разделе утверждения. Далее, положим $\tilde{N}(L) = \tilde{N}_1(d-1; L)$ при $L \geq 1$ и $\tilde{N}(L) = \tilde{N}_1(d-1; 1)$ при $L < 1$. Из предположения индукции следует, что при таком выборе функции $\tilde{N}(L)$ к рассматриваемому комплексу K применимо утверждение леммы 4.14.

Сначала проведем рассуждения для случая $d-1 > 1$. В первую очередь получим удобную оценку величины $N_4 = N_4(K, \Gamma; C, \delta, \sigma, L; n, n_1)$ при условии $L \geq 1/4$. Подставляя в неравенство из леммы 4.11 конкретные значения C , σ , δ , получим:

$$N_4 \leq 3m \left(\frac{2\pi(2m \cdot 8^{4m}) \cdot 4}{(6/\sqrt{2} - 1)8^{n_1}} L + \frac{32}{6/\sqrt{2} - 1} + 1 \right) \leq m(16\pi m \cdot 8^{4m-n_1} L + 35).$$

Ввиду условия $L \geq 1/4$ имеем:

$$N_4 \leq m(16\pi m \cdot 8^{4m-n_1} + 4 \cdot 35)L = m^2 8^{4m-n_1} \left(16\pi + \frac{140}{m \cdot 8^{4m-n_1}}\right)L.$$

Далее, $m \geq 1, n_1 < d(K) < 2m$, отсюда

$$16\pi + \frac{140}{m \cdot 8^{4m-n_1}} \leq 16\pi + \frac{140}{8^4},$$

что меньше 51. Итак,

$$N_4 \leq (51m^2 \cdot 8^{4m-n_1})L.$$

Теперь из леммы 4.14 получаем, что

$$\begin{aligned} \tilde{N}_3 &= \tilde{N}_3(K, \Gamma; C, \delta, L, \sigma, (C+2)^{n_1}L; n, n_1, n_2; k_0, \dots, k_n) \\ &\leq 51m^2 \cdot 8^{4m-n_1} L_n \cdot 2^{3m+1} \cdot \prod_{i=0}^{n-1} \tilde{N}\left(\frac{\sqrt{2}}{\sigma} \frac{L_i}{L_{i+1}}\right), \\ L_i &= \sigma^{k_i} (C+2)^{n_1} L, \quad 0 \leq i \leq n, \end{aligned} \quad (1)$$

при $0 \leq k_i \leq k(L, \sigma, C; n_1) = \log_{1/\sigma}(4(C+2)^{n_1}L)$, так как условие $k_n \leq k(L, \sigma, C; n_1)$ обеспечивает выполнение неравенства $L_n \geq 1/4$.

Далее рассмотрим две возможности: $n > 0$ и $n = 0$. Пусть $n > 0$. При $\frac{L_i}{L_{i+1}} \geq 1$ также и $\frac{\sqrt{2}}{\sigma} \frac{L_i}{L_{i+1}} = 4\sqrt{2} \frac{L_i}{L_{i+1}} \geq 1$, поэтому

$$\tilde{N}\left(\frac{\sqrt{2}}{\sigma} \frac{L_i}{L_{i+1}}\right) \leq A_{d-1} \cdot 4\sqrt{2} \frac{L_i}{L_{i+1}} \cdot \left(\log_4\left(B_{d-1} \cdot 4\sqrt{2} \frac{L_i}{L_{i+1}}\right)\right)^{r_{d-1}}.$$

Если же $\frac{L_i}{L_{i+1}} < 1$, то $\frac{\sqrt{2}}{\sigma} \frac{L_i}{L_{i+1}} < \frac{\sqrt{2}}{\sigma} = 4\sqrt{2}$ и

$$\tilde{N}\left(\frac{\sqrt{2}}{\sigma} \frac{L_i}{L_{i+1}}\right) \leq A_{d-1} \cdot 4\sqrt{2} \cdot (\log_4(B_{d-1} \cdot 4\sqrt{2}))^{r_{d-1}}.$$

Из условия $0 \leq k_i, k_{i+1} \leq k(L, \sigma, C; n_1)$ следует, что $\frac{L_i}{L_{i+1}} \leq 4(C+2)^{n_1}L$ и $1 \leq 4(C+2)^{n_1}L$. Отсюда следует

$$\begin{aligned} \prod_{i=0}^{n-1} \tilde{N}\left(\frac{\sqrt{2}}{\sigma} \frac{L_i}{L_{i+1}}\right) &\leq (A_{d-1} \cdot 4\sqrt{2})^n \frac{L_0}{L_n} \cdot \left(\prod_{i=0}^{n-1} \max\left(1, \frac{L_{i+1}}{L_i}\right)\right) \\ &\quad \times \left(\log_4(B_{d-1} \cdot 4\sqrt{2} \cdot 4(C+2)^{n_1}L)\right)^{nr_{d-1}}. \end{aligned}$$

Пусть числа $k_0, \dots, k_n$ выбраны так, что $\tilde{N}_3 \neq 0$. Оценим в этом случае произведение $\prod_{i=0}^{n-1} \max\left(1, \frac{L_{i+1}}{L_i}\right)$. Возьмем какие-нибудь седлосвязки $\gamma_0, \dots, \gamma_n$ и комплекс $\tilde{K}$, для которых выполнено свойство $\tilde{P}_3$ с соответствующими параметрами. Пусть v — направление седлосвязки γ_0 , а $d_0 = 0 < d_1 < \dots < d_n = n_1$ — соответствующие целые числа (см. предложение 4.5). Тогда

$$\frac{v(\gamma_{i+1})}{v(\gamma_i)} \leq (C+2)^{d_{i+1}-d_i},$$

а так как $\sigma L_{i+1}|\Gamma| \leq v(\gamma_{i+1}) \leq L_{i+1}|\Gamma|$, $\sigma L_i|\Gamma| \leq v(\gamma_i) \leq L_i|\Gamma|$, имеем:

$$\frac{L_{i+1}}{L_i} \leq \frac{1}{\sigma} (C+2)^{d_{i+1}-d_i}.$$

Отсюда следует

$$\prod_{i=0}^{n-1} \max\left(1, \frac{L_{i+1}}{L_i}\right) \leq (1/\sigma)^n (C+2)^{n_1} = 4^n \cdot 8^{n_1}.$$

Тем самым, при $\tilde{N}_3 \neq 0$ имеем:

$$\begin{aligned} & \prod_{i=0}^{n-1} \tilde{N}\left(\frac{\sqrt{2}}{\sigma} \frac{L_i}{L_{i+1}}\right) \\ & \leq A_{d-1}^{2m-2} (16\sqrt{2})^{2m-2} 8^{n_1} \frac{L_0}{L_n} \left(\log_4\left(B_{d-1} \frac{1}{2\sqrt{2}} 8^{2m} L\right)\right)^{(2m-2)r_{d-1}} \end{aligned}$$

(использовано то, что $n \leq n_1 \leq 2m-2$). Далее, из условий $|\gamma_0| \leq L|\Gamma|$ и $\sigma L_0|\Gamma| \leq |\gamma_0| \leq L_0|\Gamma|$ следует, что $L_0 \leq \frac{1}{\sigma} L = 4L$ при $\tilde{N}_3 \neq 0$. Теперь из (1) получаем, что при $\tilde{N}_3 \neq 0$:

$$\begin{aligned} \tilde{N}_3 & \leq 51m^2 8^{4m} 2^{3m+1} A_{d-1}^{2m-2} (16\sqrt{2})^{2m-2} 4L \left(\log_4\left(B_{d-1} \frac{1}{2\sqrt{2}} 8^{2m} L\right)\right)^{(2m-2)r_{d-1}} \\ & = \frac{51}{2^6} m^2 2^{24m} A_{d-1}^{2m-2} L \left(\log_4\left(B_{d-1} \frac{1}{2\sqrt{2}} 8^{2m} L\right)\right)^{(2m-2)r_{d-1}}. \end{aligned}$$

Правую часть полученного неравенства обозначим через $D(L)$. Очевидно, $D(L) > 0$ при $0 \leq k(L, \sigma, C; n_1)$, так что оценка $\tilde{N}_3 \leq D(L)$ верна при любых значениях $k_0, \dots, k_n$ таких, что $0 \leq k_i \leq k(L, \sigma, C; n_1)$ (а не только при тех значениях, для которых $\tilde{N}_3 \neq 0$).

Теперь обратимся к случаю $n = 0$. Здесь в оценке (1) отсутствуют множители вида $\tilde{N}\left(\frac{\sqrt{2}}{\sigma} \frac{L_i}{L_{i+1}}\right)$, кроме того, $n_1 = 0$ и $L_0 \leq L$. В результате получим:

$$\tilde{N}_3 \leq 51m^2 \cdot 8^{4m-n_1} \cdot 2^{3m+1} L_0 \leq 2 \cdot 51m^2 \cdot 2^{15m} L.$$

Величина $D(L)$ получается из правой части последнего неравенства умножением на

$$\frac{2^{9m}}{2^7} \cdot A_{d-1}^{2m-2} \cdot \left(\log_4 \left(B_{d-1} \frac{1}{2\sqrt{2}} 8^{2m} L \right) \right)^{(2m-2)r_{d-1}}.$$

В рассматриваемом случае $k(L, \sigma, C; n_1) = \log_4(4L)$, поэтому из условия $k(L, \sigma, C; n_1) \geq 0$ следует, что

$$\log_4 \left(B_{d-1} \frac{1}{2\sqrt{2}} 8^{2m} L \right) \geq \log_4 \left(\frac{1}{2\sqrt{2}} 8^2 L \right) > 1.$$

Кроме того, $2^{9m} > 2^6$ и $A_{d-1}^{2m-2} \geq 1$, так что и для $n = 0$ имеем: $\tilde{N}_3 \leq D(L)$ при $0 \leq k_0 \leq k(L, \sigma, C; n_1)$.

Далее считаем, что $L \geq 1$. При этом $k(L, \sigma, C; n_1) > 0$ для любого $n_1 \geq 0$. Поскольку величина $D(L)$ не зависит от $k_0, \dots, k_n$, равно как и от n, n_1, n_2 , из следствия 4.9, а затем из леммы 4.7 получаем:

$$\begin{aligned} N_3(K, \Gamma; C, \delta, L; n, n_1, n_2) &\leq D(L) \cdot (k(L, \sigma, C; n_1) + 1)^{n+1} \\ &= D(L) \cdot (\log_4(4 \cdot 8^{n_1} L) + 1)^{n+1} \\ &\leq D(L) \cdot \left(\log_4 \left(\frac{1}{4} \cdot 8^{2m} L \right) \right)^{2m-1} \end{aligned}$$

и

$$N_2(K, \Gamma; L) \leq D(L) \cdot \left(\log_4 \left(\frac{1}{4} \cdot 8^{2m} L \right) \right)^{2m-1} \cdot (2m)^3.$$

Наконец, при $L \geq 1$ имеем $L + 1 \leq 2L$, тогда ввиду леммы 4.6

$$\begin{aligned} N_1(K, \Gamma; L) &\leq 3 \cdot N_2(K, \Gamma; 2L) \leq 3 \cdot D(2L) \cdot \left(\log_4 \left(\frac{1}{4} 8^{2m} 2L \right) \right)^{2m-1} (2m)^3 \\ &= 3 \frac{51}{2^6} m^2 2^{24m} A_{d-1}^{2m-2} 2L \left(\log_4 \left(B_{d-1} \frac{1}{2\sqrt{2}} 8^{2m} 2L \right) \right)^{(2m-2)r_{d-1}} \\ &\quad \times \left(\log_4 \left(\frac{1}{4} 8^{2m} 2L \right) \right)^{2m-1} (2m)^3 \\ &\leq 40m^5 \cdot 2^{24m} \cdot A_{d-1}^{2m-2} L (\log_4(B_{d-1} \cdot 2^{6m} L))^{(2m-2)r_{d-1} + (2m-1)}. \end{aligned}$$

Заметим, что $B_{d-1} \cdot 2^{6m} = B_d$, а $(2m-2)r_{d-1} + (2m-1) < r_d$ при $d-1 > 1$. Следовательно, для завершения шага индукции достаточно показать, что $40m^5 \cdot 2^{24m} \cdot A_{d-1}^{2m-2} \leq A_d$.

Функция $f(x) = (40x^5)^{1/4x}$ возрастает при $0 < x \leq 40^{-1/5}e < 2$ и убывает при $x \geq 40^{-1/5}e$. Отсюда следует, что $(40m^5)^{1/4m} \leq \max(40^{1/4}, (40 \cdot 2^5)^{1/8}) < 3$. Тогда при $d-1 \geq 1$ имеем:

$$\begin{aligned} 40m^5 \cdot 2^{24m} \cdot A_{d-1}^{2m-2} &= 40m^5 \cdot 2^{24m} \cdot A_{d-1}^{-2} \cdot A_d = \frac{40m^5 \cdot 2^{24m}}{(3 \cdot 2^6)^{2(2m)^{d-1}}} A_d \\ &\leq \frac{40m^5 \cdot 2^{24m}}{(3 \cdot 2^6)^{4m}} A_d = \left(\frac{1}{3} (40m^5)^{1/4m} \right)^{4m} A_d < A_d, \end{aligned}$$

что и требовалось.

Что касается случая $d - 1 = 1$, то рассуждения, аналогичные приведенным выше, позволяют получить здесь следующую оценку:

$$N_1(K, \Gamma; L) \leq 40m^5 \cdot 2^{24m} \cdot A_1^{2m-2} L \left(\log_4 \left(\frac{1}{2} \cdot 2^{6m} L \right) \right)^{2m-1} \quad \text{при } L \geq 1.$$

Поскольку $\frac{1}{2} \cdot 2^{6m} < B_2$, $2m-1 < r_2$, а $40m^5 \cdot 2^{24m} \cdot A_1^{2m-2} < A_2$ (как это показано выше), шаг индукции завершен и в этом случае.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4.1. Пусть плоская структура ω' гомотетична плоской структуре ω с коэффициентом гомотетии λ . Тогда плоские структуры ω и ω' имеют одни и те же седлосвязки, причем длина произвольной седлосвязки относительно ω' в λ раз больше, чем ее длина относительно ω . Отсюда легко следует, что утверждение теоремы одновременно верно или неверно для обеих плоских структур. Тем самым, достаточно рассмотреть случай $s = 1$.

Доказательство, приводимое ниже, во многом аналогично доказательству теоремы 4.15.

Для произвольных $C, \delta, L > 0$ и целых n, n_1, n_2 , где $0 \leq n, n_1, n_2 < 2m$, обозначим через $N'_3(C, \delta, L; n, n_1, n_2)$ число наборов из попарно непересекающихся седлосвязок $\gamma_0, \dots, \gamma_n$ и комплекса $\tilde{K}$ таких, что для некоторых направления v , номеров $d_0, \dots, d_n$, действительных чисел $l_0, \dots, l_n$ имеем:

- а) выполнены условия 1)–6) из предложения 4.5, в которых в качестве объемлющего комплекса K рассматривается вся поверхность M ;
- б) $d_n = n_1$, $d(\tilde{K}) = n_2$;
- в) $|\gamma_0| \leq L$.

Из предложения 4.5 следует, что при $\delta \leq l_{\min}^2(C)$ и $\delta \leq \frac{\text{Area}(M)}{2m(C+2)^{4m}}$

$$N(L) \leq \sum_{0 \leq n, n_1, n_2 < 2m} N'_3(C, \delta, L; n, n_1, n_2) \quad \text{для любого } L > 0. \quad (2)$$

Далее, для целых чисел $k_0, \dots, k_n \geq 0$ и действительного σ , $0 < \sigma < 1$, обозначим через $\tilde{N}'_3(C, \delta, L, \sigma; n, n_1, n_2; k_0, \dots, k_n)$ число тех наборов $\gamma_0, \dots, \gamma_n, \tilde{K}$, которые дополнительно удовлетворяют еще одному условию:

- г) $\sigma L_i \leq v(\gamma_i) \leq L_i$, где $L_i = \sigma^{k_i} (C+2)^{2m-1} L$, $0 \leq i \leq n$.

Пусть седлосвязки $\gamma_0, \dots, \gamma_n$ и комплекс $\tilde{K}$ удовлетворяют условиям а)–в). Тогда $v(\gamma_i) = (C+2)^{d_i} l_i \leq (C+2)^{n_1} |\gamma_0| \leq (C+2)^{2m-1} L$, т.е. условие г) выполнено для некоторых $k_0, \dots, k_n \geq 0$. При $\delta \leq l_{\min}^2(C)$ из леммы 4.4 получаем: $v(\gamma_i) \geq \frac{1}{\sqrt{2}} |\gamma_i| \geq \frac{s}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, так что $L_i \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$. Из условий в), г) следует:

$$L_0 \leq \frac{1}{\sigma} |\gamma_0| \leq \frac{1}{\sigma} L.$$

Итак,

$$L_n \geq \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad L_0 \leq \frac{L}{\sigma}. \quad (3)$$

Далее, при $0 \leq i < n$ имеем:

$$\frac{v(\gamma_i)}{v(\gamma_{i+1})} = \frac{l_i}{l_{i+1}} (C+2)^{d_i-d_{i+1}}.$$

Ввиду неравенств $1 \leq l_i/l_{i+1} \leq |\gamma_0|/l_n$ из условия г), во-первых, следует, что

$$\frac{L_{i+1}}{L_i} \leq \frac{1}{\sigma} (C+2)^{d_{i+1}-d_i},$$

и тогда

$$\prod_{i=0}^{n-1} \max\left(1, \frac{L_{i+1}}{L_i}\right) \leq \left(\frac{1}{\sigma}\right)^n (C+2)^{n_1}, \quad (4)$$

во-вторых,

$$\begin{aligned} \frac{L_i}{L_{i+1}} &\leq \frac{1}{\sigma} (C+2)^{d_i-d_{i+1}} \frac{|\gamma_0|}{l_n} \leq \frac{1}{\sigma} (C+2)^{d_i-d_{i+1}+n_1} \frac{|\gamma_0|}{v(\gamma_n)} \\ &\leq \frac{1}{\sigma} (C+2)^{n_1-1} \frac{L}{v(\gamma_n)} \leq \frac{1}{\sigma} (C+2)^{2m-2} \frac{L}{v(\gamma_n)}, \end{aligned}$$

что ввиду условия $v(\gamma_n) \geq \sigma L_n$ дает:

$$L_i/L_{i+1} \leq \sigma^{-2} (C+2)^{-1} \cdot (C+2)^{2m-1} L/L_n = \sigma^{-2} (C+2)^{-1} \sigma^{-k_n}. \quad (5)$$

Наконец, при $0 \leq i < n$:

$$\frac{L_n}{L_i} \leq \frac{1}{\sigma} \frac{v(\gamma_n)}{v(\gamma_i)} = \frac{1}{\sigma} (C+2)^{d_n-d_i} \frac{l_n}{l_i} \leq \frac{1}{\sigma} (C+2)^{2m-1},$$

и так как $\sigma^{-k_i} = (C+2)^{2m-1} L/L_i$,

$$\begin{aligned} 0 \leq k_i &\leq \log_{1/\sigma} \left(\frac{1}{\sigma} (C+2)^{2m-1} \cdot \frac{(C+2)^{2m-1} L}{L_n} \right) \\ &= \log_{1/\sigma} (\sigma^{-1} (C+2)^{2m-1} \sigma^{-k_n}). \end{aligned} \quad (6)$$

Итого, при $\delta \leq l_{\min}^2(C)$ имеем:

$$N'_3(C, \delta, L; n, n_1, n_2) \leq \sum_{k_0, \dots, k_n} \tilde{N}'_3(C, \delta, L, \sigma; n, n_1, n_2; k_0, \dots, k_n), \quad (7)$$

где сумма распространяется на те значения $k_0, \dots, k_n$, для которых выполнены условия (3)–(6).

Пусть $S'_4(C, \delta, \sigma, L; n_1)$ – множество седлосвязок, каждая из которых для некоторого числа l , $\sigma L \leq l \leq L$, является (l, δ, C, n_1) -изолированной относительно некоторого направления v . Через $N'_4(C, \delta, \sigma, L; n_1)$ обозначим мощность этого множества. Аналогично утверждению леммы 4.14 получаем, что при $\delta \leq l_{\min}^2(C)$ и $C \geq 4\sqrt{2}$:

$$\begin{aligned} &\tilde{N}'_3(C, \delta, L, \sigma; n, n_1, n_2; k_0, \dots, k_n) \\ &\leq N'_4(C, \delta, \sigma, L_n; n_1) \cdot 2^{3m+1} \cdot \prod_{i=0}^{n-1} \tilde{N}'\left(\frac{\sqrt{2}}{\sigma} \frac{L_i}{L_{i+1}}\right), \end{aligned} \quad (8)$$

где функция $\tilde{N}'$ такова, что $N_1(K, \Gamma; \tilde{L}) \leq \tilde{N}'(\tilde{L})$ при $\tilde{L} > 0$ для любого комплекса K с седлосвязкой Γ на границе, удовлетворяющего условиям $0 < d(K) < 2m$ и $\text{Area}(K) \leq m(C+2)^{4m}\delta$. При $\delta \leq l_{\min}^2(C)$ имеем: $m(C+2)^{4m}\delta \leq m \cdot s^2/2 < m \cdot s^2$, тогда из теоремы 4.15 следует, что можно положить:

$$\tilde{N}'(\tilde{L}) = \tilde{N}_1(2m-1; \max(1, \tilde{L})). \quad (9)$$

Если две седлосвязки γ и $\tilde{\gamma}$ из множества $S'_4(C, \delta, \sigma, L; n_1)$ пересекаются, то при $\delta \leq l_{\min}^2(C)$ и $C\sigma \geq \sqrt{2}$:

$$\angle(\gamma, \tilde{\gamma}) > \delta \left(\frac{C}{\sqrt{2}} - 1 \right) \frac{(C+2)^{2n_1}}{L^2}.$$

Это неравенство доказывается точно так же, как и неравенство в лемме 4.10. Правую часть его обозначим через φ_0 . Седлосвязки из множества $S'_4(C, \delta, \sigma, L; n_1)$, направления которых принадлежат фиксированной дуге длины φ_0 , не пересекаются между собой, поэтому их число ввиду предложения 4.2 не превосходит $3m$. Усредняя по всем дугам длины φ_0 и учитывая, что каждой седлосвязке соответствуют два противоположных направления, получаем отсюда, что при $\delta \leq l_{\min}^2(C)$ и $C\sigma \geq \sqrt{2}$:

$$\begin{aligned} N'_4(C, \delta, \sigma, L; n_1) &\leq 3m \cdot \max\left(\frac{\pi}{\varphi_0}, 1\right) \\ &= 3m \cdot \max\left(1, \frac{\pi}{\delta\left(\frac{C}{\sqrt{2}} - 1\right)(C+2)^{2n_1}} L^2\right). \end{aligned} \quad (10)$$

Зафиксируем постоянные C, σ, δ . Положим $C = 6$, $\sigma = 1/4$, $\delta = \frac{1}{4m \cdot 8^{4m}}$. При этом $C\sigma \geq \sqrt{2}$, $C \geq 4\sqrt{2}$, кроме того, $\delta \leq l_{\min}^2(C) = \frac{s^2}{2(C+2)^{4m}}$, так как $s = 1$, и $\delta \leq \frac{\text{Area}(M)}{2m(C+2)^{4m}}$, так как ввиду леммы 3.7 $\text{Area}(M) \geq s^2/2 = 1/2$. Тем самым, применимы неравенства (2), (7), (8), (10). В частности, из неравенства (10) получим:

$$\begin{aligned} N'_4(C, \delta, \sigma, L; n_1) &\leq 3m \cdot \max\left(1, \frac{\pi}{6/\sqrt{2} - 1} \cdot 4m \cdot 8^{4m-2n_1} L^2\right) \\ &\leq 3m \cdot \max(1, 4m \cdot 2^{12m-6n_1} L^2) \\ &= 12m^2 \cdot 2^{12m-6n_1} L^2 \quad \text{при } L \geq \frac{1}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Теперь оценим число $\tilde{N}'_3 = \tilde{N}'_3(C, \delta, L, \sigma; n, n_1, n_2; k_0, \dots, k_n)$ в предположении, что имеют место неравенства (3)–(6). Полученную выше оценку величины N'_4 подставим в неравенство (8) (это можно сделать ввиду условия (3)). Будем иметь:

$$\tilde{N}'_3 \leq 24m^2 \cdot 2^{15m-6n_1} L_n^2 \cdot \prod_{i=0}^{n-1} \tilde{N}'\left(4\sqrt{2} \frac{L_i}{L_{i+1}}\right). \quad (11)$$

Пусть $n > 0$ и $2m - 1 > 1$. Из соотношения (9) получаем:

$$\tilde{N}' \left(4\sqrt{2} \frac{L_i}{L_{i+1}} \right) \leq A_{2m-1} \cdot 4\sqrt{2} \frac{L_i}{L_{i+1}} \left(\log_4 \left(B_{2m-1} \cdot 4\sqrt{2} \frac{L_i}{L_{i+1}} \right) \right)^{r_{2m-1}},$$

если $\frac{L_i}{L_{i+1}} \geq 1$,

$$\tilde{N}' \left(4\sqrt{2} \frac{L_i}{L_{i+1}} \right) \leq A_{2m-1} \cdot 4\sqrt{2} (\log_4 (B_{2m-1} \cdot 4\sqrt{2}))^{r_{2m-1}},$$

если $\frac{L_i}{L_{i+1}} < 1$.

Ввиду условия (5)

$$L_i/L_{i+1} \leq \frac{1}{\sigma^2(C+2)} \sigma^{-k_n} = 2 \cdot 4^{k_n}.$$

При этом даже $L_i/L_{i+1} \leq 4^{k_n}$, так как L_i/L_{i+1} — целочисленная степень $1/\sigma = 4$.
Вместе с неравенством $1 \leq 4^{k_n}$ это дает:

$$\begin{aligned} & \prod_{i=0}^{n-1} \tilde{N}' \left(4\sqrt{2} \frac{L_i}{L_{i+1}} \right) \\ & \leq A_{2m-1}^n (4\sqrt{2})^n \frac{L_0}{L_n} \prod_{i=0}^{n-1} \max \left(1, \frac{L_{i+1}}{L_i} \right) (\log_4 (B_{2m-1} \cdot 4\sqrt{2} 4^{k_n}))^{nr_{2m-1}}. \end{aligned}$$

С учетом условий (3), (4)

$$\begin{aligned} & \prod_{i=0}^{n-1} \tilde{N}' \left(4\sqrt{2} \frac{L_i}{L_{i+1}} \right) \\ & \leq A_{2m-1}^{2m-1} (4\sqrt{2})^n 4 \frac{L}{L_n} (4^n 8^{n_1}) \left(k_n + 3m(2m-2) + \frac{5}{4} \right)^{(2m-1)r_{2m-1}}. \end{aligned}$$

Подставляя в неравенство (11), получим:

$$\begin{aligned} \tilde{N}'_3 & \leq 24m^2 2^{15m-6n_1} L_n^2 A_{2m-1}^{2m-1} (16\sqrt{2})^n \\ & \quad \times 4 \frac{L}{L_n} 8^{n_1} \left(k_n + 3m(2m-2) + \frac{5}{4} \right)^{(2m-1)r_{2m-1}} \\ & \leq 96m^2 2^{15m} (2\sqrt{2})^n A_{2m-1}^{2m-1} \frac{L_n}{L} L^2 (k_n + 6m^2)^{(2m-1)r_{2m-1}}. \end{aligned}$$

Наконец, $L_n/L = (C+2)^{2m-1} \sigma^{k_n} = 8^{2m-1} \cdot 4^{-k_n}$, тогда:

$$\tilde{N}'_3 \leq \frac{96}{2\sqrt{2} \cdot 8} m^2 2^{24m} A_{2m-1}^{2m-1} L^2 \cdot 4^{k_n} (k_n + 6m^2)^{(2m-1)r_{2m-1}}.$$

Согласно условию (6) при $0 \leq i < n$ имеем:

$$0 \leq k_i \leq \log_{1/\sigma}(\sigma^{-1}(C+2)^{2m-1}\sigma^{-k_n}) = \log_4\left(\frac{1}{2}8^{2m} \cdot 4^{k_n}\right) = k_n + 3m - \frac{1}{2},$$

т.е. число возможных значений k_i не превосходит $k_n + 3m$. Поскольку имеющаяся оценка на $\tilde{N}'_3$ не зависит от $k_0, \dots, k_{n-1}$, из неравенства (7) получаем:

$$\begin{aligned} N'_3 &= N'_3(C, \delta, L; n, n_1, n_2) \\ &\leq \frac{96}{2\sqrt{2} \cdot 8} m^2 2^{24m} A_{2m-1}^{2m-1} L^2 \cdot \sum_{k_n=0}^{\infty} (4^{-k_n} (k_n + 6m^2)^{(2m-1)r_{2m-1}} (k_n + 3m)^n) \\ &\leq \frac{96}{2\sqrt{2} \cdot 8} m^2 2^{24m} A_{2m-1}^{2m-1} L^2 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} (4^{-k} (k + 6m^2)^{(2m-1)r_{2m-1} + (2m-1)}). \end{aligned}$$

При $2m-1 > 1$ имеем: $(2m-1)r_{2m-1} + (2m-1) < r_{2m} = (2m)^{2m-1}$. Тогда:

$$N'_3 \leq \frac{96}{2\sqrt{2} \cdot 8} m^2 2^{24m} A_{2m-1}^{2m-1} L^2 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} (4^{-k} (k + 6m^2)^{(2m)^{2m-1}}). \quad (12)$$

Теперь обратимся к случаю, когда $n > 0$ и $2m-1 = 1$. Здесь в выражении для функции $\tilde{N}'$ отсутствует логарифмический множитель, во всем же остальном рассуждения аналогичны вышеприведенным. Конечный результат таков:

$$N'_3 \leq \frac{96}{2\sqrt{2} \cdot 8} m^2 2^{24m} A_{2m-1}^{2m-1} L^2 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} (4^{-k} (k + 3m)^{2m-1}).$$

Оценка (12) вытекает из него очевидным образом.

Что касается случая $n = 0$, то здесь в оценке (11) отсутствуют множители вида $\tilde{N}'\left(4\sqrt{2} \frac{L_i}{L_{i+1}}\right)$, и мы сразу получаем:

$$\tilde{N}'_3 \leq 24m^2 \cdot 2^{15m-6n_1} \cdot L_0^2 = 24m^2 \cdot 2^{15m} (L_0/L)^2 L^2.$$

Но $L_0/L = (C+2)^{2m-1}\sigma^{k_0} = \frac{1}{8} 2^{6m} \cdot 4^{-k_0}$, так что $\tilde{N}'_3 \leq \frac{24}{8^2} m^2 \cdot 2^{27m} L^2 \cdot 4^{-2k_0}$, и согласно неравенству (7)

$$N'_3 \leq \frac{24}{8^2} m^2 \cdot 2^{27m} L^2 \cdot \sum_{k_0=0}^{\infty} 4^{-2k_0}.$$

Поскольку

$$\frac{24}{8^2} 2^{3m} < \frac{96}{2\sqrt{2} \cdot 8} A_{2m-1}^{2m-1},$$

а $4^{-2k_0} \leq 4^{-k_0}$ и $k_0 + 6m^2 > 1$ при $k_0 \geq 0$, оценка (12) верна и в этом случае.

Учитывая, что оценка (12) не зависит от тройки параметров n, n_1, n_2 , из неравенства (2) получаем:

$$N(L) \leq \frac{96}{2\sqrt{2}} m^5 2^{24m} A_{2m-1}^{2m-1} L^2 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(4^{-k} (k + 6m^2)^{(2m)^{2m-1}} \right). \quad (13)$$

Далее рассмотрим два случая: $m > 1$ и $m = 1$. Пусть $m > 1$. В процессе доказательства теоремы 4.15 было установлено, что $40m^5 \leq 3^{4m}$. Поскольку $\frac{96}{2\sqrt{2}} < 40$, имеем: $\frac{96}{2\sqrt{2}} m^5 2^{24m} \leq (3 \cdot 2^6)^{4m}$. Далее,

$$(3 \cdot 2^6)^{4m} \cdot A_{2m-1}^{2m-1} = (3 \cdot 2^6)^{4m + (2m)^{2m-1}(2m-1)} < (3 \cdot 2^6)^{(2m)^{2m}} \quad \text{при } m > 1,$$

так что

$$N(L) \leq (3 \cdot 2^6)^{(2m)^{2m}} \cdot L^2 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(4^{-k} (k + 6m^2)^{(2m)^{2m-1}} \right).$$

Оценим сумму ряда. При $0 \leq k \leq 6m^2$ имеем $k + 6m^2 \leq 12m^2$, а при $k > 6m^2$ имеем $k + 6m^2 < 2k$; отсюда:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{\infty} \left(4^{-k} (k + 6m^2)^{(2m)^{2m-1}} \right) \\ & \leq \sum_{k=0}^{\infty} 4^{-k} \left((12m^2)^{(2m)^{2m-1}} + (2k)^{(2m)^{2m-1}} \right) \\ & \leq \frac{4}{3} (12m^2)^{(2m)^{2m-1}} + 2^{(2m)^{2m-1}} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(e^{-k} \cdot k^{(2m)^{2m-1}} \right). \end{aligned}$$

Обозначим $(2m)^{2m-1}$ через p . Функция $g(x) = e^{-x} x^p$ возрастает при $0 \leq x \leq p$ и убывает при $x \geq p$. Отсюда:

$$\sum_{k=0}^{\infty} e^{-k} k^p \leq \int_0^{\infty} e^{-x} x^p dx + e^{-p} p^p = p! + e^{-p} p^p,$$

что меньше p^p при $p > 1$. Итак,

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{\infty} \left(4^{-k} (k + 6m^2)^{(2m)^{2m-1}} \right) \\ & \leq \frac{4}{3} (12m^2)^{(2m)^{2m-1}} + 2^{(2m)^{2m-1}} \cdot ((2m)^{2m-1})^{(2m)^{2m-1}} \\ & = (2m)^{(2m)^{2m}} \left(\frac{4}{3} \left(\frac{3}{(2m)^{2m-2}} \right)^{(2m)^{2m-1}} + \left(\frac{1}{m} \right)^{(2m)^{2m-1}} \right) \\ & < (2m)^{(2m)^{2m}} \quad \text{при } m > 1. \end{aligned}$$

В результате

$$N(L) \leq (3 \cdot 2^6)^{(2m)^{2m}} \cdot (2m)^{(2m)^{2m}} \cdot L^2 < (400m)^{(2m)^{2m}} \cdot L^2,$$

что и требовалось доказать.

При $m = 1$ из неравенства (13) получаем:

$$N(L) \leq \frac{96}{2\sqrt{2}} \cdot 2^{24} \cdot (3 \cdot 2^6)^2 \cdot L^2 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} 4^{-k} (k+6)^2.$$

Суммы рядов $\sum_{k=0}^{\infty} 4^{-k}$, $\sum_{k=0}^{\infty} (4^{-k} \cdot k)$, $\sum_{k=0}^{\infty} (4^{-k} \cdot k^2)$ равны, соответственно, $\Sigma_0 = 4/3$, $\Sigma_1 = 4/9$, $\Sigma_2 = 20/27$, поэтому сумма ряда $\sum_{k=0}^{\infty} 4^{-k} (k+6)^2$ равна $\Sigma_2 + 12\Sigma_1 + 36\Sigma_0 = 52 \frac{2}{27}$. Тогда:

$$N(L) \leq \frac{96}{2\sqrt{2}} \cdot 2^{24} \cdot (3 \cdot 2^6)^2 \cdot 52 \frac{2}{27} \cdot L^2 < (3 \cdot 2^7)^6 \cdot L^2,$$

что завершает доказательство в этом случае.

Список литературы

1. Земляков А. Н., Каток А. Б. Топологическая транзитивность бильярдов в многоугольниках // Матем. заметки. 1975. Т. 18. № 2. С. 291–300.
2. Kerckhoff S., Masur H., Smillie J. Ergodicity of billiard flows and quadratic differentials // Ann. of Math. 1986. V. 124. № 2. P. 293–311.
3. Pospiech F., Stepin A. M. Über die vollständige Nichtintegrierbarkeit eines Systems zweier Teilchen auf einem Intervall // Wiss. Z. Univ. Halle. 1988. V. 37. № 4. P. 89–98.
4. Masur H. The growth rate of trajectories of a quadratic differential // Ergodic Theory Dynam. Systems. 1990. V. 10. № 1. P. 151–176.
5. Boshernitzan M. A condition for minimal interval exchange maps to be uniquely ergodic // Duke Math. J. 1985. V. 52. № 3. P. 723–752.
6. Воробец Я. Б. Эргодичность бильярдов в многоугольниках: явные примеры // УМН. 1996. Т. 52. № 4. С. 151–152.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Поступила в редакцию
20.06.1996