Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. М. Заричный, Поглощающие множества для n -мерных пространств в абсолютных борелевских и проективных классах, *Матем. сб.*, 1997, том 188, номер 3, 113–126

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm212>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.90.164.192

26 апреля 2023 г., 13:13:50

УДК 515.12

М. М. Заричный

Поглощающие множества для n -мерных пространств в абсолютных борелевских и проективных классах

Построены поглощающие множества в смысле Бествины и Могильского для n -мерных сепарабельных метрических пространств в абсолютных борелевских и проективных классах.

Библиография: 25 названий.

Метод поглощающих множеств, восходящий к Андерсону [1], Бессаге и Пелчинскому [2], Торуньчику [3] и детально разработанный Бествиной и Могильским [4], играет исключительно важную роль в задачах топологической классификации, характеризации и распознавания бесконечномерных многообразий, моделированных на предгильбертовых пространствах. В частности, Бествина и Могильский в [4] построили теорию многообразий, моделированных на пространствах Ω_α (соответственно, Λ_α), универсальных для абсолютных борелевских пространств мультипликативного (соответственно, аддитивного) класса α . Р. Коти [5] получил аналогичные результаты для абсолютных проективных классов $\mathcal{P}_n$, $n \geq 1$.

В последнее время началось перенесение бесконечномерных результатов на конечномерный случай (небольшой обзор результатов на эту тему можно найти в [6]). Напомним, что исторически первым конечномерным аналогом теории бесконечномерных многообразий явилась теория многообразий, моделированных на менгеровом кубе μ_n (Бествина [7], Дранишников [8]). В классе компактных n -мерных метризуемых пространств менгеров куб μ_n играет ту же роль, что и гильбертов куб Q в классе всех компактных метризуемых пространств.

Упомянутые выше модельные пространства Λ_α и Ω_α обладают каноническими реализациями в Q , например, пространство Λ_1 гомеоморфно так называемой радиальной внутренней Q , $\text{rint } Q = \{(x_i)_{i=1}^\infty \in Q \mid \sup\{|x_i| \mid i \in \mathbb{N}\} < 1\}$; реализации в Q других пространств Λ_α и Ω_α приведены в [4]. Возникает естественный вопрос нахождения n -мерных аналогов пространств Λ_α и Ω_α . Более точная формулировка этого вопроса основана на характеризационном для пространств Λ_α и Ω_α свойстве быть поглощающими множествами для соответствующих абсолютных борелевских классов; она приведена в [9, вопрос 551].

К недавнему времени результаты в этом направлении имелись только для класса $\mathcal{A}_1$ сигма-компактных пространств (т.е. пространств, являющихся счетными объединениями своих компактных подмножеств); см. [10]–[12]. Этот класс лежит в начале борелевской иерархии. Некоторые из построенных поглощающих множеств реализованы в евклидовых пространствах $\mathbb{R}^k$, $k \geq 2n + 1$, в гильбертовом пространстве или гильбертовом кубе.

Настоящая работа содержит положительный ответ на сформулированный выше вопрос для всех абсолютных борелевских и проективных классов $\mathcal{A}_\alpha$, $\mathcal{M}_\alpha$

и $\mathcal{P}_i$. Построенные нами пространства могут служить кандидатами в модельные пространства для теорий n -мерных многообразий, соответствующих Λ_α - и Ω_α -многообразиям (по-видимому, единственным препятствием для построения таких n -мерных теорий является отсутствие характеристической теоремы для пространств Небелинга; см. обсуждение этого вопроса в [13]).

§ 1. Определения и предварительные сведения

Все пространства предполагаются сепарабельными и метризуемыми, все отображения – непрерывными. Через $\text{cov}(X)$ обозначается множество всех открытых покрытий пространства X . Два отображения $f, g : Y \rightarrow X$ называются $\mathcal{U}$ -близкими (обозначается $(f, g) < \mathcal{U}$), $\mathcal{U} \in \text{cov}(X)$, если для каждого $y \in Y$ множество $\{f(y), g(y)\}$ содержится в некотором $U \in \mathcal{U}$. Гомотопия $F : Y \times I \rightarrow X$ называется $\mathcal{U}$ -гомотопией, если для каждого $y \in Y$ множество $F(\{y\} \times I)$ содержится в некотором $U \in \mathcal{U}$.

Для $\mathcal{U} \in \text{cov}(X)$ положим $\text{St}(\mathcal{U}) = \{\bigcup\{V \in \mathcal{U} \mid V \cap U \neq \emptyset\} \mid U \in \mathcal{U}\}$ и, далее, индуктивно, $\text{St}^2(\mathcal{U}) = \text{St}(\text{St}(\mathcal{U}))$, $\dots$. Символ $\mathcal{U} < \mathcal{V}$, где $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in \text{cov}(X)$, означает, что покрытие $\mathcal{U}$ вписано в покрытие $\mathcal{V}$, т.е. для каждого $U \in \mathcal{U}$ существует $V \in \mathcal{V}$ такое, что $U \subset V$.

Генерическая метрика обозначается через d . Для подмножества A метрического пространства X через $O_\varepsilon(A)$ обозначается ε -окрестность A . Для $\mathcal{U} \in \text{cov}(X)$ полагаем $\text{mesh}(\mathcal{U}) = \sup\{\text{diam}(U) \mid U \in \mathcal{U}\}$.

Если $\alpha : X \rightarrow (0, +\infty)$ – функция, то отображение $h : Y \rightarrow X$ называется α -близким к отображению $g : Y \rightarrow X$, если $d(g(y), h(y)) < \alpha(g(y))$ для каждого $y \in Y$.

Пространство X называется *абсолютным экстензором* в размерности n ($AE(n)$ -пространством; обозначается $X \in AE(n)$), $n = 0, 1, 2, \dots$, если для любого пространства Z , $\dim Z \leq n$, и любого отображения $f : A \rightarrow X$ замкнутого подмножества $A \subset Z$ существует продолжение $\bar{f} : Z \rightarrow X$ отображения f . Если в этом определении требовать существования продолжения отображения f только на некоторую окрестность множества A в Z , то получим определение абсолютного окрестностного экстензора в размерности n ($ANE(n)$ -пространства). Согласно классической теореме Куратовского–Дугунджи $ANE(n)$ -пространства совпадают с пространствами, локально связными в размерности $\leq n - 1$ (LC^{n-1} -пространствами).

Замкнутое подмножество A пространства $X \in ANE(n)$, $\dim Z \leq n$, называется Z -множеством (соответственно, сильным Z -множеством) в X , если для каждого $\mathcal{U} \in \text{cov}(X)$ существует отображение $f : X \rightarrow X$, $\mathcal{U}$ -близкое к 1_X и такое, что $f(X) \cap A = \emptyset$ (соответственно, $\overline{f(X)} \cap A = \emptyset$). Вложение $f : X \rightarrow Y$ называется (сильным) Z -вложением, если $f(X)$ – сильное Z -множество в Y .

Следующее утверждение является n -мерным аналогом характеристики Z -множеств в ANR -пространствах (см. [14]).

1.1. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть A – замкнутое подмножество в $ANE(n)$ -пространстве X , $\dim X \leq n$. Следующие условия эквивалентны:

- 1) для каждого отображения $f : I^k \rightarrow X$, $k \leq n$, и каждого $\mathcal{U} \in \text{cov}(X)$ существует отображение $f' : I^k \rightarrow X \setminus A$, $\mathcal{U}$ -близкое к f ;

- 2) A нигде не плотно в X и для каждого отображения $f: I^k \rightarrow X$, $k \leq n$, такого, что $f(\partial I^k) \cap A = \emptyset$, и каждого $\mathcal{U} \in \text{cov}(X)$ существует отображение $f': I^k \rightarrow X \setminus A$, $\mathcal{U}$ -близкое к f и такое, что $f'|_{\partial I^k} = f|_{\partial I^k}$;
- 3) A является Z -множеством в X .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) $\implies$ 2). Для данного отображения $f: I^k \rightarrow X$, $k \leq n$, такого, что $f(\partial I^k) \subset X \setminus A$ и $\mathcal{U} \in \text{cov}(X)$, выберем $\mathcal{V} \in \text{cov}(X)$ такое, что для каждого отображения $g: \partial I^k \rightarrow X$, $\mathcal{V}$ -близкого к $f|_{\partial I^k}$, существует $\mathcal{U}$ -гомотопия, соединяющая $f|_{\partial I^k}$ и $g|_{\partial I^k}$ (существование такой гомотопии вытекает из того, что $X \in ANE(n)$; см. [15]). Будем предполагать, что $\mathcal{V} < \mathcal{U}$. По условию 1) существует $\mathcal{V}$ -близкое к f отображение $h: I^k \rightarrow X \setminus A$. Пусть $H: I^k \times I \rightarrow X$ — $\mathcal{U}$ -гомотопия, для которой $H(x, 0) = f(x)$, $H(x, 1) = h(x)$, $x \in \partial I^k$.

Обозначим через $r: I^k \setminus \{0\} \rightarrow \partial I^k$ ретракцию, ставящую в соответствие каждой точке $x \in I^k \setminus \{0\}$ пересечение $r(x)$ луча, идущего от начала координат и проходящего через x , с ∂I^k . Для каждого ε , $0 < \varepsilon < 1$, определим отображение $f_\varepsilon: I^k \rightarrow X$, полагая

$$f_\varepsilon(x) = \begin{cases} h\left(\frac{x}{1-\varepsilon}\right), & \text{если } \|x\| = 0 \text{ или } \|x\| \leq (1-\varepsilon)\|r(x)\|, \\ H\left(x, \frac{\|r(x)\| - \|x\|}{\varepsilon\|r(x)\|}\right), & \text{если } (1-\varepsilon)\|r(x)\| \leq \|x\| \leq \|r(x)\|. \end{cases}$$

Из компактности I^k вытекает, что для достаточно малого ε отображение f_ε можно взять в качестве искомого f' .

2) $\implies$ 3). Пусть $\mathcal{U} \in \text{cov}(X)$ и $\mathcal{V} \in \text{cov}(X)$ — такое, что $\text{St}^{n+1}(\mathcal{V}) < \mathcal{U}$. Существует локально конечный n -мерный полиэдр P и отображения $h: X \rightarrow P$, $g: P \rightarrow X$, для которых композиция gh является $\mathcal{V}$ -близкой к тождественному отображению 1_X . Далее через $P^{(i)}$ обозначаем i -мерный остов полиэдра P . Пользуясь всюду плотностью подмножества $X \setminus A$ в X , найдем $\mathcal{W}_0 \in \text{cov}(X)$ такое, что для любого отображения $g_0: P^{(0)} \rightarrow X \setminus A$ с $(g|_{P^{(0)}}, g_0) < \mathcal{W}_0$ существует продолжение $\bar{g}_0: P \rightarrow X$ с $(\bar{g}_0, g) < \mathcal{V}$ (существование такого $\mathcal{W}_0$ следует из того факта, что близкие отображения из замкнутых подпространств n -мерных пространств в $ANE(n)$ -пространства обладают близкими продолжениями; см. [15]).

Существует $\mathcal{W}_1 \in \text{cov}(X)$ такое, что любое отображение $g_1: P^{(1)} \rightarrow X \setminus A$, $g_1|_{P^{(0)}} = g_0$, $(g_0|_{P^{(1)}}, g_1) < \mathcal{W}_1$, обладает продолжением $\bar{g}_1: P \rightarrow X$ с $(\bar{g}_1, \bar{g}_0) < \mathcal{V}$. Существование такого отображения g_1 получим, применяя к каждому одномерному симплексу полиэдра $P^{(1)}$ условие 2).

Продолжая аналогично, построим последовательность отображений $g_0, g_1, \dots, g_n: P \rightarrow X$, обладающих следующими свойствами:

$$\bar{g}_i|_{P^{(i-1)}} = \bar{g}_{i-1}, \bar{g}_i|_{P^{(i)}} \subset X \setminus A, \quad (\bar{g}_i, \bar{g}_{i-1}) < \mathcal{V}.$$

Тогда для отображения $\bar{g}_n$ получаем $(f, \bar{g}_n) < \text{St}^{n+1}(\mathcal{V}) < \mathcal{U}$ и $\bar{g}_n(P) \subset X \setminus A$.

3) $\implies$ 1). Очевидно.

1.2. СЛЕДСТВИЕ. Пусть A – замкнутое подмножество $ANE(n)$ -пространства X , $\dim X \leq n$. Тогда для каждого открытого подмножества $U \subset X$ множество $A \cap U$ является Z -множеством в U .

1.3. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть A – замкнутое подмножество $ANE(n)$ -пространства X , $\dim X \leq n$. Пусть существует $\mathcal{U} \in \text{cov}(X)$ такое, что для каждого $U \in \mathcal{U}$ множество $A \cap U$ является Z -множеством в U . Тогда A – Z -множество в X .

Доказательство проходит аналогично доказательству импликации 2) $\implies$ 3) из предложения 1.1.

Пусть $\mathcal{C}$ – класс топологических пространств, обладающий следующими свойствами:

- (а) $\mathcal{C}$ – топологический класс (т.е. для любого $C \in \mathcal{C}$ и любого гомеоморфизма $h: C \rightarrow D$ имеем $D \in \mathcal{C}$);
- (б) $\mathcal{C}$ наследственен по отношению к замкнутым подмножествам (т.е. $D \in \mathcal{C}$ для каждого замкнутого подмножества $D \subset C \in \mathcal{C}$);
- (в) $\mathcal{C}$ аддитивен (т.е. $C = C_1 \cup C_2 \in \mathcal{C}$, если $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$ и пространства C_1, C_2 замкнуты в $\mathcal{C}$).

Пространство X называется $\mathcal{C}$ -универсальным, если для любого отображения $f: C \rightarrow X$, где $C \in \mathcal{C}$, и любого $\mathcal{U} \in \text{cov}(X)$ существует Z -вложение $f': C \rightarrow X$, $\mathcal{U}$ -близкое к f . Пространство X называется сильно $\mathcal{C}$ -универсальным, если для любого отображения $f: C \rightarrow X$, где $C \in \mathcal{C}$, любого замкнутого подмножества $D \subset C$ такого, что $f|_D: D \rightarrow X$ – Z -вложение, любого $\mathcal{U} \in \text{cov}(X)$ существует Z -вложение $g: C \rightarrow X$, $\mathcal{U}$ -близкое к f и такое, что $g|_D = f|_D$.

Пусть $n \in \mathbb{N}$. Пространство $X \in AE(n)$, $\dim X = n$, называется $\mathcal{C}$ -поглощающим множеством, если:

- 1) $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} X_i$, где $X_i \in \mathcal{C}$, X_i – сильные Z -множества в X ;
- 2) X сильно $\mathcal{C}$ -универсально.

Напомним описание иерархии абсолютных борелевских и проективных классов; более подробно см. в [16]. Для пространства X пусть $\mathcal{A}_0(X)$ (соответственно, $\mathcal{M}_0(X)$) означает семейство всех открытых (соответственно, замкнутых) подмножеств в X . Предполагая, что для любого $\beta < \alpha$, где $\mathcal{A}$ – счетный ординал, семейства $\mathcal{A}_\beta(X)$ и $\mathcal{M}_\beta(X)$ уже определены, положим

$$\mathcal{A}_\alpha(X) = \left\{ \bigcup_{i=1}^{\infty} X_i \mid X_i \in \bigcup_{\beta < \alpha} \mathcal{M}_\beta(X) \right\},$$

$$\mathcal{M}_\alpha(X) = \left\{ \bigcap_{i=1}^{\infty} X_i \mid X_i \in \bigcup_{\beta < \alpha} \mathcal{A}_\beta(X) \right\}.$$

Пусть X – полное пространство. Определим классы $\mathcal{P}_i(X)$, $i = 0, 1, 2, \dots$, следующим образом. Пусть $\mathcal{P}_0(X) = \bigcup \{ \mathcal{A}_\alpha(X) \mid \alpha < \omega_1 \}$. Через $\mathcal{P}_{2k+1}(X)$ обозначаем класс подмножеств в X , являющихся непрерывными образами элементов из $\mathcal{P}_{2k}(X)$. Далее, $\mathcal{P}_{2k}(X) = \{ X \setminus A \mid A \in \mathcal{P}_{2k-1}(X) \}$.

Если $\mathcal{C}$ – один из символов $\mathcal{A}_\alpha$, $\mathcal{M}_\alpha$ или $\mathcal{P}_i$, то по определению абсолютный класс $\mathcal{C}$ состоит из пространств Y таких, что для любого полного X и любого вложения $f: Y \rightarrow X$ имеем $f(Y) \in \mathcal{C}(X)$. Для класса $\mathcal{A}_\alpha$ (соответственно, $\mathcal{M}_\alpha$, $\mathcal{P}_i$) употребляется название *абсолютный аддитивный* (соответственно, *мультипликативный*, *проективный*) класс. Отметим, что класс $\mathcal{A}_1$ состоит из пространств, являющихся счетными объединениями компактов (т.е. из сигма-компактных пространств).

Для любого класса пространств $\mathcal{C}$ и $n = 0, 1, 2, \dots$ положим

$$\mathcal{C}(n) = \{X \in \mathcal{C} \mid \dim X \leq n\},$$

$$\sigma\mathcal{C} = \left\{ X = \bigcup_{i=1}^{\infty} X_i \mid \text{каждое } X_i \in \mathcal{C} \text{ замкнуто в } X \right\}.$$

Отображение $f: X \rightarrow Y$ называется n -*мягким*, $n = 0, 1, 2, \dots$, если для каждой коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\varphi} & X \\ \downarrow & & \downarrow f \\ Z & \xrightarrow{\psi} & Y, \end{array}$$

в которой A – замкнутое подмножество пространства Z , $\dim Z \leq n$, существует отображение $\Phi: Z \rightarrow X$ такое, что $f\Phi = \psi$ и $\Phi|_A = \varphi$ (см. [17]).

Отображение $f: X \rightarrow Y$ называется n -*обратимым*, $n = 0, 1, 2, \dots$, если для любого пространства Z , $\dim Z \leq n$, и любого отображения $g: Z \rightarrow Y$ существует отображение $h: Z \rightarrow X$ такое, что $fh = g$ (см. [8]).

Нам понадобятся следующие результаты.

ТЕОРЕМА А (см. [18]). *Существует n -обратимое отображение $f: X \rightarrow Q$, где X – компакт и $\dim X \leq n$.*

Отметим, что в [18] доказано более сильное утверждение; теорему А можно получить также как следствие факторизационной теоремы Мардешича (см. [19]).

ТЕОРЕМА В. *Существует n -мягкое отображение $g: Y \rightarrow Q$, где $Y \in \mathcal{A}_1$ и $\dim Y = n$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы выведем его из теоремы А. Определим обратный спектр $\mathcal{S} = \{Z_i, p_i^{i+1}\}$ следующим образом. Пусть $Z_i = Q \times \dots \times Q$ ($i+1$ сомножителей), $p_{i+1}^i: Z_i \rightarrow Z_{i-1}$ – проектирование на первые i сомножителей. Пусть $q_1: Y_1 \rightarrow Z_0$ – n -обратимое отображение компакта Y_1 , $\dim Y_1 = n$. Мы будем считать, что пространство Y_1 вложено в Z_1 так, что $p_1^0|_{Y_1} = q_1$. Пусть $r_2: Y_2' \rightarrow Z_1$ – n -обратимое отображение n -мерного компакта Y_2' и $\mathcal{G}$ – разбиение компакта Y_2' , нетривиальными элементами которого являются множества вида $r_2^{-1}(z)$, где $z \in Y_1$. Положим $Y_2 = Y_2'/\mathcal{G}$ и пусть $r_2 = q_2 q_2'$, где $q_2': Y_2' \rightarrow Y_2$ – факторотображение. Пусть $s_1: Y_1 \rightarrow Y_2$ – такое отображение, что $q_1 s_1 = 1_{Y_1}$.

Продолжая аналогично, мы получим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc}
 Z_0 & \xleftarrow{p_0^1} & Z_1 & \xleftarrow{p_1^2} & Z_2 & \xleftarrow{p_2^3} & \cdots \\
 q_1 \uparrow & \nearrow & q_2 \uparrow & \nearrow & q_3 \uparrow & \nearrow & \\
 Y_1 & \xrightarrow{s_1} & Y_2 & \xrightarrow{s_2} & Y_3 & \xrightarrow{s_3} & \cdots,
 \end{array}$$

в которой $q_i: Y_i \rightarrow Z_i$ — n -обратимые отображения такие, что $\dim Y_i = n$ и $q_i|q_i^{-1}(Y_{i-1}): q_i^{-1}(Y_{i-1}) \rightarrow Y_{i-1}$ — гомеоморфизм, и $s_i: Y_i \rightarrow Y_{i+1}$ — такие отображения, что $q_i s_i = 1_{Y_i}$.

Положим $Y_i = \{(x_j)_{j=1}^\infty \mid x_j \in Y_j \text{ и } x_{j+1} = s_j(x_j) \text{ для всех } j \geq i\} \subset \varprojlim \mathcal{S}$, $Y = \bigcup_{i=0}^\infty Y_i$ и обозначим через g ограничение предельной проекции $p_0: \varprojlim \mathcal{S} \rightarrow Z_0 = Q$ на Y . Очевидно, $Y \in \mathcal{A}_1(n)$ и Y_i замкнуто в Y для каждого i .

Покажем, что отображение g является n -мягким. Для коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccc}
 C & \xrightarrow{\alpha} & Y \\
 \downarrow & & \downarrow g \\
 D & \xrightarrow{\gamma} & Z_0,
 \end{array}$$

где C — замкнутое подмножество пространства D , $\dim D \leq n$, построим отображение $\beta: D \rightarrow Y$ такое, что $\beta|C = \alpha$ и $g\beta = \gamma$. Пусть $\alpha = (\alpha_i)_{i=0}^\infty$, где $\alpha_i: C \rightarrow Z_i$ — координатные отображения. Положим $C_i = \alpha^{-1}(Y_i)$ и пусть $D_1 \subset D_2 \subset \cdots$ — такая последовательность замкнутых подмножеств в D , что $D_i \cap C = C_i$ и $D = \bigcup_{i=1}^\infty D_i$.

Будем искать отображение $\beta: D \rightarrow Y$ в виде $\beta = (\beta_j)_{j=0}^\infty$, где $\beta_j: D \rightarrow Z_j$ — координатные отображения. Положим $\beta_0 = \gamma$ и пусть $\beta_1: D \rightarrow Z_1$ — такое отображение, что $\beta_1|C = \alpha_1$ и $p_0^1 = \beta_0 = \gamma$. Из n -обратимости отображения q_2 вытекает, что существует отображение $g_1: D_1 \rightarrow Y_2$, для которого $q_2 g_1 = \beta_1|D_1$. Отметим, что $g_1|C_1 = s_1|C_1 = \alpha_2|C_1$ и, следовательно, корректно определено отображение $\alpha_2 \cup g_1: C \cup D_1 \rightarrow Y_2$. Существует отображение $\beta_2: D \rightarrow Z_2$ такое, что $p_1^2 \beta_2 = \beta_1$ и $\beta_2|(C \cup D_1) = \alpha_2 \cup g_1$.

Предположим, что для всех $j \leq k$ определены отображения $\beta_j: D \rightarrow Z_j$ такие, что $\beta_j|C = \alpha_j$ и $p_{j-1}^j \beta_j = \beta_{j-1}$. Из n -обратимости отображения q_{k+1} вытекает, что существует отображение $g_k: D_k \rightarrow Y_{k+1}$, для которого $q_{k+1} g_k = \beta_k|D_k$. Рассуждая как выше, получаем, что корректно определено отображение $\alpha_{k+1} \cup g_k: C \cup D_k \rightarrow Y_{k+1}$ и существует отображение $\beta_{k+1}: D \rightarrow Z_{k+1}$ такое, что $p_k^{k+1} \beta_{k+1} = \beta_k$ и $\beta_{k+1}|(C \cup D_k) = \alpha_{k+1} \cup g_k$.

Таким образом, корректно определено отображение $\beta = (\beta_j)_{j=0}^\infty: D \rightarrow Y$, причем $\beta|C = \alpha$ и $g\beta = \gamma$.

Отображение $f: X \rightarrow Y$ называется *замкнутым над подмножеством* $A \subset Y$, если для каждого $a \in A$ и каждой окрестности U множества $f^{-1}(a)$ (возможно, пустой) существует окрестность V точки a такая, что $f^{-1}(V) \subset U$ (см. [4]).

Следующее утверждение является n -мерным аналогом соответствующего утверждения из [4, лемма 1.1].

1.4. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть $X \in ANE(n)$, A – сильное Z -множество в X , $\mathcal{U} \in \text{cov}(X)$ и $f: C \rightarrow X$ – отображение пространства C , $\dim C \leq n$. Пусть $D \subset C$ – такое замкнутое подмножество, для которого $f|_D: D \rightarrow X$ – замкнутое вложение. Тогда существует отображение $g: C \rightarrow X$, замкнутое над A и такое, что $g|_D = f|_D$, $g(C \setminus D) \cap A = \emptyset$, $(f, g) < \mathcal{U}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нам необходимо внести некоторые изменения в доказательство леммы 1.1 из [4], фрагменты которого мы воспроизводим для полноты изложения.

Индукцией по $i \in \omega$ построим последовательности отображений $\{f_i: C \rightarrow X\}$, замкнутых подмножеств $\{C_i\}$ пространства C , покрытий $\{\mathcal{W}_i\}$ пространства X так, что выполнены условия:

- (а) $f_i|_D = f$;
- (б) $C_i \cup O_{1/i}(D) = C$, $C_{i-1} \subset \text{int}(C_i)$, $C_i \cap D = \emptyset$;
- (в) $f_i|_{C_{i-1}} = f_{i-1}|_{C_{i-1}}$, $\overline{f_i(C_i)} \cap A = \emptyset$;
- (г) $\text{St}(\mathcal{W}_i) < \mathcal{W}_{i-1}$, $\text{diam}(f_{i-1}^{-1}(W) \setminus C_i) < 1/i$ для каждого $W \in \text{St}^2(\mathcal{W}_i)$, $\text{mesh}(\mathcal{W}_i) < 1/2^i$;
- (д) $(f_i, f_{i-1}) < \mathcal{W}_i$.

Индукция начинается, когда $C_0 = \emptyset$, $\mathcal{W}_0 \in \text{cov}(X)$, $\text{St}(\mathcal{W}_0) < \mathcal{U}$, $f_0 = f$. Предположим, что $\mathcal{W}_{i-1}$, f_{i-1} и C_{i-1} уже построены. Пусть $\mathcal{W}'_0 \in \text{cov}(X)$ – такое локально конечное покрытие, что $\text{diam}(f_{i-1}^{-1}(W') \cap D) < 1/3i$. Пусть $\mathcal{W}_i \in \text{cov}(X)$ – такое, что $\text{St}^2(\mathcal{W}_i) < \mathcal{W}'_i$, $\text{St}^2(\mathcal{W}_i) < \mathcal{W}_{i-1}$ и $\text{mesh}(\mathcal{W}_i) < 1/2^i$.

Тогда множество

$$U = \{c \in C \mid \text{если } W' \in \mathcal{W}'_i \text{ и } f_{i-1}(c) \in \overline{W'}, \text{ то } d(c, f_{i-1}^{-1}(\overline{W'}) \cap D) < 1/3i\}$$

открыто в C и $D \subset U$. Пусть $C_i \subset C$ – такое замкнутое подмножество, что $C_i \cup U = C$.

Включим X как замкнутое подмножество в пространство $\tilde{X} \in AR$. Существует малая (малость будет выбрана ниже) гомотопия $H: C \times [0, 1] \rightarrow \tilde{X}$ такая, что $H_0 = f_{i-1}$, $H_1(C) \subset X$ и $\overline{H_1(C)} \cap A = \emptyset$. Пусть $q: \tilde{Y} \rightarrow \tilde{X}$ – n -обратимое собственное отображение n -мерного пространства $\tilde{Y}$ на $\tilde{X}$ (существование такого отображения вытекает из теоремы А; следует вложить $\tilde{X}$ в Q и в качестве q взять ограничение n -обратимого отображения n -мерного компакта в Q на полный прообраз подпространства $\tilde{X}$ в Q). Поскольку $X \in ANE(n)$, то существует окрестность V множества X в $\tilde{X}$ и отображение $\xi: q^{-1}(V) \rightarrow X$ такое, что $\xi|_{q^{-1}(X)} = q|_{q^{-1}(X)}$. Гомотопия H может быть выбрана настолько малой, что $H(C \times [0, 1]) \subset V$, и существует такая малая замкнутая окрестность N множества A в X , что $\overline{f_{i-1}(C_{i-1})} \cap N = \emptyset$, $H(C \times \{1\}) \cap N = \emptyset$ и для каждых $c \in C_{i-1}$, $t \in [0, 1]$, $y \in \tilde{Y}$ таких, что $q(y) = H(c, t)$, имеем $\xi(q(y)) \notin N$.

Выберем функцию $\alpha: C \rightarrow [0, 1]$ со следующими свойствами: $\alpha(D \cup C_{i-1}) = \{0\}$ и для каждого $y \in \tilde{Y}$ такого, что $q(y) = H(c, \alpha(c))$, имеем $\xi(y) \notin N$.

Пусть $\hat{f}_i(c) = H(c, \alpha(c))$, $c \in C$. Поскольку отображение q является n -обратимым, существует отображение $\tilde{f}_i: C \rightarrow \tilde{Y}$ такое, что $q\tilde{f}_i = \hat{f}_i$. Положим $f_i = \xi\tilde{f}_i$.

Полагая теперь $g = \lim_{i \rightarrow \infty} f_i$, мы убеждаемся, как и в [4], что g удовлетворяет всем условиям утверждения предложения.

По определению, пространство X удовлетворяет свойству n -сильной дискретной аппроксимации (обозначается $X \in n-SDAP$), $n = 0, 1, \dots$, если для каждого отображения $g: \bigoplus_{i=1}^{\infty} Y_i \rightarrow X$, где все Y_i компактны и $\dim Y_i \leq n$, и каждого $\mathcal{U} \in \text{cov}(X)$ существует отображение $g': \bigoplus_{i=1}^{\infty} Y_i \rightarrow X$ такое, что семейство $\{g'(Y_i) \mid i \in \mathbb{N}\}$ дискретно и $(g, g') < \mathcal{U}$.

Следующее предложение является n -мерным аналогом предложения 1.7 из [4].

1.5. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть $X \in ANE(n)$, $\dim X \leq n$, и $X \in n-SDAP$. Тогда каждое Z -множество в X является сильным Z -множеством в X .

Доказательство дословно повторяет доказательство предложения 1.7 из [4]. Следует только воспользоваться n -мерным аналогом свойства существования близких продолжений для близких отображений в ANR -пространства (см. [15, предложение 2.1]).

1.6. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Если каждое открытое подмножество пространства $X \in ANE(n)$ является $\mathcal{C}(n)$ -универсальным и каждое Z -множество в X является сильным Z -множеством, то X является сильно $\mathcal{C}(n)$ -универсальным.

Доказательство проходит аналогично доказательству предложения 2.2 из [4]. При этом используется предложение 1.4.

Мы завершим этот параграф аналогом предложения 2.3 из [4].

1.7. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть $X \in ANE(n)$ и $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} X_i$, где каждое X_i — сильное Z -множество в X . Если X является сильно $\mathcal{C}(n)$ -универсальным, то X является также сильно $\sigma\mathcal{C}(n)$ -универсальным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В доказательстве предложения 2.3 из [4] общая ситуация редуцирована к следующему случаю: достаточно показать, что для каждого открытого подмножества $C \subset C' \in \mathcal{C}(n)$ каждое отображение $f: C \rightarrow X$ аппроксимируется Z -вложениями.

Пусть $C \in \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i$, где $C_{i-1} \subset C_i$, каждое C_i замкнуто в C и $C_i \in \mathcal{C}$.

В [4] искомое близкое к f отображение f' строится в виде $\lim_{i \rightarrow \infty} f_i$ для некоторой последовательности $(f_i)_{i=1}^{\infty}$ отображений из C в X . Нам достаточно внести изменения в шаг индукции при определении отображения f_i .

Итак, предполагая, что f_{i-1} уже построено, выберем Z -вложение $v_i: C_i \rightarrow X$ такое, что $v_i|_{C_{i-1}} = f_{i-1}|_{C_{i-1}}$, причем, используя предложение 2.1 из [4], выберем v_i настолько близким к $f_{i-1}|_{C_i}$, чтобы существовало близкое к f_{i-1} продолжение $\tilde{v}_i: C \rightarrow X$ отображения v_i . Вложим X в качестве замкнутого подмножества в AR -пространство Y и пусть $\varphi: \tilde{Y} \rightarrow Y$ — n -обратимое собственное отображение n -мерного пространства $\tilde{Y}$ [18]. Из собственности отображения φ и того факта, что $X \in ANE(n)$, вытекает, что существует окрестность V множества X в Y и отображение $r: \varphi^{-1}(V) \rightarrow X$ такое, что

$$r|_{\varphi^{-1}(X)} = \varphi|_{\varphi^{-1}(X)}.$$

Поскольку X_{i+1} является сильным Z -множеством в X , существует близкое к 1_X отображение $h: X \rightarrow X$ такое, что $h(X) \cap X_{i+1} = \emptyset$. Это отображение может быть

сделано настолько близким к 1_X , что существует гомотопия $h_t: X \rightarrow V$, $t \in I$, такая, что $h_0 = 1_X$, $h_1 = h$. Более того, эта близость отображения h и малость гомотопии h_t , $t \in I$, может быть выбрана такой, что для любой функции Урысона $\lambda: X \rightarrow [0, 1]$ такой, что $\lambda|_{C_i} \equiv 0$ и $\lambda|(C \setminus \text{int } C_{i+1}) \equiv 1$ и любого отображения $g: C \rightarrow \varphi^{-1}(V)$ такого, что $\varphi g(c) = h_{\lambda(c)}(\tilde{v}_i(c))$, $c \in C$, (существующего в силу n -обратимости отображения φ), отображение $f_i = rg$ близко к f_{i-1} (степень близости указана в [4]).

§ 2. Конструкция n -мерных поглощающих множеств

Пусть $\mathcal{C} \in \{\mathcal{A}_\alpha \mid 1 \leq \alpha < \omega_1\} \cup \{\mathcal{M}_\alpha \mid 1 \leq \alpha < \omega_1\} \cup \{\mathcal{P}_i \mid i \in \mathbb{N}\}$. Существует $\mathcal{C}$ -универсальное пространство $Y \in AR$ (см. [4], [5]).

Зафиксируем n -мягкое отображение $f: X \rightarrow Q$, где X – сигма-компактное пространство, $\dim X = n$ (см. теорему В). Наша конструкция является модификацией одного построения из [20].

Определим обратную последовательность $\mathcal{P} = \{X_i, p_i^{i+1}\}$ индуктивной процедурой. Пусть $X_1 = X$. Предполагая, что все пространства X_i и все отображения $p_{i-1}^i: X_i \rightarrow X_{i-1}$ уже определены для каждого $i < j$, рассмотрим пространство $X_{j-1} \times Y$ как подмножество в Q и положим

$$X_j = f^{-1}(X_{j-1} \times Y), \quad p_{j-1}^j = \text{pr}_1(f|X_j)$$

(через pr_1 обозначается отображение проектирования на первый сомножитель). Отметим, что $X_j \in AE(n)$, $\dim X_j = n$ и p_{j-1}^j – n -мягкое отображение.

Для каждого i определим отображение $\xi_i: X_i \rightarrow X_{i+1}$ следующим образом. Пусть $*$ $\in Y$ – отмеченная точка. Из n -обратимости отображения f вытекает, что существует отображение $\xi_i: X_i \rightarrow X_{i+1}$ такое, что $f(\xi_i(x)) = (x, *)$, $x \in X_i$. Очевидно, что $p_i^{i+1}\xi_i = 1_{X_i}$.

Положим

$$K = K_{\mathcal{C}}(n) = \varprojlim \{X_i, p_i^{i+1}; \xi_i\} \\ = \{(x_i)_{i=1}^\infty \in \varprojlim \mathcal{P} \mid \text{существует } j \text{ такое, что } x_{i+1} = \xi_i(x_i) \text{ для каждого } i \geq j\}$$

в топологии, индуцированной из пространства $\varprojlim \mathcal{P}$. Отметим, что K является объединением счетного семейства своих замкнутых подмножеств, являющихся элементами класса $\mathcal{C}(n)$.

В дальнейшем мы будем отождествлять каждое пространство X_j с подпространством в K посредством естественного вложения $\iota_j: X_j \rightarrow K$, определяемого формулой: $\iota_j(x) = (y_i)_{i=1}^\infty$, где

$$y_i = \begin{cases} p_i^{i+1}(\dots(p_{j-1}^j(x))\dots), & \text{если } i \leq j, \\ \xi_{i-1}(\dots(\xi_j(x))\dots), & \text{если } i > j. \end{cases}$$

Через $p_j: K \rightarrow X_j$ обозначаем предельную проекцию, $p_j((x_i)_{i=1}^\infty) = x_j$.

Предполагаем, что метрика d на каждом X_i ограничена единицей, и метризуем пространство K следующим образом

$$d((x_i)_{i=1}^\infty, (y_i)_{i=1}^\infty) = \sum_{i=1}^\infty \frac{d(x_i, y_i)}{2^{i+2}}.$$

2.1. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Пространство K является $AE(n)$ -пространством.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть (A, B) – сепарабельная метризуемая пара, $\dim A \leq n$, $g: B \rightarrow K$ – отображение, которое мы представим в виде $g = (g_i)_{i=1}^\infty$, где $g_i: B \rightarrow X_i$ – координатные отображения.

Положим $B_i = g^{-1}(X_i)$ и пусть $A_1 \subset A_2 \subset \dots$ – последовательность замкнутых подмножеств множества A такая, что $A = \bigcup_{i=1}^\infty A_i$ и $A_i \cap B = B_i$ для каждого $i \in \mathbb{N}$.

Пусть $\bar{g}_1: A \rightarrow X_1$ – произвольное продолжение отображения g_1 .

Предположим, что отображения $\bar{g}_i: A \rightarrow X_i$ уже построены для каждого $i \leq j$, причем $p_{i-1}^i \bar{g}_i = \bar{g}_{i-1}$. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} B \cup A_j & \xrightarrow{h} & X_{j+1} \\ \downarrow & & \downarrow p_j^{j+1} \\ A & \xrightarrow{\bar{g}_j} & X_j, \end{array}$$

в которой отображение h задается условием $h|B = g_{j+1}$, $h|A_j = \xi_j \bar{g}_j$. Используя n -мягкость отображения p_j^{j+1} , найдем отображение $\bar{g}_{j+1}: A \rightarrow X_{j+1}$, дополняющее эту диаграмму до коммутативной. Тогда для отображения $\bar{g} = (\bar{g}_i)_{i=1}^\infty: A \rightarrow K$ имеем $\bar{g}|B = g$.

2.2. ЛЕММА. Для каждого $j \in \mathbb{N}$ множество X_j является Z -множеством в K .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Не уменьшая общности, можно считать, что $j = 1$. По предложению 1.1, достаточно доказать, что для каждого отображения $g: I^n \rightarrow K$ и каждого $\varepsilon > 0$ существует $g': I^n \rightarrow K \setminus X_1$, ε -близкое к g .

Рассмотрим отображение $(f|X_2)p_2g: I^n \rightarrow X_1 \times Y$. Существует последовательность отображений $h_l: I^n \rightarrow X_1 \times (Y \setminus \{*\})$, $l \in \mathbb{N}$, равномерно стремящаяся к $(f|X_2)p_2g$. Пусть $S = \{0\} \cup \{1/l \mid l \in \mathbb{N}\}$ – сходящаяся последовательность. Определим отображение $\hat{h}: I^n \times S \rightarrow X_1 \times Y$ формулами:

$$\hat{h}(x, 0) = (f|X_2)p_2g(x), \quad \hat{h}(x, 1/l) = h_l(x), \quad x \in I^n, \quad l \in \mathbb{N}.$$

Из n -мягкости отображения f следует, что существует отображение $r: I^n \times S \rightarrow X_2$ такое, что $(f|X_2)r = \hat{h}$ и $r(x, 0) = p_2g(x)$, $x \in I^n$.

Рассмотрим теперь n -мягкое отображение $p_2: K \rightarrow X_2$. Существует отображение $r': I^n \times S \rightarrow K$ такое, что $p_2r' = r$, $r'(x, 0) = g(x)$, $x \in I^n$. Из компактности I^k вытекает, что существует $l \in \mathbb{N}$ такое, что $d(r'(x, l), g(x)) < \varepsilon$ для каждого $x \in I^n$. Определим отображение $g': I^n \rightarrow K$ формулой: $g'(x) = r'(x, l)$, $x \in I^n$. Тогда, очевидно, $g'(I^n) \cap X_1 = \emptyset$.

2.3. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть $U \subset K$ – открытое подмножество. Тогда $U - \mathcal{C}(n)$ -универсально.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $g = (g_i)_{i=1}^\infty$, где g_i – координатные отображения. Существует функция $\beta: U \rightarrow (0, 1)$ такая, что любые β -близкие отображения являются $\mathcal{U}$ -близкими.

Пусть $\gamma(x) = \frac{1}{2} \min\{\beta(x), d(x, K \setminus U)\}$, $x \in K$ (если $U = K$, то это условие является излишним). Обозначим через $h: Y \times Y \times \mathbb{R} \rightarrow Y$ такое отображение, что

$$\begin{aligned} h(a, b, t) &= a, \quad \text{если } t \leq 1, \\ h(a, b, t) &= b, \quad \text{если } t \geq 2 \end{aligned}$$

(такое отображение существует, поскольку $Y \in AR$). Существует замкнутое вложение $\phi: C \rightarrow Y$. Построим отображение $g' = (g'_i)_{i=1}^\infty: C \rightarrow K$.

Положим $g'_1 = g_1$ и рассмотрим отображение $\tilde{g}_2: C \rightarrow X_1 \times Y$, заданное формулой:

$$\tilde{g}_2(x) = (g'_1(x), h(\text{pr}_2 g_2(x), \phi(x), 2\gamma(x))), \quad x \in C.$$

Из n -мягкости отображения f вытекает, что существует отображение $g'_2: C \rightarrow X_2$, для которого $(f|X_2)g'_2 = \tilde{g}_2$ и $g'_2|g^{-1}(\gamma^{-1}((0, \frac{1}{2}])) = g_2|g^{-1}(\gamma^{-1}((0, \frac{1}{2})))$.

Построим также отображение $g'_3: C \rightarrow X_3$. Для этого зададим отображение $\tilde{g}_3: C \rightarrow X_2 \times Y$ формулой:

$$\tilde{g}_3(x) = (g'_2(x), h(\text{pr}_2 g_3(x), \phi(x), 2^2\gamma(x))), \quad x \in C.$$

Из n -мягкости отображения $f|X_3$ вытекает, что существует отображение $g'_3: C \rightarrow X_3$, для которого

$$\begin{aligned} (f|X_3)g'_3 &= \tilde{g}_3, \quad g'_3|g^{-1}(\gamma^{-1}((0, \frac{1}{4}])) = g_3|g^{-1}(\gamma^{-1}((0, \frac{1}{4}))), \\ g'_3|g^{-1}(\gamma^{-1}([\frac{1}{2}, 1))) &= \xi_2 g'_2|g^{-1}(\gamma^{-1}([\frac{1}{2}, 1))). \end{aligned}$$

Продолжая, получим для каждого $k \geq 3$ отображение $\tilde{g}_k: C \rightarrow X_{k-1} \times Y$,

$$\tilde{g}_k(x) = (g'_{k-1}(x), h(\text{pr}_2 g_k(x), \phi(x), 2^{k-1}\gamma(x))), \quad x \in C.$$

Тогда в силу n -мягкости отображения $f|X_k$ существует отображение $g'_k: C \rightarrow X_k$, для которого

$$\begin{aligned} (f|X_k)g'_k &= \tilde{g}_k, \quad g'_k|g^{-1}(\gamma^{-1}((0, \frac{1}{2^{k+1}}])) = g_k|g^{-1}(\gamma^{-1}((0, \frac{1}{2^{k+1}}))), \\ g'_k|g^{-1}(\gamma^{-1}([\frac{1}{2^{k+2}}, 1))) &= \xi_{k-1} g'_{k-1}|g^{-1}(\gamma^{-1}([\frac{1}{2^{k+2}}, 1))). \end{aligned}$$

Тогда

$$p_k^{k+1} g'_{k+1} = \text{pr}_1(f|X_{k+1})g'_{k+1} = \text{pr}_1 \tilde{g}_{k+1} = g'_k$$

и, таким образом, корректно определено отображение $g' = (g'_i)_{i=1}^\infty: C \rightarrow K$.

Покажем, что отображения g и g' являются γ -близкими. Это вытекает из следующего факта. Если $\gamma(x) \leq 2^{-k}$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$, то $g_i(x) = g'_i(x)$ для всех $i \leq k$, откуда

$$d(g(x), g'(x)) = \sum_{j=k+1}^{\infty} 2^{-j-2} = 2^{-k-2}.$$

Отметим, что по выбору γ имеем $g'(C) \subset U$.

Покажем, что отображение g' является замкнутым вложением. Прежде всего отметим, что g' — инъективное отображение. В самом деле, если

$x_1, x_2 \in C$ и $x_1 \neq x_2$, то существует $k \in \mathbb{N}$ такое, что $2^k \gamma(x) \geq 2$, откуда $h(\text{pr}_k g_{k+1}(x_i), \phi(x_i), 2^k \gamma(x_i)) = \phi(x_i)$, $i = 1, 2$. Тогда $\tilde{g}_k(x_1) \neq \tilde{g}_k(x_2)$ и следовательно, $g'_k(x_1) \neq g'_k(x_2)$ и $g'(x_1) \neq g'(x_2)$.

Пусть $S = \{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ – счетное дискретное подмножество в C , причем $x_i \neq x_j$, если $i \neq j$. Предположим, что существует $y \in K$ такое, что $\lim_{i \rightarrow \infty} g'(x_i) = y$.

Если $\lim_{i \rightarrow \infty} \gamma(g'(x_i)) = 0$, то, необходимо, $y \in K \setminus U$ и, следовательно, множество $g'(S)$ замкнуто в U .

Если $\lim_{i \rightarrow \infty} \gamma(g'(x_i)) \neq 0$, то, не уменьшая общности, можно предполагать, что для некоторого $k \in \mathbb{N}$ имеем $\gamma(g'(x_i)) \geq 2^{-k}$ для всех i .

Тогда $\tilde{g}_k|S = \phi|S$, а значит, отображения $g'_k|S$ и $g'|S$ являются замкнутыми вложениями.

Поскольку для каждой последовательности $\{Y_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ n -мерных компактов имеем $\bigoplus_{i=1}^{\infty} Y_i \in \mathcal{C}(n)$, то из предложения 2.3 вытекает

2.4. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. $K \in n - SDAP$.

Объединяя результаты этого параграфа, получаем следующее утверждение, являющееся основным результатом работы.

2.5. ТЕОРЕМА. *Пространство $K = K_{\mathcal{C}(n)}$ является $\mathcal{C}(n)$ -поглощающим.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применяя лемму 2.2, предложение 2.4 и предложение 1.5, получаем, что каждое X_j является сильным Z -множеством в K . Более того, каждое Z -множество в K является сильным Z -множеством в K и из предложений 2.5 и 1.6 вытекает, что пространство K является сильно $\mathcal{C}(n)$ -универсальным.

§3. Замечания и открытые вопросы

Наряду с используемым в этой статье “внутренним” определением поглощающего множества существует его “внешний” вариант, восходящий к работе Дж. Веста [21]. Пусть X – пространство и $\mathcal{M}$ – семейство его замкнутых подмножеств, наследственное по отношению к замкнутым подмножествам и аддитивное. Счетное объединение A элементов семейства $\mathcal{M}$ называется $\mathcal{M}$ -поглощающим множеством в X , если для любого $D \in \mathcal{M}$ и любого семейства $\mathcal{U}$ открытых подмножеств в X существует гомеоморфизм $h: X \rightarrow X$, $\mathcal{U}$ -близкий к тождественному и такой, что $h(D \cap \bigcup \mathcal{U}) \subset A$ (см. [10]).

Пусть n, k – ординалы, $1 \leq n \leq \omega$, $0 \leq k < \omega$, $\mathcal{M}_k^n$ – семейство “ручных” компактов размерности $\leq k$ в $\mathbb{R}^n$. В [10], [11] доказано, что существует $\mathcal{M}_k^n$ -поглощающее множество B_k^n в $\mathbb{R}^n$.

ВОПРОС 1. *Гомеоморфны ли пространства B_n^{2n+1} и $K_{\mathcal{A}_1(n)}$?*

Отметим, что аналог псевдограницы $B(\mu^n)$ для менгера куба рассмотрен в [22].

ВОПРОС 2. *Гомеоморфны ли пространства $K_{\mathcal{A}_1(n)}$ и $B(\mu^n)$?*

Аналог пространства $K_{\mathcal{A}_1(n)}$ для k_ω -пространств (т.е. пространств, допускающих представление в виде инъективного предела последовательности компактов и вложений) – пространство μ_n^∞ – рассмотрен в [23]; там же получена его топологическая характеристика.

ВОПРОС 3 (см. также [9]). Дать топологическую характеристику пространств $K_{\mathcal{A}_1(n)}$; других пространств вида $K_{\mathcal{C}}$.

Менгеров куб μ_n является хорошо известным объектом фрактальной геометрии (см. [24]); стандартная конструкция μ^n (см., например, [25]) дает локально самоподобное подмножество в I^{2n+1} .

ВОПРОС 4. Построить локально-самоподобные реализации поглощающих множеств $K_{\mathcal{C}(n)}$ в I^{2n+1} ; в μ^n .

Для каждого класса $\mathcal{C}$ и каждой $n, k, n \leq k$, через $\mathcal{C}(n, k)$ обозначается класс $\{X \in \mathcal{C} \mid \dim X \leq n \text{ и } X \text{ вложимо в } \mathbb{R}^k\}$.

ВОПРОС 5. Существуют ли $\mathcal{C}(n, k)$ -поглощающие множества для $n \leq k \leq 2n$, где класс $\mathcal{C}$ пробегает иерархию абсолютных борелевских и проективных классов?

Список литературы

1. Anderson R. D. On topological infinite deficiency // Michigan Math. J. 1967. V. 14. P. 365–383.
2. Bessaga C., Pelczynski A. The estimated extension theorem, homogeneous collections and their application to the topological classification of linear metric spaces and convex sets // Fund. Math. 1970. V. 70. P. 153–190.
3. Toruńczyk H. Skeletonized sets in complete metric spaces and homeomorphisms of the Hilbert cube // Bull. Acad. Pol. Sci. Ser. Math. Astr. Phys. 1970. V. 18. P. 119–126.
4. Bestvina M., Mogilski J. Characterizing certain incomplete infinite-dimensional absolute retracts // Michigan Math. J. 1986. V. 33. P. 291–313.
5. Cauty R. Ensembles absorbants pour les classes projectives // Preprint, 1991.
6. Dijkstra J. J., Dobrowolski T., Marciszewski W., van Mill J., Mogilski J. Recent classification and characterization results in geometric topology // Bull. Amer. Math. Soc. (New Series). 1990. V. 22. №2. P. 277–283.
7. Bestvina M. Characterizing n -dimensional universal Menger compacta // Mem. Amer. Math. Soc. 1988. №380.
8. Дранишников А. Н. Универсальные менгеровские компакты и универсальные отображения // Матем. сб. 1986. Т. 129. №1. С. 121–139.
9. Dobrowolski T., Mogilski J. Problems on topological classification of incomplete metric spaces // Open problems in topology / ed. J. van Mill, G. M. Reeds. Amsterdam: North Holland, 1990. P. 409–429.
10. Geoghegan R., Summerhill R. R. Pseudo-boundaries and pseudo-interiors in euclidean spaces and topological manifolds // Trans. Amer. Math. Soc. 1974. V. 194. P. 141–165.
11. Dijkstra J. J. k -dimensional skeletoids in $\mathbb{R}^n$ and the Hilbert cube // Topol. Appl. 1985. V. 19. №1. P. 13–28.
12. Dijkstra J. J., van Mill J., Mogilski J. Classification of finite-dimensional universal pseudo-boundaries and pseudo-interiors // Trans. Amer. Math. Soc. 1992. V. 332. №2. P. 693–709.
13. Федорчук В. В., Чизогоидзе А. Ч. Абсолютные ретракты и бесконечномерные многообразия. М.: Наука, 1992.
14. Henderson D. W. Z -sets in ANRs // Trans. Amer. Math. Soc. 1974. V. 194. P. 141–165.
15. Чизогоидзе А. Ч. Компакты, лежащие в n -мерном универсальном компакте Менгера и имеющие в нем гомеоморфные дополнения // Матем. сб. 1987. Т. 133. №4. С. 481–496.
16. Куратовский К. Топология. Т. 1. М.: Наука, 1966.
17. Щепин Е. В. Функторы и несчетные степени компактов // УМН. 1981. Т. 36. №3. С. 3–62.

18. Дранишников А. Н. Абсолютные экстензоры в размерности n и n -мягкие отображения, повышающие размерность // УМН. 1984. Т. 39. № 5. С. 55–95.
19. Александров П. С., Пасынков Б. А. Введение в теорию размерности. М.: Наука, 1973.
20. Чигогидзе А. Ч. n -мягкие отображения n -мерных пространств // Матем. заметки. 1989. Т. 46. № 1. С. 88–95.
21. West J. The ambient homeomorphy of an incomplete subspace of infinite-dimensional Hilbert spaces // Pacif. J. Math. 1970. V. 34. № 1. P. 257–267.
22. Чигогидзе А. Ч. Теория n -шейпов // УМН. 1989. Т. 44. № 5. С. 117–140.
23. Заричный М. М. Функторы, порожденные универсальными отображениями инъективных пределов последовательностей компактов Менгера // Математика. Научные труды. Т. 562. Рига: Латв. ун-т, 1991. С. 95–102.
24. Mandelbrot B. B. The fractal geometry of nature. San Francisco: Freeman, 1982.
25. Engelking R. Dimension theory. Warszawa: PWN, 1978.

Львовский государственный
университет им. Ив. Франко
E-mail: mzar@litech.lviv.ua

Поступила в редакцию
19.09.1995