Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Л. Левин, К теории двойственности для нетопологических вариантов задачи о перемещении масс, *Матем. сб.*, 1997, том 188, номер 4, 95–126

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm217>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.174.16.151

26 апреля 2023 г., 13:36:30

УДК 517.972.8

В. Л. Левин

К теории двойственности для нетопологических вариантов задачи о перемещении масс

Доказаны теоремы двойственности в массовой постановке для нетопологических вариантов задачи о перемещении масс и родственных экстремальных маргинальных задач. Исследована связь двух типов задач (с фиксированной разностью маргинальных мер и с фиксированными маргинальными мерами) и получен критерий их эквивалентности.

Библиография: 33 названия.

§ 1. Введение

В работе рассматриваются нетопологические варианты задачи о перемещении масс и родственных экстремальных маргинальных задач. Прежде чем перейти к самим задачам, напомним их топологические прототипы.

Топологический вариант задачи о перемещении масс с фиксированной разностью маргинальных мер состоит в нахождении оптимального значения

$$\mathcal{A}(c, \rho) := \inf \{c(\mu) : \mu \in V_+(X \times X), (\pi_1 - \pi_2)\mu = \rho\}; \quad (1.1)$$

при этом оптимальным значением двойственной задачи служит

$$\mathcal{B}(c, \rho) := \sup \left\{ \int_X u(x) \rho(dx) : u \in Q(c, C^b(X)) \right\}. \quad (1.2)$$

Здесь X – топологическое пространство, $V_+(X \times X)$ – конус конечных положительных регулярных борелевских мер на $X \times X$,

$$c(\mu) := \int_{X \times X} c d\mu = \int_{X \times X} c(x, y) \mu(d(x, y)),$$

π_1 и π_2 – операторы проектирования мер на $X \times X$ в меры на X , сопоставляющие каждой $\mu \in V_+(X \times X)$ маргинальные меры

$$(\pi_1 \mu)B := \mu(B \times X), \quad (\pi_2 \mu)B := \mu(X \times B) \quad \forall B \in \mathcal{B}(X),$$

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Международного научного фонда и правительства РФ (грант № JA1100) и Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-01-00336).

где $\mathcal{B}(X)$ обозначает σ -алгебру борелевских множеств в X , $C^b(X)$ – пространство ограниченных непрерывных вещественных функций на X ,

$$Q(c, C^b(X)) := \{u \in C^b(X) : u(x) - u(y) \leq c(x, y) \forall x, y\}. \quad (1.3)$$

Разумеется, чтобы функционал $s(\mu)$ имел смысл, рассматриваемые функции стоимости s должны обладать некоторыми свойствами универсальной измеримости.

Проблема двойственности в массовой постановке состоит в характеристизации функций стоимости $s: X \times X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, для которых выполняется соотношение двойственности

$$\mathcal{A}(c, \rho) = \mathcal{B}(c, \rho) \quad \forall \rho \in V_0(X),$$

где $V_0(X)$ – подпространство регулярных борелевских мер ρ на X с $\rho X = 0$.

Задача (1.1) – естественное обобщение классической задачи Монжа–Канторовича [1]–[4], которая, в свою очередь, обобщает старинную задачу “о выемках и насыпях” Гаспара Монжа [5]. В задаче Монжа–Канторовича X – метрический компакт с метрикой в качестве функции стоимости $c(x, y)$. В этом случае множество (1.3) ограничений двойственной задачи состоит из функций, удовлетворяющих условию Липшица с константой 1.

Массовая постановка проблемы двойственности и ее решение для произвольного компакта содержится в совместной работе А. А. Милютин и автора [6]¹; пространство развитой там теории двойственности на некомпактных пространствах дано в [7]–[9], где рассматриваются два класса топологических пространств, $\mathcal{L}_0$ и $\mathcal{L}$, состоящие, соответственно, из пространств, гомеоморфных бэровским и универсально измеримым подмножествам компактов. Оба класса достаточно вместительны: $\mathcal{L}_0$ содержит польские пространства и σ -компактные локально компактные пространства, а $\mathcal{L}$ – еще и произвольные локально компактные пространства.

Приведем две теоремы двойственности в массовой постановке.

Положим

$$Q(c, U^b(X)) := \{u \in U^b(X) : u(x) - u(y) \leq c(x, y) \forall x, y \in X\},$$

где $U^b(X)$ – пространство ограниченных универсально измеримых (т.е. σ -измеримых для всех $\sigma \in V_+(X)$) вещественных функций на X .

ТЕОРЕМА 1.1 (см. [7, теорема 3], [9, теорема 9.2]). *Пусть $X \in \mathcal{L}$, функция стоимости $s: X \times X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ ограничена снизу и удовлетворяет неравенству треугольника:*

$$c(x, y) \leq c(x, z) + c(z, y) \quad \forall x, y, z \in X.$$

I. *Предположим, что s универсально измерима и $Q(c, U^b(X))$ непусто. Тогда следующие утверждения равносильны:*

- (а) $\mathcal{A}(c, \rho) = \mathcal{B}(c, \rho) > -\infty \quad \forall \rho \in V_0(X)$;
- (б) $Q(c, C^b(X))$ непусто, и имеет место представление

$$c(x, y) = \sup_{u \in Q(c, C^b(X))} (u(x) - u(y)) \quad \forall x, y \in X, \quad x \neq y. \quad (1.4)$$

¹Ряд теорем двойственности для компактных пространств и непрерывных функций стоимости, обобщающих теорему двойственности для классической задачи Монжа–Канторовича, получен ранее в [10]–[13].

При выполнении этих равносильных утверждений для каждой $\rho \in V_0(X)$ найдется мера $\mu \in V_+(X \times X)$ такая, что $\pi_1 \mu = \rho_+$, $\pi_2 \mu = \rho_-$ и $c(\mu) = \mathcal{A}(c, \rho)$, где ρ_+ , ρ_- – элементы разложения Жордана меры ρ .

II. Предположим, что лебеговы множества

$$\{(x, y) \in X \times X : c(x, y) \leq \alpha\}, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad (1.5)$$

представимы как результаты A -операции над множествами из $\mathcal{B}_0(X) \otimes \mathcal{B}_0(X)$, где $\mathcal{B}_0(X)$ – σ -алгебра бэровских множеств в X (в этом случае c универсально измерима), и что $X \in \mathcal{L}_0$. Тогда существует ограниченная бэровская функция $v: X \rightarrow \mathbb{R}$ такая, что $v(x) - v(y) \leq c(x, y) \quad \forall x, y \in X$; следовательно, $Q(c, U^b(X))$ непусто, т.е. выполнены все предположения I.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1. В случае компактного пространства X представление (1.4) равносильно полунепрерывности снизу функции $\bar{c}(x, y)$, совпадающей с $c(x, y)$ при $x \neq y$ и равной 0 на диагонали (см. [6]).

Чтобы сформулировать теорему двойственности для функции стоимости, не удовлетворяющей неравенству треугольника, нам понадобится понятие редуцированной функции стоимости, впервые введенное в [12], [13].

С каждой функцией $c: X \times X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, где X – произвольное множество, можно связать редуцированную функцию стоимости $c_*: X \times X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$,

$$c_*(x, y) := \min \left\{ c(x, y), \inf_n \inf \left\{ \sum_{k=1}^{n+1} c(z_{k-1}, z_k) : \right. \right. \\ \left. \left. z_0 = x, z_{n+1} = y, z_1, \dots, z_n \in X \right\} \right\}. \quad (1.6)$$

Если $c(x, x) = 0 \quad \forall x \in X$, то формула (1.6) может быть переписана в виде

$$c_*(x, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} \inf \{ c(x, z_1) + c(z_1, z_2) + \dots + c(z_n, y) : z_1, \dots, z_n \in X \}.$$

ТЕОРЕМА 1.2 (см. [8, теорема 2], [9, теорема 9.4]). Пусть $X \in \mathcal{L}_0$, $c: X \times X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ ограничена снизу и ее лебеговы множества (1.5) представимы как результаты A -операции над множествами из $\mathcal{B}_0(X) \otimes \mathcal{B}_0(X)$.

I. Следующие утверждения равносильны:

- (а) $\mathcal{A}(c, \rho) = B(c, \rho) > -\infty \quad \forall \rho \in V_0(X)$;
- (б) справедливо равенство

$$\mathcal{A}(c, \rho) = \lim_{N \rightarrow \infty} \mathcal{A}(c \wedge N, \rho) \quad \forall \rho \in V_0(X) \quad (1.7)$$

(где $(c \wedge N)(x, y) := \min\{c(x, y), N\}$), $Q(c, C^b(X)) \neq \emptyset$, и имеет место представление

$$c_*(x, y) = \sup_{u \in Q(c, C^b(X))} (u(x) - u(y)) \quad \forall x, y, \quad x \neq y.$$

II. Следующие утверждения равносильны:

- (в) $\mathcal{A}(c, \rho) = \mathcal{B}(c, \rho) = -\infty \quad \forall \rho \in V_0(X)$;
- (г) справедливо (1.7) и c_* неограничена снизу;
- (д) справедливо (1.7) и найдутся $x, y \in X$, для которых $c_*(x, y) = -\infty$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.2. Доказательство содержится в [9], а в случае компактного X — в [6]². В обеих работах соответствующие результаты сформулированы без пункта (д). Заметим в этой связи, что импликация (в) $\Rightarrow$ (д) доказывается так же, как импликация (а) $\Rightarrow$ (в) леммы 3.7 ниже, в то время как (д) $\Rightarrow$ (г) очевидно.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.3. Равенство $\mathcal{B}(c, \rho) = -\infty$ для некоторой $\rho \in V_0(X)$ означает пустоту множества $Q(c, C^b(X))$; поэтому если $\mathcal{B}(c, \rho) = -\infty$ для какой-нибудь $\rho \in V_0(X)$, то $\mathcal{B}(c, \rho) = -\infty$ для всех $\rho \in V_0(X)$. Следовательно, утверждениями I и II исчерпываются все случаи, когда имеет место соотношение двойственности

$$\mathcal{A}(c, \rho) = \mathcal{B}(c, \rho) \quad \forall \rho \in V_0(X).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1.4. Если c ограничена сверху, то (1.7) выполнено тривиальным образом, и формулировка теоремы допускает очевидное упрощение. В общем случае условие (1.7) не может быть опущено. Контрпример для $X = \{0, 1, 2, \dots\}$, неотрицательной функции $c: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ и меры $\rho \in V_0(X)$ с $\mathcal{A}(c, \rho) = +\infty$, $\mathcal{A}(c \wedge N, \rho) = \mathcal{B}(c, \rho) = 0 \quad \forall N > 0$ см. в работе [9, с. 147].

Приведенные теоремы двойственности имеют ряд приложений в теории меры, теории оптимизации и математической экономике (см. [6], [7], [9], [14]–[21]). Есть также приложения к математической статистике [22], [23]. В связи со всеми этими приложениями представляет интерес возможность распространения теории двойственности на различные нетопологические варианты задачи о перемещении масс. Этот вопрос интересен и с точки зрения массовой постановки общей проблемы двойственности для бесконечномерных задач линейного программирования [6].

Доказательства теорем 1.1 и 1.2 опираются на методы и результаты линейного функционального анализа (*-слабая топология в сопряженном банаховом пространстве и теорема Крейна–Шмюльмана, банаховы решетки ограниченных функций), выпуклого анализа (двойственность выпуклых функций, условия полунепрерывности и субдифференцируемости сублинейных функционалов), а также общей топологии и дескриптивной теории множеств в топологических пространствах (бэровские множества, A -операция, измеримые селекторы многозначных отображений, измеримость проекций некоторых измеримых множеств, теорема Лузина о борелевской отделимости непересекающихся аналитических множеств и ее обобщения, свойства компактификации Стоуна–Чеха). Ключевыми моментами являются: 1) теорема о редукции ([9, теорема 9.6] и (в компактном случае) [6, теоремы 2.1, 2.2, лемма 4.3])³, позволяющая свести задачу с исходной функцией стоимости c к задаче с редуцированной функцией стоимости c_* , удовлетворяющей неравенству треугольника (тем самым, наиболее трудная часть теоремы 1.2 сводится к теореме 1.1), и 2) существование в ситуации теоремы 1.1 и при условии (1.4) оптимальной меры $\mu \in V_+(X \times X)$ с $\pi_1\mu = \rho_+$, $\pi_2\mu = \rho_-$.

²В [6] доказательство теоремы двойственности для неметризуемого компакта использовало гипотезу континуума (СН), которая применялась при установлении теоремы редукции: $\mathcal{A}(c, \rho) = \mathcal{A}(c_*, \rho) \quad \forall \rho \in V_0(X)$. Использование более изощренной по сравнению с [6] теоремы об измеримом селекторе позволило обойтись без СН (см. [8], [9]).

³Я хочу воспользоваться случаем и исправить досадную опечатку, вкраившуюся по моей вине в [6] и перешедшую затем в [9]: при доказательстве теоремы редукции в определении множеств $\Gamma_n(x, y)$ (см. [6, с. 10], [9, с. 156]) используемые неравенства должны быть строгими; ср. [20, с. 1702], где в аналогичном месте опечатки нет.

При попытке применить этот же подход к самому общему нетопологическому варианту задачи о перемещении масс, где $(X, \mathcal{T})$ – измеримое пространство и соответствующие меры ρ и μ рассматриваются на σ -алгебрах $\mathcal{T}$ и $\mathcal{T} \otimes \mathcal{T}$, возникает много дополнительных трудностей. Помимо чисто комбинаторных и функционально-аналитических имеется ряд трудностей дескриптивной природы, связанных с отсутствием подходящих теорем об измеримых селекторах, об отделимости и о проекциях $(\mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2)$ -аналитических множеств. Этих дескриптивных трудностей можно избежать, ограничившись мерами, сосредоточенными на конечных или счетных множествах.

В [24] изучался вариант задачи о перемещении масс, где X – произвольное множество и все рассматриваемые меры (на X и $X \times X$) суть конечные линейные комбинации мер Дирака. При этом двойственная задача рассматривалась на (локально выпуклом) пространстве $E(X) := \mathbb{R}^X$ всех вообще функций $u: X \rightarrow \mathbb{R}$, наделенном топологией произведения. Сопряженное пространство $E(X)^*$ есть пространство функций $\sigma: X \rightarrow \mathbb{R}$, для которых множество $\text{supp } \sigma := \{x : \sigma(x) \neq 0\}$ конечно. Каждая такая функция отождествляется с мерой на σ -алгебре 2^X всех подмножеств X

$$\sigma = \sum_{x \in \text{supp } \sigma} \sigma(x) \varepsilon_x,$$

где ε_x – мера Дирака в точке x , т.е. $\varepsilon_x(B) = 1$ для $x \in B$ и $\varepsilon_x(B) = 0$ для $x \notin B$. Аналогично определяется пространство мер $E(X \times X)^*$.

Положим для $\rho \in E(X)_0^* := \{\sigma \in E(X)^* : \sigma X = 0\}$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_0(c, \rho) &:= \inf \left\{ c(\mu) = \sum_{(x,y) \in \text{supp } \mu} c(x,y) \mu(x,y) : \mu \in E(X \times X)_+^*, (\pi_1 - \pi_2)\mu = \rho \right\}, \\ \mathcal{B}_0(c, \rho) &:= \sup \{ \langle u, \rho \rangle : u \in Q_0(c) \}, \end{aligned}$$

где

$$Q_0(c) := \{u \in E(X) : u(x) - u(y) \leq c(x,y) \forall x, y \in X\}$$

(если $Q_0(c)$ пусто, то считаем по определению $\mathcal{B}_0(c, \rho) = -\infty$).

Имеет место следующая теорема двойственности.

ТЕОРЕМА 1.3 [24, теорема 2.1]. *Рассмотрим произвольную функцию стоимости $c: X \times X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.*

I. Если $c_(x, y) < +\infty \forall x, y \in X$, то имеет место одно из двух:*

- (а) $c_*(x, y) > -\infty \forall x, y \in X$;
- (б) $c_*(x, y) = -\infty \forall x, y \in X$.

В случае (а) $Q_0(c)$ непусто, имеет место представление

$$c_*(x, y) = \sup_{u \in Q_0(c)} (u(x) - u(y)) \quad \forall x, y \in X, \quad x \neq y,$$

и выполнено соотношение двойственности

$$\mathcal{A}_0(c, \rho) = \mathcal{B}_0(c, \rho) > -\infty \quad \forall \rho \in E(X)_0^*.$$

В случае (б) $Q_0(c)$ пусто и

$$\mathcal{A}_0(c, \rho) = \mathcal{B}_0(c, \rho) = -\infty \quad \forall \rho \in E(X)_0^*.$$

II. Если $Q_0(c)$ пусто, но $c_* \neq -\infty$, то найдутся $x, y \in X$, $x \neq y$, такие, что

$$\mathcal{A}_0(c, \varepsilon_x - \varepsilon_y) = +\infty, \quad \mathcal{B}_0(c, \varepsilon_x - \varepsilon_y) = -\infty.$$

Некоторые применения связанного с этой теоремой двойственности суперлинейного точечно-множественного отображения $Q_0(c)$ к циклически монотонным операторам, задачам динамической оптимизации и математической экономике содержатся в [25], [26].

В настоящей работе рассматриваются пространства $l^1(X)$ и $l^1(X \times X)$ мер σ и μ на X и $X \times X$ вида

$$\sigma = \sum_{x \in \text{supp } \sigma} \sigma(x) \varepsilon_x, \quad \mu = \sum_{(x, y) \in \text{supp } \mu} \mu(x, y) \varepsilon_{(x, y)},$$

для которых соответствующие множества

$$\text{supp } \sigma := \{x : \sigma(x) \neq 0\}, \quad \text{supp } \mu := \{(x, y) : \mu(x, y) \neq 0\}$$

не более чем счетны и при этом

$$\begin{aligned} \|\sigma\|_1 = |\sigma|(X) &:= \sum_{x \in \text{supp } \sigma} |\sigma(x)| < +\infty, \\ \|\mu\|_1 = |\mu|(X \times X) &:= \sum_{(x, y) \in \text{supp } \mu} |\mu(x, y)| < +\infty. \end{aligned}$$

Задача о перемещении масс с мерами $\mu \in l_+^1(X \times X)$ и

$$\rho \in l_0^1(X) := \left\{ \sigma \in l^1(X) : \sigma X := \sum_{x \in \text{supp } \sigma} \sigma(x) = 0 \right\}$$

является континуальным аналогом транспортной задачи линейного программирования в сетевой постановке: считаем, что из x в y ведет дуга сети, если $c(x, y) < +\infty$. Каждой мере $\mu \in l_+^1(X \times X)$ с $(\pi_1 - \pi_2)\mu = \rho$ отвечает некоторый план перевозок: число $\mu(x, y)$ показывает объем перевозки из x в y . План μ , вообще говоря, не исключает существования транзитных перевозок через некоторые перевалочные пункты z , т.е. существования троек x, y, z с $x \neq z, y \neq z$, для которых $\mu(x, z) > 0$ и $\mu(z, y) > 0$. Более того, для данного плана перевозок число таких перевалочных пунктов может оказаться бесконечным. Мы несколько сузим постановку задачи о перемещении масс, рассматривая не все вообще планы перевозок, а только те из них, для которых число перевалочных пунктов конечно. Заметим в этой связи, что чем уже классы мер μ и функций u , в которых ставятся исходная и двойственная задачи, тем более сильным результатом является соответствующее соотношение двойственности.

Двойственную задачу будем рассматривать в пространстве $l^\infty(X)$ всех ограниченных функций $u: X \rightarrow \mathbb{R}$ и в различных его подпространствах, содержащих константы и являющихся банаховыми алгебрами относительно равномерной нормы. Будет доказано два типа теорем двойственности в массовой постановке: для функций стоимости, удовлетворяющих неравенству треугольника, и для произвольных функций стоимости $c: X \times X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

Постановка задачи и формулировки теорем двойственности с двойственной задачей в $l^\infty(X)$ содержатся в §2, их доказательства – в §3. Параграф 4 посвящен теоремам двойственности с двойственной задачей в более узких чем $l^\infty(X)$ банаховых алгебрах ограниченных функций. Наконец, в §5 исследуются задачи с фиксированными маргинальными мерами, т.е. с ограничениями $\pi_1\mu = \sigma_1$, $\pi_2\mu = \sigma_2$ вместо $(\pi_1 - \pi_2)\mu = \rho$. Будут доказаны теоремы двойственности в массовой постановке для подобных задач и исследована их связь с задачей о перемещении масс с фиксированной разностью маргинальных мер. Наконец, мы покажем, что выполнение неравенства треугольника необходимо и достаточно для эквивалентности двух типов задачи о перемещении масс: с фиксированной разностью маргинальных мер и с фиксированными маргинальными мерами. В топологическом случае близкий результат получен ранее в [9].

В заключение этого вводного параграфа отметим исследования, хотя и не связанные непосредственно с темой данной статьи, но относящиеся к различным нетопологическим аспектам задачи о перемещении масс с фиксированными маргинальными мерами. Прежде всего должны быть названы важные исследования В. Н. Судакова [31, §3], доказавшего методами чистой теории меры (без привлечения каких-либо топологических рассуждений) существование оптимального одно-однозначного плана перемещения масс для задачи Монжа на $\mathbb{R}^n$ с функцией стоимости $c(x, y) = \|x - y\|$ (норма не обязательно евклидова) и маргинальными мерами, абсолютно непрерывными по n -мерной мере Лебега. Некоторые новые теоремы двойственности для нетопологического варианта маргинальной задачи получены в недавних работах Рамачандрана и Рюшендорфа [32], [33].

§2. Теоремы двойственности для задач с фиксированной разностью маргинальных мер (формулировки)

2.1. Предварительные сведения. Далее X, Y – произвольные бесконечные множества (в случае конечных X, Y рассматриваемые ниже задачи суть задачи обычного линейного программирования), $l^\infty(X)$ – пространство ограниченных функций $v: X \rightarrow \mathbb{R}$ с равномерной нормой

$$\|v\|_\infty := \sup_{x \in X} |v(x)|;$$

$l^1(X)$ – пространство функций $\sigma: X \rightarrow \mathbb{R}$, для каждой из которых множество $\text{supp } \sigma = \{x \in X : \sigma(x) \neq 0\}$ не более чем счетно и при этом

$$\|\sigma\|_1 := \sum_{x \in X} |\sigma(x)| = \sum_{x \in \text{supp } \sigma} |\sigma(x)| < +\infty.$$

Оба пространства, $l^\infty(X)$ и $l^1(X)$, полны, т.е. являются банаховыми пространствами ($l^\infty(X)$ – даже банаховой алгеброй относительно поточечного умножения

функций), и $l^1(X)^* = l^\infty(X)$ (см., например, [27]). Нам также понадобятся пространство $l^1(X \times Y)$ и конусы $l_+^1(X)$ и $l_+^1(X \times Y)$, состоящие из неотрицательных функций, в $l^1(X)$ и $l^1(X \times Y)$, соответственно.

Каждый элемент $\sigma \in l^1(X)$ будет рассматриваться как некоторая (обобщенная) дискретная мера на σ -алгебре 2^X всех подмножеств X ,

$$\sigma = \sum_{x \in \text{supp } \sigma} \sigma(x) \varepsilon_x,$$

где ε_x — мера Дирака в точке x . Таким образом, для каждого $A \subseteq X$

$$\sigma A = \sum_{x \in A} \sigma(x).$$

При указанном отождествлении элементов $l^1(X)$ с дискретными мерами на 2^X конусу $l_+^1(X)$ отвечают положительные меры.

Аналогично, каждый элемент $\mu \in l_+^1(X \times Y)$ отождествим с положительной конечной мерой на $2^{X \times Y}$:

$$\mu = \sum_{(x,y) \in \text{supp } \mu} \mu(x,y) \varepsilon_{(x,y)}.$$

Каждой мере $\mu \in l_+^1(X \times Y)$ сопоставляются *маргинальные меры* $\pi_1 \mu \in l_+^1(X)$, $\pi_2 \mu \in l_+^1(Y)$, определяемые равенствами

$$\begin{aligned} (\pi_1 \mu) B &= \mu(B \times Y) \quad \forall B \subseteq X, \\ (\pi_2 \mu) C &= \mu(X \times C) \quad \forall C \subseteq Y, \end{aligned}$$

или, что равносильно,

$$\begin{aligned} (\pi_1 \mu)(x) &= \sum_{y \in Y} \mu(x, y) = \sum_{y: (x,y) \in \text{supp } \mu} \mu(x, y) \quad \forall x \in X, \\ (\pi_2 \mu)(y) &= \sum_{x \in X} \mu(x, y) = \sum_{x: (x,y) \in \text{supp } \mu} \mu(x, y) \quad \forall y \in Y. \end{aligned}$$

Для любых $u \in l^\infty(X)$, $\rho \in l^1(X)$ определен конечный интеграл

$$\int_X u(x) \rho(dx) := \langle u, \rho \rangle = \sum_{x \in X} u(x) \rho(x) = \sum_{x \in \text{supp } \rho} u(x) \rho(x).$$

Для любых функции $v: X \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ и меры $\sigma \in l_+^1(X)$ определен интеграл (конечный или равный $+\infty$)

$$\int_X v(x) \sigma(dx) = v(\sigma) := \sum_{x \in X} v(x) \sigma(x) = \sum_{x \in \text{supp } \sigma} v(x) \sigma(x).$$

Для нулевой меры $\sigma = 0$ считаем по определению $v(0) = 0$. Далее, если $v: X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ и $\sigma \in l_+^1(X)$, то интеграл $v(\sigma)$ (возможно равный $-\infty$ или $+\infty$) определяется по формуле

$$v(\sigma) = \int_X v(x)\sigma(dx) := v_+(\sigma) - v_-(\sigma),$$

где $v_+ = \max(v, 0)$, $v_- = \max(-v, 0)$, причем считаем по определению $v(\sigma) = +\infty$, если $v_+(\sigma) = v_-(\sigma) = +\infty$.

Отметим тождества

$$\begin{aligned} \int_{X \times Y} u(x)\mu(d(x, y)) &= \int_X u(x)(\pi_1\mu)(dx), \\ \int_{X \times Y} v(y)\mu(d(x, y)) &= \int_Y v(y)(\pi_2\mu)(dy) \end{aligned}$$

для любых $u: X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, $v: Y \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ и $\mu \in l_+^1(X \times Y)$.

Нам понадобится некоторый собственный подконус $K(X \times X)$ в конусе $l_+^1(X \times X)$. Каждую меру $\mu \in l_+^1(X \times X)$ можно рассматривать как план перевозок на X : для любых $x, y \in X$ число $\mu(x, y)$ показывает объем перевозки из x в y . Назовем точку $z \in X$ *перевалочным пунктом относительно μ* , если найдутся $x, y \in X$, $x \neq z$, $y \neq z$, такие, что $\mu(x, z) > 0$, $\mu(z, y) > 0$. В таком случае будем называть тройку (x, z, y) *транзитной перевозкой (относительно μ)*. Разумеется, может существовать много транзитных перевозок через данный перевалочный пункт. Обозначим через $K(X \times X)$ множество мер $\mu \in l_+^1(X \times X)$ с конечным (возможно, нулевым) числом перевалочных пунктов. Очевидно, $K(X \times X)$ – выпуклый (незамкнутый) конус в $l^1(X \times X)$.

2.2. Постановка задачи и формулировка теорем двойственности.

Рассматривается следующий вариант задачи о перемещении масс. Заданы: множество X , функция стоимости $c: X \times X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ и мера $\rho \in l_0^1(X) := \{\sigma \in l^1(X) : \sigma X = 0\}$. Требуется минимизировать функционал

$$c(\mu) = \int_{X \times X} c(x, y)\mu(d(x, y)) = \sum_{(x, y) \in \text{supp } \mu} c(x, y)\mu(x, y)$$

при ограничениях

$$\mu \in K(X \times X), \quad (\pi_1 - \pi_2)\mu = \rho.$$

Заметим, что для любой $\rho \in l_0^1(X)$ найдется мера $\mu \in K(X \times X)$ (даже без перевалочных пунктов), для которой $\pi_1\mu = \rho_+$, $\pi_2\mu = \rho_-$. В самом деле, для $\rho = 0$ возьмем $\mu = 0$, а если $\rho \neq 0$, то $\rho_+(X) = \rho_-(X)$ и подойдет мера

$$\mu = \frac{1}{\rho_+(X)} \sum_{\substack{x \in \text{supp } \rho_+ \\ y \in \text{supp } \rho_-}} \rho_+(x)\rho_-(y)\varepsilon_{(x, y)}.$$

Двойственная задача состоит в максимизации по u функционала

$$\langle u, \rho \rangle = \int_X u(x)\rho(dx) = \sum_{x \in X} u(x)\rho(x) = \sum_{x \in \text{supp } \rho} u(x)\rho(x)$$

на множестве

$$Q(c, l^\infty(X)) := \{u \in l^\infty(X) : u(x) - u(y) \leq c(x, y) \forall x, y \in X\}.$$

Как обычно, считаем, что максимум функционала на пустом множестве равен $-\infty$. Итак, мы рассматриваем пару экстремальных задач – исходную и двойственную, – состоящих в нахождении оптимальных значений

$$\mathcal{A}'_1(c, \rho) := \inf \{c(\mu) : \mu \in K(X \times X), (\pi_1 - \pi_2)\mu = \rho\} \quad (2.1)$$

и

$$\mathcal{B}_1(c, \rho; l^\infty(X)) := \sup \{\langle u, \rho \rangle : u \in Q(c, l^\infty(X))\}, \quad (2.2)$$

соответственно. Рассмотрим также величину

$$\mathcal{A}_1(c, \rho) := \inf \{c(\mu) : \mu \in l_+^1(X \times X), (\pi_1 - \pi_2)\mu = \rho\}.$$

Поскольку для любых $u \in Q(c, l^\infty(X))$ и $\mu \in l_+^1(X \times X)$ выполняется неравенство

$$\langle u, (\pi_1 - \pi_2)\mu \rangle \leq c(\mu),$$

то

$$\mathcal{B}_1(c, \rho; l^\infty(X)) \leq \mathcal{A}_1(c, \rho) \leq \mathcal{A}'_1(c, \rho) \quad \forall \rho \in l_0^1(X),$$

какова бы ни была функция стоимости c .

Рассмотрим проблему двойственности в массовой постановке, состоящую в характеристизации функций стоимости, для которых справедливо соотношение двойственности

$$\mathcal{A}'_1(c, \rho) = \mathcal{B}_1(c, \rho; l^\infty(X)) \quad \forall \rho \in l_0^1(X). \quad (2.3)$$

Ниже приведены две теоремы двойственности. В первой дана характеристизация функций стоимости, для которых выполнено (2.3), в классе функций $c: X \times X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, неотрицательных на диагонали ($c(x, x) \geq 0 \forall x \in X$) и удовлетворяющих неравенству треугольника

$$c(x, y) \leq c(x, z) + c(z, y) \quad \forall x, y, z \in X$$

(считаем по определению $(+\infty) + (-\infty) = +\infty$). Во второй теореме характеристизация функций стоимости, удовлетворяющих (2.3), получена в классе всех функций $c: X \times X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть $c: X \times X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ удовлетворяет неравенству треугольника.

I. Если c неотрицательна на диагонали, то равносильны утверждения:

- (а) $\mathcal{A}'_1(c, \rho) = \mathcal{B}_1(c, \rho; l^\infty(X)) > -\infty \quad \forall \rho \in l_0^1(X)$;
- (б) имеет место представление

$$c(x, y) = \sup_{u \in Q} (u(x) - u(y)) \quad \forall x, y \in X, \quad x \neq y,$$

где Q – непустое подмножество $l^\infty(X)$ (очевидно, в таком случае всегда можно считать, что $Q = Q(c, l^\infty(X))$);

- (в) $Q(c, l^\infty(X))$ непусто.

При выполнении этих равносильных утверждений для любой $\rho \in l_0^1(X)$ найдется $\mu \in K(X \times X)$ такая, что $\pi_1 \mu = \rho_+$, $\pi_2 \mu = \rho_-$ и $c(\mu) = \mathcal{A}'_1(c, \rho)$.

II. Если $c(x, y) < +\infty \quad \forall x, y \in X$, то равносильны утверждения:

$$(г) \quad \mathcal{A}'_1(c, \rho) = \mathcal{B}_1(c, \rho; l^\infty(X)) = -\infty \quad \forall \rho \in l_0^1(X);$$

$$(д) \quad c(x, y) = -\infty \quad \forall x, y \in X.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Если c удовлетворяет неравенству треугольника, то для каждого x значение $c(x, x)$ неотрицательно, либо равно $-\infty$. Поэтому для функций $c: X \times X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, удовлетворяющих неравенству треугольника, требование неотрицательности на диагонали выполнено автоматически.

ТЕОРЕМА 2.2. Рассмотрим произвольную функцию стоимости $c: X \times X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

I. Следующие утверждения равносильны:

$$(а) \quad \mathcal{A}'_1(c, \rho) = \mathcal{B}_1(c, \rho; l^\infty(X)) > -\infty \quad \forall \rho \in l_0^1(X);$$

(б) справедливо равенство

$$\mathcal{A}'_1(c, \rho) = \lim_{N \rightarrow \infty} \mathcal{A}'_1(c \wedge N, \rho) \quad \forall \rho \in l_0^1(X), \quad (2.4)$$

$Q(c, l^\infty(X))$ непусто, и имеет место представление

$$c_*(x, y) = \sup_{u \in Q(c, l^\infty(X))} (u(x) - u(y)) \quad \forall x, y \in X, \quad x \neq y. \quad (2.5)$$

II. Следующие утверждения равносильны:

$$(в) \quad \mathcal{A}'_1(c, \rho) = \mathcal{B}_1(c, \rho; l^\infty(X)) = -\infty \quad \forall \rho \in l_0^1(X);$$

(г) справедливо (2.4) и c_* не ограничена снизу на $X \times X$;

(д) справедливо (2.4) и найдутся $x, y \in X$, для которых $c_*(x, y) = -\infty$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2. Если c ограничена сверху, то (2.4) выполнено тривиальным образом и может быть опущено в формулировках (б), (г) и (д).

ЗАМЕЧАНИЕ 2.3. Пример в [9, с. 147] показывает, что в общем случае условие (2.4) не может быть опущено.

§3. Теоремы двойственности для задач с фиксированной разностью маргинальных мер (доказательства)

3.1. Вспомогательные результаты. Напомним (см. п. 2.1), что для любых $c: X \times X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ и $\mu \in l_+^1(X \times X)$ определен интеграл

$$c(\mu) = c_+(\mu) - c_-(\mu),$$

причем мы считаем по определению $c(\mu) = +\infty$, если $c_+(\mu) = +\infty$.

ЛЕММА 3.1. Если $c: X \times X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ неотрицательна на диагонали и удовлетворяет неравенству треугольника, то для каждой $\mu \in K(X \times X)$ найдется $\mu' \in K(X \times X)$ такая, что $(\pi_1 - \pi_2)\mu' = (\pi_1 - \pi_2)\mu$, $c(\mu') \leq c(\mu)$ и у μ' нет транзитных перевозок.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим

$$Z_0(\mu) := \text{supp } \pi_1 \mu \cup \text{supp } \pi_2 \mu$$

и обозначим через $Z(\mu)$ множество перевалочных пунктов μ . Если $Z(\mu)$ пусто, то доказывать нечего — можно взять $\mu' = \mu$. Предположим, что $Z(\mu)$ непусто, и пусть $Z(\mu) = \{z_1, z_2, \dots, z_n\}$. Положим

$$\begin{aligned} X_1 &= X(z_1, \mu) := \{x \in Z_0(\mu) : x \neq z_1, \mu(x, z_1) > 0\}, \\ Y_1 &= Y(z_1, \mu) := \{y \in Z_0(\mu) : y \neq z_1, \mu(z_1, y) > 0\}. \end{aligned}$$

Перенумеруем как угодно элементы X_1 и Y_1 ,

$$X_1 = \{x_1, x_2, \dots\}, \quad Y_1 = \{y_1, y_2, \dots\}.$$

Возможно одно из двух: $\mu(X_1 \times z_1) \leq \mu(z_1 \times Y_1)$ или $\mu(X_1 \times z_1) > \mu(z_1 \times Y_1)$.

Рассмотрим случай, когда $\mu(X_1 \times z_1) \leq \mu(z_1 \times Y_1)$. Очевидно, найдутся числа $a_{ij} \geq 0$ такие, что

$$\sum_j a_{ij} = \mu(x_i, z_1), \quad (3.1)$$

$$\sum_i a_{ij} \leq \mu(z_1, y_j). \quad (3.2)$$

Определим меру $\mu_1 \in l^1(X \times X)$, полагая

$$\mu_1(x_i, y_j) = \mu(x_i, y_j) + a_{ij}, \quad (3.3)$$

$$\mu_1(x_i, z_1) = 0, \quad (3.4)$$

$$\mu_1(z_1, y_j) = \mu(z_1, y_j) - \sum_i a_{ij}, \quad (3.5)$$

$$\mu_1(x, y) = \mu(x, y) \quad \forall (x, y) \in M(z_1), \quad (3.6)$$

где $M(z_1)$ — множество точек в $X \times X$, отличных от точек вида (x_i, y_j) , (x_i, z_1) и (z_1, y_j) . Из (3.1)–(3.6) видно, что $\mu_1 \in l^1_+(X \times X)$ и

$$Z(\mu_1) \subseteq Z(\mu) \setminus \{z_1\}, \quad (3.7)$$

следовательно, $\mu_1 \in K(X \times X)$. Далее, из (3.1)–(3.6) видно также, что

$$\begin{aligned} (\pi_1 \mu_1)(z) &= (\pi_1 \mu)(z), \quad (\pi_2 \mu_1)(z) = (\pi_2 \mu)(z) \quad \forall z \neq z_1, \\ (\pi_1 \mu_1)(z_1) &= (\pi_1 - \pi_2)\mu(z_1), \quad (\pi_2 \mu_1)(z_1) = 0, \end{aligned}$$

следовательно, $(\pi_1 - \pi_2)\mu_1 = (\pi_1 - \pi_2)\mu$.

Покажем, что $c(\mu_1) \leq c(\mu)$. Будем считать, что $c(\mu) < +\infty$, так как в противном случае неравенство очевидно. Поскольку все (x_i, z_1) , (z_1, y_j) входят в $\text{supp } \mu$, из неравенства $c(\mu) < +\infty$ вытекает $c(x_i, z_1) < +\infty$, $c(z_1, y_j) < +\infty$. Тогда по неравенству треугольника $c(x_i, y_j) < +\infty \quad \forall i, j$.

Если все $c(x_i, z_1) > -\infty$, $c(z_1, y_j) > -\infty$, то, учитывая (3.1) и используя неравенство треугольника, получаем

$$\begin{aligned} c(\mu_1) - c(\mu) &= \sum_{i,j} c(x_i, y_j) a_{ij} - \sum_i c(x_i, z_1) \mu(x_i, z_1) - \sum_{i,j} c(z_1, y_j) a_{ij} \\ &= \sum_{i,j} (c(x_i, y_j) - c(x_i, z_1) - c(z_1, y_j)) a_{ij} \leq 0. \end{aligned}$$

Рассмотрим теперь случай, когда хотя бы одна из величин $c(x_i, z_1)$, $c(z_1, y_j)$ равна $-\infty$, и покажем, что тогда $c(\mu_1) = -\infty$ и, стало быть, $c(\mu_1) \leq c(\mu)$. Равенство $c(\mu_1) = -\infty$ будет установлено, если мы проверим, что $c(\mu_1) < +\infty$ и найдем $x, y \in X$ такие, что

$$(x, y) \in \text{supp } \mu_1, \quad c(x, y) = -\infty. \quad (3.8)$$

Имеем

$$\begin{aligned} c(\mu_1) &= \sum_{i,j} c(x_i, y_j) \mu(x_i, y_j) + \sum_{i,j} c(x_i, y_j) a_{ij} \\ &\quad + \sum_j c(z_1, y_j) \mu_1(z_1, y_j) + \sum_{(x,y) \in M(z_1)} c(x, y) \mu(x, y) \\ &= \int_{X_1 \times Y_1} c d\mu + \int_{M(z_1)} c d\mu + \int_{z_1 \times Y_1} c d\mu_1 + \sum_{i,j} c(x_i, y_j) a_{ij}. \end{aligned}$$

Используя неравенство треугольника для c и тот факт, что $0 \leq \mu_1 \leq \mu$ на $z_1 \times Y_1$, получаем отсюда

$$\begin{aligned} c(\mu_1) &\leq \int_{X_1 \times Y_1} c d\mu + \int_{M(z_1)} c d\mu + \int_{z_1 \times Y_1} c_+ d\mu \\ &\quad + \sum_{i,j} (c(x_i, z_1) + c(z_1, y_j)) a_{ij}. \end{aligned}$$

Далее, учитывая (3.1) и (3.2), получаем

$$\sum_{i,j} (c(x_i, z_1) + c(z_1, y_j)) a_{ij} \leq \int_{X_1 \times z_1} c d\mu + \int_{z_1 \times Y_1} c_+ d\mu.$$

В итоге имеем

$$\begin{aligned} c(\mu_1) &\leq \int_{X_1 \times Y_1} c d\mu + \int_{M(z_1)} c d\mu + 2 \int_{z_1 \times Y_1} c_+ d\mu + \int_{X_1 \times z_1} c d\mu \\ &\leq 2 \int_{X \times X} c_+ d\mu < +\infty. \end{aligned}$$

Пусть $c(x_{i_0}, z_1) = -\infty$. Поскольку $(x_{i_0}, z_1) \in \text{supp } \mu$, то согласно (3.1) найдется j_0 с $a_{i_0 j_0} > 0$. Тогда из (3.3) и неравенства треугольника вытекает (3.8) для (x_{i_0}, y_{j_0}) , следовательно, $c(\mu_1) = -\infty$.

Если же $c(z_1, y_{j_0}) = -\infty$, то как следует из (3.2) и (3.5), выполняется по крайней мере одно из соотношений: $(z_1, y_{j_0}) \in \text{supp } \mu_1$ или $a_{i_0 j_0} > 0$ для некоторого i_0 . В первом случае для (z_1, y_{j_0}) выполнено (3.8). Во втором случае $(x_{i_0}, y_{j_0}) \in \text{supp } \mu_1$, и так как $c(\mu) < +\infty$ и $(x_{i_0}, z_1) \in \text{supp } \mu$, то $c(x_{i_0}, z_1) < +\infty$. Тогда $c(x_{i_0}, y_{j_0}) \leq c(x_{i_0}, z_1) + c(z_1, y_{j_0}) = -\infty$, т.е. для (x_{i_0}, y_{j_0}) выполнено (3.8), и значит, $c(\mu_1) = -\infty$.

Таким образом, при $\mu(X_1 \times z_1) \leq \mu(z_1 \times Y_1)$ мы нашли меру $\mu_1 \in K(X \times X)$, для которой $(\pi_1 - \pi_2)\mu_1 = (\pi_1 - \pi_2)\mu$, $c(\mu_1) \leq c(\mu)$ и выполняется (3.7). Кроме того,

$$Z_0(\mu_1) = \text{supp } \pi_1 \mu_1 \cup \text{supp } \pi_2 \mu_1 \subseteq Z_0(\mu) \quad (3.9)$$

(если (3.2) выполнено как равенство, то включение (3.9) строгое, так как в этом случае $z_1 \notin Z_0(\mu_1)$).

Рассмотрим теперь случай, когда $\mu(X_1 \times z_1) > \mu(z_1 \times Y_1)$, и определим меру $\mu_1 \in l^1(X \times X)$, полагая

$$\begin{aligned} \mu_1(x_i, y_j) &= \mu(x_i, y_j) + a_{ij}, & \mu_1(z_1, y_j) &= 0, \\ \mu_1(x_i, z_1) &= \mu(x_i, z_1) - \sum_j a_{ij}, & \mu_1(x, y) &= \mu(x, y) \quad \forall (x, y) \in M(z_1), \end{aligned}$$

где числа $a_{ij} \geq 0$ удовлетворяют следующим условиям:

$$\sum_j a_{ij} \leq \mu(x_i, z_1), \quad \sum_i a_{ij} \leq \mu(z_1, y_j).$$

Рассуждения, аналогичные приведенным выше, показывают, что и в этом случае $\mu_1 \in K(X \times X)$, $(\pi_1 - \pi_2)\mu_1 = (\pi_1 - \pi_2)\mu$, $c(\mu_1) \leq c(\mu)$ и выполнены соотношения (3.7) и (3.9).

Если $Z(\mu_1)$ пусто, то мера $\mu' = \mu_1$ искомая, и лемма доказана. Если $Z(\mu_1)$ непусто, то возьмем в нем элемент z_{k_1} с наименьшим номером, $k_1 = \min\{k : z_k \in Z(\mu_1)\}$ ($z_1 \notin Z(\mu_1)$), но может случиться, что и некоторые другие z_k тоже не принадлежат $Z(\mu_1)$, и образуем новые множества

$$X_1 = X(z_{k_1}, \mu_1), \quad Y_1 = Y(z_{k_1}, \mu_1).$$

Отправляясь от меры μ_1 и этих новых множеств X_1, Y_1 и повторяя описанную выше процедуру, получим меру $\mu_2 \in K(X \times X)$ с

$$(\pi_1 - \pi_2)\mu_2 = (\pi_1 - \pi_2)\mu_1, \quad c(\mu_2) \leq c(\mu_1),$$

$Z(\mu_2) \subset Z(\mu_1)$ и $Z_0(\mu_2) \subseteq Z_0(\mu_1)$. При этом $z_1, z_2, \dots, z_{k_1} \notin Z(\mu_2)$. Продолжая этот процесс, мы через несколько шагов придем к мере $\mu_n \in K(X \times X)$, для которой

$$\begin{aligned} (\pi_1 - \pi_2)\mu_n &= (\pi_1 - \pi_2)\mu_{n-1} = \dots = (\pi_1 - \pi_2)\mu, \\ c(\mu_n) &\leq c(\mu_{n-1}) \leq \dots \leq c(\mu) \end{aligned}$$

и множество $Z(\mu_n)$ пусто, т.е. у μ_n нет транзитных перевозок. Тогда мера $\mu' = \mu_n$ искомая, и лемма полностью доказана.

ЛЕММА 3.2. Если $c: X \times X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ удовлетворяет неравенству треугольника и неотрицательна на диагонали, то для любой $\rho \in l_0^1(X)$ справедливо равенство

$$\mathcal{A}'_1(c, \rho) = \inf \{c(\mu) : \mu \in K(X \times X), \pi_1\mu = \rho_+, \pi_2\mu = \rho_-\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно лемме 3.1 для любой $\mu \in K(X \times X)$ с $(\pi_1 - \pi_2)\mu = \rho$ существует мера без транзитных перевозок $\mu' \in K(X \times X)$ с $(\pi_1 - \pi_2)\mu' = \rho$ и $c(\mu') \leq c(\mu)$. Поскольку $\mu' \in l_+^1(X \times X)$, множество

$$E := \text{supp } \pi_1\mu' \cap \text{supp } \pi_2\mu'$$

не более чем счетно, и так как у μ' нет транзитных перевозок, мера

$$\mu_* = \mu' - \sum_{z \in E} \mu'(z, z) \varepsilon_{(z, z)}$$

принадлежит $K(X \times X)$. Так как c неотрицательна на диагонали, то $c(\mu_*) \leq c(\mu')$, и поскольку, очевидно, $(\pi_1 - \pi_2)\mu_* = (\pi_1 - \pi_2)\mu' = \rho$ и

$$\text{supp } \pi_1\mu_* \cap \text{supp } \pi_2\mu_* = \emptyset,$$

то $\pi_1\mu_* = \rho_+$, $\pi_2\mu_* = \rho_-$. Таким образом, для любой $\mu \in K(X \times X)$ с $(\pi_1 - \pi_2)\mu = \rho$ мы нашли меру $\mu_* \in K(X \times X)$ с $\pi_1\mu_* = \rho_+$, $\pi_2\mu_* = \rho_-$ и $c(\mu_*) \leq c(\mu)$. Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ 3.1. При предположениях леммы 3.2

$$\mathcal{A}'_1(c, \varepsilon_x - \varepsilon_y) = c(x, y)$$

для любых $x, y \in X$, $x \neq y$.

Это следует из того, что $\mu = \varepsilon_{(x, y)}$ — единственная мера, удовлетворяющая условиям $\pi_1\mu = \varepsilon_x$, $\pi_2\mu = \varepsilon_y$.

ЛЕММА 3.3. Если

$$c(x, y) = \sup_{u \in Q(c, l^\infty(X))} (u(x) - u(y)) \quad (3.10)$$

для всех $x, y \in X$, то

$$\begin{aligned} \mathcal{A}'_1(c, \rho) &= \mathcal{B}_1(c, \rho, l^\infty(X)) \\ &= \min \{c(\mu) : \mu \in K(X \times X), \pi_1\mu = \rho_+, \pi_2\mu = \rho_-\} > -\infty. \end{aligned} \quad (3.11)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через βX компактификацию Стоуна–Чеха пространства X , наделенного дискретной топологией. Нам будет удобно использовать гильбертово представление βX как пространства максимальных идеалов вещественной коммутативной банаховой алгебры $l^\infty(X)$ (см. [28], [29]). При указанной реализации точками βX служат ненулевые мультипликативные линейные функционалы на $l^\infty(X)$, а топология есть след на βX $*$ -слабой топологии в $l^\infty(X)^*$. Каждой точке $x \in X$ отвечает элемент $\varepsilon_x \in l^1(X) \subset l^\infty(X)^*$, но на $l^\infty(X)$ есть и другие ненулевые мультипликативные линейные функционалы, например, мультипликативные функционалы типа банаховых пределов. Каждый элемент $u \in l^\infty(X)$ однозначно продолжается до непрерывной функции на βX , и имеет место естественная изометрия банаховых алгебр

$$l^\infty(X) = C(\beta X).$$

Тогда формула (3.10) определяет продолжение функции c на $\beta X \times \beta X$, и по теореме 1.1.I, примененной к компакту βX , выполняется соотношение двойственности

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(c, \rho) &= \mathcal{B}(c, \rho) \\ &= \min\{c(\mu) : \mu \in V_+(\beta X \times \beta X), \pi_1\mu = \rho_+, \pi_2\mu = \rho_-\} > -\infty \end{aligned} \quad (3.12)$$

для любой $\rho \in V_0(\beta X) = C(\beta X)_0^*$. Поскольку $Q(c, l^\infty(X)) = Q(c, C(\beta X))$ и $l_0^1(X) \subset V_0(\beta X)$, из (3.12) вытекает

$$\mathcal{B}_1(c, \rho; l^\infty(X)) = \mathcal{B}(c, \rho) > -\infty. \quad (3.13)$$

Далее, каждая мера $\mu \in l_+^1(X \times X)$ является регулярной борелевской мерой на $\beta X \times \beta X$ (т.е. элементом $V_+(\beta X \times \beta X)$), топологическим носителем которой служит замыкание в $\beta X \times \beta X$ множества $\text{supp } \mu$. С другой стороны, если $\rho \in l_0^1(X)$, $\mu \in V_+(\beta X \times \beta X)$ и маргинальные меры μ на βX суть ρ_+ и ρ_- , то счетные множества $\text{supp } \rho_+$ и $\text{supp } \rho_-$ являются борелевскими (σ -компактными) в βX и

$$\begin{aligned} \mu((\beta X \setminus \text{supp } \rho_+) \times \beta X) &= \rho_+(\beta X \setminus \text{supp } \rho_+) = 0, \\ \mu(\beta X \times (X \setminus \text{supp } \rho_-)) &= \rho_-(\beta X \setminus \text{supp } \rho_-) = 0. \end{aligned}$$

Тогда

$$\mu((\beta X \times \beta X) \setminus (\text{supp } \rho_+ \times \text{supp } \rho_-)) = 0,$$

следовательно, $\mu \in l_+^1(X \times X)$ и $\text{supp } \mu \subseteq \text{supp } \rho_+ \times \text{supp } \rho_-$. Более того, поскольку $\pi_1\mu = \rho_+$, $\pi_2\mu = \rho_-$ и $\text{supp } \rho_+ \cap \text{supp } \rho_- = \emptyset$, у μ нет транзитных перевозок, следовательно, $\mu \in K(X \times X)$. Тогда из равенства (см. (3.12))

$$\mathcal{A}(c, \rho) = \min\{c(\mu) : \mu \in V_+(\beta X \times \beta X), \pi_1\mu = \rho_+, \pi_2\mu = \rho_-\}$$

получаем

$$\mathcal{A}(c, \rho) = \min\{c(\mu) : \mu \in K(X \times X), \pi_1\mu = \rho_+, \pi_2\mu = \rho_-\} = \mathcal{A}'_1(c, \rho), \quad (3.14)$$

и требуемое соотношение (3.11) вытекает из (3.12)–(3.14).

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Если X счетно, то оно σ -компактно в βX . В этом случае лемма 3.3 вытекает из теоремы 1.1.I; однако в общем случае такое рассуждение не проходит, так как X не обязано быть универсально измеримым в βX . На самом деле это и не нужно – достаточно того, что для любой $\sigma \in l_+^1(X)$ множество $\text{supp } \sigma$ счетно и, следовательно, универсально измеримо (σ -компактно) в βX .

ЛЕММА 3.4. Пусть $c: X \times X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ неотрицательна на диагонали и удовлетворяет неравенству треугольника. Если

$$\mathcal{A}'_1(c, \rho) = \mathcal{B}_1(c, \rho; l^\infty(X)) > -\infty \quad (3.15)$$

для всех $\rho \in l_0^1(X)$ вида $\rho = \varepsilon_x - \varepsilon_y$, где $x, y \in X$, $x \neq y$, то для всех таких x, y имеет место представление (3.10).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно следствию 3.1

$$\mathcal{A}'_1(c, \varepsilon_x - \varepsilon_y) = c(x, y) \quad \forall x, y, \quad x \neq y,$$

и так как

$$\mathcal{B}_1(c, \varepsilon_x - \varepsilon_y; l^\infty(X)) = \sup_{u \in Q(c, l^\infty(X))} (u(x) - u(y)),$$

то требуемое представление вытекает из (3.15).

ЛЕММА 3.5 (теорема о редукции). Рассмотрим произвольную функцию стоимости $c: X \times X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ и фиксируем меру $\rho \in l_0^1(X)$.

1) Если

$$\mathcal{A}_1(c, \rho) = \lim_{N \rightarrow \infty} \mathcal{A}_1(c \wedge N, \rho), \quad (3.16)$$

то

$$\mathcal{A}_1(c, \rho) = \mathcal{A}_1(c_*, \rho). \quad (3.17)$$

2) Если

$$\mathcal{A}'_1(c, \rho) = \lim_{N \rightarrow \infty} \mathcal{A}'_1(c \wedge N, \rho), \quad (3.16')$$

то

$$\mathcal{A}'_1(c, \rho) = \mathcal{A}'_1(c_*, \rho). \quad (3.17')$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Будем считать, что $\mathcal{A}_1(c_*, \rho) < +\infty$, так как в противном случае утверждение очевидно. Сначала предположим, что $\mathcal{A}_1(c_*, \rho) > -\infty$. Фиксируем $\varepsilon > 0$ и возьмем произвольную меру $\mu \in l_+^1(X \times X)$ с $(\pi_1 - \pi_2)\mu = \rho$ и $c_*(\mu) \leq \mathcal{A}_1(c_*, \rho) + \varepsilon$. Пусть

$$\text{supp } \mu = \{(x_k, y_k) : k = 1, 2, \dots\},$$

так что

$$\mu = \sum_k \mu(x_k, y_k) \varepsilon_{(x_k, y_k)}, \quad c_*(\mu) = \sum_k c_*(x_k, y_k) \mu(x_k, y_k),$$

где все $\mu(x_k, y_k) > 0$. Найдем m из условий:

$$\sum_{k > m} \mu(x_k, y_k) \leq \varepsilon, \quad \sum_{k > m} c_*(x_k, y_k) \mu(x_k, y_k) \geq -\varepsilon,$$

и возьмем точки $z_{kn1}, \dots, z_{knm(k,n)}$, для которых

$$\sum_{i=0}^{m(k,n)} c(z_{kni}, z_{kn(i+1)}) \leq c_*(x_k, y_k) + \frac{1}{n}, \quad k = 1, \dots, m,$$

где $z_{kn0} = x_k, z_{knm(k,n)+1} = y_k$.

Положим

$$\mu_n := \sum_{k=1}^m \sum_{i=0}^{m(k,n)} \mu(x_k, y_k) \varepsilon_{(z_{kni}, z_{kn(i+1)})} + \sum_{k>m} \mu(x_k, y_k) \varepsilon_{(x_k, y_k)}. \quad (3.18)$$

Очевидно,

$$\mu_n \in l_+^1(X \times X), \quad (\pi_1 - \pi_2)\mu_n = (\pi_1 - \pi_2)\mu = \rho.$$

Имеем

$$\begin{aligned} (c \wedge N)(\mu_n) &= \sum_{k=1}^m \sum_{i=0}^{m(k,n)} (c \wedge N)(z_{kni}, z_{kn(i+1)}) \mu(x_k, y_k) \\ &\quad + \sum_{k>m} (c \wedge N)(x_k, y_k) \mu(x_k, y_k) \\ &\leq \sum_{k=1}^m \sum_{i=0}^{m(k,n)} c(z_{kni}, z_{kn(i+1)}) \mu(x_k, y_k) + N \sum_{k>m} \mu(x_k, y_k) \\ &\leq \sum_{k=1}^m \left(c_*(x_k, y_k) + \frac{1}{n} \right) \mu(x_k, y_k) + N\varepsilon \\ &\leq c_*(\mu) + \varepsilon + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^m \mu(x_k, y_k) + N\varepsilon \\ &\leq c_*(\mu) + \frac{1}{n} \mu(X \times X) + (N+1)\varepsilon. \end{aligned}$$

Тогда

$$\mathcal{A}_1(c \wedge N, \rho) \leq \varliminf_{n \rightarrow \infty} (c \wedge N)(\mu_n) \leq c_*(\mu) + (N+1)\varepsilon \leq \mathcal{A}_1(c_*, \rho) + (N+2)\varepsilon,$$

и ввиду произвольности $\varepsilon > 0$

$$\mathcal{A}_1(c \wedge N, \rho) \leq \mathcal{A}_1(c_*, \rho).$$

Далее, используя (3.16), получаем

$$\mathcal{A}_1(c, \rho) \leq \mathcal{A}_1(c_*, \rho),$$

и так как противоположное неравенство очевидно (поскольку $c_* \leq c$), то имеет место (3.17).

Теперь рассмотрим случай, когда $\mathcal{A}_1(c_*, \rho) = -\infty$. Фиксируем $\varepsilon > 0$ и возьмем меру $\mu \in l_+^1(X \times X)$ с $(\pi_1 - \pi_2)\mu = \rho$ и $c_*(\mu) < -1/\varepsilon$. Пусть

$$\mu = \sum_k \mu(x_k, y_k) \varepsilon_{(x_k, y_k)},$$

где все $\mu(x_k, y_k) > 0$. Возможно одно из двух:

- (а) $c_*(x_k, y_k) = -\infty$ при некотором k ;
- (б) $c_*(x_k, y_k) > -\infty \quad \forall k$.

(Заметим, что в случае (б) равенство $c_*(\mu) = -\infty$ не исключено.)

В случае (а) для каждого n найдем точки $z_{n1}, \dots, z_{nm}$ ($m = m(n)$) такие, что

$$\sum_{i=0}^m c(z_{ni}, z_{ni+1}) \leq -n,$$

где $z_{n0} = x_k, z_{nm+1} = y_k$. Положим

$$\mu_n := \mu(x_k, y_k) \sum_{i=0}^m \varepsilon_{(z_{ni}, z_{ni+1})} + \sum_{j \neq k} \mu(x_j, y_j) \varepsilon_{(x_j, y_j)}.$$

Имеем

$$\begin{aligned} \mu_n &\in l_+^1(X \times X), \quad (\pi_1 - \pi_2)\mu_n = (\pi_1 - \pi_2)\mu = \rho, \\ (c \wedge N)(\mu_n) &\leq -n\mu(x_k, y_k) + N\mu(X \times X), \end{aligned}$$

следовательно,

$$\mathcal{A}_1(c \wedge N, \rho) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} (c \wedge N)(\mu_n) = -\infty,$$

и, используя (3.16), получаем требуемое равенство (3.17).

В случае (б) выберем m из условий:

$$\sum_{k > m} \mu(x_k, y_k) \leq \varepsilon, \quad \sum_{k=1}^m c_*(x_k, y_k) \mu(x_k, y_k) < -\frac{1}{\varepsilon}.$$

Для каждого n найдем точки $z_{kn1}, \dots, z_{knm(k,n)}$ такие, что

$$\sum_{i=0}^{m(k,n)} c(z_{kni}, z_{kni+1}) \leq c_*(x_k, y_k) + \frac{1}{n},$$

где $z_{kn0} = x_k, z_{knm(k,n)+1} = y_k, k = 1, \dots, m$. Определим μ_n формулой (3.18).

Имеем

$$\begin{aligned} \mu_n &\in l_+^1(X \times X), \quad (\pi_1 - \pi_2)\mu_n = (\pi_1 - \pi_2)\mu = \rho, \\ (c \wedge N)(\mu_n) &\leq \sum_{k=1}^m \sum_{i=0}^{m(k,n)} c(z_{kni}, z_{kni+1}) \mu(x_k, y_k) + N \sum_{k > m} \mu(x_k, y_k) \\ &\leq \sum_{k=1}^m \left(c_*(x_k, y_k) + \frac{1}{n} \right) \mu(x_k, y_k) + N\varepsilon \\ &< -\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{n} \mu(X \times X) + N\varepsilon. \end{aligned}$$

Тогда

$$\mathcal{A}_1(c \wedge N, \rho) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} (c \wedge N)(\mu_n) \leq -\frac{1}{\varepsilon} + N\varepsilon,$$

и, переходя к инфимуму по $\varepsilon > 0$, получаем

$$\mathcal{A}_1(c \wedge N, \rho) = -\infty \quad \forall N > 0.$$

Используя (3.16), выводим отсюда $\mathcal{A}_1(c, \rho) = -\infty$, так что (3.17) доказано и в этом случае.

2) Доказательство этого утверждения повторяет дословно доказательство утверждения 1) (с очевидной заменой (3.16), (3.17) на (3.16'), (3.17')), если заметить, что для $\mu \in K(X \times X)$ соответствующие меры μ_n во всех рассматриваемых случаях тоже входят в $K(X \times X)$.

ЛЕММА 3.6. Пусть $c: X \times X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ удовлетворяет неравенству треугольника. Тогда равносильны следующие утверждения:

- (а) $\mathcal{A}'_1(c, \rho) = \mathcal{B}_1(c, \rho; l^\infty(X)) = -\infty \quad \forall \rho \in l^1_0(X)$;
- (б) $c(x, y) = -\infty \quad \forall x, y \in X$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (а) $\Rightarrow$ (б). Поскольку c удовлетворяет неравенству треугольника, для каждого $x \in X$ возможно одно из двух: либо $c(x, x) \geq 0$, либо $c(x, x) = -\infty$.

Если $c(x_0, x_0) = -\infty$ для некоторого $x_0 \in X$, то для любых $x, y \in X$ имеем

$$c(x, y) \leq c(x, x_0) + c(x_0, x_0) + c(x_0, y) = -\infty,$$

т.е. выполнено (б).

Если же $c(x, x) \geq 0 \quad \forall x \in X$, то согласно следствию 3.1

$$\mathcal{A}'_1(c, \varepsilon_x - \varepsilon_y) = c(x, y),$$

следовательно, $c(x, y) = -\infty \quad \forall x, y \in X, x \neq y$. Но тогда

$$c(x, x) \leq c(x, y) + c(y, x) = -\infty,$$

что противоречит неотрицательности c на диагонали. Таким образом, этот случай невозможен, и импликация полностью доказана.

(б) $\Rightarrow$ (а). Очевидно.

ЛЕММА 3.7. Рассмотрим произвольную функцию стоимости $c: X \times X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ и предположим, что для всех $\rho \in l^1_0(X)$ выполнено (3.16'). Тогда равносильны следующие утверждения:

- (а) $\mathcal{A}'_1(c, \rho) = \mathcal{B}_1(c, \rho; l^\infty(X)) = -\infty \quad \forall \rho \in l^1_0(X)$;
- (б) c_* неограничена снизу;
- (в) c_* принимает значение $-\infty$, точнее $c_*(x, y) = -\infty \quad \forall x, y \in X, x \neq y$, либо $c_*(x, x) = -\infty$ для некоторого $x \in X$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (а) $\Rightarrow$ (в). Если $c_*(x, x) > -\infty \ \forall x \in X$, то c_* неотрицательна на диагонали и в силу следствия 3.1 и леммы 3.5 (утверждение 2))

$$c_*(x, y) = \mathcal{A}'_1(c_*, \varepsilon_x - \varepsilon_y) = \mathcal{A}'_1(c, \varepsilon_x - \varepsilon_y) = -\infty$$

для всех $x, y \in X, x \neq y$.

(в) $\Rightarrow$ (б). Очевидно.

(б) $\Rightarrow$ (а). Поскольку c_* неограничена снизу,

$$\mathcal{B}_1(c, \rho; l^\infty(X)) = \mathcal{B}_1(c_*, \rho; l^\infty(X)) = -\infty \quad \forall \rho \in l^1_0(X).$$

Далее, $(c \wedge N)_* \leq c_* \ \forall N > 0$, следовательно, функция $(c \wedge N)_*$ тоже неограничена снизу. Тогда по лемме 3.6 $(c \wedge N)_* \equiv -\infty$ и, применяя условие (3.16') и лемму 3.5, получаем для всех $\rho \in l^1_0(X)$

$$\mathcal{A}'_1(c, \rho) = \lim_{N \rightarrow \infty} \mathcal{A}'_1(c \wedge N, \rho) = \lim_{N \rightarrow \infty} \mathcal{A}'_1((c \wedge N)_*, \rho) = -\infty.$$

3.2. Доказательства теорем двойственности.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.1. I. С каждой мерой $\mu \in l^1_+(X \times X)$ свяжем меру $\mu' \in l^1_+(X \times X)$,

$$\mu'(x, y) = \begin{cases} \mu(x, y), & \text{если } x \neq y, \\ 0, & \text{если } x = y. \end{cases}$$

Очевидно,

$$\begin{aligned} \mu \in K(X \times X) &\implies \mu' \in K(X \times X), \\ (\pi_1 - \pi_2)\mu' &= (\pi_1 - \pi_2)\mu. \end{aligned}$$

Если c неотрицательна на диагонали и $c(x, y) = c'(x, y) \ \forall x, y, x \neq y$, где

$$c'(x, y) = \sup_{u \in Q} (u(x) - u(y)),$$

Q – непустое подмножество $l^\infty(X)$, то

$$c(\mu) \geq c'(\mu) = c'(\mu') = c(\mu'),$$

следовательно,

$$\mathcal{A}'_1(c, \rho) = \mathcal{A}'_1(c', \rho),$$

и так как равенство

$$\mathcal{B}_1(c, \rho; l^\infty(X)) = \mathcal{B}_1(c', \rho; l^\infty(X))$$

очевидно, то эквивалентность (а) $\Leftrightarrow$ (б) вытекает из лемм 3.3 и 3.4.

(б) $\Rightarrow$ (в). Очевидно.

(в) $\Rightarrow$ (а). Пусть $v \in Q(c, l^\infty(X))$. Тогда функция

$$c_1(x, y) := c(x, y) - v(x) + v(y)$$

неотрицательна на $X \times X$ и удовлетворяет неравенству треугольника. Отсюда следует, что для каждого $N > 0$ функция

$$e_N(x, y) := \min(c_1(x, y), N)$$

тоже удовлетворяет неравенству треугольника, и так как она ограничена, то функция

$$u_{N, x_0}(x) := \begin{cases} e_N(x, x_0) & \text{при } x \neq x_0, \\ 0 & \text{при } x = x_0, \end{cases}$$

где x_0 — произвольная фиксированная точка X , принадлежит $l^\infty(X)$. Далее, из неотрицательности и неравенства треугольника для e_N вытекает $u_{N, x_0} \in Q(e_N, l^\infty(X))$. Тогда

$$v_{N, x_0} := u_{N, x_0} + v \in Q(c, l^\infty(X))$$

при любых $x_0 \in X, N > 0$, и остается заметить, что

$$\sup_{\substack{N > 0 \\ x_0 \in X}} (v_{N, x_0}(x) - v_{N, x_0}(y)) = c(x, y).$$

II. Это лемма 3.6.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.2. Прежде всего заметим, что функционал $\mathcal{A}'_1(c, \rho)$ не убывает по c и для любой $u \in Q(c, l^\infty(X))$ найдется $N_0 > 0$ такое, что $u \in Q(c \wedge N, l^\infty(X)) \quad \forall N \geq N_0$. Следовательно, существует предел

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathcal{B}_1(c \wedge N, \rho; l^\infty(X)) = \mathcal{B}_1(c, \rho; l^\infty(X)) \quad (3.19)$$

(равенство (3.19) выполнено и в том случае, когда $Q(c, l^\infty(X)) = \emptyset$; при этом обе его части равны $-\infty$), и мы получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{A}'_1(c, \rho) &\geq \overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} \mathcal{A}'_1(c \wedge N, \rho) \geq \underline{\lim}_{N \rightarrow \infty} \mathcal{A}'_1(c \wedge N, \rho) \\ &\geq \lim_{N \rightarrow \infty} \mathcal{B}_1(c \wedge N, \rho; l^\infty(X)) = \mathcal{B}_1(c, \rho; l^\infty(X)) \quad \forall \rho \in l_0^1(X). \end{aligned} \quad (3.20)$$

I. (a) $\Rightarrow$ (б). Из (a) и (3.20) вытекает (2.4). Применяя лемму 3.5, получаем

$$\mathcal{A}'_1(c, \rho) = \mathcal{A}'_1(c_*, \rho).$$

Равенство

$$\mathcal{B}_1(c, \rho; l^\infty(X)) = \mathcal{B}_1(c_*, \rho; l^\infty(X)) \quad (3.21)$$

очевидно ввиду равенства $Q(c, l^\infty(X)) = Q(c_*, l^\infty(X))$; тогда

$$\mathcal{A}'_1(c_*, \rho) = \mathcal{B}_1(c_*, \rho; l^\infty(X)) > -\infty \quad \forall \rho \in l_0^1(X)$$

и в силу леммы 3.7 c_* ограничена снизу. Тогда c_* неотрицательна на диагонали (см. замечание 2.1) и, применяя к c_* теорему 2.1.I, получаем требуемое представление (2.5).

(б) $\Rightarrow$ (a). Это следует из леммы 3.5, тождества (3.21) и импликации (в) $\Rightarrow$ (a) теоремы 2.1. I.

II. Как и в I, из соотношения двойственности (в) следует (2.4), и все сводится к лемме 3.7.

§4. Более общие теоремы двойственности (случай банаховых алгебр ограниченных функций)

В этом параграфе установлены теоремы двойственности в случае, когда двойственная задача рассматривается в более узком, чем $l^\infty(X)$, пространстве функций.

Напомним некоторые сведения о банаховых алгебрах ограниченных функций [28], [29].

Пусть $\mathbf{n}(X)$ – некоторая коммутативная банахова алгебра (относительно поточечного умножения) ограниченных вещественных функций на X , т.е. $\mathbf{n}(X)$ – замкнутое подпространство в $l^\infty(X)$, причем $uv \in \mathbf{n}(X) \quad \forall u, v \in \mathbf{n}(X)$. Также предположим, что $\mathbf{n}(X)$ содержит константы и разделяет точки X , т.е. для любых $x, y \in X, x \neq y$, найдется $u \in \mathbf{n}(X)$ такая, что $u(x) \neq u(y)$. В таком случае множество $\mathcal{K}X$ ненулевых мультипликативных линейных функционалов на $\mathbf{n}(X)$, наделенное $*$ -слабой топологией, является компактом (гельфандов компакт банаховой алгебры $\mathbf{n}(X)$), а отображение $x \mapsto \varepsilon_x$,

$$\langle u, \varepsilon_x \rangle = u(x) \quad \forall u \in \mathbf{n}(X),$$

– вложением X в $\mathcal{K}X$. При этом X плотно в $\mathcal{K}X$, каждая функция $u \in \mathbf{n}(X)$ однозначно продолжается до непрерывной функции на $\mathcal{K}X$, и имеет место изометрия банаховых алгебр: $\mathbf{n}(X) = C(\mathcal{K}X)$. Каждая мера $\sigma \in l^1(X)$ отождествима с регулярной борелевской мерой на $\mathcal{K}X$ (т.е. с элементом $C(\mathcal{K}X)^*$), для которой $\sigma(\mathcal{K}X \setminus \text{supp } \sigma) = 0$. (При этом само X не обязано быть универсально измеримым в $\mathcal{K}X$.) Обратно, каждая мера $\sigma \in C(\mathcal{K}X)^*$, сосредоточенная на счетном подмножестве пространства X , порождается элементом $l^1(X)$.

Приведем примеры банаховых алгебр $\mathbf{n}(X)$.

ПРИМЕР 4.1. Пусть $\mathbf{n}(X) = c(X)$ – пространство ограниченных функций $u: X \rightarrow \mathbb{R}$, для которых существует предел $\lim_x u(x) = u_\infty$, т.е. для каждого $\varepsilon > 0$ найдется конечное множество $X_0 = X_0(\varepsilon)$ такое, что $|u(x) - u_\infty| \leq \varepsilon \quad \forall x \notin X_0$. Легко видеть, что $\mathbf{n}(X)^*$ есть прямая сумма $l^1(X)$ и $\mathbb{R}$, точнее, всякий функционал $\lambda \in \mathbf{n}(X)^*$ имеет вид $\lambda = \sigma + \alpha \lambda_0$, где $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \sigma \in l^1(X), \quad \langle u, \sigma \rangle &= \sum_{x \in \text{supp } \sigma} u(x) \sigma(x), \\ \langle u, \lambda_0 \rangle &= \lim_x u(x) \quad \forall u \in \mathbf{n}(X). \end{aligned}$$

В рассматриваемом случае $\mathcal{K}X$ есть одноточечная компактификация X , $\mathcal{K}X = X \cup \{\lambda_0\}$, причем открытыми множествами в $\mathcal{K}X$ являются произвольные подмножества X и дополнения в $\mathcal{K}X$ конечных подмножеств X .

ПРИМЕР 4.2. Пусть $\mathbf{n}(X) = C^b(X)$ – пространство ограниченных непрерывных функций на вполне регулярном топологическом пространстве X . В этом случае $\mathcal{K}X = \beta(X, t)$, где t – топология X , β – компактификация Стоуна–Чеха.

ПРИМЕР 4.3. В качестве $\mathbf{n}(X)$ можно взять пространство ограниченных равномерно непрерывных функций на метрическом (или отделимом равномерном) пространстве X .

ПРИМЕР 4.4. Можно взять $\mathbf{n}(X) = M(X, \mathcal{T})$ – пространство ограниченных измеримых функций на измеримом пространстве $(X, \mathcal{T})$, где σ -алгебра $\mathcal{T}$ разделяет точки X : для любых $x, y \in X$, $x \neq y$, найдется $B \in \mathcal{T}$, $x \in B$, $y \notin B$.

Рассмотрим задачу о перемещении масс, состоящую по-прежнему в нахождении оптимального значения $\mathcal{A}'_1(c, \rho)$, однако двойственную задачу будем теперь рассматривать не в $l^\infty(X)$, а в более узком классе функций $\mathbf{n}(X)$. Таким образом, новая двойственная задача состоит в нахождении оптимального значения

$$\mathcal{B}_1(c, \rho; \mathbf{n}(X)) := \sup\{\langle u, \rho \rangle : u \in Q(c, \mathbf{n}(X))\}, \quad (4.1)$$

где

$$Q(c, \mathbf{n}(X)) := \{u \in \mathbf{n}(X) : u(x) - u(y) \leq c(x, y) \ \forall x, y \in X\}.$$

Очевидно, для любой $\rho \in l_0^1(X)$

$$\mathcal{B}_1(c, \rho; \mathbf{n}(X)) \leq \mathcal{B}_1(c, \rho; l^\infty(X)) \leq \mathcal{A}_1(c, \rho) \leq \mathcal{A}'_1(c, \rho),$$

поэтому соотношение двойственности

$$\mathcal{A}'_1(c, \rho) = \mathcal{B}_1(c, \rho; \mathbf{n}(X))$$

является более сильным, чем

$$\mathcal{A}'_1(c, \rho) = \mathcal{B}_1(c, \rho; l^\infty(X))$$

и чем любое из этих двух соотношений с $\mathcal{A}_1$ вместо $\mathcal{A}'_1$. Другими словами, чем уже класс функций $\mathbf{n}(X)$, тем более сильным результатом является отвечающая ему теорема двойственности.

Сформулируем две теоремы двойственности, обобщающие теоремы 2.1 и 2.2, соответственно. Далее $\mathbf{n}(X)$ – произвольная банахова алгебра ограниченных функций на X , содержащая константы и разделяющая точки X .

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть $c: X \times X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ удовлетворяет неравенству треугольника.

I. Если c неотрицательна на диагонали, то равносильны утверждения:

- (а) $\mathcal{A}'_1(c, \rho) = \mathcal{B}_1(c, \rho; \mathbf{n}(X)) > -\infty \ \forall \rho \in l_0^1(X)$;
- (б) имеет место представление

$$c(x, y) = \sup_{u \in Q} (u(x) - u(y)) \quad \forall x, y \in X, \quad x \neq y,$$

где Q – непустое подмножество $\mathbf{n}(X)$.

При выполнении этих равносильных утверждений, для любой $\rho \in l_0^1(X)$ найдется мера $\mu \in K(X \times X)$ такая, что $\pi_1 \mu = \rho_+$, $\pi_2 \mu = \rho_-$ и $c(\mu) = \mathcal{A}'_1(c, \rho)$.

II. Если $c(x, y) < +\infty \ \forall x, y \in X$, то равносильны утверждения:

- (в) $\mathcal{A}'_1(c, \rho) = \mathcal{B}_1(c, \rho; \mathbf{n}(X)) = -\infty \ \forall \rho \in l_0^1(X)$;
- (г) $c(x, y) = -\infty \ \forall x, y \in X$.

ТЕОРЕМА 4.2. Пусть $c: X \times X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ – произвольная функция стоимости.

I. Следующие утверждения равносильны:

- (а) $\mathcal{A}'_1(c, \rho) = \mathcal{B}_1(c, \rho; \mathbf{n}(X)) > -\infty \quad \forall \rho \in l_0^1(X)$;
- (б) имеют место равенство (2.4) и представление

$$c_*(x, y) = \sup_{u \in Q(c, \mathbf{n}(X))} (u(x) - u(y)) \quad \forall x, y \in X, \quad x \neq y,$$

где $Q(c, \mathbf{n}(X))$ непусто.

II. Следующие утверждения равносильны:

- (в) $\mathcal{A}'_1(c, \rho) = \mathcal{B}_1(c, \rho; \mathbf{n}(X)) = -\infty \quad \forall \rho \in l_0^1(X)$;
- (г) справедливо равенство (2.4) и c_* неограничена снизу на $X \times X$;
- (д) справедливо (2.4) и найдутся $x, y \in X$, для которых $c_*(x, y) = -\infty$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1. Утверждения (в) теорем 2.1 и 4.1 (2.2 и 4.2) на самом деле эквивалентны и означают равенство $\mathcal{A}'_1(c, \rho) = -\infty \quad \forall \rho \in l_0^1(X)$. Поэтому части II теорем 2.1 и 4.1 (2.2 и 4.2) совпадают.

Доказательства теорем 4.1 и 4.2 следуют дословно доказательствам теорем 2.1 и 2.2 с очевидной заменой $\mathcal{B}_1(c, \rho; l^\infty(X))$ и $\mathcal{B}_1(c \wedge N, \rho; l^\infty(X))$ на $\mathcal{B}_1(c, \rho; \mathbf{n}(X))$ и $\mathcal{B}_1(c \wedge N, \rho; \mathbf{n}(X))$, соответственно. При этом вместо леммы 3.3 используется ее аналог:

ЛЕММА 4.1. Если

$$c(x, y) = \sup_{u \in Q(c, \mathbf{n}(X))} (u(x) - u(y)) \quad \forall x, y \in X,$$

то

$$\mathcal{A}'_1(c, \rho) = \mathcal{B}_1(c, \rho; \mathbf{n}(X)) > -\infty \quad \forall \rho \in l_0^1(X)$$

и существует $\mu \in K(X \times X)$ такая, что $\pi_1 \mu = \rho_+$, $\pi_2 \mu = \rho_-$ и $c(\mu) = \mathcal{A}'_1(c, \rho)$.

Доказательство леммы 4.1 повторяет доказательство леммы 3.3 с очевидной заменой βX на $\mathbf{n}X$.

Мы завершим этот параграф двумя примерами. В первом примере

$$\mathcal{A}'_1(c, \rho) = \mathcal{B}_1(c, \rho; l^\infty(X)) \quad \forall \rho \in l_0^1(X),$$

однако соотношение двойственности

$$\mathcal{A}'_1(c, \rho) = \mathcal{B}_1(c, \rho; \mathbf{n}(X))$$

не выполняется ни для одной $\rho \in l_0^1(X)$. Во втором примере функция $c: X \times X \rightarrow \mathbb{R}_+$ удовлетворяет неравенству треугольника и множество $Q(c, \mathbf{n}(X))$ непусто ($Q(c, \mathbf{n}(X))$ непусто для любой неотрицательной функции c , так как константы принадлежат ему), однако представление

$$c(x, y) = \sup_{u \in Q(c, \mathbf{n}(X))} (u(x) - u(y)) \quad (4.2)$$

не имеет места. Этот пример иллюстрирует разницу между теоремами 2.1 и 4.1.

ПРИМЕР 4.5. Возьмем

$$c(x, y) = u(x) - u(y) \quad \forall x, y \in X,$$

где $u \in l^\infty(X) \setminus \mathbf{n}(X)$. Имеем

$$\mathcal{A}'_1(c, \rho) = \mathcal{B}_1(c, \rho; l^\infty(X)) = \langle u, \rho \rangle,$$

однако $Q(c, \mathbf{n}(X)) = \emptyset$, следовательно, $\mathcal{B}_1(c, \rho; \mathbf{n}(X)) = -\infty$.

ПРИМЕР 4.6. Возьмем $X = [0, 1]$, $\mathbf{n}(X) = C(X)$ и положим

$$c(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{если } (x, y) \in R \times (X \setminus R), \\ 0, & \text{если } (x, y) \notin R \times (X \setminus R), \end{cases}$$

где R – множество рациональных чисел в X . Очевидно, $Q(c, \mathbf{n}(X)) = Q(0, \mathbf{n}(X))$ есть множество констант и c непредставима в виде (4.2). Заметим, что соответствующее представление c с множеством $Q(c, l^\infty(X))$ имеет место, так как

$$c(x, y) = \max\{u_0(x) - u_0(y), u_1(x) - u_1(y)\} \quad \forall x, y \in X,$$

где $u_0(x) = 0 \quad \forall x$, u_1 – характеристическая функция R , и $u_0, u_1 \in Q(c, l^\infty(X))$.

§ 5. Задачи с фиксированными маргинальными мерами

5.1. Постановка задач и формулировка теорем двойственности. Рассмотрим следующую экстремальную маргинальную задачу. Заданы: множества X, Y , меры $\sigma_1 \in l^1_+(X)$, $\sigma_2 \in l^1_+(Y)$, $\sigma_1 X = \sigma_2 Y$, и функция стоимости $c: X \times Y \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Требуется минимизировать интеграл

$$c(\mu) := \int_{X \times Y} c(x, y) \mu(d(x, y)) = \sum_{(x, y) \in \text{supp } \mu} c(x, y) \mu(x, y)$$

при ограничениях на $\mu \in l^1_+(X \times Y)$:

$$\pi_1 \mu = \sigma_1, \quad \pi_2 \mu = \sigma_2.$$

Положим

$$\mathcal{C}_1(c, \sigma_1, \sigma_2; X, Y) := \inf\{c(\mu) : \mu \in l^1_+(X \times Y), \pi_1 \mu = \sigma_1, \pi_2 \mu = \sigma_2\} \quad (5.1)$$

и рассмотрим двойственную задачу, состоящую в нахождении оптимального значения

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_1(c, \sigma_1, \sigma_2; l^\infty(X) \times l^\infty(Y)) \\ := \sup\{\langle u, \sigma_1 \rangle - \langle v, \sigma_2 \rangle : (u, v) \in l^\infty(X) \times l^\infty(Y), \\ u(x) - v(y) \leq c(x, y) \quad \forall (x, y) \in X \times Y\}. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Очевидно, всегда

$$\mathcal{D}_1(c, \sigma_1, \sigma_2; l^\infty(X) \times l^\infty(Y)) \leq \mathcal{C}_1(c, \sigma_1, \sigma_2; X, Y).$$

Задачу (5.1) можно интерпретировать как вариант задачи о перемещении масс с X на Y . В случае $X = Y$ получаем задачу о перемещении масс на X с фиксированными маргинальными мерами – прямое обобщение обычной транспортной задачи линейного программирования. Топологические варианты задач (5.1) и (5.2) изучались ранее в [7], [9]–[11].

Имеет место следующая теорема двойственности.

ТЕОРЕМА 5.1. Следующие утверждения равносильны:

(а) для любых $\sigma_1 \in l_+^1(X)$, $\sigma_2 \in l_+^1(Y)$, $\sigma_1 X = \sigma_2 Y$,

$$\mathcal{C}_1(c, \sigma_1, \sigma_2; X, Y) = \mathcal{D}_1(c, \sigma_1, \sigma_2; l^\infty(X) \times l^\infty(Y)) > -\infty;$$

(б) функция c представима в виде

$$c(x, y) = \sup_{(u, v) \in M} (u(x) - v(y)) \quad \forall (x, y) \in X \times Y,$$

где M – непустое множество в $l^\infty(X) \times l^\infty(Y)$.

При выполнении этих равносильных утверждений для любых $\sigma_1 \in l_+^1(X)$, $\sigma_2 \in l_+^1(Y)$, $\sigma_1 X = \sigma_2 Y$, найдется мера $\mu \in l_+^1(X \times Y)$ такая, что $\pi_1 \mu = \sigma_1$, $\pi_2 \mu = \sigma_2$ и $c(\mu) = \mathcal{C}_1(c, \sigma_1, \sigma_2; X, Y)$.

Топологический аналог этой теоремы см. [9, теорема 9.9].

Сформулируем более общую теорему двойственности, отвечающую другому варианту двойственной задачи.

Пусть $\mathbf{n}_1(X)$ и $\mathbf{n}_2(Y)$ – банаховы алгебры ограниченных функций на X и Y , содержащие константы и разделяющие точки соответствующих пространств. Положим

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_1(c, \sigma_1, \sigma_2; \mathbf{n}_1(X) \times \mathbf{n}_2(Y)) \\ := \sup \{ \langle u, \sigma_1 \rangle - \langle v, \sigma_2 \rangle : (u, v) \in \mathbf{n}_1(X) \times \mathbf{n}_2(Y), \\ u(x) - v(y) \leq c(x, y) \forall (x, y) \in X \times Y \}. \end{aligned} \quad (5.3)$$

ТЕОРЕМА 5.2. Следующие утверждения равносильны:

(а) для любых $\sigma_1 \in l_+^1(X)$, $\sigma_2 \in l_+^1(Y)$, $\sigma_1 X = \sigma_2 Y$,

$$\mathcal{C}_1(c, \sigma_1, \sigma_2; X, Y) = \mathcal{D}_1(c, \sigma_1, \sigma_2; \mathbf{n}_1(X) \times \mathbf{n}_2(Y)) > -\infty;$$

(б) функция c представима в виде

$$c(x, y) = \sup_{(u, v) \in M} (u(x) - v(y)) \quad \forall (x, y) \in X \times Y,$$

где M – непустое множество в $\mathbf{n}_1(X) \times \mathbf{n}_2(Y)$.

При выполнении этих равносильных утверждений для любых $\sigma_1 \in l_+^1(X)$, $\sigma_2 \in l_+^1(Y)$, $\sigma_1 X = \sigma_2 Y$, найдется мера $\mu \in l_+^1(X \times Y)$ такая, что $\pi_1 \mu = \sigma_1$, $\pi_2 \mu = \sigma_2$ и $c(\mu) = \mathcal{C}_1(c, \sigma_1, \sigma_2; X, Y)$.

В случае $X = Y$ теоремы 5.1 и 5.2 превращаются в теоремы двойственности для задачи о перемещении масс на X с фиксированными маргинальными мерами.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.1. Аналогичные теоремы двойственности в массовой постановке справедливы для более общих экстремальных маргинальных задач, например, для задач с дополнительными ограничениями моментного типа, подходящих вариантов задачи Фреше (теоремы двойственности для их топологических прототипов (см. [7], [23])), а также для нетопологических аналогов задач, изучавшихся в [30].

Очевидно, теорема 5.1 есть частный случай теоремы 5.2. Мы могли бы уже сейчас дать прямое доказательство теоремы 5.2, но считаем более поучительным вывести ее из теоремы 4.1.

5.2. Связь между маргинальными задачами и задачами о перемещении масс с фиксированной разностью маргинальных мер. Рассмотрим пару двойственных экстремальных задач (5.1) и (5.3) и свяжем с ними некоторую задачу типа (2.1) и двойственную задачу типа (4.1).

Положим $Z = X \oplus Y$, т.е. Z — объединение двух дизъюнктивных множеств X и Y (даже если $X = Y = A$, мы различаем два экземпляра множества A , $X = A$ и $Y = A$, не отождествляя точки $x = a \in X$ и $y = a \in Y$). Обозначим через $\mathbf{n}(Z)$ класс функций $w: Z \rightarrow \mathbb{R}$, $w = w_{u,v}$, где $u \in \mathbf{n}_1(X)$, $v \in \mathbf{n}_2(Y)$,

$$w_{u,v}(z) = \begin{cases} u(x), & \text{если } z = x \in X, \\ v(y), & \text{если } z = y \in Y. \end{cases}$$

Очевидно, $\mathbf{n}(Z)$ — банахова алгебра ограниченных функций, содержащая константы и разделяющая точки Z . Каждая функция стоимости $c: X \times Y \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, представимая в виде

$$c(x, y) = \sup_{(u,v) \in M} (u(x) - v(y)), \quad (5.4)$$

где $M \subseteq \mathbf{n}_1(X) \times \mathbf{n}_2(Y)$, продолжается на $Z \times Z$ по формуле

$$\begin{aligned} c^Z(z_1, z_2) &= \sup_{(u,v) \in M} (w_{u,v}(z_1) - w_{u,v}(z_2)) \\ &= \sup_{w \in Q(c^Z, \mathbf{n}(Z))} (w(z_1) - w(z_2)). \end{aligned} \quad (5.5)$$

Далее, ввиду очевидного равенства

$$l_+^1(X \times Y) = \{\mu \in l_+^1(Z \times Z) : \text{supp } \pi_1 \mu \subseteq X, \text{supp } \pi_2 \mu \subseteq Y\},$$

каждая мера $\mu \in l_+^1(X \times Y)$, рассматриваемая как мера на $Z \times Z$, не содержит транзитных перевозок и, стало быть, принадлежит $K(Z \times Z)$.

Каждой паре мер $\sigma_1 \in l_+^1(X)$, $\sigma_2 \in l_+^1(Y)$, $\sigma_1 X = \sigma_2 Y$, сопоставим меру $\rho = \rho_{\sigma_1, \sigma_2} \in l_0^1(Z)$,

$$\rho_{\sigma_1, \sigma_2}(z) := \begin{cases} \sigma_1(x), & \text{если } z = x \in X, \\ -\sigma_2(y), & \text{если } z = y \in Y. \end{cases}$$

ТЕОРЕМА 5.3. *Рассмотрим задачу (5.1) с функцией стоимости $c: X \times Y \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, представимой в виде (5.4), где $M \subseteq \mathbf{n}_1(X) \times \mathbf{n}_2(Y)$. Тогда для любых $\sigma_1 \in l_+^1(X)$, $\sigma_2 \in l_+^1(Y)$, $\sigma_1 X = \sigma_2 Y$, выполняются равенства*

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_1(c, \sigma_1, \sigma_2; X, Y) &= \mathcal{A}_1'(c^Z, \rho_{\sigma_1, \sigma_2}), \\ \mathcal{D}_1(c, \sigma_1, \sigma_2; \mathbf{n}_1(X) \times \mathbf{n}_2(Y)) &= \mathcal{B}_1(c^Z, \rho_{\sigma_1, \sigma_2}; \mathbf{n}(Z)). \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Это прямое следствие леммы 3.2, принимая во внимание определения и свойства функции стоимости c^Z , меры $\rho_{\sigma_1, \sigma_2}$ и банаховой алгебры $\mathbf{n}(Z)$, а также тот факт, что $l_+^1(X \times Y) \subset K(Z \times Z)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 5.2. Теорема 5.2 немедленно вытекает из теорем 5.3 и 4.1.

Некоторые топологические аналоги теоремы 5.3 были получены ранее в [13]. Приведем общий результат такого типа. Напомним (см. §1), что $\mathcal{L}$ обозначает класс топологических пространств, гомеоморфных универсально измеримым подмножествам компактов. Пусть $X, Y \in \mathcal{L}$. Возьмем их топологическую сумму $Z = X \oplus Y$. Открытыми множествами в Z являются по определению множества вида $G_X \cup G_Y$, где G_X (G_Y) открыто в X (Y). В частности, X и Y открыто-замкнуты в Z . Легко видеть, что $X, Y \in \mathcal{L} \Rightarrow Z = X \oplus Y \in \mathcal{L}$. Имеет место естественная изометрия банаховых алгебр (и банаховых решеток) $C^b(X) = C(\beta X)$. При этом $V_+(X) = \{\sigma \in C(\beta X)_+^* : \sigma(\beta X \setminus X) = 0\}$ (см. [9]) и справедливы представления

$$\begin{aligned} V_+(X) &= \{\sigma \in V_+(Z) : \sigma Y = 0\}, \\ V_+(Y) &= \{\sigma \in V_+(Z) : \sigma X = 0\}. \end{aligned}$$

Паре мер $\sigma_1 \in V_+(X), \sigma_2 \in V_+(Y), \sigma_1 X = \sigma_2 Y$, можно сопоставить меру на Z

$$\rho_{\sigma_1, \sigma_2} := \sigma_1 - \sigma_2 \in V_0(Z),$$

где

$$V_0(Z) = \{\rho \in V(Z) = V_+(Z) - V_+(Z) : \rho Z = \langle \mathbf{1}_Z, \rho \rangle = 0\}.$$

Для любых $\sigma_1 \in V_+(X), \sigma_2 \in V_+(Y), \sigma_1 X = \sigma_2 Y$, положим

$$\mathcal{C}(c, \sigma_1, \sigma_2; X, Y) := \inf \{c(\mu) : \mu \in V_+(X \times Y), \pi_1 \mu = \sigma_1, \pi_2 \mu = \sigma_2\}, \quad (5.6)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(c, \sigma_1, \sigma_2; C^b(X) \times C^b(Y)) \\ := \sup \{ \langle u, \sigma_1 \rangle - \langle v, \sigma_2 \rangle : (u, v) \in C^b(X) \times C^b(Y), \\ u(x) - v(y) \leq c(x, y) \forall (x, y) \in X \times Y \}. \end{aligned} \quad (5.7)$$

ТЕОРЕМА 5.4. Пусть $c: X \times Y \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ представима в виде (5.4), где $M \subseteq C^b(X) \times C^b(Y)$. Продолжим c на $Z \times Z$ по формуле (5.5) с $\mathbf{n}_1(X) = C^b(X), \mathbf{n}_2(Y) = C^b(Y)$. Тогда $\mathbf{n}(Z) = C^b(Z)$ и для любых $\sigma_1 \in V_+(X), \sigma_2 \in V_+(Y), \sigma_1 X = \sigma_2 Y$, выполняются равенства

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(c, \sigma_1, \sigma_2; X, Y) &= \mathcal{A}(c^Z, \rho_{\sigma_1, \sigma_2}), \\ \mathcal{D}(c, \sigma_1, \sigma_2; C^b(X) \times C^b(Y)) &= \mathcal{B}(c^Z, \rho_{\sigma_1, \sigma_2}). \end{aligned}$$

Доказательство аналогично доказательству теоремы 5.3 с очевидной заменой леммы 3.2 на теорему 1.1. I.

Теоремы 5.3 и 5.4 показывают, что экстремальные задачи с фиксированными маргинальными мерами типа (5.1) или (5.6) суть специальные частные случаи задач о перемещении масс (с фиксированной разностью маргинальных мер) типа (4.1) и (1.1) с функцией стоимости c^Z на $Z \times Z$, представимой в виде (4.2) или (1.4), соответственно. С другой стороны, согласно теоремам 1.1. I и 2.1. I и соответствующим теоремам о редукции задача о перемещении масс с фиксированной

разностью маргинальных мер сводится к задаче с фиксированными маргинальными мерами и редуцированной функцией стоимости.

Для классической задачи Монжа–Канторовича обе постановки (с фиксированной разностью маргинальных мер и с фиксированными маргинальными мерами) эквивалентны – факт, известный еще Л. В. Канторовичу. В [9] получено необходимое и достаточное условие такой эквивалентности для общего топологического варианта задачи о перемещении масс. В следующей теореме дана аналогичная характеристизация функций стоимости, для которых указанная эквивалентность имеет место в нетопологическом случае.

ТЕОРЕМА 5.5. *Предположим, что функция стоимости $c: X \times X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ равна нулю на диагонали. Следующие утверждения равносильны:*

- (а) $\mathcal{A}'_1(c, \rho) = \mathcal{C}_1(c, \rho_+, \rho_-; X, X) \quad \forall \rho \in l^1_0(X)$;
- (б) $\mathcal{A}'_1(c, 0) = 0$ и $\mathcal{A}'_1(c, \varepsilon_x - \varepsilon_y) = \mathcal{C}_1(c, \varepsilon_x, \varepsilon_y; X, X) \quad \forall x, y \in X, x \neq y$;
- (в) c удовлетворяет неравенству треугольника.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (а) $\Rightarrow$ (б). Очевидно.

(б) $\Rightarrow$ (в). Так как $c(x, x) = 0 \quad \forall x \in X$, достаточно проверить выполнение неравенства треугольника для точек $x, z, y, x \neq z, y \neq z$. Поскольку

$$\begin{aligned} c(x, y) &= \mathcal{C}_1(c, \varepsilon_x, \varepsilon_y; X, X) \quad \forall x, y \in X, \quad x \neq y, \\ c(x, x) &= 0 = \mathcal{A}'_1(c, 0) = \mathcal{A}'_1(c, \varepsilon_x - \varepsilon_x) \quad \forall x \in X \end{aligned}$$

и функционал $\mathcal{A}'_1(c, \rho)$ полуаддитивен по ρ , имеем

$$\begin{aligned} c(x, y) &= \mathcal{A}'_1(c, \varepsilon_x - \varepsilon_y) \leq \mathcal{A}'_1(c, \varepsilon_x - \varepsilon_z) + \mathcal{A}'_1(c, \varepsilon_z - \varepsilon_y) \\ &= \mathcal{C}_1(c, \varepsilon_x, \varepsilon_z; X, X) + \mathcal{C}_1(c, \varepsilon_z, \varepsilon_y; X, X) \\ &= c(x, z) + c(z, y). \end{aligned}$$

(в) $\Rightarrow$ (а). Это вытекает из следствия 3.1.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.2. Условие $c(x, x) = 0 \quad \forall x \in X$ не может быть отброшено: функция

$$c(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{при } x \neq y, \\ 3 & \text{при } x = y \end{cases}$$

не удовлетворяет неравенству треугольника, но утверждения (а) и (б) для нее верны.

Приведем пример, показывающий, что в ситуации теоремы 5.5 соотношение двойственности

$$\mathcal{A}'_1(c, \rho) = \mathcal{B}_1(c, \rho; l^\infty(X))$$

может не выполняться.

ПРИМЕР 5.1. Возьмем $c(x, y) = u(x) - u(y)$, где $u: X \rightarrow \mathbb{R}$, $u \notin l^\infty(X)$. Очевидно, $c(x, x) = 0 \quad \forall x \in X$ и все утверждения (а), (б), (в) теоремы 5.5 выполнены, однако $\forall x, y \in X, x \neq y$, имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{A}'_1(c, \varepsilon_x - \varepsilon_y) &= u(x) - u(y) > -\infty, \\ \mathcal{B}_1(c, \varepsilon_x - \varepsilon_y; l^\infty(X)) &= -\infty. \end{aligned}$$

Список литературы

1. Канторович Л. В. О перемещении масс // ДАН СССР. 1942. Т. 37. № 7–8. С. 227–229.
2. Канторович Л. В., Рубинштейн Г. Ш. Об одном функциональном пространстве и некоторых экстремальных задачах // ДАН СССР. 1957. Т. 115. № 6. С. 1058–1061.
3. Канторович Л. В., Рубинштейн Г. Ш. Об одном пространстве вполне аддитивных функций // Вестн. ЛГУ. Сер. матем., мех. и астр. 1958. Т. 7. № 8. С. 52–59.
4. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ. М.: Наука, 1984.
5. Monge G. Mémoire sur la théorie des déblais et des remblais // Histoire de l'Académie Royale des Sciences de Paris, avec les Mémoires de Mathématique et de Physique. 1781. P. 666–704.
6. Левин В. Л., Милютин А. А. Задача о перемещении масс с разрывной функцией стоимости и массовая постановка проблемы двойственности выпуклых экстремальных задач // УМН. 1979. Т. 34. № 3. С. 3–68.
7. Левин В. Л. Задача о перемещении масс в топологическом пространстве и вероятностные меры на произведении двух пространств, обладающие заданными маргинальными мерами // ДАН СССР. 1984. Т. 276. № 5. С. 1059–1064.
8. Левин В. Л. Измеримые селекторы многозначных отображений и задача о перемещении масс // ДАН СССР. 1987. Т. 292. № 5. С. 1048–1053.
9. Levin V. L. General Monge–Kantorovich problem and its applications in measure theory and mathematical economics // Functional analysis, optimization and mathematical economics (A collection of papers dedicated to the memory of L. V. Kantorovich). New York–Oxford: Oxford University Press, 1990. P. 141–176.
10. Левин В. Л. Двойственность и аппроксимация в задаче о перемещении масс // Математическая экономика и функциональный анализ. М.: Наука, 1974. С. 94–108.
11. Левин В. Л. К задаче о перемещении масс // ДАН СССР. 1975. Т. 224. № 5. С. 1016–1019.
12. Левин В. Л. О теоремах двойственности в задаче Монжа–Канторовича // УМН. 1977. Т. 32. № 3. С. 171–172.
13. Левин В. Л. Задача Монжа–Канторовича о перемещении масс // Методы функционального анализа в математической экономике. М.: Наука, 1978. С. 23–55.
14. Левин В. Л. Некоторые приложения двойственности для задачи о перемещении масс с полунепрерывной снизу функцией стоимости. Замкнутые предпочтения и теория Шоке // ДАН СССР. 1981. Т. 260. № 2. С. 284–288.
15. Левин В. Л. Теоремы об измеримой полезности для замкнутых и лексикографических отношений предпочтения // ДАН СССР. 1983. Т. 270. № 3. С. 542–546.
16. Левин В. Л. Теорема о непрерывной полезности для замкнутых предпорядков на метризуемом σ -компактном пространстве // ДАН СССР. 1983. Т. 273. № 4. С. 800–804.
17. Левин В. Л. Липшицевы предпорядки и липшицевы функции полезности // УМН. 1984. Т. 39. № 6. С. 199–200.
18. Левин В. Л. Функционально замкнутые предпорядки и сильное стохастическое доминирование // ДАН СССР. 1985. Т. 283. № 1. С. 30–34.
19. Levin V. L. Extremal problems with probability measures, functionally closed preorders and strong stochastic dominance // Stochastic optimization. Lecture Notes in Control and Inform. Sci. V. 81. Berlin: Springer-Verlag, 1986. P. 435–447.
20. Левин В. Л. Формула для оптимального значения задачи Монжа–Канторовича с гладкой функцией стоимости и характеристика циклически монотонных отображений // Матем. сб. 1990. Т. 181. № 12. С. 1694–1709.
21. Levin V. L. Some applications of set-valued mappings in mathematical economics // J. Math. Econom. 1991. V. 20. P. 69–87.
22. Рачев С. Т. Задача Монжа–Канторовича о перемещении масс и ее применения в стохастике // Теория вероятностей и ее прим. 1984. Т. 29. № 4. С. 625–653.
23. Levin V. L., Rachev S. T. New duality theorems for marginal problems with some applications in stochastics // Stability problems for stochastic models. Lecture Notes in Math. V. 1412. Berlin: Springer-Verlag, 1989. P. 137–171.

24. *Levin V. L.* Duality for a non-topological version of the mass transportation problem // Distributions with Fixed Marginals and Related Topics. IMS Lecture Notes. Monograph Ser. 1996. V. 28 (to appear).
25. *Levin V. L.* A superlinear multifunction arising in connection with mass transfer problems // Set-Valued Anal. 1996. V. 4. P. 41–65.
26. *Levin V. L.* Reduced cost functions and their applications // J. Math. Econom. (to appear).
27. *Пич А.* Ядерные локально выпуклые пространства. М.: Мир, 1967.
28. *Гельфанд И. М., Райков Д. А., Шилов Г. Е.* Коммутативные нормированные кольца. М.: Физматгиз, 1960.
29. *Наймарк М. А.* Нормированные кольца. М.: Наука, 1968.
30. *Kellerer H. G.* Duality theorems for marginal problems // Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und verw. Gebiete. 1984. V. 67. P. 399–432.
31. *Судаков В. Н.* Геометрические проблемы теории бесконечномерных вероятностных распределений // Труды МИАН. 1976. Т. 141.
32. *Ramachandran D., Rüschendorf L.* A general duality theorem for marginal problems // Probab. Theory Related Fields. 1995. V. 101. P. 311–319.
33. *Ramachandran D., Rüschendorf L.* Duality and perfect probability spaces // Proc. Amer. Math. Soc. 1996. V. 124. P. 2223–2228.

Центральный экономико-математический институт РАН,
Москва

Поступила в редакцию
30.01.1996