Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. З. Гринес, О топологической классификации структурно устойчивых диффеоморфизмов поверхностей с одномерными аттракторами и репеллерами, *Матем. сб.*, 1997, том 188, номер 4, 57–94

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm216>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.89.56.158

26 апреля 2023 г., 15:49:19

УДК 513.83

В. З. Гринес

О топологической классификации структурно устойчивых диффеоморфизмов поверхностей с одномерными аттракторами и репеллерами

В настоящей работе устанавливаются необходимые и достаточные условия топологической сопряженности структурно устойчивых сохраняющих ориентацию диффеоморфизмов из класса $S(M)$, заданных на двумерном гладком замкнутом ориентируемом многообразии M и удовлетворяющих следующим условиям:

- 1) каждое нетривиальное базисное множество диффеоморфизма $f \in S(M)$ есть одномерный аттрактор или репеллер;
- 2) множество гетероклинических траекторий, принадлежащих пересечению устойчивых и неустойчивых многообразий седловых периодических точек из тривиальных базисных множеств, конечно.

Библиография: 35 названий.

§ 1. Введение. Предварительные сведения и формулировка результатов

Возможность топологической классификации диффеоморфизмов из класса $S(M)$ основана на полученной к настоящему времени топологической классификации диффеоморфизмов Морса–Смейла с конечным множеством гетероклинических траекторий и топологической классификации одномерных базисных множеств A -диффеоморфизмов, т.е. диффеоморфизмов, удовлетворяющих аксиоме (A) С. Смейла.

Как известно, необходимым и достаточным условием структурной устойчивости диффеоморфизма, заданного на двумерном многообразии, является выполнение для него аксиомы (A) С. Смейла и строгого условия трансверсальности (см. [1]–[6]). Согласно теореме С. Смейла о спектральном разложении множества неблуждающих точек A -диффеоморфизма f представляется в виде конечного объединения попарно непересекающихся замкнутых инвариантных множеств, называемых базисными множествами, каждое из которых содержит всюду плотную траекторию [20]. Базисное множество, являющееся периодической траекторией, будем называть *тривиальным*, а базисное множество, не совпадающее с периодической траекторией, будем называть *нетривиальным*. Если неблуждающие множества A -диффеоморфизмов содержат нетривиальные одномерные базисные

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-01-00236).

множества, то при решении задачи топологической классификации таких диффеоморфизмов естественно вначале появляется задача о топологической сопряженности ограничений A -диффеоморфизмов на одномерные базисные множества, которая формулируется следующим образом.

Пусть Ω, Ω' – одномерные базисные множества A -диффеоморфизмов f, f' , соответственно. Требуется найти необходимые и достаточные условия существования гомеоморфизма $g: M \rightarrow M$ такого, что $g(\Omega) = \Omega'$ и

$$f'|_{\Omega} = gfg^{-1}|_{\Omega'}.$$

Первые результаты в решении этой задачи были получены автором настоящей работы для ориентируемых аттракторов (см. [8]–[10])¹ и затем были обобщены Р. В. Плыкиным на случай просторно расположенных аттракторов и аттракторов со связками степени не больше двух [11]². Поставленная задача была полностью решена автором и Х. Х. Калаем для произвольных аттракторов на ориентируемой поверхности M рода $p \geq 0$ [12], [13] (см. также обзоры [14], [15, гл. 3]). В недавнее время появился цикл работ А. Жирова [16]–[18], посвященный комбинаторному описанию аттракторов.

В [19] (см. также [15]) автором настоящей работы найдены необходимые и достаточные условия топологической сопряженности сохраняющих ориентацию диффеоморфизмов Морса–Смейла, заданных на двумерном гладком замкнутом ориентируемом многообразии в предположении, что множество гетероклинических траекторий рассматриваемых диффеоморфизмов конечно³.

Изученный в [19] класс диффеоморфизмов содержит класс градиентноподобных диффеоморфизмов и класс диффеоморфизмов с ориентируемыми гетероклиническими множествами, для которых найден полный топологический инвариант в работах [21]–[24]. В работах [25]–[28] рассмотрены некоторые частные случаи диффеоморфизмов Морса–Смейла с конечным и счетным множеством гетероклинических траекторий на M .

¹Нетривиальное базисное множество Ω называется *ориентируемым*, если для любой точки $x \in \Omega$ и любых фиксированных положительных чисел α, β индекс пересечения многообразий $W_{\alpha}^s(x), W_{\beta}^u(x)$ один и тот же во всех точках пересечения, где $W_{\alpha}^s(x) = \{y \in W^s(x) \mid l(x, y) < \alpha\}$, $W_{\beta}^u(x) = \{y \in W^u(x) \mid l(x, y) < \beta\}$ (l – метрика на $W^s(x), W^u(x)$).

²Нетривиальное базисное множество Ω называется *просторно расположенным*, если не существует гомотопной нулю петли, образованной парой отрезков устойчивого и неустойчивого многообразия какой-либо точки из Ω .

³Согласно [20] класс $G(M)$ диффеоморфизмов Морса–Смейла выделяется следующими условиями:

- 1) множество неблуждающих траекторий диффеоморфизма $f \in G(M)$ конечно;
- 2) все периодические точки диффеоморфизма $f \in G(M)$ гиперболичны;
- 3) для любой пары периодических точек p, q диффеоморфизма $f \in G(M)$ пересечение $W^s(p)$ и $W^u(q)$ либо пусто, либо трансверсально.

В силу [1] класс диффеоморфизмов Морса–Смейла состоит из структурно устойчивых диффеоморфизмов.

Приведем некоторые факты о топологической структуре нетривиальных базисных множеств размерности нуль или единица A -диффеоморфизма f , заданного на двумерном многообразии M .⁴

Согласно Д. В. Аносову [30] и Р. Боуэну [31] нетривиальное базисное множество Ω представляется в виде конечного объединения $\Omega_1 \cup \dots \cup \Omega_m$ связных замкнутых подмножеств ($m \geq 1$), называемых *C-плотными компонентами* множества Ω , таких, что $f^m(\Omega_i) = \Omega_i$, $f(\Omega_i) = \Omega_{i+1}$, $\Omega_{m+1} = \Omega_1$. Для каждой точки x , принадлежащей C -плотной компоненте Ω_i , $i \in \{1, \dots, m\}$, множество $W^\sigma(x) \cap \Omega_i$ плотно в Ω_i , $\sigma \in \{s, u\}$. В силу [9] каждая компонента множества $W^\sigma(x) \setminus x$, не содержащая граничной периодической точки, также содержит множество плотное в Ω_i .

Для $\sigma \in \{s, u\}$ положим $\bar{\sigma} = s$, если $\sigma = u$, и $\bar{\sigma} = u$, если $\sigma = s$. Периодическая точка p , принадлежащая нетривиальному базисному множеству Ω , называется *граничной периодической точкой типа σ* , если одна из компонент связности множества $W^\sigma(p) \setminus p$ не пересекается с Ω , а обе компоненты связности множества $W^{\bar{\sigma}}(p) \setminus p$ пересекаются с Ω . Периодическая точка $p \in \Omega$ называется *граничной периодической точкой типа (s, u)* , если одна из компонент связности каждого из множеств $W^s(p) \setminus p$, $W^u(p) \setminus p$ не пересекается с Ω . Если множество Ω нульмерно или одномерно, то множество граничных периодических точек не пусто и конечно [8]–[11], [33] (см. также [14], [15, гл. 3]).

Если базисное множество одномерно, то в силу [32] оно является аттрактором или репеллером, и для любой точки x аттрактора (репеллера) Ω неустойчивое (устойчивое) многообразие принадлежит Ω .

Если p граничная периодическая точка аттрактора (репеллера) Ω , то будем обозначать через $W_\emptyset^s(p)$ ($W_\emptyset^u(p)$) компоненту связности множества $W^s(p) \setminus p$ ($W^u(p) \setminus p$), не пересекающуюся с Ω , и через $W_\infty^s(p)$ ($W_\infty^u(p)$) – компоненту связности множества $W^s(p) \setminus p$ ($W^u(p) \setminus p$), пересекающуюся с Ω . Периодическую точку одномерного аттрактора, не являющуюся граничной, будем называть *внутренней*.

Если q седловая периодическая точка диффеоморфизма f и $x, y \in W^\sigma(q)$, $\sigma \in \{s, u\}$, то будем обозначать через $[x, y]^\sigma$, $[x, y]^\sigma$, $(x, y)^\sigma$, $(x, y)^\sigma$ связные дуги на многообразии $W^\sigma(q)$ с граничными точками x, y .

Из работ [8]–[11], [33] (см. также обзоры [14], [15, гл. 3]) следует, что для одномерного аттрактора (репеллера) Ω достижимая изнутри граница множества $M \setminus \Omega_i$ распадается единственным образом на конечное число $R(\Omega)$ связок (понятие связки принадлежит Р. В. Плыкину [11]). Каждая связка C аттрактора (репеллера) есть объединение r_C неустойчивых (устойчивых) многообразий $W^\sigma(p_1) \cup \dots \cup W^\sigma(p_{r_C})$ граничных периодических точек $p_1, \dots, p_{r_C}$ множества Ω , $\sigma = u$ ($\sigma = s$), обладающих следующим свойством: существует последовательность точек $x_1, \dots, x_{2r_C}$ такая, что

⁴Если размерность базисного множества равна двум, то оно совпадает со всем многообразием M , которое в этом случае является тором, а сам диффеоморфизм f – U -диффеоморфизмом Д. В. Аносова [29].

- 1) x_{2i-1}, x_{2i} принадлежат различным компонентам связности множества $W^\sigma(p_i) \setminus p_i$;
- 2) $x_{2i+1} \in W^{\overline{\sigma}}(x_{2i})$ (полагаем $x_{2r_C+1} = x_1$);
- 3) $(x_{2i}, x_{2i+1})^{\overline{\sigma}} \cap \Omega = \emptyset$, $i = \overline{1, r_C}$;
- 4) кривая $L_{2i}^\sigma \cup (x_{2i}, x_{2i+1})^{\overline{\sigma}} \cup L_{2i+1}^\sigma$ является достижимой изнутри границей области, гомеоморфной открытому диску D_i , где L_{2i}^σ (L_{2i+1}^σ) есть компонента связности множества $W^\sigma(x_{2i}) \setminus x_{2i}$ ($W^\sigma(x_{2i+1}) \setminus x_{2i+1}$), не содержащая точки p_i (p_{i+1}).

На рис. 1а–1в изображены связки степени 1–3.

Рис. 1

Пусть p — граничная периодическая точка аттрактора (репеллера) Ω и $x \in W^\sigma(p)$ — любая точка отличная от p , где $\sigma = u$ ($\sigma = s$). Обозначим через $W_x^\sigma(p)$ компоненту связности множества $W^\sigma(p) \setminus p$, содержащую точку x . Из сказанного выше следует, что существует единственная граничная периодическая точка q (q может совпадать с p , если p принадлежит связке степени 1) такая, что для точки $x \in W_x^\sigma(p)$ найдется единственная точка y , отличная от x , $y \in W^{\overline{\sigma}}(x) \cap W^\sigma(q)$ и $(x, y)^{\overline{\sigma}} \cap \Omega = \emptyset$ (если q совпадает с p , то y принадлежит компоненте связности множества $W^\sigma(p) \setminus p$, не содержащей точки x). При этом для любой точки $\tilde{x} \in W_x^\sigma(p)$ найдется единственная точка $\tilde{y} \in W_y^\sigma(q)$, $\tilde{y} \in W^{\overline{\sigma}}(\tilde{x}) \cap W^\sigma(q)$ и $(\tilde{x}, \tilde{y})^{\overline{\sigma}} \cap \Omega = \emptyset$. Положим $(\tilde{x}, \tilde{y})^{\overline{\sigma}} = \Delta^{\overline{\sigma}}(\tilde{x})$ и назовем компоненты $W_x^\sigma(p)$, $W_y^\sigma(q)$ $\overline{\sigma}$ -связанными (рис. 2а и 2б).

Рис. 2

Обозначим через $L^\sigma(x)$ ($L^\sigma(y)$) компоненту связности множества $W^\sigma(x) \setminus x$ ($W^\sigma(y) \setminus y$), которая не содержит точки p (q). Положим $l_{xy} = L^\sigma(x) \cup L^\sigma(y) \cup [x, y]^\sigma$. Тогда множество $D_{xy} = \bigcup_{\tilde{x} \in L^\sigma(x)} \Delta^{\bar{\sigma}}(\tilde{x})$ есть область, которая обладает следующими свойствами:

- а) достижимая изнутри граница области D_{xy} есть l_{xy} ;
- б) D_{xy} гомеоморфна открытому диску;
- в) $D_{xy} \cup (x, y)^\sigma$ состоит из блуждающих точек диффеоморфизма f (рис. 2а и 2б).

Положим $D_{pqxy} = \bigcup_{\tilde{x} \in W_x^\sigma(p)} \Delta^{\bar{\sigma}}(\tilde{x})$.

Для граничной периодической точки p , принадлежащей аттрактору (репеллеру) Ω , положим $\partial W_\sigma^\sigma(p) = \overline{W_\sigma^\sigma(p)} \setminus (W_\sigma^\sigma(p) \cup p)$, где $\sigma = s$ ($\sigma = u$).

Для седловой периодической точки q , принадлежащей тривиальному базисному множеству диффеоморфизма f , положим $\partial W^\sigma(q) = \overline{W^\sigma(q)} \setminus (W^\sigma(q) \cup q)$, где $\sigma \in \{s, u\}$.

ЛЕММА 1. Пусть f структурно устойчивый диффеоморфизм, заданный на гладком замкнутом двумерном ориентируемом многообразии M рода $g \geq 0$, неблуждающее множество которого содержит одномерное базисное множество Ω , компоненты $W_x^\sigma(p)$, $W_y^\sigma(q)$ $\bar{\sigma}$ -связаны, где $\sigma = u$, если Ω есть аттрактор, и $\sigma = s$, если Ω есть репеллер ($x \in W^\sigma(p)$, $y \in W^\sigma(q)$, p, q граничные периодические точки множества Ω , причем если p совпадает с q , то x, y принадлежат различным компонентам связности множества $W^\sigma(p) \setminus p$). Тогда существуют $l \geq 1$ источниковых, если $\sigma = u$, стоковых, если $\sigma = s$, периодических точек $\alpha_1^\sigma, \dots, \alpha_l^\sigma$ и $n \geq 0$ седловых периодических точек $p_1, \dots, p_n$ (если $n = 0$, то $l = 1$), принадлежащих тривиальным базисным множествам, таких, что

- 1) множество

$$L_{pq} = \begin{cases} W_\sigma^\sigma(p) \cup W_\sigma^\sigma(q) \cup \alpha_1^\sigma \cup p \cup q, & \text{если } n = 0, \\ W_\sigma^\sigma(p) \cup W_\sigma^\sigma(q) \cup \bigcup_{i=1}^n W^\sigma(p_i) \cup \bigcup_{i=1}^l \alpha_i^\sigma \cup p \cup q, & \text{если } n \geq 1, \end{cases}$$

является связным одномерным комплексом;

- 2) каждое из множеств $\partial W_{\varnothing}^{\bar{\sigma}}(p)$, $\partial W_{\varnothing}^{\bar{\sigma}}(q)$ состоит в точности из одной источниковой, если $\sigma = u$, стоковой, если $\sigma = s$, периодической точки, принадлежащей L_{pq} ;
- 3) каждое из множеств $\partial W_{\varnothing}^{\bar{\sigma}}(p_i)$, $i \in \{1, n\}$, состоит в точности из одной или двух источниковых, если $\sigma = u$, стоковых, если $\sigma = s$, периодических точек, принадлежащих L_{pq} ;
- 4) комплекс L_{pq} является топологическим пределом последовательности дуг $f^{\nu N^k}([x, y])^{\bar{\sigma}}$ при $k \rightarrow +\infty$, где $\nu = -1$, если $\sigma = u$, и $\nu = +1$, если $\sigma = s$ и $N \in \mathbb{Z}^+$ такое, что $f^N(W_x^{\sigma}(p)) = W_x^{\sigma}(p)$, $f^N(W_x^{\sigma}(q)) = W_x^{\sigma}(q)$;
- 5) объединение $L_{pq} \cup W_x^{\sigma}(p) \cup W_y^{\sigma}(q)$ является достижимой изнутри границей области D_{pqxy} , гомеоморфной открытому диску (см. рис. 3, на котором рассмотрен случай, когда базисное множество Ω есть аттрактор ($\sigma = u$); $n = 0$ – рис. 3а, $n > 0$ – рис. 3б).

Рис. 3

Из леммы 1 непосредственно следует

ТЕОРЕМА 1. Если неблуждающее множество структурно устойчивого диффеоморфизма f содержит одномерный аттрактор (репеллер), тогда оно содержит и источниковую (стоковую) периодическую точку.

В [33] доказано, что утверждение теоремы 1 справедливо для сферы и тора и в случае, когда диффеоморфизм f не является структурно устойчивым, а лишь удовлетворяет аксиоме (А) С. Смейла. Если же многообразие M имеет род, больший

чем единица, то условие структурной устойчивости A -дiffeоморфизма f существенно для выполнения утверждения теоремы 1. В работе [34] приведен пример структурно неустойчивого A -дiffeоморфизма двумерного многообразия рода 2 (кренделя), неблуждающее множество которого состоит в точности из одного одномерного аттрактора и одного одномерного репеллера.

Для базисного множества Ω обозначим через Γ_i объединение всех его граничных периодических точек, принадлежащих i -й C -плотной компоненте.

ЛЕММА 2. Пусть Ω аттрактор (репеллер) структурно устойчивого диффеоморфизма f , состоящий из t C -плотных компонент $\Omega_1, \dots, \Omega_m$. Тогда существует инвариантное открытое множество M_Ω , являющееся объединением t открытых подмножеств $M_1, \dots, M_m$, такое, что

- 1) $\Omega_i \subset M_i \cup \Gamma_i$, $f^m(M_i) = M_i$;
- 2) $M_\Omega \setminus \Omega$ не содержит точек неблуждающего множества диффеоморфизма f ;
- 3) граница множества M_Ω является одномерным комплексом, состоящим из множества граничных периодических точек множества Ω и компонент связности из устойчивых (неустойчивых) многообразий, непересекающихся с Ω , устойчивых (неустойчивых) многообразий седловых периодических точек из тривиальных базисных множеств и конечного числа неустойчивых (устойчивых) периодических точек.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Множество M_Ω будем называть канонической окрестностью базисного множества Ω .

Обозначим через Λ множество, состоящее из объединения всех нетривиальных (одномерных) базисных множеств диффеоморфизма f , и через M_Λ множество, состоящее из объединения канонических окрестностей всех базисных множеств из Λ .

Обозначим через P множество периодических точек диффеоморфизма f , принадлежащих тривиальным базисным множествам, и через P_1 подмножество множества P , состоящее из всех седловых периодических точек.

ЛЕММА 3. Пусть f структурно устойчивый диффеоморфизм, $f \in S(M)$, и $L^\sigma(p)$ одна из компонент связности множества $\overline{W^\sigma(p)} \setminus p$, $p \in P_1$. Тогда

- 1) если $L^\sigma(p) \cap M_\Lambda \neq \emptyset$, то $\partial L^\sigma(p)$ ($\partial L^\sigma(p) = \overline{L^\sigma(p)} \setminus (L^\sigma(p) \cup p$) состоит в точности из одной C -плотной компоненты, либо некоторого одномерного аттрактора (если $\sigma = u$), либо одномерного репеллера (если $\sigma = s$), и точка p принадлежит границе множества M_Λ ;
- 2) если $L^\sigma(p) \cap M_\Lambda = \emptyset$ и $L^\sigma(p)$ не содержит гетероклинических точек, то $\partial L^\sigma(p)$ состоит либо из единственной стоковой (если $\sigma = u$), либо из единственной источниковой (если $\sigma = s$) периодической точки;
- 3) если $L^\sigma(p) \cap M_\Lambda = \emptyset$ и $L^\sigma(p)$ содержит гетероклинические точки, то $\partial L^\sigma(p)$ является связным одномерным комплексом $\bigcup_q \overline{W^\sigma(q)}$, где объединение берется по всем точкам $q \in P_1$, для которых $W^\sigma(q) \cap L^\sigma(p) \neq \emptyset$, при этом $W^\sigma(q)$ не содержит гетероклинических точек.

ЛЕММА 4. Пусть Ω аттрактор (репеллер) структурно устойчивого диффеоморфизма f , состоящий из t C -плотных компонент $\Omega_1, \dots, \Omega_t$, каждая из которых содержит набор $\widehat{C}_i$, состоящий из $R(\Omega)$ связок степени r_C для $C \in \widehat{C}_i$. Тогда существуют окрестность V множества Ω , являющаяся объединением t окрестностей V_i компонент Ω_i , компактное подмногообразие $N_\Omega \subset \overline{M}_\Omega$, являющееся объединением t компактных двумерных подмногообразий с краем $N_1, \dots, N_t$, и диффеоморфизм f_Ω подмногообразия N_Ω на себя такие, что

- 1) $\Omega_i \subset V_i \subset N_i \subset \overline{M}_i$;
- 2) $f_\Omega|_V = f|_V$;
- 3) каждое подмногообразие N_i имеет $R(\Omega)$ компонент края, род $q \geq 0$ и отрицательную эйлерову характеристику $\chi(N_i) = 2 - 2q - R(\Omega)$ (числа q и $R(\Omega)$ однозначно определяются по Ω);
- 4) множество $N_\Omega \setminus (\Omega \cup \partial N_\Omega)$ состоит из блуждающих точек диффеоморфизма f_Ω и является объединением $tR(\Omega)$ непересекающихся между собой областей, гомеоморфных кольцу; достижимая изнутри граница каждой такой области состоит в точности из одной связки C множества Ω и одной компоненты края ∂N_Ω многообразия N_Ω , содержащей в точности r_C седловых и r_C источников (стоковых) периодических точек диффеоморфизма f_Ω (рис. 4).

Рис. 4

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Подмногообразие N_Ω будем называть *каноническим носителем*, а пару (N_Ω, f_Ω) — *канонической формой аттрактора (репеллера) Ω* .

Зафиксируем номер $i \in \{1, \dots, t\}$. Так как эйлерова характеристика подмногообразия N_i отрицательна, то на плоскости Лобачевского, в реализации Пуанкаре на внутренности круга $|z| < 1$ комплексной z -плоскости, существуют дискретная группа движений F , изоморфная фундаментальной группе подмногообразия N_i , и подмножество H_F такие, что фактормножество H_F/F гомеоморфно подмногообразию N_i . Обозначим через π_i естественную проекцию $H_F \Rightarrow N_i$ и через f_i ограничение диффеоморфизма f_Ω^m на подмногообразии N_i . Пусть $\bar{f}_i$ отображение H_F на себя, накрывающее диффеоморфизм f_i , т.е. $\bar{f}_i$ удовлетворяет условию

$\pi_i \bar{f}_i = f_i \pi_i$. Отображение $\bar{f}_i$ индуцирует автоморфизм $\bar{f}_{i*}$ группы F на себя по формуле $\bar{f}_{i*}(\gamma) = \bar{f}_i \gamma \bar{f}_i^{-1}$, $\gamma \in F$.

Если $\bar{f}_i$ отображение H_F на себя, накрывающее диффеоморфизм f_i и отличное от $\bar{f}_i$, тогда существует элемент $\alpha \in F$ такой, что $\bar{f}_i = \alpha \bar{f}_i$. Отображение $\bar{f}_i$ индуцирует автоморфизм $A_\alpha \bar{f}_{i*}$, где A_α – внутренний автоморфизм группы F , задаваемый формулой $A_\alpha(\beta) = \alpha \beta \alpha^{-1}$.

Таким образом, каждой C -плотной компоненте Ω_i одномерного базисного множества Ω A -диффеоморфизма f ставится в соответствие автоморфизм группы F , определенный с точностью до внутреннего автоморфизма.

Пару группа F и автоморфизм τ_i группы F , определенный описанным выше образом ($\tau_i = \bar{f}_{i*}$), будем обозначать через $(F, \tau_i)_{\Omega_i}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Пару $(F, \tau_i)_{\Omega_i}$ назовем *алгебраическим представлением* C -плотной компоненты Ω_i одномерного базисного множества Ω .

Пусть f, f' структурно устойчивые диффеоморфизмы, неблуждающие множества которых содержат одномерные базисные множества Ω, Ω' , состоящие из m C -плотных компонент $\Omega_1, \dots, \Omega_m, \Omega'_1, \dots, \Omega'_m$, соответственно.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Алгебраические представления $(F, \tau_i)_{\Omega_i}, (F', \tau'_i)_{\Omega'_i}$ назовем *алгебраически сопряженными*, если существует изоморфизм $\psi: F \rightarrow F'$ такой, что $\tau'_i = \psi \tau_i \psi^{-1}$.

ЛЕММА 5. *Алгебраическое представление $(F, \tau_i)_{\Omega_i}$ C -плотной компоненты одномерного базисного множества Ω диффеоморфизма f есть инвариант топологической сопряженности с точностью до алгебраической сопряженности.*

В работах [12], [13] установлено, что для того чтобы существовал гомеоморфизм $g: N_\Omega \rightarrow N'_{\Omega'}$ такой, что $g(\Omega) = \Omega'$ и

$$f'|_{\Omega} = g f g^{-1}|_{\Omega'},$$

необходимо и достаточно, чтобы алгебраические представления $(F, \tau_i)_{\Omega_i}, (F', \tau'_i)_{\Omega'_i}$ были алгебраически сопряжены при некоторой нумерации C -плотных компонент множеств Ω и Ω' и некоторого $i \in \{1, \dots, m\}$.

Напомним, что точка x , принадлежащая $W^s(p) \cap W^u(q)$, где p, q ($p \neq q$) седловые периодические точки, называется *гетероклинической точкой*, а множество $G = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} f^n(x)$ – гетероклинической траекторией [20].

Пусть $p, q \in P_1(f)$ седловые периодические точки и $x \in L^s(p) \cap L^u(q)$ – любая гетероклиническая точка, принадлежащая гетероклинической траектории $G = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} f^n(x)$, где $L^s(p), L^u(q)$ – компоненты связности множеств $W^s(p) \setminus p, W^u(q) \setminus q$, соответственно, содержащие точку x .

Обозначим через $m \in \mathbb{Z}^+$ наименьшее число, для которого $f^m(L^s(p)) = L^s(p)$, $f^m(L^u(q)) = L^u(q)$. Зададим ориентацию на кривой $L^s(p)$ ($L^u(q)$) к точке p

(от точки q) и две нумерации множества точек $[x, f^m(x))^s \cap L^u(q)$, первая из которых согласуется с ориентацией на $L^s(p)$, а вторая – на $L^u(q)$.

Обозначим через $S(x)$ подстановку, переводящую первую нумерацию во вторую.

ЛЕММА 6. Пусть y любая гетероклиническая точка, принадлежащая гетероклинической траектории $G = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} f^n(x)$, где $x \in L^s(p) \cap L^u(q)$, $p, q \in P_1$, тогда $S(x) = S(y)$.

Из леммы 6 следует, что для каждой гетероклинической траектории G корректно определяется подстановка $S(G) = S(x)$, где x любая точка траектории G .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Подстановку $S(G)$ назовем *гетероклинической подстановкой* траектории G .

ЛЕММА 7. Гетероклиническая подстановка есть инвариант топологической сопряженности.

Зафиксируем ориентацию поверхности M и выберем в точке $x \in G$ касательный вектор ξ_x^s (ξ_x^u) к кривой $L^s(p)$ ($L^u(q)$), индуцирующий выбранное на ней направление.

Положим $J(x) = 1$ (-1), если репер $\{\xi_x^s, \xi_x^u\}$ согласован (не согласован) с ориентацией M . Положим $J(G) = J(x)$. Так как диффеоморфизм f сохраняет ориентацию многообразия M , число $J(G)$ не зависит от выбора точки x на траектории G .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Число $J(G)$ назовем *индексом* гетероклинической траектории G .

Пусть f, f' топологически сопряженные диффеоморфизмы, посредством сопрягающего гомеоморфизма g ($f' = gfg^{-1}$), $G' = g(G)$, где G, G' – гетероклинические траектории диффеоморфизмов f, f' . Тогда $J(G') = \nu J(G)$, где $\nu = 1$ ($\nu = -1$), если гомеоморфизм g сохраняет (меняет) ориентацию многообразия M .

Обозначим через Γ_a (Γ_r) множество всех граничных периодических точек, принадлежащих всем аттракторам (репеллерам) из Λ , и положим $\Gamma = \Gamma_a \cup \Gamma_r$. Пусть

$$\begin{aligned} W_{\Gamma_a}^u &= \bigcup_{p \in \Gamma_a} W^u(p) \setminus p, & W_{\Gamma_r}^s &= \bigcup_{p \in \Gamma_r} W^s(p) \setminus p, & W_{\emptyset \Gamma_a}^s &= \bigcup_{p \in \Gamma_a} W_{\emptyset}^s(p), \\ W_{\emptyset \Gamma_r}^u &= \bigcup_{p \in \Gamma_r} W_{\emptyset}^u(p), & W_{\Gamma}^u &= W_{\Gamma_a}^u \cup W_{\emptyset \Gamma_r}^u, & W_{\Gamma}^s &= W_{\Gamma_r}^s \cup W_{\emptyset \Gamma_a}^s, \\ W_{\Gamma} &= W_{\Gamma}^u \cup W_{\Gamma}^s, & W_{P_1}^{\sigma} &= \bigcup_{p \in P_1} (W^{\sigma}(p) \setminus p), & \sigma &\in \{s, u\}. \end{aligned}$$

Обозначим через $\widehat{W}_{P_1}^{\sigma}$ подмножество множества $W_{P_1}^{\sigma}$, состоящее из точек, принадлежащих тем и только тем компонентам связности множества $W_{P_1}^{\sigma}$, которые содержат гетероклинические точки.

Положим

$$\begin{aligned} W_{P_1} &= W_{P_1}^s \cup W_{P_1}^u, & \widehat{W}_{P_1} &= \widehat{W}_{P_1}^s \cup \widehat{W}_{P_1}^u, \\ R &= M \setminus (\Lambda \cup (W_{P_1} \setminus \widehat{W}_{P_1}) \cup W_{\Gamma} \cup P). \end{aligned}$$

Пусть Q некоторая компонента связности множества R . В силу лемм 1, 2 и леммы 2 из [19] достижимая изнутри граница ∂Q компоненты Q является объединением двух одномерных комплексов

$$\partial^s Q \subset (W^s \setminus \widehat{W}^s) \cup W_\Gamma^s \cup P, \quad \partial^u Q \subset (W^u \setminus \widehat{W}^u) \cup W_\Gamma^u \cup P.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Компоненту связности множества R , содержащую гетероклинические точки, назовем *гетероклинической областью*.

Топологическая структура гетероклинических областей изучена в работе [19].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. Ориентированный граф $G(f)$ назовем *графом диффеоморфизма f* , если

I) вершины графа $G(f)$ соответствуют:

- 1) периодическим точкам из тривиальных базисных множеств,
- 2) граничным периодическим точкам из одномерных базисных множеств,
- 3) C -плотным компонентам одномерных базисных множеств,
- 4) гетероклиническим областям;

II) ребра графа $G(f)$ соответствуют компонентам связности множеств W_{P_1} и W_Γ .

При этом, если ребру l^σ соответствует компонента связности $L^\sigma(p) \subset W_{P_1} \cup W_\Gamma$, то одна из двух вершин a и b , инцидентных ребру l^σ , например, a соответствует седловой периодической точке p , а для другой вершины b имеет место в точности одна из следующих возможностей:

- 1) если точка $p \in \Gamma_a$ и $\sigma = u$, то вершина b соответствует C -плотной компоненте аттрактора, содержащего точку p , совпадающей с множеством $\partial L^\sigma(p)$, если $p \in \Gamma_a$ и $\sigma = s$, то точка b соответствует источниковой периодической точке, совпадающей с множеством $\partial L^\sigma(p)$;
- 2) если точка $p \in \Gamma_r$ и $\sigma = s$, то вершина b соответствует C -плотной компоненте репеллера, содержащего точку p , совпадающей с множеством $\partial L^\sigma(p)$, если $p \in \Gamma_r$ и $\sigma = u$, то точка b соответствует стоковой периодической точке, совпадающей с множеством $\partial L^\sigma(p)$;
- 3) если точка $p \in P_1$, $L^\sigma(p) \subset M_\Lambda$ и $\sigma = s$ ($\sigma = u$), то вершина b соответствует C -плотной компоненте некоторого репеллера (аттрактора), совпадающей с множеством $\partial L^\sigma(p)$;
- 4) если точка $p \in P_1$, $L^\sigma(p)$ принадлежит некоторой гетероклинической компоненте Q диффеоморфизма f , то вершина b соответствует Q ;
- 5) если точка $p \in P_1$, а $L^\sigma(p)$ не принадлежит M_Λ , не принадлежит никакой гетероклинической области и $\sigma = s$ ($\sigma = u$), то вершина b соответствует источниковой (стоковой) периодической точке, совпадающей с множеством $\partial L^\sigma(p)$.

Ориентация на ребре l выбирается от b к a , если $\sigma = s$, и от a к b , если $\sigma = u$.

Подмножества графа $G(f)$, соответствующие достижимым изнутри границам компонент связности из множества R , назовем *различающими множествами*.

Для вершины b , соответствующей периодической точке $p \in P$ из тривиального базисного множества диффеоморфизма f , обозначим через $U(b)$ множество всех ребер графа $G(f)$, инцидентных вершине b , и обозначим через $N(b)$ мощность множества $U(b)$ (если вершина b соответствует седловой периодической точке, то $N(b) = 4$). Зададим нумерацию в множестве ребер $U(b)$ следующим образом. Выберем в окрестности точки p простую гладкую замкнутую кривую L такую, что кривая L ограничивает диск D , содержащий точку p , и пересекается в точности в одной точке с каждой компонентой связности $L^\sigma(q) \notin \widehat{W}_{P_1}^\sigma$ множества $W^\sigma(q) \setminus q$, $q \in P_1$, $p \in \overline{L}^\sigma(q)$ (если точка p седловая, то $q = p$).

Зададим в некоторой точке кривой L репер (τ, n) , согласованный с ориентацией многообразия M , такой, что вектор τ касается кривой L и вектор n направлен внутрь диска D . Зафиксируем направление обхода по кривой L , индуцированное вектором τ . Занумеруем компоненты $L_1, \dots, L_{N(b)}$ в порядке, в котором они встречаются при обходе вдоль L , начиная с некоторой точки на L , и снабдим соответствующие им ребра из $U(b)$ теми же номерами. Будем называть полученную нумерацию *положительно ориентированной*. Нумерацию, которая получается при противоположном обходе, назовем *отрицательно ориентированной*.

Для вершины γ , отвечающей гетероклинической области Q , обозначим через $Q^s(\gamma)$ ($Q^u(\gamma)$) множество всех ребер, для которых γ является началом (концом). Обозначим через r минимальное положительное число, для которого все точки из тривиальных базисных множеств неподвижны относительно f^r и компоненты связности множества $W^\sigma(p) \setminus p$ инвариантны относительно f^r для любой точки $p \in P_1$.

Для каждого ребра $l^\sigma \in Q^\sigma(\gamma)$ обозначим через L^σ соответствующую ему компоненту и через $N(l^\sigma)$ — число всех гетероклинических траекторий диффеоморфизма f^r , имеющих с кривой L^σ непустое пересечение.

Пусть $x_1^\sigma, \dots, x_{N(l^\sigma)}^\sigma$ гетероклинические точки на кривой L^σ , занумерованные в соответствии с ориентацией на ней, выбранные таким образом, что на дуге $[x_1^\sigma, x_{N(l^\sigma)}^\sigma] \subset L^\sigma$ нет гетероклинических точек, отличных от них, и принадлежащие по одной всем различным гетероклиническим траекториям диффеоморфизма f^r , имеющим с L непустое пересечение.

Определим отображение $\varphi_\gamma^{l^\sigma}$ из множества $\{1, \dots, N(l^\sigma)\}$ в множество $Q^{\overline{\sigma}}(\gamma)$, полагая $\varphi_\gamma^{l^\sigma}(j) = l^{\overline{\sigma}}$, где $l^{\overline{\sigma}}$ является ребром, для которого $L^{\overline{\sigma}} \cap L^\sigma = x_j$.

Определим отображение $\psi_\gamma^{l^\sigma}$ из множества $\{1, \dots, N(l^\sigma)\}$ в множество подстановок, полагая $\psi_\gamma^{l^\sigma}(j) = S(x_j)$ (подстановка $S(x_j)$ определяется для диффеоморфизма f^r).

Определим отображение $\phi_\gamma^{l^\sigma}$ из множества $\{1, \dots, N(l^\sigma)\}$ в множество $\{-1, 1\}$, полагая $\phi_\gamma^{l^\sigma}(j) = J(x_j)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9. Назовем *различающим графом* $G^*(f)$ граф $G(f)$, оснащенный:

- 1) набором различающих множеств;
- 2) весами седловых вершин⁵;

⁵Вершине a , отвечающей седловой периодической точке p периода k , припишем вес $+1$

- 3) положительно или отрицательно ориентированными нумерациями в множествах $U(b)$ одновременно для всех вершин b , соответствующих периодическим точкам из тривиальных базисных множеств;
- 4) числами $N(l^\sigma)$ и отображениями $\varphi_\gamma^{l^\sigma}, \psi_\gamma^{l^\sigma}, \phi_\gamma^{l^\sigma}$, $\sigma \in \{s, u\}$, где γ соответствует гетероклинической области, $l^\sigma \in Q^\sigma(\gamma)$;
- 5) алгебраическими представлениями для вершин, соответствующих C -плотным компонентам аттракторов и репеллеров.

Пусть теперь имеются два структурно устойчивых диффеоморфизма f, f' из рассматриваемого класса $S(M)$ с различающимися графами $G^*(f), G'^*(f')$, соответственно.

Предположим, что неблуждающие множества диффеоморфизмов f, f' содержат одномерные базисные множества Ω, Ω' , соответственно, состоящие из m C -плотных компонент $\Omega_1, \dots, \Omega_m, \Omega'_1, \dots, \Omega'_m$. Пусть w_i (w'_i) вершины графа $G(f)$ ($G'(f')$), соответствующие компонентам Ω_i (Ω'_i), $i = \overline{1, m}$. Обозначим через $B(w_i)$ ($B'(w'_i)$) множество всех вершин графа $G^*(f)$ ($G'^*(f')$), соответствующих граничным периодическим точкам, принадлежащим C -плотной компоненте Ω_i (Ω'_i), и через $R(w_i)$ ($R'(w'_i)$) множество всех ребер графа $G^*(f)$ ($G'^*(f')$), соединяющих вершину w_i (w'_i) с вершинами из множества $B(w_i)$ ($B'(w'_i)$).

ЛЕММА 8. Пусть алгебраические представления $(F, \tau_i)_{\Omega_i}, (F', \tau'_i)_{\Omega'_i}$ алгебраически сопряжены в силу некоторого изоморфизма ψ . Тогда автоморфизм ψ индуцирует единственным образом взаимно однозначное отображение ψ_* множества $B(w_i) \cup R(w_i)$ на множество $B'(w'_i) \cup R'(w'_i)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10. Назовем различающие графы $G^*(f), G'^*(f')$ диффеоморфизмов f, f' *изоморфными*, если существует изоморфизм η графов $G^*(f), G'^*(f')$ такой, что

- 1) η преобразует вершины, соответствующие стоковым, источниковым, седловым периодическим точкам из тривиальных базисных множеств, граничным периодическим точкам из одномерных базисных множеств, C -плотным компонентам одномерных базисных множеств и гетероклиническим областям графа $G^*(f)$, в соответствующие вершины графа $G'^*(f')$;
- 2) η сохраняет ориентацию ребер;
- 3) η преобразует различающие множества графа $G^*(f)$ в различающие множества графа $G'^*(f')$;
- 4) η сохраняет веса вершин, отвечающих седловым периодическим точкам из тривиальных базисных множеств;
- 5) алгебраические представления $(F, \tau_i), (F', \tau'_i)$, которыми оснащены изоморфные в силу η вершины $w_i, w'_i = \eta(w_i)$, отвечающие C -плотным компонентам Ω_i, Ω'_i одномерных аттракторов (репеллеров) Ω, Ω' , алгебраически

(–1), если отображение $Df_p^k: E_p^u \rightarrow E_p^u$ сохраняет (меняет) ориентацию E_p^u . Здесь E_p^u – инвариантное относительно Df_p^k одномерное расширяющееся подпространство касательного пространства в точке p .

- сопряжены; при этом, если ψ – сопрягающий изоморфизм и ψ_* – индуцированное отображение $B(w_i) \cup R(w_i)$ на $B'(w'_i) \cup R(w'_i)$, то ограничение изоморфизма η на множество $B(w_i) \cup R(w_i)$ совпадает с отображением ψ_* ;
- 6) η сохраняет номера изоморфных ребер в множествах $U(b)$, $U'(b')$, где $b' = \eta(b)$;
- 7) если $\gamma' = \eta(\gamma)$ и $l'^\sigma = \eta(l^\sigma)$, $l^\sigma \in Q^\sigma(\gamma)$, $l'^\sigma \in Q'^\sigma(\gamma')$, тогда $N(l^\sigma) = N'(l'^\sigma)$, $\eta(\varphi_\gamma^{l^\sigma}) = \varphi_{\gamma'}^{l'^\sigma}$, $\eta(\psi_\gamma^{l^\sigma}) = \psi_{\gamma'}^{l'^\sigma}$, $\phi_\gamma^{l^\sigma} = \nu \phi_{\gamma'}^{l'^\sigma}$, где $\nu = 1$ ($\nu = -1$), если ориентации в нумерациях множеств $U(b)$, $U'(b')$ совпадают (противоположны).

ЛЕММА 9. *Различающий граф $G^*(f)$ есть инвариант топологической сопряженности с точностью до изоморфизма.*

Диффеоморфизмы f , f' индуцируют на множествах вершин графов $G^*(f)$, $G'^*(f)$ подстановки $P(f)$, $P'(f')$.

ТЕОРЕМА 2. *Для того чтобы структурно устойчивые диффеоморфизмы $f, f' \in S(M)$ были топологически сопряжены необходимо и достаточно, чтобы существовал изоморфизм η графов $G^*(f)$, $G'^*(f)$ такой, что $P'(f') = \eta P(f) \eta^{-1}$.*

§ 2. Построение канонических форм одномерных аттракторов и репеллеров

Этот параграф посвящен доказательству лемм 1–4. Для простоты изложения мы докажем утверждения этих лемм в предположении, что одномерное базисное множество Ω есть аттрактор (в случае если Ω является репеллером, то для доказательства достаточно рассмотреть диффеоморфизм f^{-1}).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 1. Докажем вначале, что для любой точки z , принадлежащей нетривиальному базисному множеству диффеоморфизма f , $W^u(z) \cap (x, y)^s = \emptyset$. Предположим противное, пусть существуют нетривиальное базисное множество Ω' и точка $z \in \Omega'$ такие, что $W^u(z) \cap (x, y)^s \neq \emptyset$ (по предположению $\Omega' \neq \Omega$). Возможны два случая:

- 1) многообразие $W^u(z)$ не содержит граничной периодической точки базисного множества Ω' ;
- 2) многообразие $W^u(z)$ содержит граничную периодическую точку типа u или типа (s, u) базисного множества Ω' .

В случае 1) обозначим через $L(x)$ ($L(y)$) компоненту связности множества $W^u(x) \setminus x$ ($W^u(y) \setminus y$), не содержащую точку p (q). Положим $l_{xy} = L(x) \cup L(y) \cup [x, y]^s$. В силу [9], [11], [33] кривая l_{xy} ограничивает область D_{xy} , гомеоморфную диску, состоящую из блуждающих точек диффеоморфизма f , для которой кривая l_{xy} является достижимой изнутри границей.

Так как дуга $(x, y)^s$ состоит из блуждающих точек диффеоморфизма f , то точка $z \notin (x, y)^s$. Тогда существует точка z_1 , принадлежащая $W^u(z) \cap (x, y)^s$, такая, что $(z, z_1)^u \cap (x, y)^s = \emptyset$. Обозначим через $W_*^u(z_1)$ компоненту связности множества $W^u(z_1) \setminus z_1$, не содержащую точку z . В силу строгого условия трансверсальности

$W_*^u(z_1) \cap D_{xy} \neq \emptyset$. В силу [9] компонента $W_*^u(z_1)$ содержит множество, плотное в C -плотной компоненте множества Ω' . Поэтому на компоненте $W_*^u(z_1)$ существуют точки, не принадлежащие области D_{xy} . Но тогда найдется точка $z_2 \in (x, y)^s$, отличная от точки z_1 , такая, что дуга $(z_1, z_2)^u$ целиком принадлежит области D_{xy} . Так как для любой точки $\tilde{x} \in W_x^u(p)$ найдется единственная точка $\tilde{y} \in W_y^u(q)$ такая, что $\tilde{y} \in W^s(\tilde{x})$ и $(\tilde{x}, \tilde{y})^s \subset D_{xy}$, то существует точка $\tilde{x}$, для которой дуга $\Delta^s(\tilde{x})$ касается дуги $(z_1, z_2)^u$ в некоторой точке $\tilde{z}$, что противоречит строгому условию трансверсальности (рис. 5).

Рис. 5

Рассмотрим случай 2). Так как периодические точки плотны в множестве Ω' и множество граничных периодических точек конечно, то в сколь угодно малой окрестности точки z найдется внутренняя периодическая точка множества Ω' . Но тогда в силу C^1 -близости неустойчивых многообразий точек из Ω' на компактных множествах следует, что существует внутренняя периодическая точка $z' \in \Omega'$ такая, что $W^u(z') \cap (x, y)^s \neq \emptyset$, и мы приходим к случаю 1).

Далее могут быть два случая:

- а) дуга $(x, y)^s$ не содержит точек, принадлежащих неустойчивым многообразиям седловых периодических точек из тривиальных базисных множеств;
- б) дуга $(x, y)^s$ содержит точки, принадлежащие неустойчивым многообразиям седловых периодических точек из тривиальных базисных множеств.

В случае а) покажем, что компонента $W_\emptyset^s(p)$ целиком принадлежит неустойчивому многообразию в точности одной источниковой периодической точки α_1 диффеоморфизма f , и следовательно, $\partial W_\emptyset^s(p) = \alpha_1$. Предположим противное. В силу [20] многообразие M представляется в виде объединения неустойчивых многообразий базисных множеств. Тогда из условия строгой трансверсальности, из всюду плотности множества периодических точек в неблуждающем множестве и из того, что неустойчивое многообразие периодической источниковой точки гомеоморфно открытому диску, следует, что существует седловая периодическая точка p' такая, что $W^u(p') \cap W_\emptyset^s(p) \neq \emptyset$. Но тогда в силу условия строгой трансверсальности и в силу [20] $W^u(p') \cap (x, y)^s \neq \emptyset$, что противоречит предположению случая а). Если $p \neq q$, то совершенно аналогично устанавливается, что компонента $W_\emptyset^s(q)$ целиком принадлежит неустойчивому многообразию в точности одной источниковой периодической точки β , и следовательно, $\partial W_\emptyset^s(p) = \beta$. Покажем,

что $\alpha_1 = \beta$. Предположим противное. Тогда на дуге $(x, y)^s$ существуют точки, принадлежащие неустойчивым многообразиям точек α_1 и β , и следовательно, на ней должна существовать точка, принадлежащая неустойчивому многообразию некоторой седловой периодической точки, что противоречит предположению. По построению множество $L_{pq} = W_\emptyset^s(p) \cup W_\emptyset^s(q) \cup \alpha_1 \cup p \cup q$ является связным одномерным комплексом, удовлетворяющим требованиям 1)–5) леммы 1 в случае $n = 0$ (рис. 3а).

В случае б) пусть p седловая периодическая точка, принадлежащая тривиальному базисному множеству, для которой многообразие $W^u(p)$ пересекается с дугой $(x, y)^s$ в некоторой точке $z \in (x, y)^s$. Как и в случае а) устанавливается, что компонента связности $W_z(p)$ множества $W^u(p) \setminus p$, содержащая точку z , пересекается с дугой $(x, y)^s$ в точности в одной точке z . Поэтому существует конечное число различных седловых периодических точек $p_1, \dots, p_n$, $n \geq 1$ (принадлежащих тривиальным базисным множествам), для которых $W^u(p_i) \cap (x, y)^s \neq \emptyset$, $i = \overline{1, n}$. Обозначим через $z_1, \dots, z_r$, $r \leq 2n$, все точки, принадлежащие пересечению $\bigcup_{i=1}^n (W^u(p_i) \cap (x, y)^s)$ и занумерованные в соответствии с ориентацией на дуге $(x, y)^s$, выбранной в направлении от точки x к точке y (см. рис. 3б). Для точки z_i обозначим через p_{n_i} , $n_i \in \{1, n\}$, периодическую точку, неустойчивое многообразие которой содержит точку z_i . Предположим, что при движении от точки x к точке y по дуге $(x, y)^s$ при переходе через точку z_i дуга $(p_{n_i}, z_i)^u \subset W^u(p_i)$ остается справа. Тогда обозначим через $W_-^s(p_i)$, $W_+^s(p_i)$ те компоненты связности множества $W^s(p_i) \setminus p_i$, что если на компоненте $W_-^s(p_i)$ выбрать произвольную точку z_i^- , а на компоненте $W_+^s(p_i)$ – произвольную точку z_i^+ , то при движении по дуге $(z_i^-, z_i^+)^s \subset W^s(p_i)$ при переходе через точку p_i дуга $(p_{n_i}, z_i)^u \subset W^u(p_i)$ остается слева.

Так же как и в случае а) устанавливаем, что компоненты $W_\emptyset^s(p)$ ($W_\emptyset^s(q)$) и $W_-^s(p_{n_1})$ ($W_+^s(p_{n_r})$) принадлежат неустойчивому многообразию некоторой источниковой периодической точки β_1 (β_{r+1}) (если $p = q$, то $\beta_1 = \beta_{r+1}$). Компоненты $W_+^s(p_{n_i})$ и $W_-^s(p_{n_{i+1}})$, $i = \overline{1, r-1}$, принадлежат неустойчивому многообразию некоторой источниковой периодической точки β_{i+1} (если точки z_i, z_{i+1} принадлежат неустойчивому многообразию одной и той же седловой периодической точки, т.е. $p_{n_i} = p_{n_{i+1}}$, то $W_+^s(p_{n_i}) = W_-^s(p_{n_{i+1}})$).

Обозначим через $l \geq 1$ число различных источниковых точек среди множества $\{\beta_1, \dots, \beta_{r+1}\}$ и переобозначим их через $\alpha_1^u, \dots, \alpha_l^u$. Тогда каждое из множеств $\partial W_\emptyset^s(p)$, $\partial W_\emptyset^s(q)$ состоит в точности из одной источниковой периодической точки, принадлежащей $\{\alpha_i^u\}$, а каждое из множеств $\partial W^s(p_i)$, $i \in \{1, n\}$, состоит в точности из одной или двух источниковых точек, принадлежащих множеству $\{\alpha_i^u\}$, $i \in \{1, \dots, l\}$. Тогда множество

$$L_{pq} = W_\emptyset^s(p) \cup W_\emptyset^s(q) \cup \bigcup_{i=1}^n W^s(p_i) \cup \bigcup_{i=1}^l \alpha_i \cup p \cup q$$

является связным одномерным комплексом, удовлетворяющим требованиям 1)–5) леммы 1 в случае $n > 0$ (рис. 3б). Лемма 1 полностью доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 2. Пусть $C = W^u(p_1) \cup \dots \cup W^u(p_r)$ связка степени r аттрактора Ω и $N \in \mathbb{Z}^+$ число, для которого компоненты связности множеств $W^u(p_i) \setminus p_i$ инвариантны относительно f^N для всех $i = \overline{1, r}$. Положим

$$L(C) = \bigcup_{i=1}^r (x_{2i-1}, x_{2i})^u \cup (x_{2i}, x_{2i+1})^s$$

(здесь $x_1, \dots, x_{2r}$ — последовательность точек, входящая в определение связки C). Положим $L_n(C) = f^{-nN}(L)$, $n \in \mathbb{Z}^+$, и обозначим через $L_*(C)$ топологический предел при $n \rightarrow \infty$ последовательности кривых $L_n(C)$.

По доказанному в лемме 1 топологический предел последовательности дуг $f^{-kN}((x_{2i}, x_{2i+1})^s)$ есть одномерный комплекс $l_{p_i p_{i+1}}$, обладающий свойствами 1)–5).

Но тогда $L_*(C)$ есть связный комплекс, состоящий из граничных периодических точек $p_1, \dots, p_r$, компонент связности $W_\partial^s(p_i)$, $i = \overline{1, r}$, источников периодических точек и устойчивых многообразий седловых периодических точек, принадлежащих тривиальным базисным множествам диффеоморфизма f . Обозначим через $\hat{C}_i$ множество всех связок C , принадлежащих i -й C -плотной компоненте. Положим $B_i = \bigcup_{C \in \hat{C}_i} L_*(C)$. По построению множество B_i является границей открытого, инвариантного относительно f^m подмножества M_i ($f^m(M_i) = M_i$) такого, что $\Omega_i \setminus \Gamma_i \subset M_i$ и $M_i \setminus \Omega_i$ не содержит точек неблуждающего множества диффеоморфизма f . Тогда множество M_Ω , являющееся объединением m открытых подмножеств $M_1, \dots, M_m$, удовлетворяет всем требованиям леммы 2. Лемма 2 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 3. Рассмотрим для определенности случай $\sigma = u$ (если $\sigma = s$, то доказательство аналогичное). Докажем первое утверждение леммы 3. Пусть $L^u(p) \cap M_\Lambda \neq \emptyset$, тогда существует аттрактор Ω такой, что $L^u(p) \cap M_\Omega \neq \emptyset$. В силу леммы 1 и конструкции множества M_Ω в лемме 2 следует, что существуют граничные периодические точки p_1, p_2 (p_1 может совпадать с p_2) аттрактора Ω и область $D_{p_1 p_2 xy}$, построенная в лемме 1, такие, что $L^u(p) \cap D_{p_1 p_2 xy} \neq \emptyset$ ($x \in W^u(p_1)$, $y \in W^u(p_2)$), если $p_1 = p_2$, то x, y принадлежат различным компонентам связности множества $W^u(p_1) \setminus p_1$).

Пусть $N \in \mathbb{Z}^+$ такое, что компонента $W^u(p)$ и компоненты $W_x^u(p_1), W_y^u(p_2)$, входящие в достижимую границу области $D_{p_1 p_2 xy}$, инвариантны относительно диффеоморфизма f^N .

Рассмотрим любую точку $z \in L^u(p) \cap D$ и положим $\lambda = [z, f^N(z)]$. Тогда $L^u(p) = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} f^{nN}(\lambda)$. Для любой точки $\tilde{z} \in \lambda$ существуют точки $z_1 \in W_x^u$, $z_2 \in W_y^u$ такие, что $\tilde{z} \in (z_1, z_2)^s$. Так как последовательность точек $f^{nN}(z)$ стремится к точке p при $n \rightarrow -\infty$, а расстояние между точками $f^{nN}(z)$ и $f^{nN}(z_1)$ ($f^{nN}(z)$ и $f^{nN}(z_2)$) стремится к нулю при $n \rightarrow +\infty$, то получаем, что точка p принадлежит границе множества M_Λ , а множество $\partial L^u(p)$ состоит из C -плотной компоненты аттрактора Ω , содержащей точки p_1, p_2 . Таким образом, утверждение 1) леммы 3 доказано.

Предположим, что $L^u(p) \cap M_\Lambda = \emptyset$ и $L^u(p)$ не содержит гетероклинических точек. Тогда как и в лемме 1 устанавливается, что $\partial L^u(p)$ состоит из единственной стоковой периодической точки, т.е. имеет место второе утверждение леммы 3.

Предположим, наконец, что $L^u(p) \cap M_\Lambda = \emptyset$ и $L^u(p)$ содержит гетероклинические точки, тогда рассмотрим множество Q , состоящее из всех седловых периодических точек таких, что если $q \in Q$, то $W^s(q) \cap L^u(p) \neq \emptyset$.

Множество Q не может содержать точек из одномерного базисного множества, так как в противном случае компонента $L^u(p)$ имела бы непустое пересечение с множеством M_Λ , что противоречит предположению. В силу условия 2), определяющего рассматриваемый нами класс диффеоморфизмов, множество гетероклинических точек, принадлежащих пересечению устойчивых и неустойчивых многообразий седловых периодических точек из тривиальных базисных множеств, конечно. Поэтому для любой точки $q \in Q$ множество $W^u(q)$ не содержит гетероклинических точек, и следовательно, множество $\overline{W^u(q)} \setminus W^u(q)$ состоит из не более чем двух стоковых периодических точек диффеоморфизма f . Таким образом, множество $\bigcup_{q \in Q} \overline{W^u(q)}$ есть связный одномерный комплекс, состоящий из стоковых периодических точек и неустойчивых многообразий седловых периодических точек, принадлежащих тривиальным базисным множествам диффеоморфизма f . Лемма 3 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 4. Для каждой кривой

$$L(C) = \bigcup_{i=1}^r (x_{2i-1}, x_{2i})^u \cup (x_{2i}, x_{2i+1})^s,$$

рассмотренной в лемме 2, построим в ее окрестности простую замкнутую кривую $\tilde{L}(C)$ следующим образом. Для каждого i , $i = \overline{1, r}$, выберем пару точек $\tilde{x}_{2i-1}, \tilde{x}_{2i}$ и простую кривую l_i с граничными точками $\tilde{x}_{2i-1}, \tilde{x}_{2i}$ такие, что:

- 1) $\tilde{x}_{2i-1} \in W^s(x_{2i-1})$, $\tilde{x}_{2i} \in W^s(x_{2i})$;
- 2) $(\tilde{x}_{2i}, \tilde{x}_{2i+1})^s \subset (x_{2i}, x_{2i+1})^s$ ($x_{2r+1} = x_1$);
- 3) кривая l_i трансверсально пересекается с устойчивым многообразием любой точки, принадлежащей дуге $(x_{2i-1}, x_{2i})^u$, в точности в одной точке;
- 4) кривая $\tilde{L}(C) = \bigcup_{i=1}^r l_i \cup (\tilde{x}_{2i}, \tilde{x}_{2i+1})^s$ является простой замкнутой кривой такой, что $\tilde{L}(C)$, $f(\tilde{L}(C))$, $f^{-1}(\tilde{L}(C))$ принадлежат $\overline{M_i} \setminus \Omega$;
- 5) для каждой связки C множества Ω найдется связка C' такая, что $f(\tilde{L}(C')) \cap \tilde{L}(C) = \emptyset$ и кривые $\tilde{L}(C)$, $f(\tilde{L}(C'))$ ограничивают область $K(C)$, гомеоморфную открытому кольцу и принадлежащую области, достижимая изнутри граница которой состоит из связки C и кривой $\tilde{L}(C)$ (рис. 6).

Положим

$$\hat{C} = \bigcup_{i=1}^m \hat{C}_i, \quad V = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}^+, C \in \hat{C}} f^n(\overline{K(C)}) \cup \Omega.$$

Тогда по построению множество V является замкнутой окрестностью множества Ω и представляется в виде объединения $V = \bigcup_{i=1}^m V_i$ непересекающихся между собой областей V_i , являющихся замкнутыми окрестностями множеств Ω_i . Обозначим $V_* = \bigcup_{C \in \hat{C}} \overline{K(C)} \cup f^{-1}(\overline{K(C)})$. Множество V_* представляется в виде конечного объединения $V_* = \bigcup_{i=1}^m V_{*i}$ непересекающихся замкнутых подмножеств

Рис. 6

V_{*i} таких, что множество $N_i = V_i \cup V_{*i}$ является связным компактным двумерным многообразием с краем, содержащим компоненту Ω_i .

Положим $N_\Omega = \bigcup_{i=1}^m N_i$. Тогда по построению множество N_Ω является компактным двумерным многообразием с краем, являющимся объединением m компактных двумерных многообразий с краем N_i , причем имеют место следующие свойства:

- а) $\Omega \in N_\Omega$;
- б) $\Omega_i \subset V_i \subset N_i \subset \overline{M}_i$, $\partial N = \bigcup_{i=1}^m \partial N_i$;
- в) число компонент края подмногообразия N_i равно $R(\Omega)$, число компонент края подмногообразия N_Ω равно $mR(\Omega)$.

Положим $V'_* = V_* \cup (\bigcup_{C \in \widehat{C}} f(\overline{K(C)}))$. Тогда ∂N_Ω является частью границы множества V'_* , и для каждой компоненты l границы ∂N_Ω найдется в точности одна связка $C(l) \in \widehat{C}$ такая, что l и $C(l)$ образуют достижимую изнутри границу области, гомеоморфную открытому кольцу и принадлежащую множеству $N_\Omega \setminus \Omega$ (компонента l принадлежит множеству $\bigcup_{C \in \widehat{C}} f^{-1}(\tilde{L}(C))$).

Построим диффеоморфизм g множества V_* на V'_* такой, что:

- 1) g оставляет инвариантным множество ∂N_Ω и имеет на каждой компоненте l края в точности $r_{C(l)}$ седловых и $r_{C(l)}$ источников периодических точек;
- 2) для каждой точки $x \in \bigcup_{C \in \widehat{C}} f^{-1}(K(C))$ найдется номер n такой, что $g^n(x) \in \bigcup_{C \in \widehat{C}} K(C)$;
- 3) $g|_{\bigcup_{C \in \widehat{C}} \overline{K(C)}} = f|_{\bigcup_{C \in \widehat{C}} \overline{K(C)}}$.

Определим диффеоморфизм f_Ω подмногообразия N_Ω на себя по правилу

$$f_\Omega(z) = \begin{cases} g(z), & z \in V_*, \\ f(z), & z \in V. \end{cases}$$

По построению $f_\Omega|_V = f|_V$, множество $N_\Omega \setminus (\Omega \cup \partial N_\Omega)$ состоит из блуждающих точек диффеоморфизма f_Ω и является объединением $mR(\Omega)$ непересекающихся между собой областей, гомеоморфных кольцу. Достижимая изнутри граница каждой такой области состоит в точности из одной связки C множества Ω и одной компоненты края ∂N_Ω многообразия N_Ω , содержащей в точности r_C седловых и r_C источниковых периодических точек диффеоморфизма f_Ω (рис. 6).

Построение диффеоморфизма g множества V_* на V'_* можно осуществить таким образом, что диффеоморфизм f_Ω обладает следующими свойствами:

- а) для каждой граничной периодической точки $p \in \Omega$ диффеоморфизма f_Ω множество $\partial W^s(p)$ состоит в точности из одной источниковой периодической точки, принадлежащей ∂N_Ω ;
- б) неустойчивое многообразие каждой седловой периодической точки, принадлежащей ∂N_Ω , трансверсально пересекается с устойчивыми многообразиями точек из Ω (рис. 6).

Покажем, что эйлерова характеристика $\chi(N_i) = 2 - 2q - R(\Omega)$ подмногообразия N_i отрицательна. Если род q подмногообразия N_i больше нуля, то это очевидно. Предположим, что $q = 0$. Рассмотрим диффеоморфизм f_Ω^m , для которого подмногообразия N_i является инвариантным. Тогда существует замкнутое подмногообразие $\tilde{N}_i$, гомеоморфное двумерной сфере, и A -диффеоморфизм f_i многообразия $\tilde{N}_i$ такие, что:

- 1) $N_i \subset \tilde{N}_i$;
- 2) неблуждающее множество диффеоморфизма f_i состоит из одномерного аттрактора Ω_i и конечного числа периодических источниковых точек;
- 3) ограничение диффеоморфизмов f_i и f^m на множестве Ω_i совпадают.

В силу [33] число связок любого аттрактора диффеоморфизма, заданного на многообразии нулевого рода, не менее четырех. То есть если многообразие N_i имеет нулевой род, то оно имеет в этом случае $R(\Omega) \geq 4$ компонент края, и следовательно, эйлерова характеристика $\chi(N_i) = 2 - R(\Omega)$ отрицательна. Таким образом, эйлерова характеристика $\chi(N_i) = 2 - 2q - R(\Omega)$ подмногообразия $N_i \subset \tilde{N}_i$ отрицательна в случае любого его рода q . Лемма 4 полностью доказана.

§ 3. Инвариантность гетероклинических подстановок относительно топологической сопряженности

В этом параграфе мы докажем леммы 6 и 7.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 6. Так как точки x, y принадлежат одной траектории, то существует $k \in \mathbb{Z}$ такое, что $y = f^k(x)$. Тогда $y \in L^s(f^k(p)) \cap L^u(f^k(q))$, где

$$L^s(f^k(p)) = f^k(L^s(p)), \quad L^u(f^k(q)) = f^k(L^u(q))$$

— компоненты связности множеств

$$W^s(f^k(p)) \setminus f^k(p), \quad W^u(f^k(q)) \setminus f^k(q),$$

соответственно, содержащие точку y .

Пусть $m \in \mathbb{Z}^+$ наименьшее число, для которого

$$f^m(L^s(p)) = L^s(p), \quad f^m(L^u(q)) = L^u(q).$$

Тогда

$$\begin{aligned} f^m(L^s(f^k(p))) &= f^m(f^k(L^s(p))) = f^k(f^m(L^s(p))) = f^k(L^s(p)) = L^s(f^k(p)), \\ f^m(L^u(f^k(q))) &= f^m(f^k(L^u(q))) = f^k(f^m(L^u(q))) = f^k(L^u(q)) = L^u(f^k(q)). \end{aligned}$$

Откуда следует, что число m является минимальным положительным числом, для которого компоненты $L^s(f^k(p))$ и $L^u(f^k(q))$ инвариантны относительно диффеоморфизма f^m . Так как диффеоморфизм f^k отображает $L^s(p)$ на $L^s(f^k(p))$, $L^u(q)$ на $L^u(f^k(q))$ с сохранением выбранных на них ориентаций (к точкам p , $f^k(p)$ и от точек q , $f^k(q)$) и

$$\begin{aligned} [y, f^m(y))^s \cap L^u(f^k(p)) &= [f^k(x), f^m(f^k(x))]^s \cap f^k(L^u(q)) \\ &= [f^k(x), f^k(f^m(x))]^s \cap f^k(L^u(q)) \\ &= f^k([x, f^m(x))^s \cap L^u(q)), \end{aligned}$$

то $S(y) = S(x)$. Лемма 6 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 7. Пусть G гетероклиническая траектория диффеоморфизма $f \in S(M)$ и $x \in L^s(p) \cap L^u(q)$ любая гетероклиническая точка, принадлежащая гетероклинической траектории G , где $p, q \in \Omega_1(f)$ и $L^s(p)$, $L^u(q)$ есть компоненты связности множеств $W^s(p) \setminus p$, $W^u(q) \setminus q$, соответственно, содержащие точку x . Пусть $f' \in S(M)$ диффеоморфизм, топологически сопряженный с диффеоморфизмом f , т.е. $f' = gfg^{-1}$, где g — гомеоморфизм многообразия M на себя. Положим $x' = g(x)$. Тогда точка x' принадлежит $L'^s(p') \cap L'^u(q')$ и является, следовательно, гетероклинической точкой диффеоморфизма f' , где $p' = g(p)$, $q' = g(q)$ — периодические точки диффеоморфизма f' , $L'^s(p') = g(L^s(p))$, $L'^u(q') = g(L^u(q))$ — компоненты связности множеств $W'^s(p') \setminus p'$, $W'^u(q') \setminus q'$, соответственно, содержащие точку x' . Обозначим через $G' = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} f'^n(x')$ гетероклиническую траекторию, содержащую точку x' .

Так как гомеоморфизмы f, f' топологически сопряжены, то число m , являющееся наименьшим положительным числом, для которого компоненты $L^s(p)$, $L^u(q)$ инвариантны, является одновременно наименьшим положительным числом, для которого инвариантны компоненты $L'^s(p')$, $L'^u(q')$, и гомеоморфизм g преобразует $L^s(p)$ на $L'^s(p')$, $L^u(q)$ на $L'^u(q')$ с сохранением выбранных на них ориентаций (к точкам p, p' и от точек q, q' , соответственно). Далее, имеем

$$\begin{aligned} [x', f'^m(x')]^s \cap L'^u(p') &= [g(x), f'^m(g(x))]^s \cap L'^u(g(p)) \\ &= [g(x), g(f^m(x))]^s \cap g(L^u(p)) = g([x, f^m(x)]^s \cap L^u(p)). \end{aligned}$$

Отсюда получаем, что $S(x) = S(x')$, и следовательно, $S(G) = S(G')$. Лемма 7 доказана.

**§ 4. Асимптотическое поведение прообразов
устойчивых и неустойчивых многообразий на накрытии
канонического носителя. Инвариантность алгебраических
представлений одномерных аттракторов и репеллеров**

В этом параграфе мы приведем без доказательства ряд утверждений 1–4 об асимптотическом поведении прообразов устойчивых и неустойчивых многообразий точек из одномерных базисных множеств на накрытии его канонического носителя. Впервые утверждения 1–4 были установлены автором работы для ориентируемых базисных множеств в работах [8], [9]. В [11] Р. В. Плыкиным было отмечено их справедливость для просторно расположенных базисных множеств, а затем автором и Х. Х. Калаем была установлена их справедливость для произвольных базисных множеств [12], [13].

Используя утверждения 1–4, мы докажем в этом параграфе леммы 5 и 8.

Зафиксируем номер $i \in \{1, \dots, t\}$. Так как эйлерова характеристика подмногообразия N_i отрицательна, то на плоскости Лобачевского, в реализации Пуанкаре на внутренности круга $|z| < 1$ комплексной z -плоскости, существуют дискретная группа движений F , изоморфная фундаментальной группе подмногообразия N_i , и подмножество H_F такие, что фактормножество H_F/F гомеоморфно подмногообразию N_i . Обозначим через π_i естественную проекцию $H_F \rightarrow N_i$ и через f_i ограничение диффеоморфизма f_Ω^m на подмногообразии N_i . Из теории Нильсена (см., например, [35]) следует, что каждый элемент γ группы F (отличный от тождественного) имеет в точности две различные неподвижные точки, которые лежат на единичной окружности. Будем называть такие точки *рациональными*. Замыкание множества рациональных точек обозначим через E . Точки, принадлежащие дополнению на E к множеству рациональных точек, будем называть *иррациональными* точками множества E .

Обозначим через $\overline{\Omega}_i$ полный прообраз при отображении π_i множества Ω_i на накрывающей H_F . Для точки $\overline{x} \in \overline{\Omega}_i$ обозначим через $w^\sigma(\overline{x})$ прообраз многообразия $W^\sigma(x)$, проходящий через точку $\overline{x}$, где $x = \pi(\overline{x})$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Пусть точка $\overline{x}$ принадлежит $\overline{\Omega}_i$ и $w^\sigma(\overline{x})$ прообраз многообразия $W^\sigma(x)$, проходящий через точку $\overline{x}$, где $x = \pi(\overline{x})$. Тогда

- 1) кривая $w^u(\overline{x})$ имеет в точности две различные граничные точки u_1, u_2 , которые принадлежат множеству E и являются иррациональными точками (рис. 7а);
- 2) если многообразие $W^s(x)$ не содержит граничной периодической точки множества Ω_i , то кривая $w^s(\overline{x})$ имеет в точности две различные граничные точки s_1, s_2 , которые принадлежат E и являются иррациональными точками, при этом пересечение $w^u(\overline{x}) \cap w^s(\overline{x})$ состоит в точности из одной точки $\overline{x}$ (рис. 7а);
- 3) если многообразие $W^s(x)$ содержит граничную периодическую точку p , то прообраз $w_\infty^s(\overline{p})$ ($p = \pi(\overline{p})$) компоненты $W_\infty^s(p)$, содержащий точку $\overline{x}$, имеет в точности две граничные точки, одна из которых есть точка $\overline{p}$, а другая s_∞ принадлежит E и является иррациональ-

- ной точкой, при этом пересечение $w^u(\bar{x}) \cap w^s(\bar{p})$ состоит в точности из одной точки $\bar{x}$ (рис. 7б);
- 4) граничные точки кривой $w^u(\bar{x})$ не совпадают с граничными точками кривой $w^s(\bar{x})$ в случае 2) и с граничной точкой s_∞ кривой $w_\infty^s(\bar{p})$ в случае 3);
 - 5) если $w^u(\bar{x})$ не содержит прообраза граничной периодической точки, то в $\bar{\Omega}_i$ не существует точки $\bar{z}$ такой, что $w^u(\bar{z}) \cap w^u(\bar{x}) = \emptyset$, и кривые $w^u(\bar{z})$, $w^u(\bar{x})$ имеют хотя бы одну общую граничную точку на E ;
 - 6) если $w^u(\bar{x})$ содержит прообраз $\bar{p}$ граничной периодической точки p , то в $\bar{\Omega}_i$ найдутся точки $\bar{q}_1$, $\bar{q}_2$ ($\bar{q}_1 \neq \bar{q}_2$), являющиеся прообразами граничных периодических точек q_1, q_2 из Ω , такие, что $w^u(\bar{q}_1)$ имеет u_1 одной из своих граничных точек, а $w^u(\bar{q}_2)$ имеет u_2 одной из своих граничных точек, где u_1, u_2 — граничные точки кривой $w^u(\bar{x})$ (рис. 7в);
 - 7) не существует точки $\bar{y} \in \bar{\Omega}$ такой, что $w^u(\bar{x}) \cap w^u(\bar{y}) = \emptyset$, $w^u(\bar{q}_1) \cap w^u(\bar{y}) = \emptyset$ ($w^u(\bar{q}_2) \cap w^u(\bar{y}) = \emptyset$) и $w^u(\bar{y})$ имеет u_1 (u_2) одной из своих граничных точек;
 - 8) если $w_*^s(\bar{x})$, $w_*^s(\bar{y})$ компоненты связности множеств $w^s(\bar{x}) \setminus \bar{x}$, $w^s(\bar{y}) \setminus \bar{y}$ такие, что $w^s(\bar{x}) \cap w^s(\bar{y}) = \emptyset$, и компоненты $W_*^s(\pi(\bar{x})) = \pi(w_*^s(\bar{x}))$, $W_*^s(\pi(\bar{y})) = \pi(w_*^s(\bar{y}))$ содержат множества, плотные в Ω_i , тогда кривые $w_*^s(\bar{x})$, $w_*^s(\bar{y})$ имеют различные граничные точки на E .

Рис. 7

Диффеоморфизм f_i отображает подмногообразие N_i на себя и индуцирует автоморфизм группы F , который определяется следующим образом. Обозначим через $\bar{f}_i$ отображение H_F на себя, накрывающее отображение f_i , т.е. $\pi_i \bar{f}_i = f_i \pi_i$. Ото-

бражение $\bar{f}_i$ индуцирует автоморфизм $\bar{f}_{i*}$ группы F , который задается формулой $\bar{f}_{i*}(\gamma) = \bar{f}_i \gamma \bar{f}_i^{-1}$, $\gamma \in F$.

В силу [35] любой автоморфизм τ группы F индуцирует единственным образом гомеоморфизм τ^* множества E на себя. Обозначим через $\bar{f}_i^*$ гомеоморфизм множества E , индуцированный автоморфизмом $\bar{f}_{i*}$. Тогда гомеоморфизм $\bar{f}_i$ единственным образом продолжается на множество E и совпадает на E с гомеоморфизмом $\bar{f}_i^*$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Пусть p внутренняя периодическая точка диффеоморфизма f_i периода k и $\bar{f}_{i_k}$ отображение множества H_F на себя, накрывающее отображение f_i^k , для которого некоторый прообраз $\bar{p}$ точки p является неподвижной точкой. Тогда либо гомеоморфизм $\bar{f}_{i_k}^*$, либо гомеоморфизм $\bar{f}_{i_k}^{*2}$ имеет на E в точности четыре неподвижные точки: притягивающие u_1, u_2 и отталкивающие s_1, s_2 , где u_1, u_2 являются граничными точками кривой $w^u(\bar{p})$, а s_1, s_2 являются граничными точками кривой $w^s(\bar{p})$.

Справедливо и обратное утверждение.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. Пусть отображение $\bar{f}_{i_k}$ является накрывающим для отображения f_i^k , и гомеоморфизм $\bar{f}_{i_k}^*$ имеет на множестве E в точности четыре неподвижные точки, которые являются иррациональными точками множества E . Тогда диффеоморфизм $\bar{f}_{i_k}$ имеет неподвижную точку $\bar{p}$, образ $p = \pi(\bar{p})$ которой является внутренней периодической точкой диффеоморфизма f_i .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 5. Пусть $f' \in S(M)$ диффеоморфизм, топологически сопряженный с диффеоморфизмом f , т.е. $f' = gfg^{-1}$, где g — гомеоморфизм многообразия M на себя, и Ω, Ω' одномерные базисные множества диффеоморфизмов f, f' , соответственно, такие, что $\Omega' = g(\Omega)$.

Пусть m число C -плотных компонент в базисных множествах Ω, Ω' (число m есть инвариант топологической сопряженности). Тогда можно построить канонические диффеоморфизмы $f_\Omega, f'_{\Omega'}$ и гомеоморфизм $\tilde{g}: N_\Omega \rightarrow N'_{\Omega'}$ такие, что $f'_{\Omega'} = \tilde{g}f_\Omega\tilde{g}^{-1}$, и следовательно, $f'^m_{\Omega'} = \tilde{g}f^m_\Omega\tilde{g}^{-1}$. Тогда существуют такие нумерации C -плотных компонент базисных множеств Ω, Ω' , подмногообразия $N_i \subset N_\Omega, N'_i \subset N_{\Omega'}$, ($\Omega_i \subset N_\Omega, \Omega'_i \subset N_{\Omega'}$), диффеоморфизмы f_i, f'_i , преобразующие N_i, N'_i на себя (f_i, f'_i являются ограничениями диффеоморфизмов $f^m_\Omega, f'^m_{\Omega'}$ на подмногообразия N_i, N'_i), такие, что $f'_i = g_i f_i g_i^{-1}$, где g_i есть ограничение гомеоморфизма $\tilde{g}$ на N_i .

Представим подмногообразие $N_i(N'_i)$ в виде H_F/F ($H'_{F'}/F'$) с естественной проекцией π_i (π'_i), где H_F ($H'_{F'}$) подмножество на плоскости Лобачевского и F (F') — дискретная группа движений, изоморфная фундаментальной группе многообразия N_i (N'_i). Тогда существуют отображение $\bar{f}_i$ ($\bar{f}'_i$) подмножества H_F ($H'_{F'}$) на себя, накрывающее отображение f_i (f'_i), $\pi_i \bar{f}_i = f_i \pi_i$ ($\pi'_i \bar{f}'_i = f'_i \pi'_i$), отображение $\bar{g}_i$ подмножества H_F на $H'_{F'}$, $\pi'_i \bar{g}_i = g_i \pi_i$, такие, что $\bar{f}'_i = \bar{g}_i \bar{f}_i \bar{g}_i^{-1}$.

Зададим автоморфизмы группы F, F' формулами:

$$\begin{aligned}\tau_i(\gamma) &= \bar{f}_{i*}(\gamma) = \bar{f}_i \gamma \bar{f}_i^{-1}, & \gamma \in F, \\ \tau'_i(\gamma') &= \bar{f}'_{i*}(\gamma') = \bar{f}'_i \gamma' \bar{f}'_i^{-1}, & \gamma' \in F'\end{aligned}$$

Зададим автоморфизмы групп F, F' формулами:

$$\begin{aligned}\tau_i(\gamma) &= \bar{f}_{i*}(\gamma) = \bar{f}_i \gamma \bar{f}_i^{-1}, \gamma \in F \\ \tau'_i(\gamma') &= \bar{f}'_{i*}(\gamma') = \bar{f}'_i \gamma' \bar{f}'_i^{-1}, \gamma' \in F' .\end{aligned}$$

Зададим изоморфизм ψ группы F на группу F' формулой:

$$\psi(\gamma) = \bar{g}_{i*}(\gamma) = \bar{g}_i \gamma \bar{g}_i^{-1}, \quad \gamma \in F.$$

Тогда для любой точки $\bar{x} \in H'_{F'}$ имеем

$$\begin{aligned}\bar{f}'_i(\gamma(x)) &= \bar{g}_i(\bar{f}_i(\bar{g}_i^{-1}(\gamma(x)))) = \bar{g}_i(\bar{f}_i(\psi^{-1}(\gamma)(\bar{g}_i^{-1}(x)))) \\ &= \bar{g}_i(\tau_i \psi^{-1}(\gamma)(\bar{f}_i(\bar{g}_i^{-1}(x)))) = \psi \tau_i \psi^{-1}(\gamma)(\bar{g}_i(\bar{f}_i(\bar{g}_i^{-1}(x)))) \\ &= \psi \tau_i \psi^{-1}(\gamma)(\bar{f}'_i(x)).\end{aligned}$$

Отсюда получаем $\tau'_i = \psi \tau_i \psi^{-1}$, т.е. автоморфизмы τ_i и τ'_i алгебраически сопряжены. Лемма 5 доказана.

Предположим теперь, что алгебраические представления $(F, \tau_i)_{\Omega_i}, (F', \tau'_i)_{\Omega'_i}$ алгебраически сопряжены, т.е. существуют такие накрывающие отображения $\bar{f}_i, \bar{f}'_i$, и изоморфизм ψ группы F на группу F' такой, что $\bar{f}'_{i*} = \psi \bar{f}_{i*} \psi^{-1}$. В силу [35] автоморфизм ψ индуцирует единственным образом гомеоморфизм ψ^* множества E на множество E' , удовлетворяющий условию $\psi^*(\gamma(e)) = \psi(\gamma)(\psi^*(e))$, $e \in E$. Поэтому получаем $\bar{f}'_i{}^* = \psi^* \bar{f}_i{}^* \psi^{*-1}$.

Следующее утверждение 4 является непринципиальной модификацией леммы 4.1 из [9] (аналогичные утверждения использовались в близкой к нам ситуации в [13]).

УТВЕРЖДЕНИЕ 4. 1) Если точка $\bar{p} \in \bar{\Omega}_i$ является прообразом внутренней периодической точки $p \in \Omega_i$, то найдется единственная точка $\bar{p}' \in \bar{\Omega}'_i$, являющаяся прообразом внутренней периодической точки $p' \in \Omega'_i$ того же периода, что и точка p , такая, что образы при отображении ψ^* граничных точек кривых $w^u(\bar{p})$, $w^s(\bar{p})$ являются граничными точками кривых $w^u(\bar{p}')$, $w^s(\bar{p}')$, соответственно.

2) Если точка $\bar{p} \in \bar{\Omega}_i$ является прообразом граничной периодической точки $p \in \Omega_i$, то найдется единственная точка $\bar{p}' \in \bar{\Omega}'_i$, являющаяся прообразом граничной периодической точки $p' \in \Omega'_i$ того же периода, что и точка p , такая, что образы при отображении ψ^* граничных точек кривой $w^u(\bar{p})$ и граничной точки кривой $w^s_\infty(\bar{p})$, принадлежащей множеству E , являются граничными точками кривой $w^u(\bar{p}')$ и кривой $w^s_\infty(\bar{p}')$, соответственно.

3) Если точка $\bar{x} \in \bar{\Omega}_i$ такова, что кривая $w^s(\bar{x})$ не содержит прообраз граничной периодической точки множества Ω , то найдется точка $\bar{x}' \in \bar{\Omega}'_i$ такая, что образы при отображении ψ^* граничных точек кривых $w^u(\bar{x})$, $w^s(\bar{x})$ являются граничными точками кривых $w^u(\bar{x}')$, $w^s(\bar{x}')$, соответственно.

Обозначим через π (π') взаимно однозначное отображение множества вершин и ребер графа $G(f)$ ($G'(f')$) на множество периодических точек, C -плотных компонент одномерных базисных множеств, гетероклинических компонент и компонент связности из множеств W_{P_1} и W_Γ ($W'_{P'_1}$ и $W'_{\Gamma'}$) диффеоморфизма f (f').

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 8. Пусть b вершина графа $G(f)$, принадлежащая множеству $B(w_i)$, и $p = \pi(b)$ соответствующая ей граничная периодическая точка множества Ω_i . Рассмотрим любой прообраз $\bar{p}$ точки p на накрытии H_F и обозначим через $\bar{p}'$ соответствующую ей точку, определяемую пунктом 2) утверждения 4. Положим $p' = \pi_i(\bar{p}')$ (по построению $p' \in \Omega'_i$) и обозначим через b' точку на графе $G'(f')$, соответствующую граничной периодической точке p' ($p' = \pi'(b')$). Тогда $b' \in B'(w'_i)$ и мы положим $\psi_*(b) = b'$.

Пусть l ребро графа $G(f)$, принадлежащее множеству $R(w_i)$. Тогда существует граничная периодическая точка q , принадлежащая C -плотной компоненте Ω_i , такая, что одна из компонент связности множества $W^u(q) \setminus q$, обозначим ее через $L^u_*(q)$, соответствует ребру l ($\pi(l) = L^u_*(q)$). Рассмотрим любой прообраз $\bar{q} \in \bar{\Omega}$ точки q на накрытии H_F и обозначим через $l^u_*(\bar{q})$ прообраз компоненты $L^u_*(q)$, для которого точка $\bar{q}$ является граничной точкой на H_F . Обозначим через u_1 граничную точку кривой $l^u_*(\bar{q})$ и через s_∞ граничную точку кривой $w^s_\infty(\bar{q})$, принадлежащие множеству E . Обозначим через u'_1, s'_∞ образы точек u_1, s_∞ при отображении ψ^* . Тогда в силу утверждения 4 существует единственная точка $\bar{q}' \in \bar{\Omega}'_i$, являющаяся прообразом граничной периодической точки $q' \in \Omega'_i$ того же периода, что и точка q , такая, что точка u'_1 является граничной точкой кривой $l'^u_*(\bar{q}')$, являющейся одной из компонент связности множества $w'^u(\bar{q}') \setminus \bar{q}'$, а точка s'_∞ является граничной точкой компоненты $w'^s_\infty(\bar{q}')$. Положим $L'^u(\bar{p}') = \pi'_i(l'^u_*(\bar{q}'))$ и обозначим через l' ребро графа $G'(f')$, соответствующее компоненте $L'^u(\bar{p}')$ ($L'^u(\bar{p}') = \pi'(l')$). Тогда $\psi_*(l) = l'$.

Таким образом, получаем взаимно однозначное отображение ψ_* множества $B(w_i) \cup R(w_i)$ на множество $B'(w'_i) \cup R'(w'_i)$. Лемма 8 доказана.

§ 5. Доказательство необходимых и достаточных условий топологической сопряженности

Этот параграф посвящен доказательству теоремы 2. Доказательство необходимости условий теоремы 2 приводится в лемме 9. Доказательство достаточности условий теоремы состоит в построении сопрягающего гомеоморфизма, который последовательно строится в леммах 10–12.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 9. Пусть $f' \in S(M)$ диффеоморфизм, топологически сопряженный с диффеоморфизмом f , т.е. $f' = gfg^{-1}$, где g — гомеоморфизм многообразия M на себя, и $G'(f')$ граф, соответствующий диффеоморфизму f' . Определим изоморфизм η графов $G^*(f)$ и $G'^*(f')$ следующим образом. Пусть e

вершина или ребро графа $G(f)$, положим $\eta(e) = \pi'^{-1}(g(\pi(e)))$. Покажем, что изоморфизм η удовлетворяет всем требованиям изоморфизма различающих графов $G^*(f)$ и $G'^*(f')$ в определении 10. Условия 1)–4) определения 10 следуют непосредственно из топологической сопряженности диффеоморфизмов f, f' посредством гомеоморфизма g . Условие 5) выполняется в силу леммы 5, определения изоморфизма η и определения отображения ψ_* в лемме 8. Если b, b' вершины графов $G(f), G'(f')$, соответствующие периодическим точкам из тривиальных базисных множеств, $b' = \eta(b)$ и гомеоморфизм g сохраняет ориентацию многообразия M , то снабдим множества $U(b), U'(b')$ одинаково ориентированными нумерациями (например, положительно ориентированными нумерациями) таким образом, что номера изоморфных при η ребер совпадают. Если гомеоморфизм g меняет ориентацию M , то снабдим множества $U(b), U'(b')$ противоположно ориентированными ориентациями (например, в $U(b)$ положительно ориентированной нумерацией, а в $U'(b')$ отрицательно ориентированной нумерацией) таким образом, что номера изоморфных при η ребер совпадают. Тогда для изоморфизма η выполняется условие 6) из определения 10.

Обозначим через r (r') минимальное положительное число, для которого все точки из тривиальных базисных множеств диффеоморфизма f (f') неподвижны относительно f^r ($f'^{r'}$) и компоненты связности множества $W^\sigma(p) \setminus p$ ($W'^\sigma(p') \setminus p'$) инвариантны относительно f^r ($f'^{r'}$) для любой точки $p \in P_1$ ($p' \in P'_1(f')$). Так как g есть топологическая сопряженность, то $r = r'$. Пусть γ, γ' вершины графов $G(f), G'(f')$, соответствующие гетероклиническим областям диффеоморфизмов $f, f', \gamma' = \eta(\gamma)$ и $l'^\sigma = \eta(l^\sigma), l^\sigma \in Q^\sigma(\gamma), l'^\sigma \in Q'^\sigma(\gamma')$.

Пусть $L^\sigma = \pi(l^\sigma)$ и $x_1^\sigma, \dots, x_{N(l^\sigma)}^\sigma$ гетероклинические точки на кривой L^σ , занумерованные в соответствии с ориентацией на ней, выбранные таким образом, что на дуге $[x_1^\sigma, x_{N(l^\sigma)}^\sigma]^\sigma \subset L^\sigma$ нет гетероклинических точек, отличных от них, и принадлежащие по одной всем различным гетероклиническим траекториям диффеоморфизма f^r , имеющим с L^σ не пустое пересечение.

Определим отображение $\varphi_\gamma^{l^\sigma}$ из множества $\{1, \dots, N(l^\sigma)\}$ в множество $Q^{\bar{\sigma}}(\gamma)$, полагая $\varphi_\gamma^{l^\sigma}(j) = l^{\bar{\sigma}}$, где $l^{\bar{\sigma}}$ является ребром, для которого $L^{\bar{\sigma}} \cap L^\sigma = x_j^\sigma$ ($L^{\bar{\sigma}} = \pi(l^{\bar{\sigma}})$). Пусть $L'^\sigma = \pi'(l'^\sigma) = g(L^\sigma)$. Положим $x_j'^\sigma = g(x_j^\sigma)$. Так как g есть топологическая сопряженность, то точки $x_1'^\sigma, \dots, x_{N(l'^\sigma)}'^\sigma$ являются гетероклиническими точками диффеоморфизма f' , принадлежат различным гетероклиническим траекториям и на дуге $[x_1'^\sigma, x_{N(l'^\sigma)}'^\sigma]^\sigma \subset L'^\sigma$ нет гетероклинических точек диффеоморфизма f' , отличных от них. Поэтому число $N(l^\sigma)$ различных гетероклинических траекторий диффеоморфизма f , имеющих непустое пересечение с компонентой L^σ , совпадает с числом $N'(l'^\sigma)$ различных гетероклинических траекторий диффеоморфизма f' , имеющих непустое пересечение с компонентой L'^σ .

Определим отображение $\varphi_{\gamma'}^{l'^\sigma}$ из множества $\{1, \dots, N'(l'^\sigma)\}$ в множество $Q'^{\bar{\sigma}}(\gamma')$, полагая $\varphi_{\gamma'}^{l'^\sigma}(j) = l'^{\bar{\sigma}}$, где $l'^{\bar{\sigma}}$ является ребром, для которого $L'^{\bar{\sigma}} \cap L'^\sigma = x_j'^\sigma$. По построению изоморфизма η имеем $l'^{\bar{\sigma}} = \eta(l^{\bar{\sigma}})$.

Таким образом, мы можем оснастить графы $G^*(f), G'^*(f')$ отображениями $\varphi_\gamma^{l^\sigma}, \varphi_{\gamma'}^{l'^\sigma}$ такими, что выполняется условие $\varphi_{\gamma'}^{l'^\sigma} = \eta(\varphi_\gamma^{l^\sigma})$.

Зададим отображения $\psi_\gamma^{l^\sigma} (\psi_{\gamma'}^{l'^\sigma})$ из множества $\{1, \dots, N(l^\sigma)\} (\{1, \dots, N'(l'^\sigma)\})$

в множество подстановок, полагая $\psi_\gamma^{l^\sigma}(j) = S(x_j)$ ($\psi_{\gamma'}^{l'^\sigma}(j) = S'(x'_j)$). Тогда в силу леммы 7 $S(x_j) = S'(x'_j)$, т.е. $\psi_\gamma^{l^\sigma} = \psi_{\gamma'}^{l'^\sigma}$. Таким образом, мы можем оснастить графы $G^*(f)$, $G'^*(f')$ отображениями $\varphi_\gamma^{l^\sigma}$, $\psi_{\gamma'}^{l'^\sigma}$ такими, что выполняется условие $\psi_{\gamma'}^{l'^\sigma} = \psi_\gamma^{l^\sigma}$.

Зададим отображения $\phi_\gamma^{l^\sigma}$ ($\phi_{\gamma'}^{l'^\sigma}$) из множества $\{1, \dots, N(l^\sigma)\}$ ($\{1, \dots, N'(l'^\sigma)\}$) в множество $\{-1, 1\}$, полагая $\phi_\gamma^{l^\sigma}(j) = J(x_j)$ ($\phi_{\gamma'}^{l'^\sigma}(j) = J'(x'_j)$). Тогда если гомеоморфизм g сохраняет (меняет) ориентацию M , то $J'(x'_j) = J(x_j)$ ($J'(x'_j) = -J(x_j)$). В силу правила введения ориентированных нумераций в множествах $U(b)$, $U'(b')$, $b' = \eta(b)$, имеем что $\phi_{\gamma'}^{l'^\sigma} = \nu \phi_\gamma^{l^\sigma}$, где $\nu = 1$ ($\nu = -1$), если ориентации в нумерациях множеств $U(b)$, $U'(b')$ совпадают (противоположны). Таким образом, для изоморфизма η выполняется условие 7) определения 10. Лемма 9 полностью доказана.

Далее будем предполагать, что выполнены достаточные условия теоремы 2, т.е. различающие графы $G^*(f)$, $G'^*(f')$ диффеоморфизмов $f, f' \in S(M)$ изоморфны в силу изоморфизма η такого, что $P'(f') = \eta P(f) \eta^{-1}$.

Будем говорить, что некоторые объекты, связанные с диффеоморфизмами f и f' (периодические точки, гетероклинические области, компоненты связности устойчивых и неустойчивых многообразий, одномерные аттракторы и репеллеры и т. п.), являются *изоморфными*, если они соответствуют изоморфным объектам в графах $G^*(f)$ и $G'^*(f')$.

Пусть Ω , Ω' изоморфные одномерные базисные множества диффеоморфизмов f и f' , соответственно, и M_Ω , $M'_{\Omega'}$ их канонические окрестности. Предположим для определенности, что множества Ω , Ω' являются аттракторами (если Ω , Ω' являются репеллерами, то все нижеприведенные утверждения переформулируются с очевидными изменениями).

Так как аттракторам Ω , Ω' соответствуют изоморфные множества в графах $G^*(f)$ и $G'^*(f')$ и $P'(f') = \eta P(f) \eta^{-1}$, то аттракторы Ω , Ω' состоят из одинакового числа m C -плотных компонент и можно так выбрать их нумерации, что для каждой C -плотной компоненты $\Omega_i \subset \Omega$ найдется C -плотная компонента $\Omega'_i \subset \Omega'$ такая, что алгебраические представления $(F, \tau_i)_{\Omega_i}$, $(F', \tau'_i)_{\Omega'_i}$ алгебраически сопряжены. Пусть (N_Ω, f_Ω) , $(N'_{\Omega'}, f'_{\Omega'})$ канонические формы аттракторов Ω , Ω' . Зафиксируем $i \in \{1, \dots, m\}$ и рассмотрим подмногообразия N_i , N'_i , инвариантные относительно диффеоморфизмов f_Ω^m , $f_{\Omega'}^m$. Представим N_i , N'_i как фактормножества H_F/F , $H'_{F'}/F'$ и обозначим через π_i , π'_i естественные проекции H_F , $H'_{F'}$ на N_i , N'_i , соответственно, где H_F , $H'_{F'}$ — подмножества плоскости Лобачевского и F , F' — дискретные группы движений. Обозначим через f_i , f'_i ограничения отображений f_Ω^m , $f_{\Omega'}^m$ на подмногообразия N_i , N'_i , соответственно.

Из определения алгебраической сопряженности представлений $(F, \tau_i)_{\Omega_i}$, $(F', \tau'_i)_{\Omega'_i}$ следует, что существуют накрывающие отображения $\bar{f}_i$, $\bar{f}'_i$ и алгебраический изоморфизм ψ группы F на группу F' такие, что $\bar{f}'_{i*} = \psi \bar{f}_{i*} \psi^{-1}$. Изоморфизм ψ индуцирует единственным образом гомеоморфизм ψ^* множества E на множество E' , удовлетворяющий условию $\psi^*(\gamma(e)) = \psi(\gamma)(\psi^*(e))$. Поэтому получаем $\bar{f}'_{i*} = \psi^* \bar{f}_{i*} \psi^{*-1}$.

Обозначим через $\overline{\Omega}_i$ ($\overline{\Omega}'_i$) полный прообраз множества Ω_i (Ω'_i) при проекции π_i (π'_i).

ЛЕММА 10. Пусть Ω , Ω' изоморфные одномерные аттракторы диффеоморфизмов f и f' , соответственно. Тогда существует гомеоморфизм g множества Ω на множество Ω' такой, что:

- 1) $f'|_{\Omega'} = gfg^{-1}|_{\Omega'}$;
- 2) если $x, y \in \Omega$ ($x \neq y$) такие, что $y \in W^s(x)$ и $(x, y)^s \cap \Omega = \emptyset$, тогда $g(y) \in W'^s(g(x))$ и $(g(x), g(y))^s \cap \Omega' = \emptyset$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Аналогично [9, §6] зададим отображение $\overline{g}_i$ полного прообраза $\overline{\Omega}_i$ множества Ω_i на полный прообраз $\overline{\Omega}'_i$ множества Ω'_i следующим образом. Пусть $\overline{x}$ произвольная точка множества $\overline{\Omega}_i$. Тогда для нее могут быть в точности две возможности:

- 1) кривая $w^s(\overline{x})$ не содержит прообраза граничной периодической точки множества Ω ;
- 2) кривая $w^s(\overline{x})$ содержит прообраз $\overline{p}$ граничной периодической точки p множества Ω .

В первом случае согласно утверждению 4 существует точка $\overline{x}' \in \overline{\Omega}'_i$ такая, что граничные точки кривых $w'^u(\overline{x}')$, $w'^s(\overline{x}')$ являются образами при отображении ψ^* граничных точек кривых $w^u(\overline{x})$, $w^s(\overline{x})$, соответственно.

Во втором случае рассмотрим кривую $w_\infty^s(\overline{p})$, содержащую кривую $w_\infty^s(\overline{x})$. Здесь $w_\infty^s(\overline{x})$ есть прообраз кривой $W_\infty^s(x)$ ($x = \pi(\overline{x})$), которая является компонентой связности множества $W^s(x) \setminus x$, принадлежащей компоненте $W_\infty^s(p)$. В силу утверждения 4 существует точка $\overline{p}' \in \overline{\Omega}'_i$, являющаяся прообразом граничной периодической точки p' множества Ω' , такая, что граничная точка кривой $w_\infty^s(\overline{p}')$, лежащая на E' , является образом при отображении ψ^* граничной точки кривой $w_\infty^s(\overline{p})$, лежащей на E . При этом граничные точки кривой $w'^u(\overline{p}')$ являются образом при ψ^* граничных точек кривой $w^u(\overline{p})$. В силу утверждения 4 существует точка $\overline{y}' \in \overline{\Omega}'_i$ такая, что граничные точки кривой $w'^u(\overline{y}')$ являются образом при отображении ψ^* граничных точек кривой $w^u(\overline{x})$. Так как отображение ψ^* есть гомеоморфизм, то кривые $w'^u(\overline{p}') \cup \overline{p}'$ и $w'^u(\overline{y}')$ непременно пересекаются в некоторой точке $\overline{x}' \in \overline{\Omega}'_i$. С учетом утверждения 4 получаем, что каждой точке $\overline{x} \in \overline{\Omega}_i$ ставится в соответствие единственная точка $\overline{x}' \in \overline{\Omega}'_i$. Обозначим полученное отображение через $\overline{g}_i$. Из конструкции отображения $\overline{g}_i$, близости устойчивых и неустойчивых многообразий точек из Ω_i и Ω'_i на компактных множествах и свойств накрытий следует, что $\overline{g}_i$ есть гомеоморфизм множества $\overline{\Omega}_i$ на множество $\overline{\Omega}'_i$. Так как гомеоморфизм ψ^* удовлетворяет условиям $\psi^*(\gamma(e)) = \psi(\gamma)(\psi^*(e))$, $\overline{f}_i'^* = \psi^* \overline{f}_i^* \psi^{*-1}$, то из конструкции следует, что отображение $\overline{g}_i$ удовлетворяет условиям $\overline{g}_i(\gamma(\overline{x})) = \psi(\gamma)(\overline{g}_i(\overline{x}))$, $\overline{f}_i'(\overline{g}_i(x)) = \overline{g}_i(\overline{f}_i(x))$. Но тогда существует гомеоморфизм g_i множества Ω_i на множество Ω'_i , удовлетворяющий условию $f'_i|_{\Omega'_i} = g_i f_i g_i^{-1}|_{\Omega'_i}$.

Определим гомеоморфизм g множества Ω на множество Ω' следующим образом. Для $x \in \Omega$ положим $g(x) = f'^r(g_i(f^{-r}(x)))$, где $r \in \{0, \dots, m-1\}$ такое, что $f^{-r}(x) \in \Omega_i$ (полагаем, что $f^0 = \text{id}$, где id – тождественное отображение).

Непосредственно проверяется, что гомеоморфизм g удовлетворяет условию $f'_{\Omega'} = g f g_{\Omega'}^{-1}$. Так как по построению канонических форм аттракторов $f_{\Omega}|_{\Omega} = f|_{\Omega}$, $f'_{\Omega'}|_{\Omega'} = f|_{\Omega'}$, то $f'|_{\Omega'} = g f g^{-1}|_{\Omega'}$.

Из утверждения 4 и конструкции гомеоморфизма $\bar{g}_i$ следует, что если $x, y \in \Omega$ ($x \neq y$) такие, что $y \in W^s(x)$ и $(x, y)^s \cap \Omega = \emptyset$, тогда $g(y) \in W'^s(g(x))$ и $(g(x), g(y))^s \cap \Omega' = \emptyset$. Лемма 10 полностью доказана.

ЛЕММА 11. Пусть выполнены условия леммы 10. Тогда существует гомеоморфизм h_{Ω} множества $\bar{M}_{\Omega}$ на множество $\bar{M}'_{\Omega'}$ такой, что $h_{\Omega}|_{\Omega} = g|_{\Omega}$ и $f|_{\bar{M}'_{\Omega'}} = h_{\Omega} f h_{\Omega}^{-1}|_{\bar{M}'_{\Omega'}}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем $i \in \{1, \dots, m\}$ и рассмотрим подмногообразия M_i, M'_i , для которых выполняются условия $\Omega_i \subset M_i \cup \Gamma_i$, $\Omega'_i \subset M'_i \cup \Gamma'_i$. Тогда $f^m(\bar{M}_i) = \bar{M}_i$, $f'^m(\bar{M}'_i) = \bar{M}'_i$. Обозначим через f_i, f'_i ограничения отображений f^m, f'^m на множества $\bar{M}_i, \bar{M}'_i$, соответственно.

В силу леммы 10 существует гомеоморфизм g_i множества Ω_i на множество Ω'_i такой, что $f'_i|_{\Omega'_i} = g_i f_i g_i^{-1}|_{\Omega'_i}$.

Пусть p произвольная седловая периодическая точка, принадлежащая ∂M_i . В силу леммы 2 по крайней мере одна из компонент связности множества $W^u(p) \setminus p$ принадлежит M_i . Будем обозначать через $W^u_*(p)$ множество, состоящее из объединения компонент связности множества $W^u(p) \setminus p$, принадлежащих M_i .

Обозначим через S_i, S'_i множества всех седловых периодических точек, принадлежащих $\partial M_i, \partial M'_i$, соответственно. Положим

$$W^u_{*i} = \bigcup_{p \in S_i} W^u_*(p), \quad W'^u_{*i} = \bigcup_{p' \in S'_i} W'^u_*(p').$$

Обозначим через U_i, U'_i множества всех источников периодических точек, принадлежащих $\partial M_i, \partial M'_i$, соответственно.

Зададим отображение h_0 множества $S_i \cup U_i$ на множество $S'_i \cup U'_i$ следующим образом.

Если точка $x \in S_i \cup U_i$, то $x' = h_0(x) = \pi'(\eta(\pi^{-1}(x)))$. Из условия 5) в определении 10 изоморфизма графов следует, что если $x \in \Gamma$, то $h_0(x) = g_i(x)$.

Зададим отображение h_1 множества $S_i \cup U_i \cup W^u_{*i}$ на множество $S'_i \cup U'_i \cup W'^u_{*i}$ следующим образом.

Если точка $x \in S_i \cup U_i$, то $h_1(x) = h_0(x)$.

Если точка $x \in W^u_{*i}$, то рассмотрим седловую периодическую точку $p \in S_i$ такую, что $x \in W^u_*(p)$. Если p является граничной периодической точкой множества Ω , то положим $h_1(x) = g_i(x)$.

Если p не является граничной периодической точкой, то из доказательства леммы 1 и конструкции множества M_i в лемме 2 следует, что существуют граничные периодические точки p_1, p_2 (p_1 может совпадать с p_2) аттрактора Ω и компоненты связности L^u_1, L^u_2 множеств $W^u(p_1) \setminus p_1, W^u(p_2) \setminus p_2$, соответственно (если точки p_1, p_2 совпадают, то L^u_1, L^u_2 есть различные компоненты связности множества $W^u(p_1) \setminus p_1$), такие, что для любой точки $x \in L^u(p)$ найдутся точки $x_1 \in L^u_1$,

$x_2 \in L_2^u$ такие, что $x_2 \in W^s(x_1)$ и пересечение $W_*^u(p) \cap (x_1, x_2)^s$ состоит из единственной точки, являющейся точкой x .

Положим $p' = h_0(p)$, $p'_1 = g_i(p_1)$, $p'_2 = g_i(p_2)$, $x'_1 = g_i(x_1)$, $x'_2 = g_i(x_2)$. В силу леммы 10 $x'_2 \in W^s(x'_1)$. Учитывая выполнение условий 1)–4) определения 10, получаем, что пересечение $W'_*(p') \cap (x'_1, x'_2)^s$ непусто и состоит из единственной точки, которую обозначим через x' . Положим $h_1(x) = x'$. Из конструкции отображения h_1 и C^1 -близости устойчивых и неустойчивых многообразий точек из Ω на компактных множествах следует, что h_1 является гомеоморфизмом.

Если $x' \in S'_i \cup U'_i$, то

$$\begin{aligned} h_1 f_i h_1^{-1}(x') &= h_0 f_i h_0^{-1}(x') = \pi' \eta \pi^{-1} \pi P^m(f) \pi^{-1} \pi \eta^{-1} \pi'^{-1}(x) \\ &= \pi' \eta P^m(f) \eta^{-1} \pi'^{-1}(x) = \pi' P'^m(f) \pi'^{-1}(x) = f'(x'). \end{aligned}$$

Если $x' \in W_*^u$, то

$$\begin{aligned} h_1 f_i h_1^{-1}(x') &= h_1 f_i h_1^{-1}((x'_1, x'_2)^s \cap W_*'^u(p')) \\ &= h_1 f_i((g_i^{-1}(x'_1), g_i^{-1}(x'_2))^s \cap W_*^u(h_1^{-1}(p'))) \\ &= h_1((f_i g_i^{-1}(x'_1), f_i g_i^{-1}(x'_2))^s \cap W_*^u(f_i h_1^{-1}(p'))) \\ &= (g_i f_i g_i^{-1}(x'_1), g_i f_i g_i^{-1}(x'_2))^s \cap W_*^u(h_1 f_i h_1^{-1}(p')) \\ &= (f'_i(x'_1), f'_i(x'_2))^s \cap W^u(f'_i(p')) = f_i(x'). \end{aligned}$$

Таким образом, гомеоморфизм h_1 преобразует множество $S_i \cup U_i \cup W_*^u$ на множество $S'_i \cup U'_i \cup W_*'^u$ и удовлетворяет условию

$$f'_i|_{S'_i \cup U'_i \cup W_*'^u} = h_1 f_i h_1^{-1}|_{S_i \cup U_i \cup W_*^u}.$$

Целью дальнейших рассуждений является построение гомеоморфизма H_i множества $\overline{M}_i$ на множество $\overline{M}'_i$ такого, что

$$H_i|_{S_i \cup U_i \cup W_*^u} = h_1|_{S_i \cup U_i \cup W_*^u}$$

$$\text{и } f'_i|_{\overline{M}'_i} = H_i f_i H_i^{-1}|_{\overline{M}_i}.$$

Пусть $\alpha \in U_i$ источниковая периодическая точка периода $n_0 \in \mathbb{Z}^+$. Обозначим через W_α^s объединение устойчивых многообразий $W^s(p)$ всех седловых периодических точек p , принадлежащих S_i , для которых выполняется условие $\alpha \in \overline{W^s(p)}$, и через $W_{\alpha\emptyset}^s$ объединение компонент связности $W_\emptyset^s(p)$ для всех граничных периодических точек p , принадлежащих Γ_i , для которых выполняется условие $\alpha \in \overline{W_\emptyset^s(p)}$.

Пусть $L_1^s, \dots, L_k^s$ все компоненты связности из множеств $W_\alpha^s \setminus S_i$ и $W_{\alpha\emptyset}^s$, для каждой из которых выполняется условие $\alpha \in \overline{L_r^s}$, $r = 1, \dots, k$, и занумерованные следующим образом. Выберем в окрестности точки α простую гладкую замкнутую кривую L такую, что кривая L ограничивает диск D , содержащий точку α ,

и пересекается в точности в одной точке с каждой компонентой связности из множества $W_\alpha^s \setminus S_i$ и $W_{\alpha\emptyset}^s$, имеющей точку α в своем замыкании. Зададим в некоторой точке кривой L репер (τ, n) , согласованный с ориентацией многообразия M , такой, что вектор τ касается кривой L и вектор n направлен внутрь диска D . Зафиксируем направление обхода по кривой L , индуцированное вектором τ . Занумеруем компоненты $L_1^s, \dots, L_k^s$ в порядке, в котором они встречаются при обходе вдоль L , начиная с некоторой точки на L . Пусть $p_1, \dots, p_k$ периодические точки из $S_i \cup \Gamma_i$ такие, что $L_r^s \in W^s(p_r)$ (если $p_i = p_j = p$ для некоторых $i, j \in \{1, \dots, k\}$, то L_i^s, L_j^s являются различными компонентами связности множеств $W^s(p) \setminus p$).

Выберем на каждой кривой L_r^s точку z_r таким образом, что если $f^{n_0}(z_r) \in L_j^s$, то $f^{n_0}(z_r) \in (z_j, p_j)^s \subset W^s(p_j)$, $r, j \in \{1, \dots, k\}$ ($j = r$, если $f^{n_0}(L_r^s) = L_r^s$).

По построению границы множества M_i в лемме 2 точка α лежит в замыкании последовательности кривых $L_n(C)$, построенной по кривой $L(C)$, где C – некоторая связка аттрактора Ω .

Для каждого номера $r \in \{1, \dots, k\}$ построим замкнутую дугу λ_r с граничными точками μ_r^1, μ_r^2 , удовлетворяющую следующим условиям:

- 1) если для точки p_r обе компоненты связности множества $W^u(p_r) \setminus p_r$ принадлежат M_i , то $z_r \in \text{int } \lambda_r$ и точки μ_r^1, μ_r^2 принадлежат $L(C)$; в этом случае будем говорить, что построенная дуга имеет *первый тип*;
- 2) если в точности одна из компонент связности множества $W^u(p_r) \setminus p_r$ принадлежит M_i , то одна из точек μ_r^1, μ_r^2 (для определенности будем считать, что это точка μ_r^1) совпадает с точкой z_r , а другая принадлежит $L(C)$; в этом случае будем говорить, что построенная дуга имеет *второй тип*;
- 3) если дуга λ_r имеет непустое пересечение с устойчивым многообразием точки, принадлежащей множеству Ω_i , то это пересечение является трансверсальным.

Положим $\lambda = \bigcup_{r=1}^k \lambda_r$. По построению для каждой точки $z \in \lambda_r$ существует единственная точка $\hat{z} \in W^u(p_r)$ такая, что точки $\hat{z}, z$ принадлежат одному и тому же устойчивому многообразию некоторой точки из пересечения $\Omega_i \cap L(C)$ и дуга $(\hat{z}, z)^s$ не пересекается с множеством $\bigcup_{r=1}^k W^u(p_r)$. Для любой точки $y \in [\hat{z}, z]^s$ положим $\nu(y) = \hat{z}$. В частности, имеем $\nu(\mu_r^{\delta_r}) = \hat{\mu}_r^{\delta_r}$ ($\delta_r = 1, 2$), $\nu(z_r) = p_r$.

Для каждого номера $r \in \{1, \dots, k\}$ существует номер $\tilde{r} \in \{1, \dots, k\}$ такой, что кривая $f^{n_0}(\lambda_{\tilde{r}})$ пересекает кривую L_r^s . Положим $\tilde{\lambda}_r = f^{n_0}(\lambda_{\tilde{r}})$ и $\tilde{\lambda} = \bigcup_{r=1}^k \tilde{\lambda}_r$.

Обозначим через $\eta_r^1, (\eta_r^2)$ точку пересечения дуги $\tilde{\lambda}_r$ с дугой $(\mu_r^1, \hat{\mu}_r^1)^s$ ($(\mu_r^2, \hat{\mu}_r^2)^s$) и через Π_r замкнутую область, ограниченную дугами $\lambda_r, [\mu_r^1, \eta_r^1] \subset [\mu_r^1, \hat{\mu}_r^1]^s$, $[\eta_r^1, \eta_r^2] \subset \tilde{\lambda}_r$, $[\eta_r^2, \mu_r^2] \subset [\mu_r^2, \hat{\mu}_r^2]^s$. Положим $\Pi = \bigcup_{r=1}^k \Pi_r$. На рис. 8 показано построение областей Π_1 – Π_5 для случая $k = 5$. Здесь точки p_1, p_4, p_5 принадлежат связке степени 3 C -плотной компоненты Ω_i , точка $p_2 = p_3$ принадлежит границе множества M_i , дуги $\lambda_1, \lambda_4, \lambda_5$ являются дугами первого типа, а дуги λ_2, λ_3 являются дугами второго типа.

Граничные точки $\mu_r^{\delta_r}, \mu_{r+1}^{\delta_{r+1}}$ кривых λ_r, λ_{r+1} ($\lambda_{k+1} = \lambda_1, \mu_{k+1}^{\delta_{k+1}} = \mu_1^{\delta_1}$) назовем *s-связанными*, если

- 1) точки $\mu_r^{\delta_r}, \mu_{r+1}^{\delta_{r+1}}$ принадлежат одному и тому же устойчивому многообразию некоторой точки, принадлежащей $L(C) \cap \Omega_i$;

через Q_r объединение этих областей. Для каждой дуги λ_r второго типа с областью Π_r граничит в точности одна область либо $Q_{r,r+1}$, либо $Q_{r-1,r}$ ($Q_{0,1} = Q_{r,1}$). В этом случае обозначим через Q_r эту область (на рис. 8 область Q_1 , например, является объединением областей Q_{12} и Q_{51} , а Q_2 совпадает с Q_{12}). Положим $Q = \bigcup_{r=1}^k Q_r$ и $K = \Pi \cup Q$.

Пусть теперь α' источниковая периодическая точка диффеоморфизма f' , изоморфная α . Проведем для точки α' те же построения, что и для α , и снабдим обозначения изоморфных периодических точек, компонент связности устойчивых и неустойчивых многообразий седловых периодических точек, а также объектов, аналогичных объектам, построенным для точки α , штрихами, сохранив прежние индексы. При этом, если μ_r^1, μ_r^2 граничные точки кривой λ_r и $\mu_r'^1, \mu_r'^2$ граничные точки кривой λ_r' , то точки $\mu_r^l, \mu_r'^l$ принадлежат, соответственно, изоморфным компонентам связности множеств $W^u(p_r) \setminus p_r, W'^u(p_r') \setminus p_r'$.

Выберем из каждой источниковой траектории диффеоморфизма f_i , принадлежащей множеству U_i , в точности по одной периодической точке. Обозначим через $\tilde{U}_i$ множество всех таких точек и через $\tilde{U}'_i$ множество периодических точек диффеоморфизма f'_i , состоящих из точек, изоморфных точкам из $\tilde{U}_i$.

Условия изоморфизма различающих графов $G^*(f) G'^*(f')$ позволяют для каждой пары изоморфных точек $\alpha \in \tilde{U}_i, \alpha' \in \tilde{U}'_i$ построить гомеоморфизмы $h_1(\alpha, \alpha'), h_2(\alpha, \alpha'), h_3(\alpha, \alpha'), h_4(\alpha, \alpha'), h_5(\alpha, \alpha'), h_6(\alpha, \alpha')$, которые определяются следующим образом.

1) Гомеоморфизм $h_1(\alpha, \alpha')$ отображает множество Π на множество Π' и удовлетворяет следующему условию. Пусть y произвольная точка из множества Π и $y' = h_1(\alpha, \alpha')(y)$. Тогда существуют номер r и точки z, z' , принадлежащие дугам λ_r, λ_r' , соответственно, такие, что $y \in [\hat{z}, z]^s$ (на рис. 8 указана точка y , для которой $r = 1$), $y' \in [\hat{z}', z']^s$ и $\hat{z}' = H_i(\hat{z})$.

2) Гомеоморфизм $h_2(\alpha, \alpha')$ отображает множество γ на множество γ' и удовлетворяет условию $h_2(\alpha, \alpha')(\mu_r^{\delta_r}) = h_1(\alpha, \alpha')(\mu_r^{\delta_r})$.

3) Гомеоморфизм $h_3(\alpha, \alpha')$ отображает множество $\tilde{\lambda} \cup \tilde{\gamma}$ на множество $\tilde{\lambda}' \cup \tilde{\gamma}'$ и определяется следующим образом. Для точки $x \in \tilde{\lambda} \cup \tilde{\gamma}$ $h_3(\alpha, \alpha')(x) = f_i'^{n_0} h_1(\alpha, \alpha') f_i^{-n_0}(x)$.

Из конструкции гомеоморфизма $h_1(\alpha, \alpha')$ следует, что

$$h_3(\alpha, \alpha')|_{\tilde{\lambda} \cap \Pi} = h_1(\alpha, \alpha')|_{\tilde{\lambda} \cap \Pi}.$$

4) Гомеоморфизм $h_4(\alpha, \alpha')$ отображает множество K на множество K' и удовлетворяет условиям

$$\begin{aligned} h_4(\alpha, \alpha')|_{\Pi} &= h_1(\alpha, \alpha')|_{\Pi}, \\ h_4(\alpha, \alpha')|_{\gamma} &= h_2(\alpha, \alpha')|_{\gamma}, \\ h_4(\alpha, \alpha')|_{\tilde{\lambda} \cup \tilde{\gamma}} &= h_3(\alpha, \alpha')|_{\tilde{\lambda} \cup \tilde{\gamma}}. \end{aligned}$$

5) Гомеоморфизм $h_5(\alpha, \alpha')$ отображает множество $W^u(\alpha) \cap \overline{M}_i$ на множество $W'^u(\alpha') \cap \overline{M}'_i$ и определяется следующим образом. Пусть $x \in W^u(\alpha) \cap \overline{M}_i$, тогда

$$h_5(\alpha, \alpha')(x) = f'^{n_0} (h_4(\alpha, \alpha')(f^{-l n_0}(x))),$$

где $l \in \mathbb{Z}$ такое, что $f^{-l n_0}(x) \in K$.

б) Гомеоморфизм $h_6(\alpha, \alpha')$ отображает множество

$$\bigcup_{n=0}^{n_0-1} f^{n_0}(W^u(\alpha) \cap \overline{M}_i)$$

на множество

$$\bigcup_{n=0}^{n_0-1} f'^{n_0}(W'^u(\alpha') \cap \overline{M}'_i)$$

и определяется следующим образом. Если

$$x \in \bigcup_{n=0}^{n_0-1} f^{n_0}(W^u(\alpha) \cap \overline{M}_i),$$

то

$$h_6(\alpha, \alpha')(x) = f'^l(h_5(\alpha, \alpha')(f^{-l}(x))),$$

где $l \in \{0, \dots, n_0 - 1\}$ такое, что $f^{-l}(x) \in W^u(\alpha) \cap \overline{M}_i$.

Непосредственно проверяется, что гомеоморфизм $h_6(\alpha, \alpha')$ удовлетворяет условию

$$f'_i|_{\bigcup_{n=0}^{n_0-1} f'^{n_0}(W'^u(\alpha'))} = h_6(\alpha, \alpha') f_i h_6^{-1}(\alpha, \alpha')|_{\bigcup_{n=0}^{n_0-1} f^{n_0}(W^u(\alpha))}.$$

Пусть теперь $x \in \overline{M}_i$, тогда либо $x \in S_i \cup U_i \cup W_{*i}^u$, либо найдется точка $\alpha \in \tilde{U}_i$ периода n_0 такая, что

$$x \in \bigcup_{n=0}^{n_0-1} f^{n_0}(W^u(\alpha) \cap \overline{M}_i).$$

Положим

$$H_i(x) = \begin{cases} h_6(\alpha, \alpha')(x), & x \in \bigcup_{n=0}^{n_0-1} f^{n_0}(W^u(\alpha) \cap \overline{M}_i), \\ h_1(x), & x \in S_i \cup U_i \cup W_{*i}^u. \end{cases}$$

Построенное отображение удовлетворяет условию $f_i|_{\overline{M}'_i} = H_i f H_i^{-1}|_{\overline{M}'_i}$. Покажем, что отображение H_i является гомеоморфизмом. Достаточно показать, что отображение H_i непрерывно в любой точке x , принадлежащей неустойчивому многообразию любой точки из W_{i*}^u .

Из вышеописанной конструкции гомеоморфизма H_i следует, что существуют целое неотрицательное число N , источниковая, периодическая точка $\alpha \in \tilde{U}_i$, номер r , точки $p_r \in S_i$, $z \in \text{int } \lambda_r$ такие, что $f_i^N(x) \in W^u(p_r)$, $\nu(z) = f_i^N(x)$. Пусть $\{x_k\}$ последовательность точек из M_i , сходящаяся к точке x . Положим $y = f_i^N(x)$, $y_k = f_i^N(x_k)$. Не уменьшая общности, можно предполагать, что для каждой точки y_k найдется точка $z_k \in \lambda_r$ такая, что $y_k \in (\nu(z_k), z_k)^s$.

Положим $y' = H_i(y)$, $y'_k = H_i(y_k)$. Из непрерывной зависимости устойчивых многообразий точек из множества Ω_i на компактных множествах следует, что последовательность точек $\{z_k\}$ сходится к точке z . Положим $z' = H_i(z)$, $z'_k =$

$H_i(z_k)$. Из конструкции гомеоморфизма $h_6(\alpha, \alpha')$ следует, что $y'_k \in (\nu(z'_k), z'_k)^s$. Так как отображение h_1 является гомеоморфизмом, то последовательность $\{z'_k\}$ сходится к точке z' , и следовательно, из близости устойчивых многообразий точек из множества Ω'_i на компактных множествах последовательность $\{\nu(z'_k)\}$ сходится к точке $\nu(z')$. Но тогда последовательность $\{y'_k\}$ сходится к точке y .

Так как

$$H_i(x_k) = H_i(f_i^{-N}(y_k)) = f_i'^{-N}(H_i(y_k)),$$

то $H_i(x_k)$ сходится к $f_i'^{-N}(H_i(y)) = H_i(f_i'^{-N}(y)) = H_i(x)$. Таким образом, отображение H_i является непрерывным всюду на $\overline{M}_i$.

Зададим теперь отображение h_Ω множества $\overline{M}_\Omega$ на множество $\overline{M}'_{\Omega'}$ следующим образом. Для точки $x \in \overline{M}_\Omega$ положим $h_\Omega(x) = f'^l(h_i(f^{-l}(x)))$, где $l \in \{0, \dots, m-1\}$ такое, что $f^{-l}(x) \in \overline{M}_i$. Построенный таким образом гомеоморфизм h_Ω удовлетворяет условиям $h_\Omega|_\Omega = g|_\Omega$ и $f|_{\overline{M}'_{\Omega'}} = h_\Omega f h_\Omega^{-1}|_{\overline{M}'_{\Omega'}}$. Лемма 11 полностью доказана.

ЛЕММА 12. Пусть различающие графы $G^*(f)$, $G'^*(f)$ диффеоморфизмов $f, f' \in S(M)$ изоморфны в силу изоморфизма η такого, что $P'(f') = \eta P(f) \eta^{-1}$. Тогда существует гомеоморфизм H многообразия M на себя такой, что $f' = H f H^{-1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зададим гомеоморфизм h_Λ множества $\overline{M}_\Lambda$ на множество $\overline{M}'_{\Lambda'}$ следующим образом. Пусть x произвольная точка, принадлежащая множеству Λ . Обозначим через $\Omega(x)$ одномерное базисное множество, содержащее точку x , и положим $h_\Lambda(x) = h_{\Omega(x)}(x)$.

Пусть $\Sigma = M \setminus M_\Lambda$, $\Sigma' = M \setminus M'_{\Lambda'}$. Применим к ограничениям диффеоморфизмов f и f' на множества Σ и Σ' конструкцию построения сопрягающего гомеоморфизма h_Σ , описанную в работе [19]. Отметим, что эта конструкция позволяет построить h_Σ таким образом, что $h_\Sigma|_{\partial M_\Lambda} = h_\Lambda|_{\partial M_\Lambda}$.

Зададим гомеоморфизм H многообразия M на себя формулой

$$H(x) = \begin{cases} h_\Lambda(x), & x \in M_\Lambda, \\ h_\Sigma(x), & x \in M_\Sigma. \end{cases}$$

Тогда H является искомым гомеоморфизмом. Лемма 12 доказана.

Список литературы

1. Palis J. On Morse–Smale dynamical systems // Topology. 1969. V. 8. № 4. P. 385–404.
2. Пали Дж., Смейл С. Теоремы структурной устойчивости // Математика. 1969. Т. 13. № 2. С. 145–155.
3. Robbin J. W. A structural stability theorem // Ann. of Math. 1971. V. 94. № 3. P. 447–493.
4. Sannami A. The stability theorems for discrete dynamical systems on two-dimensional manifolds // Proc. Japan Acad. Ser. A. Math. Sci. 1981. V. 57. P. 403–407; // Nagoya Math. J. 1983. V. 90. P. 1–55.
5. Liao S. T. On the stability conjecture // Chinese Ann. of Math. 1980. V. 1. № 1. P. 9–30.
6. Mane R. An ergodic closing lemma // Ann. of Math. 1982. V. 116. № 6. P. 503–540.

7. *Smale S.* Morse inequalities for a dynamical systems // *Bull. Amer. Math. Soc.* 1960. V. 66. P. 43–49.
8. *Гринес В. З.* О топологической сопряженности диффеоморфизмов двумерного многообразия на одномерных базисных множествах // *УМН.* 1974. Т. 29. № 6. С. 163–164.
9. *Гринес В. З.* О топологической сопряженности диффеоморфизмов двумерного многообразия на одномерных ориентируемых базисных множествах. I // *Труды ММО.* 1975. Т. 32. С. 35–61.
10. *Гринес В. З.* О топологической сопряженности диффеоморфизмов двумерного многообразия на одномерных ориентируемых базисных множествах. II // *Труды ММО.* 1977. Т. 34. С. 243–252.
11. *Пликин Р. В.* О геометрии гиперболических аттракторов гладких каскадов // *УМН.* 1984. Т. 39. № 6. С. 75–113.
12. *Гринес В. З., Калай Х. Х.* О топологической эквивалентности диффеоморфизмов с нетривиальными базисными множествами на двумерных многообразиях // *Методы качественной теории дифференц. уравнений.* / ред. Е. А. Леонтович-Андроновой. Горький: Горьк. гос. ун-т, 1988. С. 40–49.
13. *Гринес В. З., Калай Х. Х.* Топологическая классификация базисных множеств без пар сопряженных точек *A*-диффеоморфизмов на поверхностях // *Деп. ВИНТИ.* 1988. № 1137-В. Горький.
14. *Арансон С. Х., Гринес В. З.* Топологическая классификация каскадов на замкнутых двумерных многообразиях // *УМН.* 1990. Т. 45. № 4. С. 3–32.
15. *Арансон С. Х., Гринес В. З.* Каскады на поверхностях. Динамические системы с гиперболическим поведением // *Итоги науки и техники. Совр. проблемы матем. Фундаментальные направления.* Т. 66. М.: ВИНТИ, 1991. С. 148–187.
16. *Жиров А. Ю.* Гиперболические аттракторы диффеоморфизмов ориентируемых поверхностей. Часть 1. Кодирование, классификация и накрытия // *Матем. сб.* 1994. Т. 185. № 6. С. 3–50.
17. *Жиров А. Ю.* Гиперболические аттракторы диффеоморфизмов ориентируемых поверхностей. Часть 2. Перечисление и применение к псевдоаносовским диффеоморфизмам // *Матем. сб.* 1994. Т. 185. № 9. С. 29–80.
18. *Жиров А. Ю.* Гиперболические аттракторы диффеоморфизмов ориентируемых поверхностей. Часть 3. Алгоритм классификации // *Матем. сб.* 1995. Т. 186. № 9. С. 59–82.
19. *Гринес В. З.* Топологическая классификация диффеоморфизмов Морса–Смейла с конечным множеством гетероклинических траекторий на поверхностях // *Матем. заметки.* 1993. Т. 54. № 3. С. 3–17.
20. *Смейл С.* Дифференцируемые динамические системы // *УМН.* 1970. Т. 25. № 1. С. 113–185.
21. *Безденежных А. Н., Гринес В. З.* Динамические свойства и топологическая классификация градиентноподобных диффеоморфизмов на двумерных многообразиях // *Методы качественной теории дифференц. уравнений* / ред. Е. А. Леонтович-Андроновой. Горький: Горьк. гос. ун-т, 1985. С. 22–38.
22. *Безденежных А. Н., Гринес В. З.* Диффеоморфизмы с ориентируемыми гетероклиническими множествами на двумерных многообразиях // *Методы качественной теории дифференц. уравнений* / ред. Е. А. Леонтович-Андроновой. Горький: Горьк. гос. ун-т, 1985. С. 139–152.
23. *Безденежных А. Н., Гринес В. З.* Динамические свойства и топологическая классификация градиентноподобных диффеоморфизмов на двумерных многообразиях. Часть 2 // *Методы качественной теории дифференц. уравнений* / ред. Е. А. Леонтович-Андроновой. Горький: Горьк. гос. ун-т, 1987. С. 24–32.
24. *Безденежных А. Н., Гринес В. З.* Реализация градиентноподобных диффеоморфизмов двумерных многообразий // *Дифференциальные и интегральные уравнения* / ред. Н. Ф. Отрокова. Горький: Горьк. гос. ун-т, 1985. С. 33–37.

25. *Боревич Е. А.* Условия топологической эквивалентности двумерных диффеоморфизмов Морса–Смейла // Изв. вузов. Сер. матем. 1980. № 11. С. 12–17.
26. *Боревич Е. А.* Условия топологической эквивалентности двумерных диффеоморфизмов Морса–Смейла // Дифференц. уравнения. 1981. Т. 17. № 8. С. 1481–1482.
27. *Боревич Е. А.* Топологическая эквивалентность двумерных диффеоморфизмов Морса–Смейла // Изв. вузов. Сер. матем. 1984. № 4. С. 3–6.
28. *Боревич Е. А.* Двумерные диффеоморфизмы Морса–Смейла, имеющие ориентированные гетероклинические связи // Изв. вузов. Сер. матем. 1989. № 9. С. 77–79.
29. *Аносов Д. В.* Геодезические потоки на замкнутых римановых многообразиях отрицательной кривизны // Труды МИАН. 1967. Т. 90.
30. *Аносов Д. В.* Об одном классе инвариантных множеств гладких динамических систем // Труды пятой международной конференции по нелинейным колебаниям. Т. 2. Качественные методы. Ин-т математики АН УССР. Киев: Наукова Думка, 1970. С. 39–45.
31. *Bowen R.* Periodic points and measures for axiom A diffeomorphisms // Trans. Amer. Math. Soc. 1971. V. 154. P. 337–397.
32. *Плыкин Р. В.* О топологии базисных множеств диффеоморфизмов С. Смейла // Матем. сб. 1971. Т. 84. № 2. С. 301–312.
33. *Плыкин Р. В.* Источники и стоки A -диффеоморфизмов поверхностей // Матем. сб. 1974. Т. 94. № 2. С. 243–264.
34. *Robinson R. S., Williams R. F.* Finite stability is not generic // Proc. of a symp. held on the Univ. of Brasil. 1971. New York: Acad. Press, 1973. P. 451–462.
35. *Nielsen J.* Surface transformation classes of algebraically finite type // Det. Kgl. Dansk Videnskabernes Selskab. Math.-Phys. Meddelelser. 1944. V. 21. P. 1–89.

Нижегородская государственная
сельскохозяйственная академия

Поступила в редакцию
16.10.1996