Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Смагин, Оценки скорости сходимости проекционного и проекционно-разностного методов для слабо разрешимых параболических уравнений, *Матем. сб.*, 1997, том 188, номер 3, 143–160

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm214>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.209.158.208

26 апреля 2023 г., 13:47:41

УДК 517.9

В. В. Смагин

Оценки скорости сходимости проекционного и проекционно-разностного методов для слабо разрешимых параболических уравнений

В сепарабельном гильбертовом пространстве рассматривается слабо разрешимая параболическая задача. Точное решение находится приближенно проекционным и проекционно-разностным методами. При этом дискретизация задачи по пространству проводится полудискретным методом Галёркина, а по времени – неявным методом Эйлера.

В работе установлены коэрцитивные среднеквадратичные оценки погрешностей приближенных решений. Эффективность этих оценок иллюстрируется для параболических уравнений второго порядка с краевыми условиями Дирихле или Неймана на проекционных подпространствах типа конечных элементов.

Библиография: 10 названий.

1. Основные предположения

Пусть V и H – гильбертовы пространства такие, что V плотно и непрерывно вложено в H . отождествим H с его двойственным пространством и обозначим через V' пространство, двойственное V , так что получим $V \subset H \subset V'$. Для элементов $u \in V'$, $v \in V$ под (u, v) понимается их скалярное произведение, которое совпадает со скалярным произведением в H , если $u \in H$. Норма элемента $u \in H$ обозначается $\|u\|$.

Пусть для $t \in [0, T]$ на $u, v \in V$ определено семейство полуторалинейных форм $a(t, u, v)$ таких, что функция $t \rightarrow a(t, u, v)$ абсолютно непрерывна на $[0, T]$ и выполняются условия:

$$a(t, u, v) = \overline{a(t, v, u)}; \quad (1)$$

$$|a(t, u, v)| \leq M_1 \|u\|_V \|v\|_V; \quad (2)$$

$$a(t, u, u) \geq \delta \|u\|_V^2 \quad (\delta > 0); \quad (3)$$

$$\left| \frac{\partial}{\partial t} a(t, u, v) \right| \leq M_2 \|u\|_V \|v\|_V. \quad (4)$$

Заметим, что форма $a(t, u, v)$ порождает ограниченный линейный оператор $A(t): V \rightarrow V'$ такой, что

$$a(t, u, v) = (A(t)u, v) \quad (u, v \in V),$$

и справедлива оценка

$$\|A(t)u\|_{V'} \leq M_1 \|u\|_V. \quad (5)$$

Предположим, что почти при всех $t \in [0, T]$ определен линейный оператор $B(t): V \rightarrow V'$ такой, что

$$\|B(t)u\|_{V'} \leq M_3 \|u\| \quad (u \in V). \quad (6)$$

Считаем также, что для всех $u \in V$ функция $t \rightarrow B(t)u \in V'$ измерима по $t \in [0, T]$.

Рассмотрим в пространстве V' на $[0, T]$ задачу

$$u'(t) + A(t)u(t) + B(t)u(t) = f(t), \quad u(0) = u^0. \quad (7)$$

Считаем, что в (7) $u^0 \in H$ и функция $t \rightarrow f(t) \in V'$ измерима по t и $\|f(t)\|_{V'}^2$ суммируема на $[0, T]$, т.е. $f \in L_2(0, T; V')$. Для обоснования разрешимости задачи (7) определим для $u, v \in V$ форму

$$l(t, u, v) = a(t, u, v) + (B(t)u, v).$$

Нетрудно показать, что для $l(t, u, v)$ выполняется условие типа (2), а также

$$\operatorname{Re} l(t, u, u) + M_3^2 (2\delta)^{-1} \|u\|^2 \geq \frac{\delta}{2} \|u\|_V^2.$$

Таким образом, существует (см. [1]) единственная функция $u(t)$ такая, что $u \in L_2(0, T; V) \cap C([0, T], H)$, $u' \in L_2(0, T; V')$, удовлетворяется начальное условие и почти всюду на $[0, T]$ — уравнение (7). Такую функцию будем называть слабым решением задачи (7). Отметим, что производная $u'(t)$ в (7) понимается в обобщенном смысле. Для слабого решения задачи (7) справедлива (см. [2]) оценка

$$\begin{aligned} & \max_{0 \leq t \leq T} \|u(t)\|^2 + \int_0^T (\|u(t)\|_V^2 + \|u'(t)\|_{V'}^2) dt \\ & \leq M \left(\|u^0\|^2 + \int_0^T \|f(t)\|_{V'}^2 dt \right) = MR(u^0, f). \end{aligned} \quad (8)$$

Примеры параболических задач, которые сводятся к задаче (7), рассматриваются, например, в [1] и [2]. Следует отметить, что краевое условие на границе области, где меняются пространственные переменные, может быть как типа Дирихле, так и типа Неймана, а также и смешанное, когда на одном куске границы — условие Дирихле, а на другом куске — условие Неймана. Кроме того, можно рассматривать параболические уравнения произвольного $2m$ ($m \geq 1$) порядка.

В настоящей работе исследуется полудискретный метод Галёркина и проекционно-разностный метод приближенного решения задачи (7). Полученные оценки погрешностей приближенных решений ориентированы на аппроксимационные свойства подпространств типа “конечных элементов”.

Слабая сходимость полудискретного метода приближенного решения задачи (7) использовалась в [2] для обоснования разрешимости этой задачи. Некоторые результаты о сходимости полудискретного метода имеются в [3] и [4]. Однако оценки погрешностей в [3] и [4] не позволяют получать порядок скорости сходимости. Проекционно-разностный метод для задачи (7) в определенном выше классе решений, по-видимому, ранее не рассматривался. Полученные ниже результаты дополняют результаты работ [5] и [6], где установлены энергетические оценки погрешностей приближенных решений задачи (7) с более гладкими данными, а именно, $u^0 \in V$ и $f \in L_2(0, T; H)$.

2. Полудискретный метод Галёркина. Оценки погрешностей

Пусть V_h , где h – положительный параметр, конечномерное подпространство пространства V . Множество V_h с нормой пространства H обозначим H_h . Определим пространство V'_h , задав на элементах $u_h \in V_h$ двойственную норму $\|u_h\|_{V'_h} = \sup |(u_h, v_h)|$, где точная верхняя грань берется по всем $v_h \in V_h$ с $\|v_h\|_V = 1$. Заметим, что $\|u_h\|_{V'_h} \leq \|u_h\|_{V'}$. Пусть P_h – ортопроектор в пространстве H на H_h . Нетрудно проверить [3], что для $u \in H$ выполняется $\|P_h u\|_{V'_h} \leq \|u\|_{V'}$. Тогда оператор P_h допускает расширение $\bar{P}_h$ по непрерывности до оператора на всем пространстве V' , т.е. $\bar{P}_h: V' \rightarrow V'_h$ и $\|\bar{P}_h\|_{V' \rightarrow V'_h} \leq 1$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Справедливо соотношение

$$(\bar{P}_h u, v) = (u, P_h v) \quad (u \in V', v \in H).$$

Действительно, учитывая плотное и непрерывное вложение $H \subset V'$, в H найдется последовательность $\{u_i\}$ такая, что $\|u_i - u\|_{V'} \rightarrow 0$ при $i \rightarrow \infty$. Тогда $(\bar{P}_h u_i, v) = (u_i, P_h v)$. При $i \rightarrow \infty$, очевидно, $(u_i, P_h v) \rightarrow (u, P_h v)$. С другой стороны, при $i \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} |(\bar{P}_h u_i, v) - (\bar{P}_h u, v)| &\leq \|\bar{P}_h(u_i - u)\|_{V'_h} \|P_h v\|_V \\ &\leq \|u_i - u\|_{V'} \|P_h v\|_V \rightarrow 0. \end{aligned}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Легко показать, что для $u_h \in V_h$

$$\|u_h\|_{V'} \leq \|P_h\|_{V \rightarrow V} \|u_h\|_{V'_h}.$$

В подпространстве V_h рассмотрим задачу

$$u'_h(t) + \bar{P}_h A(t) u_h(t) + \bar{P}_h B(t) u_h(t) = \bar{P}_h f(t). \quad (9)$$

Значение $u_h(0) = u_h^0 \in V_h$ считаем заданным. В тройке пространств $V_h \subset H_h \subset V'_h$ выполнены условия разрешимости задачи (9).

Обозначим через $A_h(t)$ сужение на V_h оператора $\overline{P}_h A(t)$. Тогда из соотношения на $u_h, v_h \in V_h$

$$(A_h(t)u_h, v_h) = a(t, u_h, v_h) \quad (10)$$

и свойств (1) и (3) следует самосопряженность и положительная определенность оператора $A_h(t): H_h \rightarrow H_h$. Оператор $A_h(t)$ дифференцируем почти при всех t и

$$(A'_h(t)u_h, v_h) = \frac{\partial}{\partial t} a(t, u_h, v_h) = a_1(t, u_h, v_h).$$

ЛЕММА 1. Для любого $u_h \in V_h$ справедливы оценки:

$$\delta \|u_h\|_V^2 \leq \|A_h^{\frac{1}{2}}(t)u_h\|^2 \leq M_1 \|u_h\|_V^2, \quad (11)$$

$$\delta \|A_h^{-\frac{1}{2}}(t)u_h\|^2 \leq \|u_h\|_{V'_h}^2 \leq M_1 \|A_h^{-\frac{1}{2}}(t)u_h\|^2. \quad (12)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оценка (11) следует из (3), (10), (2). Докажем (12). Для $u_h, v_h \in V_h$

$$\begin{aligned} (A_h^{-\frac{1}{2}}(t)u_h, v_h) &= (u_h, A_h^{-\frac{1}{2}}(t)v_h) \leq \|u_h\|_{V'_h} \|A_h^{-\frac{1}{2}}(t)v_h\|_V \\ &\leq \delta^{-\frac{1}{2}} \|u_h\|_{V'_h} \|v_h\|. \end{aligned}$$

Итак, в (12) установлена левая оценка. Правая оценка в (12) следует из (11) и оценки

$$\begin{aligned} \|u_h\|_{V'_h} &= \sup_{v_h \in V_h} \frac{|(u_h, v_h)|}{\|v_h\|_V} \\ &\leq \|A_h^{-\frac{1}{2}}(t)u_h\| \sup_{v_h \in V_h} \frac{\|A_h^{\frac{1}{2}}(t)v_h\|}{\|v_h\|_V}. \end{aligned}$$

ЛЕММА 2. Для решения $u_h(t)$ задачи (9) справедлива оценка

$$\begin{aligned} \max_{0 \leq t \leq T} \|u_h(t)\|_{V'_h}^2 + \int_0^T (\|u_h(t)\|^2 + \|A_h^{-1}(t)u'_h(t)\|^2) dt \\ \leq M \left(\|u_h^0\|_{V'_h}^2 + \int_0^T \|A_h^{-1}(t)\overline{P}_h f(t)\|^2 dt \right). \end{aligned} \quad (13)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Уравнение (9) умножим скалярно в H на $A_h^{-1}(t)u_h(t)$. Получим

$$(u'_h, A_h^{-1}(t)u_h) + \|u_h\|^2 + (\overline{P}_h B(t)u_h, A_h^{-1}(t)u_h) = (\overline{P}_h f(t), A_h^{-1}(t)u_h). \quad (14)$$

Из дифференцируемости по t оператора $A_h(t)$ следует (см., например, [7]) дифференцируемость и оператора $A_h^{-1}(t)$, причем

$$\frac{d}{dt}A_h^{-1}(t) = -A_h^{-1}(t)A'_h(t)A_h^{-1}(t).$$

Рассмотрим выражение

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(u_h, A_h^{-1}(t)u_h) &= (u'_h, A_h^{-1}(t)u_h) \\ &\quad + (u_h, A_h^{-1}(t)u'_h) - (u_h, A_h^{-1}(t)A'_h(t)A_h^{-1}(t)u_h) \\ &= 2 \operatorname{Re}(u'_h, A_h^{-1}(t)u_h) - a_1(t, A_h^{-1}(t)u_h, A_h^{-1}(t)u_h). \end{aligned} \quad (15)$$

Из (14), воспользовавшись (15), получим

$$\begin{aligned} &\|A_h^{-\frac{1}{2}}(t)u_h(t)\|^2 - \|A_h^{-\frac{1}{2}}(0)u_h^0\|^2 + 2 \int_0^t \|u_h(s)\|^2 ds \\ &= 2 \operatorname{Re} \int_0^t (\overline{P}_h f(s), A_h^{-1}(s)u_h(s)) ds \\ &\quad - 2 \operatorname{Re} \int_0^t (\overline{P}_h B(s)u_h(s), A_h^{-1}(s)u_h(s)) ds \\ &\quad - \int_0^t a_1(s, A_h^{-1}(s)u_h(s), A_h^{-1}(s)u_h(s)) ds = \sum_{i=1}^3 J_i. \end{aligned} \quad (16)$$

Оцениваем слагаемые J_i в правой части (16).

$$J_1 \leq 2 \int_0^T \|A_h^{-1}(s)\overline{P}_h f(s)\|^2 ds + \frac{1}{2} \int_0^t \|u_h(s)\|^2 ds.$$

Учитывая (11) и (6), для J_2 получим

$$\begin{aligned} J_2 &\leq 2 \int_0^t \|\overline{P}_h B(s)u_h(s)\|_{V'_h} \|A_h^{-1}(s)u_h(s)\|_V ds \\ &\leq \varepsilon M_3^2 \int_0^t \|u_h(s)\|^2 ds + \frac{1}{\varepsilon \delta} \int_0^t \|A_h^{-\frac{1}{2}}(s)u_h(s)\|^2 ds. \end{aligned}$$

Положим здесь $\varepsilon = (2M_3^2)^{-1}$. Наконец, оцениваем J_3 , учитывая (4) и (11),

$$J_3 \leq M_2 \int_0^t \|A_h^{-1}(s)u_h(s)\|_V^2 ds \leq M_2 \delta^{-1} \int_0^t \|A_h^{-\frac{1}{2}}(s)u_h(s)\|^2 ds.$$

В результате от (16) приходим к оценке

$$\begin{aligned} & \|A_h^{-\frac{1}{2}}(t)u_h(t)\|^2 + \int_0^t \|u_h(s)\|^2 ds \leq \|A_h^{-\frac{1}{2}}(0)u_h^0\|^2 \\ & + c_1 \int_0^T \|A_h^{-1}(t)\overline{P}_h f(t)\|^2 dt + c_2 \int_0^t \|A_h^{-\frac{1}{2}}(s)u_h(s)\|^2 ds. \end{aligned} \quad (17)$$

В (17) выделяем интегральное неравенство для функции $\|A_h^{-\frac{1}{2}}(t)u_h(t)\|$, из него и равенства (15) получим с учетом (12) оценку

$$\begin{aligned} & \max_{0 \leq t \leq T} \|u_h(t)\|_{V'_h}^2 + \int_0^T \|u_h(t)\|^2 dt \\ & \leq M \left(\|u_h^0\|_{V'_h}^2 + \int_0^T \|A_h^{-1}(t)\overline{P}_h f(t)\|^2 dt \right). \end{aligned}$$

Оценка $\int_0^T \|A_h^{-1}(t)u'_h(t)\|^2 dt$ следует из тождества

$$A_h^{-1}(t)u'_h(t) + u_h(t) + A_h^{-1}(t)\overline{P}_h B(t)u_h(t) = A_h^{-1}(t)\overline{P}_h f(t).$$

Переходим к оценкам погрешностей. К уравнению (7) применим оператор $\overline{P}_h$. Заметим, что $\overline{P}_h u'(t) = (P_h u(t))'$.

$$(P_h u(t))' + \overline{P}_h A(t)u(t) + \overline{P}_h B(t)u(t) = \overline{P}_h f(t). \quad (18)$$

Вычитаем из (18) тождество (9). Полученное соотношение преобразуем к виду

$$\begin{aligned} & (P_h u(t) - u_h(t))' + \overline{P}_h A(t)(P_h u(t) - u_h(t)) \\ & + \overline{P}_h B(t)(P_h u(t) - u_h(t)) \\ & = \overline{P}_h A(t)(P_h - I)u(t) + \overline{P}_h B(t)(P_h - I)u(t). \end{aligned} \quad (19)$$

Из (19) и (13) следует оценка

$$\begin{aligned} & \max_{0 \leq t \leq T} \|P_h u(t) - u_h(t)\|_{V'_h}^2 + \int_0^T \|P_h u(t) - u_h(t)\|^2 dt \\ & + \int_0^T \|A_h^{-1}(t)(\overline{P}_h u'(t) - u'_h(t))\|^2 dt \\ & \leq M \left(\|P_h u^0 - u_h^0\|_{V'_h}^2 + \int_0^T \|A_h^{-1}(t)\overline{P}_h A(t)(P_h - I)u(t)\|^2 dt \right. \\ & \left. + \int_0^T \|A_h^{-1}(t)\overline{P}_h B(t)(P_h - I)u(t)\|^2 dt \right). \end{aligned} \quad (20)$$

Определим гильбертовы пространства для $t \in [0, T]$

$$V(t) = \{u \in V \mid \|u\|_{V(t)}^2 = a(t, u, u)\}.$$

Обозначим через $Q_h(t)$ ортогональный проектор в пространстве $V(t)$ на V_h . Тогда для $u \in V$ и $v_h \in V_h$

$$a(t, u, v_h) = a(t, Q_h(t)u, v_h).$$

Итак, почти при всех $t \in [0, T]$

$$\overline{P}_h A(t)u(t) = \overline{P}_h A(t)Q_h(t)u(t). \quad (21)$$

В результате получим оценку

$$\begin{aligned} & \int_0^T \|A_h^{-1}(t)\overline{P}_h A(t)(P_h - I)u(t)\|^2 dt \\ &= \int_0^T \|[P_h - Q_h(t)]u(t)\|^2 dt \leq \int_0^T \|[I - Q_h(t)]u(t)\|^2 dt. \end{aligned}$$

Учитывая, что $\|A_h^{-\frac{1}{2}}(t)\|_{H_h \rightarrow H_h} \leq c$, а также (11) и (6), оцениваем

$$\begin{aligned} & \int_0^T \|A_h^{-1}(t)\overline{P}_h B(t)(P_h - I)u(t)\|^2 dt \\ & \leq c_1 \int_0^T \|(P_h - I)u(t)\|^2 dt \leq c_1 \int_0^T \|[I - Q_h(t)]u(t)\|^2 dt. \end{aligned}$$

Из полученных оценок, неравенства треугольника и аппроксимационного свойства ортопроектора P_h следует

ТЕОРЕМА 1. Пусть $u(t)$ – слабое решение задачи (7), а $u_h(t)$ – решение задачи (9). Тогда справедлива оценка

$$\begin{aligned} & \max_{0 \leq t \leq T} \|P_h u(t) - u_h(t)\|_{V_h'}^2 + \int_0^T \|u(t) - u_h(t)\|^2 dt \\ &+ \int_0^T \|A_h^{-1}(t)(\overline{P}_h u'(t) - u_h'(t))\|^2 dt \\ &\leq M \left(\|P_h u^0 - u_h^0\|_{V_h'}^2 + \int_0^T \|[I - Q_h(t)]u(t)\|^2 dt \right). \quad (22) \end{aligned}$$

Эффективность оценки (22) обсуждается ниже.

3. Проекционно-разностный метод. Оценки погрешностей

Дифференциальной задаче (9) поставим в соответствие разностную задачу в V_h

$$(u_k^h - u_{k-1}^h)\tau^{-1} + A_h(t_k)u_k^h + B_h^k u_k^h = f_h^k, \quad (23)$$

где $k = 1, 2, \dots, N$ и элемент $u_0^h \in V_h$ считаем заданным. В (23) использованы обозначения: N – натуральное число, $\tau N = T$, $t_k = k\tau$,

$$B_h^k = \frac{1}{\tau} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \overline{P}_h B(t) dt, \quad f_h^k = \frac{1}{\tau} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \overline{P}_h f(t) dt.$$

Установим разрешимость задачи (23), т.е. обратимость в V_h (или, что безразлично, в V_h') оператора

$$I + \tau A_h(t_k) + \tau B_h^k = \{I + \tau B_h^k [I + \tau A_h(t_k)]^{-1}\} [I + \tau A_h(t_k)],$$

где $k = 1, 2, \dots, N$. Проведем оценку

$$\begin{aligned} & \|\tau B_h^k [I + \tau A_h(t_k)]^{-1} v_h\|_{V_h'} \\ & \leq \int_{t_{k-1}}^{t_k} \|\overline{P}_h B(t) [I + \tau A_h(t_k)]^{-1} v_h\|_{V_h'} dt \\ & \leq M_3 \tau \|A_h^{\frac{1}{2}}(t_k) [I + \tau A_h(t_k)]^{-1} A_h^{-\frac{1}{2}}(t_k) v_h\| \\ & \leq M_3 \frac{1}{2} \tau^{\frac{1}{2}} \|A_h^{-\frac{1}{2}}(t_k) v_h\| \leq \tau^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} M_3 \delta^{-\frac{1}{2}} \|v_h\|_{V_h'}. \end{aligned}$$

Таким образом, по крайней мере для $0 < \tau < 4\delta M_3^{-2}$, операторы $I + \tau A_h(t_k) + \tau B_h^k$ обратимы.

Установим оценки погрешностей. Интегрируем (18) по t от t_{k-1} до t_k и результат делим на τ . Из полученного соотношения вычитаем (23). Тогда $z_k = P_h u(t_k) - u_k^h$ удовлетворяет тождеству

$$\begin{aligned} & (z_k - z_{k-1})\tau^{-1} + A_h(t_k)z_k \\ & = \frac{1}{\tau} \int_{t_{k-1}}^{t_k} [A_h(t_k)P_h u(t_k) - \overline{P}_h A(t)u(t)] dt \\ & \quad + \frac{1}{\tau} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \overline{P}_h B(t)[u_k^h - u(t)] dt. \end{aligned} \quad (24)$$

Умножим (24) на $A_h^{-1}(t_k)z_k \in V_h$ скалярно в H .

$$\begin{aligned} & ((z_k - z_{k-1})\tau^{-1}, A_h^{-1}(t_k)z_k) + \|z_k\|^2 \\ & = \left(\frac{1}{\tau} \int_{t_{k-1}}^{t_k} [A_h(t_k)P_h u(t_k) - \overline{P}_h A(t)u(t)] dt, A_h^{-1}(t_k)z_k \right) \\ & \quad + \left(\frac{1}{\tau} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \overline{P}_h B(t)[u_k^h - u(t)] dt, A_h^{-1}(t_k)z_k \right). \end{aligned} \quad (25)$$

В (25) прежде всего рассмотрим

$$\begin{aligned}
& ((z_k - z_{k-1})\tau^{-1}, A_h^{-1}(t_k)z_k) \\
&= a(t_k, A_h^{-1}(t_k)(z_k - z_{k-1})\tau^{-1}, A_h^{-1}(t_k)z_k) \\
&= \frac{1}{\tau} \int_{t_{k-1}}^{t_k} a(t, A_h^{-1}(t)(z_k - z_{k-1})\tau^{-1}, A_h^{-1}(t)z_k) dt \\
&\quad + \frac{1}{\tau} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left[\int_t^{t_k} \frac{d}{ds} a(s, A_h^{-1}(s)(z_k - z_{k-1})\tau^{-1}, A_h^{-1}(s)z_k) ds \right] dt.
\end{aligned}$$

Заметим здесь, что

$$\begin{aligned}
& 2 \operatorname{Re} \frac{1}{\tau} \int_{t_{k-1}}^{t_k} a(t, A_h^{-1}(t)(z_k - z_{k-1})\tau^{-1}, A_h^{-1}(t)z_k) dt \\
&= 2 \operatorname{Re} \frac{1}{\tau} \int_{t_{k-1}}^{t_k} ((z_k - z_{k-1})\tau^{-1}, A_h^{-1}(t)z_k) dt \\
&= \frac{1}{\tau^2} \int_{t_{k-1}}^{t_k} [\|A_h^{-\frac{1}{2}}(t)z_k\|^2 - \|A_h^{-\frac{1}{2}}(t)z_{k-1}\|^2 + \|A_h^{-\frac{1}{2}}(t)(z_k - z_{k-1})\|^2] dt.
\end{aligned}$$

Возьмем теперь от (25) удвоенную вещественную часть. Путем несложных преобразований получим тождество

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\tau} \|A_h^{-\frac{1}{2}}(t_k)z_k\|^2 - \frac{1}{\tau} \|A_h^{-\frac{1}{2}}(t_{k-1})z_{k-1}\|^2 \\
&+ \frac{1}{\tau^2} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \|A_h^{-\frac{1}{2}}(t)(z_k - z_{k-1})\|^2 dt + 2\|z_k\|^2 \\
&= \frac{1}{\tau^2} \int_{t_{k-1}}^{t_k} (\|A_h^{-\frac{1}{2}}(t_k)z_k\|^2 - \|A_h^{-\frac{1}{2}}(t)z_k\|^2) dt \\
&+ \frac{1}{\tau^2} \int_{t_{k-1}}^{t_k} (\|A_h^{-\frac{1}{2}}(t)z_{k-1}\|^2 - \|A_h^{-\frac{1}{2}}(t_{k-1})z_{k-1}\|^2) dt \\
&- \frac{2}{\tau^2} \operatorname{Re} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left[\int_t^{t_k} \frac{d}{ds} a(s, A_h^{-1}(s)(z_k - z_{k-1}), A_h^{-1}(s)z_k) ds \right] dt \\
&+ 2 \operatorname{Re} \left(\frac{1}{\tau} \int_{t_{k-1}}^{t_k} [A_h(t_k)P_h u(t_k) - \bar{P}_h A(t)u(t)] dt, A_h^{-1}(t_k)z_k \right) \\
&+ 2 \operatorname{Re} \left(\frac{1}{\tau} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \bar{P}_h B(t)[u_k^h - u(t)] dt, A_h^{-1}(t_k)z_k \right) = \sum_{i=1}^5 J_i. \quad (26)
\end{aligned}$$

Оцениваем слагаемые в правой части (26). Преобразуем

$$\begin{aligned}
J_1 &= \frac{1}{\tau^2} \int_{t_{k-1}}^{t_k} [a(t_k, A_h^{-1}(t_k)z_k, A_h^{-1}(t_k)z_k) \\
&\quad - a(t, A_h^{-1}(t)z_k, A_h^{-1}(t)z_k)] dt \\
&= \frac{1}{\tau^2} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left[\int_t^{t_k} \frac{d}{ds} a(s, A_h^{-1}(s)z_k, A_h^{-1}(s)z_k) ds \right] dt.
\end{aligned}$$

Для произвольных $u_h, v_h \in V_h$ получим

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} a(t, A_h^{-1}(t)u_h, A_h^{-1}(t)v_h) &= \frac{d}{dt} (u_h, A_h^{-1}(t)v_h) \\ &= -a_1(t, A_h^{-1}(t)v_h, A_h^{-1}(t)u_h). \end{aligned} \quad (27)$$

В таком случае, учитывая (11),

$$\begin{aligned} J_1 &= -\frac{1}{\tau^2} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left[\int_t^{t_k} a_1(s, A_h^{-1}(s)z_k, A_h^{-1}(s)z_k) ds \right] dt \\ &\leq \frac{1}{\tau} \int_{t_{k-1}}^{t_k} |a_1(s, A_h^{-1}(s)z_k, A_h^{-1}(s)z_k)| ds \\ &\leq \frac{M_2}{\tau} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \|A_h^{-1}(s)z_k\|_V^2 ds \leq M_1 M_2 \delta^{-2} \|A_h^{-\frac{1}{2}}(t_k)z_k\|^2. \end{aligned}$$

Аналогично получается

$$J_2 \leq M_1 M_2 \delta^{-2} \|A_h^{-\frac{1}{2}}(t_{k-1})z_{k-1}\|^2.$$

Учитывая (27) и (11), оценим

$$\begin{aligned} J_3 &\leq 2M_2 \frac{1}{\tau} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \|A_h^{-1}(s)(z_k - z_{k-1})\|_V \|A_h^{-1}(s)z_k\|_V ds \\ &\leq \varepsilon_1 T M_2 \delta^{-1} \frac{1}{\tau^2} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \|A_h^{-\frac{1}{2}}(t)(z_k - z_{k-1})\|^2 dt \\ &\quad + \frac{1}{\varepsilon_1} M_1 M_2 \delta^{-2} \|A_h^{-\frac{1}{2}}(t_k)z_k\|^2. \end{aligned}$$

Переходим к слагаемому J_4 , которое преобразуем:

$$J_4 = \frac{2}{\tau} \operatorname{Re} \int_{t_{k-1}}^{t_k} [(u(t_k), z_k) - (\overline{P}_h A(t)u(t), A_h^{-1}(t_k)z_k)] dt.$$

Из соотношения (21) получим

$$\begin{aligned} (\overline{P}_h A(t)u(t), A_h^{-1}(t_k)z_k) &= (A_h(t)Q_h(t)u(t), A_h^{-1}(t)z_k) \\ &\quad + (A_h(t)Q_h(t)u(t), A_h^{-1}(t_k)z_k - A_h^{-1}(t)z_k). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} J_4 &= \frac{2}{\tau} \operatorname{Re} \int_{t_{k-1}}^{t_k} (u(t_k) - u(t), z_k) dt \\ &\quad + \frac{2}{\tau} \operatorname{Re} \int_{t_{k-1}}^{t_k} (u(t) - Q_h(t)u(t), z_k) dt \\ &\quad + \frac{2}{\tau} \int_{t_{k-1}}^{t_k} a(t, u(t), A_h^{-1}(t)z_k - A_h^{-1}(t_k)z_k) dt = \sum_{j=1}^3 J_4^j. \end{aligned}$$

Оцениваем слагаемые J_4^j ($j = 1, 2$):

$$J_4^1 \leq \frac{1}{\varepsilon_2 \tau} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \|u(t_k) - u(t)\|^2 dt + \varepsilon_2 \|z_k\|^2,$$

$$J_4^2 \leq \frac{1}{\varepsilon_3 \tau} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \|[I - Q_h(t)]u(t)\|^2 dt + \varepsilon_3 \|z_k\|^2.$$

Для J_4^3 получим

$$J_4^3 \leq \frac{2M_1}{\tau} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \|u(t)\|_V \|A_h^{-1}(t)z_k - A_h^{-1}(t_k)z_k\|_V dt.$$

Рассмотрим разность

$$A_h^{-1}(t) - A_h^{-1}(t_k) = \int_{t_k}^t \frac{d}{ds} A_h^{-1}(s) ds = \int_t^{t_k} A_h^{-1}(s) A_h'(s) A_h^{-1}(s) ds.$$

Отсюда, с учетом (11), следует

$$\begin{aligned} & \|A_h^{-1}(t)z_k - A_h^{-1}(t_k)z_k\|_V \\ & \leq \delta^{-\frac{1}{2}} \int_t^{t_k} \|A_h^{-\frac{1}{2}}(s)A_h'(s)A_h^{-1}(s)z_k\| ds. \end{aligned}$$

Для произвольного $v_h \in V_h$ рассмотрим

$$\begin{aligned} & |(A_h^{-\frac{1}{2}}(s)A_h'(s)A_h^{-1}(s)z_k, v_h)| = |a_1(s, A_h^{-1}(s)z_k, A_h^{-\frac{1}{2}}(s)v_h)| \\ & \leq M_2 M_1^{\frac{1}{2}} \delta^{-\frac{3}{2}} \|A_h^{-\frac{1}{2}}(t_k)z_k\| \cdot \|v_h\|. \end{aligned}$$

В результате приходим к оценке

$$\begin{aligned} J_4^3 & \leq 2M_1^{3/2} M_2 \delta^{-2} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \|u(t)\|_V dt \|A_h^{-\frac{1}{2}}(t_k)z_k\| \\ & \leq M_1^3 M_2^2 \delta^{-4} \tau \int_{t_{k-1}}^{t_k} \|u(t)\|_V^2 dt + \|A_h^{-\frac{1}{2}}(t_k)z_k\|^2. \end{aligned}$$

Последнее слагаемое J_5 в (26) преобразуем

$$\begin{aligned} J_5 & = 2 \operatorname{Re} \left(\frac{1}{\tau} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \overline{P_h} B(t) [u_k^h - P_h u(t_k)] dt, A_h^{-1}(t_k)z_k \right) \\ & + 2 \operatorname{Re} \left(\frac{1}{\tau} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \overline{P_h} B(t) [P_h u(t_k) - u(t)] dt, A_h^{-1}(t_k)z_k \right) = J_5^1 + J_5^2. \end{aligned}$$

Учитывая (6) и (11), получим

$$\begin{aligned} J_5^1 &\leq \frac{2}{\tau} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \|\overline{P}_h B(t) z_k\|_{V'_h} dt \|A_h^{-1}(t_k) z_k\|_V \\ &\leq 2M_3 \delta^{-\frac{1}{2}} \|z_k\| \|A_h^{-\frac{1}{2}}(t_k) z_k\| \\ &\leq \varepsilon_4 \|z_k\|^2 + \frac{1}{\varepsilon_4} M_3^2 \delta^{-1} \|A_h^{-\frac{1}{2}}(t_k) z_k\|^2. \end{aligned}$$

Аналогично оцениваем

$$\begin{aligned} J_5^2 &\leq \frac{1}{\tau} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \|P_h u(t_k) - u(t)\|^2 dt + M_3^2 \delta^{-1} \|A_h^{-\frac{1}{2}}(t_k) z_k\|^2 \\ &\leq \frac{2}{\tau} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \|u(t_k) - u(t)\|^2 dt + \frac{2}{\tau} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \|[I - Q_h(t)]u(t)\|^2 dt \\ &\quad + M_3^2 \delta^{-1} \|A_h^{-\frac{1}{2}}(t_k) z_k\|^2. \end{aligned}$$

Необходимые оценки слагаемых в правой части (26) установлены. Полагаем в этих оценках $\varepsilon_1 2TM_2 = \delta$, $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \varepsilon_4 = 1/3$. Учтем также, что из (12) следует

$$\frac{M_1}{\tau^2} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \|A_h^{-\frac{1}{2}}(t)(z_k - z_{k-1})\|^2 dt \geq \frac{1}{\tau} \|z_k - z_{k-1}\|_{V'_h}^2.$$

Таким образом, от тождества (26) приходим к оценке

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\tau} \|A_h^{-\frac{1}{2}}(t_k) z_k\|^2 - \frac{1}{\tau} \|A_h^{-\frac{1}{2}}(t_{k-1}) z_{k-1}\|^2 \\ &\quad + \frac{1}{\tau} \|z_k - z_{k-1}\|_{V'_h}^2 + \|z_k\|^2 \\ &\leq c_1 \|A_h^{-\frac{1}{2}}(t_k) z_k\|^2 + c_2 \|A_h^{-\frac{1}{2}}(t_{k-1}) z_{k-1}\|^2 \\ &\quad + \frac{c_3}{\tau} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \|[I - Q_h(t)]u(t)\|^2 dt \\ &\quad + \frac{c_4}{\tau} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \|u(t_k) - u(t)\|^2 dt + c_5 \tau \int_{t_{k-1}}^{t_k} \|u(t)\|_V^2 dt. \end{aligned} \quad (28)$$

Умножим (28) на τ и суммируем по k от 1 до $m \leq N$.

$$\begin{aligned} &\|A_h^{-\frac{1}{2}}(t_m) z_m\|^2 - \|A_h^{-\frac{1}{2}}(0) z_0\|^2 \\ &\quad + \sum_{k=1}^m (\|z_k\|^2 \tau + \|z_k - z_{k-1}\|_{V'_h}^2) \\ &\leq c_1 \sum_{k=1}^m \|A_h^{-\frac{1}{2}}(t_k) z_k\|^2 \tau + c_2 \|A_h^{-\frac{1}{2}}(0) z_0\|^2 \\ &\quad + c_3 \int_0^T \|[I - Q_h(t)]u(t)\|^2 dt \\ &\quad + c_4 \sum_{k=1}^N \int_{t_{k-1}}^{t_k} \|u(t_k) - u(t)\|^2 dt + c_5 \tau^2 \int_0^T \|u(t)\|_V^2 dt. \end{aligned} \quad (29)$$

Выделяем в (29) суммарное неравенство для $\|A_h^{-\frac{1}{2}}(t_m)z_m\|^2$. В результате, учитывая (8) и (12), получим оценку

$$\begin{aligned} & \|A_h^{-\frac{1}{2}}(t_m)z_m\|^2 + \sum_{k=1}^N (\|z_k\|^2 \tau + \|z_k - z_{k-1}\|_{V'_h}^2) \\ & \leq M \left\{ \|P_h u^0 - u_0^h\|_{V'_h}^2 + \int_0^T \|[I - Q_h(t)]u(t)\|^2 dt \right. \\ & \quad \left. + \tau^2 R(u^0, f) + \sum_{k=1}^N \int_{t_{k-1}}^{t_k} \|u(t_k) - u(t)\|^2 dt \right\}. \end{aligned} \quad (30)$$

ЛЕММА 3. Пусть $u(t)$ – слабое решение задачи (7). Тогда справедлива оценка

$$\sum_{k=1}^N \int_{t_{k-1}}^{t_k} \|u(t_k) - u(t)\|^2 dt \leq \tau M R(u^0, f). \quad (31)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из предположений на форму $a(t, u, v)$ следует (см. [8]) существование семейства эволюционных операторов $U(t, s)$ ($0 \leq s \leq t \leq T$) класса C^1 , ограниченно действующих в пространстве V' . Решение $u(t)$ задачи (7) запишется в виде

$$u(t) = U(t, 0)u^0 + \int_0^t U(t, s)\varphi(s) ds,$$

где $\varphi(t) = f(t) - B(t)u(t) \in L_2(0, T; V')$. Далее доказательство проводится подобно доказательству аналогичной леммы из [5]. Для $t_{k-1} \leq t \leq t_k$ получим

$$u(t_k) - u(t) = \int_t^{t_k} U(t_k, s)\varphi(s) ds + [U(t_k, t) - I]u(t).$$

Из оценки (8) на промежутке $[t, t_k]$ следует оценка

$$\begin{aligned} & \left\| \int_t^{t_k} U(t_k, s)\varphi(s) ds \right\|^2 \leq M \int_t^{t_k} \|\varphi(s)\|_{V'}^2 ds \\ & \leq 2M \int_{t_{k-1}}^{t_k} \|f(t)\|_{V'}^2 dt + 2M \int_{t_{k-1}}^{t_k} \|B(t)u(t)\|_{V'}^2 dt \\ & \leq c_1 \int_{t_{k-1}}^{t_k} \|f(t)\|_{V'}^2 dt + c_2 \int_{t_{k-1}}^{t_k} \|u(t)\|_V^2 dt. \end{aligned}$$

Перейдем к оценке слагаемого $[U(t_k, t) - I]u(t)$. Обратим внимание, что функция $v(s) = [U(s, t) - I]u(t)$ является почти при всех $t \in [t_{k-1}, t_k]$ решением на $[t, t_k]$ уравнения

$$v'(s) + A(s)v(s) = -A(s)u(t), \quad v(t) = 0.$$

Тогда из оценки (8) следует, что

$$\begin{aligned}\|v(t_k)\|^2 &= \|[U(t_k, t) - I]u(t)\|^2 \\ &\leq M \int_t^{t_k} \|A(s)u(t)\|_{V'}^2 ds \leq M M_1^2 \tau \|u(t)\|_V^2.\end{aligned}$$

В результате приходим к оценке

$$\sum_{k=1}^N \int_{t_{k-1}}^{t_k} \|u(t_k) - u(t)\|^2 dt \leq \tau c \int_0^T (\|f(t)\|_{V'}^2 + \|u(t)\|_V^2) dt,$$

из которой и оценки (8) следует оценка (31).

ЛЕММА 4. Пусть $u(t)$ – слабое решение задачи (7). Тогда

$$\sum_{k=1}^N \|(I - P_h)u(t_k)\|^2 \tau \leq 2 \int_0^T \|(I - P_h)u(t)\|^2 dt + \tau M R(u^0, f). \quad (32)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оценка (32) следует из (31) и оценки

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^N \|(I - P_h)u(t_k)\|^2 \tau &= \sum_{k=1}^N \int_{t_{k-1}}^{t_k} \|(I - P_h)u(t_k)\|^2 dt \\ &\leq \sum_{k=1}^N \int_{t_{k-1}}^{t_k} [2\|u(t_k) - u(t)\|^2 + 2\|(I - P_h)u(t)\|^2] dt \\ &= 2 \sum_{k=1}^N \int_{t_{k-1}}^{t_k} \|u(t_k) - u(t)\|^2 dt + 2 \int_0^T \|(I - P_h)u(t)\|^2 dt.\end{aligned}$$

Из оценок (30)–(32), (12), неравенства треугольника и аппроксимационного свойства ортопроектора P_h следует

ТЕОРЕМА 2. Пусть $u(t)$ – слабое решение задачи (7), а u_k^h ($k = 1, 2, \dots, N$) – решение задачи (23). Тогда справедлива оценка

$$\begin{aligned}\max_{1 \leq k \leq N} \|P_h u(t_k) - u_k^h\|_{V'_h}^2 &+ \sum_{k=1}^N \|u(t_k) - u_k^h\|^2 \tau \\ &+ \sum_{k=1}^N \left\| \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left(\overline{P}_h u'(t) - \frac{u_k^h - u_{k-1}^h}{\tau} \right) dt \right\|_{V'_h}^2 \\ &\leq M \left\{ \|P_h u^0 - u_0^h\|_{V'_h}^2 + \tau R(u^0, f) + \int_0^T \|[I - Q_h(t)]u(t)\|^2 dt \right\},\end{aligned} \quad (33)$$

где $R(u^0, f)$ справедлива в оценке (8).

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Если предположить, что решение $u(t)$ задачи (7) такое, что $u'(t) \in L_2(0, T; H)$, то оценка (31), очевидно, усиливается

$$\sum_{k=1}^N \int_{t_{k-1}}^{t_k} \|u(t_k) - u(t)\|^2 dt \leq \tau^2 \int_0^T \|u'(t)\|^2 dt.$$

Тогда, как видно из оценки (30), в оценке (32) выражение $\tau R(u^0, f)$ следует заменить на

$$\tau^2 \left(R(u^0, f) + \int_0^T \|u'(t)\|^2 dt \right).$$

4. Эффективность установленных оценок погрешностей

Предположим, что задана последовательность конечномерных подпространств $V_h \subset V$, предельно плотная в пространстве V при $h \rightarrow 0$, т.е. для любого элемента $v \in V$ при $h \rightarrow 0$ выполняется $\|(I - Q_h)v\|_V \rightarrow 0$, где Q_h — ортопроектор в пространстве V на V_h . Из (2) и (3) следует эквивалентность норм в V и $V(t)$, а именно

$$\delta^{\frac{1}{2}} \|u\|_V \leq \|u\|_{V(t)} \leq M_1^{\frac{1}{2}} \|u\|_V.$$

Для всех $t \in [0, T]$ и $v \in V$ получим оценку

$$\begin{aligned} \|[I - Q_h(t)]v\| &\leq c \|[I - Q_h(t)]v\|_V \\ &\leq c\delta^{-\frac{1}{2}} \|[I - Q_h(t)]v\|_{V(t)} = c\delta^{-\frac{1}{2}} \inf_{v_h \in V_h} \|v - v_h\|_{V(t)} \\ &\leq c\delta^{-\frac{1}{2}} M_1^{\frac{1}{2}} \inf_{v_h \in V_h} \|v - v_h\|_V = c\delta^{-\frac{1}{2}} M_1^{\frac{1}{2}} \|(I - Q_h)v\|_V. \end{aligned}$$

Потребуем теперь, чтобы в (22) $\|P_h u^0 - u_h^0\|_{V_h'} \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$. Тогда из оценки (22) получим сходимость к нулю соответствующей погрешности полудискретного метода. Если же в (33) потребовать $\|P_h u^0 - u_h^0\|_{V_h'} \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$, то из оценки (33) дополнительно при $\tau \rightarrow 0$ следует сходимость к нулю погрешности проекционно-разностного метода.

Полученные оценки (22) и (33) таковы, что если известны аппроксимационные свойства подпространств V_h , то эти оценки позволяют получать и числовые характеристики скорости сходимости приближенных решений к точному. Проиллюстрируем этот факт на примере начально-краевых параболических задач с эллиптическими операторами второго порядка. Соответствующие примеры задач такого типа, сводящиеся к задаче (7), имеются в [1, с. 274] и [2, с. 114].

Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с гладкой границей Γ . Положим

$$a(t, u, v) = \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} \left(a_{ij}(t, x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \cdot \frac{\overline{\partial v(x)}}{\partial x_j} a(t, x) u(x) \overline{v(x)} \right) dx. \quad (34)$$

В (34) предполагаем, что функции a, a_{ij} достаточно гладкие по $(t, x) \in [0, T] \times \Omega$, $a(t, x) \geq a_0 > 0$, $a_{ij} = \overline{a_{ji}}$ и существует $\alpha > 0$ такое, что для всех $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$

$$\operatorname{Re} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t, x) \lambda_i \overline{\lambda_j} \geq \alpha \sum_{i=1}^n |\lambda_i|^2.$$

Рассматривая форму $a(t, u, v)$ на функциях $u, v \in \mathring{W}_2^1(\Omega)$, получим оператор $A(t)$ в (7), соответствующий в приложениях сильно эллиптическому оператору с первым краевым условием $u(x)|_\Gamma = 0$; при этом

$$H = L_2(\Omega), \quad V = \mathring{W}_2^1(\Omega), \quad V' = W_2^{-1}(\Omega).$$

Если форму (34) рассматривать на функциях $u, v \in W_2^1(\Omega)$, то соответствующий оператор $A(t)$ в (7) будет сильно эллиптическим с вторым краевым условием $\frac{\partial u(x)}{\partial \nu}|_\Gamma = 0$, где $\frac{\partial}{\partial \nu}$ — дифференцирование по направлению координаты в точке границы Γ ; при этом $H = L_2(\Omega)$, $V = W_2^1(\Omega)$.

Оператор $B(t)$ в (7) можно задать выражением

$$B(t)u(x) = \sum_{i=1}^n b_i(t, x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} + b(t, x)u(x),$$

где функции b, b_i предполагаются достаточно гладкими по (t, x) . В таком случае оператор $B(t)$ ограниченно действует из $L_2(\Omega)$ в $W_2^{-1}(\Omega)$ [1, с. 107].

Предположим теперь, что семейство конечномерных подпространств $V_h \subset V$ обладает следующим аппроксимационным свойством:

$$\inf_{v_h \in V_h} \|v - v_h\|_{W_2^1(\Omega)} \leq ch \|v\|_{W_2^2(\Omega)}, \quad (35)$$

где константа c не зависит от h и $v \in W_2^2(\Omega) \cap V$. Условие (35) является типичным для подпространств V_h типа “конечных элементов” (см., например, [9]). Предположение о гладкости функций a, a_{ij} и границы Γ позволяет из (35) получить (см., например, [10], [6]) оценку

$$\|[I - Q_h(t)]v\| \leq ch \|(I - Q_h)v\|_V \quad (v \in V). \quad (36)$$

В сделанных предположениях о задаче (7) и подпространствах V_h из (22) и (36) для слабых решений $u(t)$, в частности, следует оценка

$$\int_0^T \|u(t) - u_h(t)\|^2 dt \leq M (\|P_h u^0 - u_h^0\|_{V'}^2 + h^2 R(u^0, f)).$$

В аналогичных условиях из оценок (33) и (36) получим

$$\sum_{k=1}^N \|u(t_k) - u_k^h\|^2 \tau \leq M (\|P_h u^0 - u_0^h\|_{V'}^2 + (\tau + h^2) R(u^0, f)).$$

Для случая более гладких решений $u(t)$ задачи (7) порядок скорости сходимости к нулю соответствующих погрешностей увеличивается. Пусть, например, решение $u(t) \in L_2(0, T; W_2^2(\Omega))$. Тогда из (22), (36) и (35) получим оценку

$$\int_0^T \|u(t) - u_h(t)\|^2 dt \leq M \left(\|P_h u^0 - u_h^0\|_{V'}^2 + h^4 \int_0^T \|u(t)\|_{W_2^2(\Omega)}^2 dt \right).$$

Если же решение задачи (7) $u(t) \in L_2(0, T; W_2^2(\Omega))$ и $u'(t) \in L_2(0, T; H)$, то согласно замечанию 3 получим из (33) оценку

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N \|u(t_k) - u_k^h\|^2 \tau &\leq M \left[\|P_h u^0 - u_0^h\|_{V'}^2 \right. \\ &\quad \left. + \tau^2 \left(R(u^0, f) + \int_0^T \|u'(t)\|^2 dt \right) + h^4 \int_0^T \|u(t)\|_{W_2^2(\Omega)}^2 dt \right]. \end{aligned}$$

В заключение работы отметим, что равномерная сетка по t в задаче (23) может быть заменена произвольной $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T$. Результаты работы остаются справедливыми с небольшим изменением формулировок. Например, в последней оценке в левой части неравенства вместо τ следует писать $\tau_k = t_k - t_{k-1}$, а в правой части под τ нужно понимать $\max_{1 \leq k \leq N} \tau_k$.

Список литературы

1. Лионс Ж.-Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971.
2. Лионс Ж.-Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. М.: Мир, 1972.
3. Вайникко Г. М., Оя П. Э. О сходимости и скорости сходимости метода Галёркина для абстрактных эволюционных уравнений // Дифференц. уравнения. 1975. Т. 11. № 7. С. 1269–1277.
4. Гаевский Х., Грегер К., Захарьас К. Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1978.
5. Смагин В. В. Коэрцитивные оценки погрешностей проекционного и проекционно-разностного методов для параболических уравнений // Матем. сб. 1994. Т. 185. № 11. С. 79–94.
6. Смагин В. В. Коэрцитивные оценки погрешностей проекционно-разностного метода для абстрактного параболического уравнения с оператором, область определения которого зависит от времени // Сибирский матем. журн. 1996. Т. 37. № 2. С. 406–418.
7. Крейн С. Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. М.: Наука, 1967.

8. *Fujie Y., Tanabe H.* On some parabolic equations of evolution in Hilbert space // Osaka J. Math. 1973. V. 10. P. 115–130.
9. *Стренг Г., Фикс Дж.* Теория метода конечных элементов. М.: Мир, 1977.
10. *Suzuki T.* An abstract study of Galerkin's method for the evolution equation $u_t + A(t)u = 0$ of parabolic type with the Neumann boundary condition // J. Fac. Sci. Univ. Tokyo. Sect. IA Math. 1978. V. 25. № 1. P. 25–46.

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию
04.03.1996