Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. М. Тригуб, Мультипликаторы в пространствах Харди $H_p(D^m)$ при $p \in (0, 1]$ и аппроксимативные свойства методов суммирования степенных рядов, *Матем. сб.*, 1997, том 188, номер 4, 145–160

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm221>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.166.219.16

26 апреля 2023 г., 08:44:01

УДК 517.5

Р. М. Тригуб

**Мультипликаторы в пространствах Харди $H_p(D^m)$
при $p \in (0, 1]$ и аппроксимативные свойства
методов суммирования степенных рядов**

В статье указаны условия на числовую последовательность $\{\lambda_k\}_0^\infty$ достаточные для того, чтобы оператор-мультипликатор

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k c_k z^k$$

действовал непрерывно в пространстве Харди $H_p(D)$ при данном $p \in (0, 1]$ (сразу в случае поликруга D^m). Найдены и необходимые условия.

Далее эти результаты применяются для определения точного порядка приближения средними Бохнера–Рисса кратных степенных рядов и вида K -функционала пары пространств, определяемых полигармоническим оператором.

Библиография: 20 названий.

Мультипликаторы тригонометрических рядов Фурье в пространстве L_p на m -мерном торе $\mathbb{T}^m$ при $p \in [1, +\infty]$ изучаются давно (см., например, [1]). Пространство $H_p(D^m)$, D^m – единичный поликруг в $\mathbb{C}^m$, при $p \geq 1$ – подпространство L_p . Точнее, любая функция из $H_p(D^m)$ в этом случае характеризуется тем, что ее предельная функция на торе $\mathbb{T}^m$, являющемся остовом D^m , принадлежит $L_p(\mathbb{T}^m)$ и имеет ряд Фурье степенного типа, т.е. со спектром в первом октанте $\mathbb{R}_+^m$ (см., например, [2]). Сужение любого мультипликатора в L_p при $p \in [1, +\infty]$ является, конечно, мультипликатором в H_p , а при $p \in (1, +\infty)$ в силу теоремы Рисса о проекторах любой мультипликатор в H_p , продолженный нулем, является мультипликатором в L_p .

Иная картина при $p \in (0, 1)$. У функции из квазинормированного пространства L_p нет ряда Фурье, если она не из L_1 . Более того, как хорошо известно, в L_p при $p \in (0, 1)$ вообще нет ненулевых линейных непрерывных функционалов. А в H_p при любом $p > 0$ есть ряды Тейлора.

В настоящей работе методы и результаты работы [3], в которой исследуются некоторые вопросы теории мультипликаторов рядов Фурье в $L_p(\mathbb{T}^m)$ при $p \geq 1$ (особенно, при $p = \infty$) и их применение в теории приближений и интерполяции пространств гладких функций (см. также [4], [5]), переносятся на случай степенных рядов функций из H_p при $p \in (0, 1)$.

В §1 излагаются основные результаты об оценке сверху норм мультипликаторов (теоремы 1–3).

Важнейшим частным случаем теоремы 1 является

ТЕОРЕМА 1'. Для любого $p \in (0, 1]$ существует постоянная $\gamma = \gamma(p)$ такая, что $\forall \{\lambda_k\}_0^N$ и $\forall f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k \in H_p(D)$

$$\left\| \sum_{k=0}^N \lambda_k c_k (\cdot)^k \right\|_{H_p(D)} \leq \gamma N^{1/p-1} \min_{\{\lambda_k\}_{-N}^{-1}} \left(\int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{k=-N}^N \lambda_k e^{ikt} \right|^p dt \right)^{1/p} \|f\|_{H_p(D)}.$$

Эта теорема получена сразу в случае поликруга $D^m \quad \forall m \in \mathbb{N}$. Указаны и необходимые условия (см. б) в теореме 2), с помощью которых найден критический показатель $m/p - (m+1)/2$ для сферических средних Бохнера–Рисса степенных рядов.

В §2 показаны некоторые применения к вопросам теории приближений функций линейными средними степенных рядов. Отметим, что подобным вопросам в H_p при $p \in (0, 1)$ посвящены работы [6]–[13]. Речь идет о точном порядке приближения индивидуальной функции средними Бохнера–Рисса (см. теорему 4) и формуле для K -функционала (см. следствие из теоремы 5). В одномерном случае эти результаты были получены ранее (см. [12], [13] и [9], соответственно). Но при $m = 1$ разные модули гладкости эквивалентны между собой (см. [14, теорема 7]). А при $m \geq 2$, как показано автором ранее, обычные модули гладкости при $p = 1$ для указанной цели не подходят (см. [3, теорема 8]). Приходится вводить специальные модули гладкости. Доказательства основаны на теоремах о мультипликаторах §1.

Основные результаты работы доложены на Международной конференции “Теория приближения и задачи вычислительной математики” (Днепропетровск, 26–28 мая 1993 г.) и анонсированы в [14].

§1. Мультипликаторы степенных рядов

Пусть $\mathbb{R}^m$ – m -мерное вещественное евклидово пространство, $(x, y) = \sum_{j=1}^m x_j y_j$, $|x| = (x, x)^{1/2}$, $Q^m = [-\pi, \pi]^m$, $\mathbb{R}_+^m$ – подмножество точек из $\mathbb{R}^m$ с неотрицательными координатами, $\mathbb{Z}^m$ – с целыми координатами, $\mathbb{N}^m$ – с натуральными координатами; $\mathbb{Z}_+^m = \mathbb{Z}^m \cap \mathbb{R}_+^m$; $x \leq y$, если $y - x \in \mathbb{R}_+^m$ (при $m = 1$ верхний индекс опускаем); $\text{supp } f$ – носитель функции f . Через $\gamma(a, b, c)$ будем обозначать некоторые положительные константы, зависящие лишь от a, b и c .

Единичный поликруг в $\mathbb{C}^m$ обозначим $D^m = \{z = (z_1, \dots, z_m) : |z_j| < 1, 1 \leq j \leq m\}$. Любая функция из $H_p(D^m)$, $p > 0$, раскладывается в поликруге D^m в абсолютно сходящийся степенной ряд

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}_+^m} c_k z^k, \quad z^k = z_1^{k_1} \dots z_m^{k_m}, \\ f_\rho(z) &= f(\rho z) = f(\rho_1 z_1, \dots, \rho_m z_m); \\ \|f\|_{H_p} &= \sup_{0 < \rho_j < 1, 1 \leq j \leq m} \|f_\rho\|_p \\ &= \sup_{0 < \rho_j < 1} \left(\int_{-\pi}^{\pi} du_1 \dots \int_{-\pi}^{\pi} |f(\rho_1 e^{iu_1}, \dots, \rho_m e^{iu_m})|^p du_m \right)^{1/p} < \infty. \end{aligned}$$

Если функция аналитична в поликруге D^m и непрерывна в его замыкании, то наибольшее значение ее модуль принимает на торе $\mathbb{T}^m = \{z : |z_j| = 1, 1 \leq j \leq m\}$.

(см. [2]). Подобный принцип максимума модуля справедлив и для функций в поликольце.

Установим теперь для функций из пространств Харди в поликольце неравенство, связывающее разные метрики. В случае $m = 1$ и $0 < p < q = 1$ это неравенство приводится в обзорной статье [8].

ЛЕММА 1. Если f аналитична в поликольце $0 \leq r_j < |z_j| < R_j$, $1 \leq j \leq m$, и непрерывна в его замыкании, то при $0 < p \leq q \leq \infty$ и $\rho \in (r, R)$

$$\|f_\rho\|_q \leq \prod_{j=1}^m \left(\frac{2^{(m+1)/2} \rho_j}{\pi \min\{\rho_j - r_j, R_j - \rho_j\}} \right)^{1/p-1/q} \max_{v: v_j=r_j, R_j, 1 \leq j \leq m} \|f_v\|_p.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $p = q$ это неравенство следует из субгармоничности $|f|^p$. Рассмотрим теперь случай $0 < p < q = \infty$. Пусть сначала $m = 1$. Считаем для определенности, что $|z_0| = \rho$ и $\rho \in (r, (R+r)/2)$. В силу субгармоничности

$$|f(z_0)|^p = \frac{1}{\pi(\rho-r)^2} \iint_{|z-z_0| \leq \rho-r} |f(z)|^p dx dy.$$

Расширяя область интегрирования (круг) до кольца и переходя к повторному интегралу, получаем, что $|f(z_0)|^p$ не больше

$$\frac{1}{\pi(\rho-r)^2} \iint_{r \leq |z| \leq 2\rho-r} |f(z)|^p dx dy = \frac{1}{\pi(\rho-r)^2} \int_r^{2\rho-r} s ds \int_{-\pi}^{\pi} |f(se^{it})|^p dt.$$

Используя соответствующее неравенство при $p = q$, имеем

$$\|f_\rho\|_\infty^p = \max_{|z|=\rho} |f(z)|^p \leq \frac{1}{\pi(\rho-r)^2} \max_{s=r, R} \|f_s\|_p^p \int_r^{2\rho-r} s ds = \frac{2\rho}{\pi(\rho-r)} \max_{s=r, R} \|f_s\|_p^p.$$

А теперь при $m \geq 2$ воспользуемся индукцией по числу переменных. Предположим, что искомое неравенство при $0 < p < q = \infty$ верно для переменных $z_2, \dots, z_m$, т.е.

$$\begin{aligned} |f(\rho_1 e^{iu_1}, \dots, \rho_m e^{iu_m})|^p &\leq \prod_{j=2}^m \left(\frac{2^{m/2} \rho_j}{\pi \min\{\rho_j - r_j, R_j - \rho_j\}} \right) \\ &\times \max_{v_j=r_j, R_j} \int_{-\pi}^{\pi} du_2 \cdots \int_{-\pi}^{\pi} |f(\rho_1 e^{iu_1}, v_2 e^{iu_2}, \dots, v_m e^{iu_m})|^p du_m. \end{aligned}$$

Проинтегрируем это неравенство по u_1 на $[-\pi, \pi]$ и учтем, что для любых N положительных интегрируемых функций

$$\int_E \max_{k \in [1, N]} f_k(x) dx \leq \int_E \sum_{k=1}^N f_k(x) dx \leq N \max_{k \in [1, N]} \int_E f_k(x) dx.$$

Имеем

$$\begin{aligned} &\int_{-\pi}^{\pi} |f(\rho_1 e^{iu_1}, \dots, \rho_m e^{iu_m})|^p du_1 \\ &\leq 2^{m-1} \prod_{j=2}^m \left(\frac{2^{m/2} \rho_j}{\pi \min\{\rho_j - r_j, R_j - \rho_j\}} \right) \max_{v_1=\rho_1, v_j=r_j, R_j, 2 \leq j \leq m} \|f_v\|_p^p. \end{aligned}$$

Воспользуемся теперь доказанным выше неравенством по z_1 при $q = \infty$

$$|f(\rho_1 e^{iu_1}, \dots, \rho_m e^{iu_m})|^p \leq \frac{2\rho_1}{\pi \min\{\rho_1 - r_1, R_1 - \rho_1\}} \times \max_{v_1=r_1, R_1} \int_{-\pi}^{\pi} |f(v_1 e^{iu_1}, \rho_2 e^{iu_2}, \dots, \rho_m e^{iu_m})|^p du_1.$$

Из последних двух неравенств следует искомое $\forall p > 0$ и $q = \infty$. При $q \in (p, +\infty)$ очевидно, что

$$\|f_\rho\|_q \leq \|f_\rho\|_\infty^{1-p/q} \|f_\rho\|_p^{p/q}.$$

Применяя доказанное неравенство при $q = \infty$ и $q = p$, имеем

$$\|f_\rho\|_q \leq \prod_{j=1}^m \left(\frac{2^{(m+1)/2} \rho_j}{\pi \min\{\rho_j - r_j, R_j - \rho_j\}} \right)^{1/p-1/q} \max_{v:v_j=r_j, R_j} \|f_v\|_p,$$

что и требовалось доказать.

Числовая последовательность (матрица) $\{\lambda_k\}_{k \in \mathbb{Z}_+^m}$ называется *мультипликативной* в $H_p(D^m)$ (будем писать: $\{\lambda_k\} \in M_p$), если для любой функции $f \in H_p(D^m)$ с коэффициентами Тейлора $\{c_k\}$

$$(\Lambda f)(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}_+^m} \lambda_k c_k z^k \in H_p(D^m)$$

и существует константа γ такая, что

$$\forall f \in H_p(D^m) \quad \|\Lambda f\|_{H_p} \leq \gamma \|f\|_{H_p}, \quad \|\{\lambda_k\}\|_{M_p} = \inf \gamma.$$

А) При $0 < p < q \leq 2$ $M_p \subset M_q$ (вложение).

Для доказательства нужно заметить, что $\|\{\lambda_k\}\|_{M_2} = \sup_k |\lambda_k| \leq \|\{\lambda_k\}\|_{M_p}$ (достаточно положить $f(z) = z^k$) и применить соответствующую интерполяционную теорему (см., например, [15, с. 94]). Используя двойственность (см., например, [1]), можно сделать вывод, что $M_p \subset M_q$ при $p \in (0, 1]$ и $q \in [1, +\infty]$.

Следующие три свойства мультипликаторов очевидны.

Б) $\|\{\lambda_k \mu_k\}\|_{M_p} \leq \|\{\lambda_k\}\|_{M_p} \|\{\mu_k\}\|_{M_p}$, $p > 0$.

В) $\|\{\lambda_k + \mu_k\}\|_{M_p}^p \leq \|\{\lambda_k\}\|_{M_p}^p + \|\{\mu_k\}\|_{M_p}^p$, $p \in (0, 1]$.

Г) Пусть $\{\lambda_k\}$ и $\{\tilde{\lambda}_k\}$ — две такие последовательности, что из $\lambda_k = 0$ следует $\tilde{\lambda}_k = 0$, а $K = \inf \|\{\tilde{\lambda}_k/\lambda_k\}\|_{M_p} < \infty$ (нижняя грань относится к выбору значений дробей вида $0/0$), $p > 0$. Тогда для любой функции f такой, что $\Lambda f \in H_p$ выполняется неравенство $\|\tilde{\Lambda} f\|_{H_p} \leq K \|\Lambda f\|_{H_p}$ (принцип сравнения).

Если $\varphi: \mathbb{R}_+^m \rightarrow \mathbb{C}$, то будем писать $\varphi \in M_p$, если

$$\|\varphi\|_{M_p} = \sup_{\varepsilon > 0} \|\{\varphi(\varepsilon k)\}\|_{M_p} < \infty.$$

Д) Если для любой точки из $\mathbb{R}_+^m$, включая бесконечно удаленную, существует окрестность, где φ совпадает с некоторой функцией из M_p , то и $\varphi \in M_p$ (локальное свойство).

Доказательство основано на разбиении единицы и является стандартным.

Укажем теперь достаточные условия принадлежности M_p .

ЛЕММА 2. Пусть при некотором $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_m)$, $\delta_j > 0$, $1 \leq j \leq m$, последовательность $\{\lambda_k e^{(\delta, k)}\}_{k \in \mathbb{Z}_+^m}$ ограничена. Тогда при любом $p \in (0, 1]$ и некоторой константе $\gamma = \gamma(p, m)$

$$\|\{\lambda_k\}\|_{M_p} \leq \gamma \inf_{\{\lambda_k\}_{k \in \mathbb{Z}^m \setminus \mathbb{Z}_+^m}} \inf_{e^{-\delta_j} < r_j < R_j < 1, 1 \leq j \leq m} \left(\prod_{j=1}^m \frac{1}{R_j - r_j} \right)^{1/p-1} \\ \times \max_{\rho_j = r_j, R_j} \left(\int_{Q^m} \left| \sum_{k \in \mathbb{Z}^m} \lambda_k \rho^{-k} e^{i(k, u)} \right|^p du \right)^{1/p}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $w_j \in (0, 1)$, $\rho_j \in (e^{-\delta_j}, 1)$, $1 \leq j \leq m$, и $\{\lambda_k\}_{k \in \mathbb{Z}^m \setminus \mathbb{Z}_+^m}$ — произвольная ограниченная последовательность, а $K(z) = \sum_k \lambda_k z^{-k}$. В силу ортогональности тригонометрической системы (все ряды сходятся абсолютно) $\forall v \in \mathbb{R}^m$

$$(\Lambda f)_w(e^{iv}) = \sum_{k \in \mathbb{Z}_+^m} \lambda_k w^k c_k e^{i(k, v)} = \frac{1}{(2\pi)^m} \int_{Q^m} f_w(\rho e^{iu}) K(\rho e^{i(u-v)}) du$$

и, значит,

$$|(\Lambda f)_w(e^{iv})|^p \leq \frac{1}{(2\pi)^{mp}} \left(\int_{Q^m} |F(\rho e^{iu}, v)| du \right)^p,$$

где $F(z, v) = f_w(z) K(ze^{-iv})$ аналитична по z в поликолье $e^{-\delta_j} < |z_j| < 1$, $1 \leq j \leq m$. Применяем лемму 1 при $0 < p \leq q = 1$ и $e^{-\delta_j} < r_j < \rho_j < R_j < 1$, $1 \leq j \leq m$,

$$\left(\int_{Q^m} |F(\rho e^{iu}, v)| du \right)^p \leq \prod_{j=1}^m \left(\frac{2^{(m+1)/2} \rho_j}{\pi \min\{\rho_j - r_j, R_j - \rho_j\}} \right)^{1-p} \\ \times \max_{s_j = r_j, R_j} \int_{Q^m} |F(se^{iu}, v)|^p du.$$

Интегрируя обе части по v на Q^m и учитывая периодичность, имеем

$$\|(\Lambda f)_w\|_p^p \leq \frac{2^m}{(2\pi)^{mp}} \prod_{j=1}^m \left(\frac{2^{(m+1)/2} \rho_j}{\pi \min\{\rho_j - r_j, R_j - \rho_j\}} \right)^{1-p} \\ \times \max_{s_j = r_j, R_j} \|f_{sw}\|_p^p \int_{Q^m} |K(se^{-iv})|^p dv.$$

Используя монотонность $\|f_u\|_p$ и полагая $\rho_j = \frac{1}{2}(r_j + R_j)$, $1 \leq j \leq m$, приходим к неравенству

$$\|(\Lambda f)_w\|_p^p \leq \left(\prod_{j=1}^m \left(\frac{2^{(m+5)/2}}{\pi(R_j - r_j)} \right)^{1-p} \right) \|f_{Rw}\|_p^p \max_{s_j = r_j, R_j} \int_{Q^m} |K(se^{-iv})|^p dv,$$

из которого следует искомое. Лемма доказана.

Рассмотрим теперь случай финитной последовательности.

ТЕОРЕМА 1. Для любого $p \in (0, 1]$ существует постоянная $\gamma = \gamma(p, m)$ такая, что $\forall N \in \mathbb{N}^m$

$$\|\{\lambda_k\}_{0 \leq k \leq N}\|_{M_p} \leq \gamma \left(\prod_{j=1}^m N_j \right)^{1/p-1} \left(\int_{Q^m} \left| \sum_{-N \leq k \leq N} \lambda_k e^{i(k,u)} \right|^p du \right)^{1/p},$$

где λ_k при $k \notin [0, N]$ можно выбирать произвольно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через T_N тригонометрический полином с коэффициентами $\{\lambda_k\}$, $-N \leq k \leq N$. В неравенстве леммы 2 положим $\delta_j = 1/N_j$, $r_j = e^{-3/(4N_j)}$, $R_j = e^{-1/(4N_j)}$ и воспользуемся неравенством типа Бернштейна из [16], $p \in (0, 1]$:

$$\int_{Q^m} \left| \frac{\partial}{\partial u_j} T_N(u) \right|^p du \leq N_j^p \int_{Q^m} |T_N(u)|^p du, \quad 1 \leq j \leq m.$$

При $\rho_j = e^{-\theta_j/N_j}$, $|\theta_j| \leq 1$, $1 \leq j \leq m$, раскладывая экспоненту в степенной ряд получаем последовательно

$$\begin{aligned} \sum_{-N \leq k \leq N} \lambda_k \rho^{-k} e^{i(k,u)} &= \sum_k \lambda_k e^{i(k,u)} e^{\sum \theta_j k_j / N_j} \\ &= \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{s!} \sum_k \left(\sum_{j=1}^m \theta_j \frac{k_j}{N_j} \right)^s \lambda_k e^{i(k,u)} \\ &= \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-i)^s}{s!} \left(\sum_{j=1}^m \frac{\theta_j}{N_j} \frac{\partial}{\partial u_j} \right)^s T_N(u). \end{aligned}$$

Но при $p \in (0, 1]$

$$\begin{aligned} \int_{Q^m} \left| \left(\sum_{j=1}^m \frac{\theta_j}{N_j} \frac{\partial}{\partial u_j} \right) T_N(u) \right|^p du &\leq \sum_{j=1}^m \frac{|\theta_j|^p}{N_j^p} \int_{Q^m} \left| \frac{\partial}{\partial u_j} T_N(u) \right|^p du \\ &\leq \sum_{j=1}^m \frac{1}{N_j^p} N_j^p \|T_N\|_p^p = m \|T_N\|_p^p \end{aligned}$$

и, значит, $\forall s \in \mathbb{N}$

$$\int_{Q^m} \left| \left(\sum_{j=1}^m \frac{\theta_j}{N_j} \frac{\partial}{\partial u_j} \right)^s T_N(u) \right|^p du \leq m^s \|T_N\|_p^p.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \int_{Q^m} \left| \sum_{-N \leq k \leq N} \lambda_k \rho^{-k} e^{i(k,u)} \right|^p du &\leq \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{(s!)^p} \int_{Q^m} \left| \left(\sum_{j=1}^m \frac{\theta_j}{N_j} \frac{\partial}{\partial u_j} \right)^s T_N(u) \right|^p du \\ &\leq \sum_{s=0}^{\infty} \frac{m^s}{(s!)^p} \int_{Q^m} \left| \sum_{-N \leq k \leq N} \lambda_k e^{i(k,u)} \right|^p du. \end{aligned}$$

Осталось учесть, что

$$R_j - r_j = e^{-1/(4N_j)} - e^{-3/(4N_j)} \geq \frac{1}{2} e^{-3/4} \frac{1}{N_j}.$$

Теорема 1 доказана.

Теперь рассмотрим случай финитной функции.

ТЕОРЕМА 2. а) Пусть $\varphi \in C(\mathbb{R}^m)$ и $\text{supp } \varphi \subset [-N, N]$. Если преобразование Фурье $\widehat{\varphi} \in L_p(\mathbb{R}^m)$ при некотором $p \in (0, 1]$, то

$$\|\varphi\|_{M_p} \leq \gamma(p, m) \left(\prod_{j=1}^m N_j \right)^{1/p-1} \left(\int_{\mathbb{R}^m} |\widehat{\varphi}(x)|^p dx \right)^{1/p}.$$

б) Если $\varphi \in C(\mathbb{R}_+^m)$ и $\varphi \in M_p$, то для любой внутренней точки из $\mathbb{R}_+^m$ существует финитная функция ψ , которая совпадает с φ в некоторой окрестности этой точки и $\widehat{\psi} \in L_p(\mathbb{R}^m)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) После применения теоремы 1 при $\lambda_k = \varphi(\varepsilon k)$ (с заменой N на N/ε) нужно оценить сверху L_p -норму тригонометрического полинома. Преобразование Фурье

$$\widehat{\varphi}(y) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right)^m \int_{\mathbb{R}^m} \varphi(x) e^{-i(x,y)} dx$$

ограничено и принадлежит $L_p(\mathbb{R}^m)$. Следовательно, $\widehat{\varphi} \in L(\mathbb{R}^m)$ и имеет место формула обращения (см., например, [17, с. 19])

$$\varphi(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right)^m \int_{\mathbb{R}^m} \widehat{\varphi}(y) e^{i(x,y)} dy.$$

В силу формулы суммирования Пуассона (см. [17, с. 281])

$$\sum_k \widehat{\varphi}\left(\frac{x + 2\pi k}{\varepsilon}\right) = \left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{2\pi}}\right)^m \sum_k \varphi(\varepsilon k) e^{-i(k,x)}$$

(справа – ряд Фурье левой части). После простых преобразований получаем

$$\begin{aligned} \varepsilon^{m(p-1)} \int_{Q^m} \left| \sum_k \varphi(\varepsilon k) e^{i(k,x)} \right|^p dx &= \varepsilon^{m(p-1)} \int_{Q^m} \left| \sum_k \varphi(\varepsilon k) e^{-i(k,x)} \right|^p dx \\ &= \frac{(\sqrt{2\pi})^{mp}}{\varepsilon^m} \int_{Q^m} \left| \sum_k \widehat{\varphi}\left(\frac{x + 2\pi k}{\varepsilon}\right) \right|^p dx \\ &\leq \frac{(\sqrt{2\pi})^{mp}}{\varepsilon^m} \sum_k \int_{Q^m} \left| \widehat{\varphi}\left(\frac{x + 2\pi k}{\varepsilon}\right) \right|^p dx \\ &= \frac{(\sqrt{2\pi})^{mp}}{\varepsilon^m} \sum_k \int_{Q^m + 2\pi k} \left| \widehat{\varphi}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \right|^p dx \\ &= \frac{(\sqrt{2\pi})^{mp}}{\varepsilon^m} \int_{Q^m} \left| \widehat{\varphi}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \right|^p dx \\ &= (\sqrt{2\pi})^{mp} \int_{\mathbb{R}^m} |\widehat{\varphi}(x)|^p dx. \end{aligned} \quad (1)$$

Таким образом, $\|\{\varphi(\varepsilon k)\}\|_{M_p}^p$ не больше, чем

$$\begin{aligned} \gamma^p \left(\prod_{j=1}^m N_j \right)^{1-p} \varepsilon^{m(1-p)} \int_{Q^m} \left| \sum_k \varphi(\varepsilon k) e^{i(k,u)} \right|^p du \\ \leq \gamma^p \left(\prod_{j=1}^m N_j \right)^{1-p} (\sqrt{2\pi})^{mp} \int_{\mathbb{R}^m} |\widehat{\varphi}(x)|^p dx. \end{aligned}$$

б) Очевидно, что преобразование Фурье любой финитной функции из $C^\infty(\mathbb{R}^m)$ принадлежит $L_p(\mathbb{R}^m) \forall p > 0$. Пусть теперь $h \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$, $\text{supp } h \subset \mathbb{R}_+^m$ и $h = 1$ в некоторой окрестности заданной внутренней точки из $\mathbb{R}_+^m$.

По определению мультипликатора $\forall \varepsilon > 0$

$$\int_{Q^m} \left| \sum_{k \in \mathbb{Z}_+^m} \varphi(\varepsilon k) h(\varepsilon k) e^{i(k, x)} \right|^p dx \leq \|\varphi\|_{M_p}^p \int_{Q^m} \left| \sum_k h(\varepsilon k) e^{i(k, x)} \right|^p dx.$$

Применяя неравенство (1), получаем

$$\varepsilon^{m(p-1)} \int_{Q^m} \left| \sum_k \varphi(\varepsilon k) h(\varepsilon k) e^{i(k, x)} \right|^p dx \leq \|\varphi\|_{M_p}^p (\sqrt{2\pi})^{mp} \int_{\mathbb{R}^m} |\widehat{h}(x)|^p dx$$

или после замены $x \rightarrow -\varepsilon x$

$$\int_{Q^m/\varepsilon} \left| \varepsilon^m \sum_k \varphi(\varepsilon k) h(\varepsilon k) e^{-i(\varepsilon k, x)} \right|^p dx \leq (\sqrt{2\pi})^{mp} \|\varphi\|_{M_p}^p \|\widehat{h}\|_p^p.$$

Пусть $M > 0$. Заменяя Q^m/ε на $[-M, M]^m$ при достаточно малом ε и переходя к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$ (под знаком интеграла стоит риманова интегральная сумма), имеем

$$\int_{[-M, M]^m} \left| \int \varphi(u) h(u) e^{-i(u, x)} du \right|^p dx \leq (\sqrt{2\pi})^{mp} \|\varphi\|_{M_p}^p \|\widehat{h}\|_p^p.$$

Осталось устремить $M \rightarrow +\infty$ и положить $\psi = \varphi h$.

Укажем удобные для проверки достаточные условия для того, чтобы $\varphi \in M_p$ с предположением финитности и без него, а значит, и достаточные условия для последовательности $\lambda_k = \varphi(k)$, $\varepsilon = 1$.

ТЕОРЕМА 3. а) Пусть $p \in (0, 1]$, а $\varphi \in C^s(\mathbb{R}^m)$ при $s = [m/p - (m+1)/2]$ (целая часть) и $\text{supp } \varphi \subset [-1, 1]^m$. Если частная производная $\partial^s \varphi / \partial x_j^s$ как функция от x_j удовлетворяет в метрике C условию Липшица степени больше $m/p - (m+1)/2 - s$ равномерно по остальным переменным, а отрезок $[-1, 1]$ можно разбить на конечное число отрезков (ограниченное по остальным переменным), на каждом из которых вещественная и мнимая части $\partial^s \varphi / \partial x_j^s$ как функции от x_j выпуклы или вогнуты, $1 \leq j \leq m$, то $\varphi \in M_p$.

б) Пусть $p \in (0, 1]$, а $\varphi \in C^r(\mathbb{R}^m)$ при некотором $r > m(1/p - 1/2)$. Если

$$|\varphi(x)| \leq \frac{A}{1 + |x|^\alpha}, \quad \sum_{j=1}^m \left| \frac{\partial^r \varphi}{\partial x_j^r}(x) \right| \leq \frac{B}{1 + |x|^\beta},$$

где $\min\{\beta - \alpha - r, 0\} + 2\alpha r / (m(2 - p)) > 0$, то $\|\varphi\|_{M_p} \leq \gamma(m, p, r, \alpha, \beta)(A + B)$. В частности, $\varphi \in M_p$ при $\alpha > 0$ и $\beta = r + \alpha$ или $\alpha = \beta > m(1/p - 1/2)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3 основано на теореме 2 и следующем соотношении, $p \in (0, 2)$:

$$\gamma_1(p) \int_0^\infty \left(\frac{a_\sigma(\varphi)_2}{\sqrt{\sigma}} \right)^p d\sigma \leq \|\widehat{\varphi}\|_p^p \leq \gamma_2(p) \int_0^\infty \left(\frac{a_\sigma(\varphi)_2}{\sqrt{\sigma}} \right)^p d\sigma, \quad (2)$$

где наилучшее приближение $a_\sigma(\varphi)_2$ равно (mes – мера Лебега)

$$\inf \{ \|\varphi - \psi\|_2, \text{mes supp } \widehat{\psi} \leq \sigma \} \\ = \inf_{e: \text{mes } e \leq \sigma} \left(\int_{\mathbb{R}^m \setminus e} |\widehat{\varphi}(x)|^2 dx \right)^{1/2} \leq \left(\int_{\mathbb{R}^m \setminus [-\sigma^{1/m}/2, \sigma^{1/m}/2]^m} |\widehat{\varphi}(x)|^2 dx \right)^{1/2}$$

(см. [18, теорема 2 и замечание к ней]).

Этот результат для интегралов Фурье является аналогом известного критерия С. Б. Стечкина абсолютной сходимости рядов Фурье.

а) В силу прямой теоремы о приближении целыми функциями экспоненциального типа (см. [19, с. 188])

$$a_\sigma(\varphi)_2 \leq \frac{\gamma(s, m)}{\sigma^{s/m}} \max_j \omega_2 \left(D_{s,j} \varphi; \frac{1}{\sigma^{1/m}} \right)_{2,j}, \quad D_{s,j}(\varphi) = \frac{\partial^s \varphi}{\partial x_j^s}$$

(частный модуль гладкости второго порядка в $L_2(\mathbb{R}^m)$). В силу условия и леммы 6 из [3] при некотором $\alpha > m/p - (m+1)/2 - s$

$$\omega_2(D_{s,j} \varphi; h)_{2,j} = O(h^{\alpha+1/2})$$

и, значит,

$$\int_1^\infty \left(\frac{a_\sigma(\varphi)_2}{\sqrt{\sigma}} \right)^p d\sigma \leq \gamma \int_1^\infty \left(\frac{1}{\sigma^{s/m + (\alpha+1/2)/m + 1/2}} \right)^p d\sigma < \infty.$$

При $\sigma \in (0, 1]$ в интеграле нужно учесть, что $a_\sigma(\varphi)_2 \leq \|\varphi\|_2$.

б) Продолжим φ на $\mathbb{R}^m$ с сохранением ее свойств, например, по методу Хестенса (см. [1, с. 231]). При этом перед A и B появятся числовые множители, зависящие лишь от r, m, α и β .

Проверим теперь, что если φ и $D_{r,j} \varphi \in L_2$, $r > m(1/p - 1/2)$, $1 \leq j \leq m$, то

$$\|\widehat{\varphi}\|_p^p \leq \gamma(p, m, r) \|\varphi\|_2^{p-m(1-p/2)/r} \max_j \|D_{r,j} \varphi\|_2^{m(1-p/2)/r}. \quad (3)$$

Для этого воспользуемся вторым неравенством в (2) и тем, что

$$a_\sigma(\varphi)_2 \leq \|\varphi\|_2, \quad a_\sigma(\varphi)_2 \leq \gamma_0(r, m) \frac{1}{\sigma^{r/m}} \max_j \|D_{r,j} \varphi\|_2.$$

Выберем σ_0 так, чтобы $\|\varphi\|_2 \sigma_0^{r/m} = \max_j \|D_{r,j} \varphi\|_2$. Тогда

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \left(\frac{a_\sigma(\varphi)_2}{\sqrt{\sigma}} \right)^p d\sigma &\leq \|\varphi\|_2^p \int_0^{\sigma_0} \frac{d\sigma}{\sigma^{p/2}} + \gamma_0^p \max_j \|D_{r,j} \varphi\|_2^p \int_{\sigma_0}^\infty \frac{d\sigma}{\sigma^{p/2 + rp/m}} \\ &= \frac{\|\varphi\|_2^p}{1 - p/2} \sigma_0^{1-p/2} + \gamma_0^p \frac{\max_j \|D_{r,j} \varphi\|_2^p}{p/2 + rp/m - 1} \sigma_0^{1-p/2 - rp/m} \\ &= \gamma(r, m, p) \|\varphi\|_2^{p-m(1-p/2)/r} \max_j \|D_{r,j} \varphi\|_2^{m(1-p/2)/r} \end{aligned}$$

(для доказательства последнего равенства учитывается выбор σ_0).

Далее воспользуемся разбиением единицы. Возьмем какую-либо функцию $h_0 \in C^\infty(\mathbb{R})$ с условиями $h_0(t) = 0$ при $t \leq -\frac{1}{2}$ и $h_0(t) + h_0(-t) \equiv 1$, т.е. $h_0 - \frac{1}{2}$ — нечетная функция. Положим при $\nu \in \mathbb{N}$

$$h_\nu(t) = h_0\left(\frac{t+1}{2^{\nu-1}} - \frac{3}{2}\right) h_0\left(\frac{3}{2} - \frac{t+1}{2^\nu}\right).$$

Очевидно, что при $\nu \in \mathbb{N}$ $\text{supp } h_\nu \subset [2^{\nu-1} - 1, 2^{\nu+1} - 1]$ и $\forall s \in \mathbb{Z}_+$

$$h_\nu^{(s)}(t) = O\left(\frac{1}{2^{s\nu}}\right), \quad h_0\left(\frac{1}{2} - t\right) + \sum_{\nu=1}^{\infty} h_\nu(t) = 1 \quad \forall t \geq 0.$$

Поэтому

$$\varphi(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \varphi_\nu(x),$$

$$\varphi_0(x) = \varphi(x) h_0\left(\frac{1}{2} - |x|^2\right), \quad \varphi_\nu(x) = \varphi(x) h_\nu(|x|^2), \quad \nu \geq 1,$$

и $\text{supp } \varphi_\nu$ содержится в шаровом слое $2^{\nu-1} - 1 \leq |x|^2 \leq 2^{\nu+1} - 1$ при $\nu \geq 1$, а $\text{supp } \varphi_0$ — в шаре $|x| \leq 1$. В силу теоремы 2 имеем

$$\|\varphi\|_{M_p}^p \leq \sum_{\nu=0}^{\infty} \|\varphi_\nu\|_{M_p}^p \leq \gamma \sum_{\nu=0}^{\infty} (\sqrt{2})^{\nu m(1-p)} \|\widehat{\varphi}_\nu\|_p^p.$$

Для оценки $\|\widehat{\varphi}_\nu\|_p^p$ применяем неравенство (2). Очевидно, что

$$\|\varphi_\nu\|_2 \leq \max_{2^{\nu-1}-1 \leq |x|^2 \leq 2^{\nu+1}-1} |\varphi(x)| (\text{mes supp } \varphi_\nu)^{1/2} \leq \gamma \frac{A}{(\sqrt{2})^{\nu\alpha}} (\sqrt{2})^{\nu m/2}$$

и $\forall s \in \mathbb{Z}_+$

$$D_{s,j} h_\nu(|x|^2) = \frac{\partial^s}{\partial x_j^s} h_\nu(|x|^2) = O\left(\frac{1}{(\sqrt{2})^{\nu s}}\right).$$

Из правила дифференцирования произведения следует, что $\forall j \in [1, m]$

$$|D_{r,j} \varphi_\nu(x)| \leq 2^r \max_{0 \leq k \leq r} |D_{k,j} \varphi(x)| |D_{r-k,j} h_\nu(|x|^2)|,$$

а в силу условия теоремы и неравенства для промежуточных производных на полуоси при $k \in [0, r]$

$$|D_{k,j} \varphi(x)| \leq \gamma(r) \left(\frac{A}{1 + |x|^\alpha}\right)^{1-k/r} \left(\frac{B}{1 + |x|^\beta}\right)^{k/r}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} |D_{r,j} \varphi_\nu(x)| &\leq \gamma(A+B) \max_{0 \leq k \leq r} \left\{ \frac{1}{(\sqrt{2})^{\nu\alpha(1-k/r)}} \cdot \frac{1}{(\sqrt{2})^{\nu\beta-k/r}} \cdot \frac{1}{(\sqrt{2})^{\nu(r-k)}} \right\} \\ &= \gamma(A+B) \max \left\{ \frac{1}{(\sqrt{2})^{\nu(r+\alpha)}}, \frac{1}{(\sqrt{2})^{\nu\beta}} \right\} \\ &\leq \gamma(A+B) \left(\frac{1}{(\sqrt{2})^{\nu(r+\alpha)}} + \frac{1}{(\sqrt{2})^{\nu\beta}} \right). \end{aligned}$$

Окончательно имеем

$$\begin{aligned} \|\varphi\|_{M_p}^p &\leq \gamma \sum_{\nu=0}^{\infty} (\sqrt{2})^{\nu m(1-p)} \left(\frac{A}{(\sqrt{2})^{\nu\alpha}} (\sqrt{2})^{\nu m/2} \right)^{p-m(1-p/2)/r} \\ &\quad \times \left((A+B) \left(\frac{1}{(\sqrt{2})^{\nu(r+\alpha)}} + \frac{1}{(\sqrt{2})^{\nu\beta}} \right) (\sqrt{2})^{\nu m/2} \right)^{m(1-p/2)/r} < \infty. \end{aligned}$$

Теорема 3 доказана.

Как видно из доказательства, условие убывания φ и $D_r\varphi$ на бесконечности можно заменить, например, на некоторое условие убывания $D_1\varphi$ и $D_r\varphi$.

Рассмотрим примеры (следствия).

I) Функция $\varphi_\delta(x) = |x|^{-\delta}$, $\delta > 0$, принадлежит M_p $\forall p > 0$ локально при $|x| \geq 1$ $\forall m$.

Это сразу следует из теоремы 3б): $\alpha = \delta$, $\beta = r + \alpha$, $r > m(1/p - 1/2)$. Но тогда и $\{\varphi_\delta(k)\} \in M_p$, $\varphi_\delta(0)$ — произвольное число.

Проверим теперь, что $\forall f \in H_p(D)$

$$\frac{1}{2h} \int_{-h}^h f((\cdot)e^{iu}) du \rightarrow f(\cdot)$$

в $H_p(D)$ при $p > 0$ и $h \rightarrow 0$. Для этого достаточно убедиться в неравенстве

$$\sup_{0 < h \leq \pi} \left\| \frac{1}{2h} \int_{-h}^h f((\cdot)e^{iu}) du \right\|_{H_p} \leq \gamma(p) \|f\|_{H_p},$$

так как на всех полиномах сходимость, очевидно, есть. Но при $z \in D$

$$\frac{1}{2h} \int_{-h}^h f(ze^{iu}) du = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k \frac{\sin kh}{kh},$$

а функция $(\sin x)/x$ принадлежит M_p $\forall p > 0$ (при $x \geq 1$ — это произведение функций $-i(e^{ix} - e^{-ix})/2$ и $1/x$ из M_p).

II) Неравенство типа Бернштейна: $\forall p > 0$, $\forall r$ и $n \in \mathbb{N}$, $\forall m$ и $\forall \{c_k\}_{|k| \leq n}$

$$\left\| \sum_{|k| \leq n} |k|^{2r} c_k (\cdot)^k \right\|_{H_p(D^m)} \leq \gamma(r, m, p) n^{2r} \left\| \sum_{|k| \leq n} c_k (\cdot)^k \right\|_{H_p(D^m)}.$$

В силу принципа сравнения (см. §1, свойство Г)) достаточно проверить, что функция $\varphi(x) = |x|^{2r}$ принадлежит M_p в шаре $|x| \leq 1$ локально. См. теорему 3 или 2.

III) Неравенство типа Джексона: для того чтобы при некотором $\delta > 0$ и $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\left\| f(\cdot) - \sum_k \varphi\left(\frac{k}{n}\right) c_k (\cdot)^k \right\|_{H_p} \leq \gamma(m, p, \delta) \frac{1}{n^\delta} \left\| \sum_k |k|^\delta c_k (\cdot)^k \right\|_{H_p}$$

необходимо и достаточно, чтобы функция $|x|^{-\delta}(1 - \varphi(x))$ после доопределения в нуле принадлежала M_p .

Достаточность следует из принципа сравнения, а необходимость доказывается так же, как и в теореме 6 (II) из [3], с использованием примера I.

§ 2. Двусторонние оценки приближения и K -функционалы

В этом параграфе на примере полигармонического оператора показана общая схема вычисления K -функционала.

Сначала рассматриваем средние ряда Тейлора в $H_p(D^m)$ с классом насыщения, определяемым данным дифференциальным оператором. В случае полигармонического оператора – это средние типа Бохнера–Рисса вида

$$R_\varepsilon^{r,\delta}(f, z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}_+^m, |k| \leq 1/\varepsilon} (1 - \varepsilon^{2r} |k|^{2r})^\delta c_k z^k.$$

Здесь $\{c_k\}$ – тейлоровские коэффициенты f , $r \in \mathbb{N}$, δ и $\varepsilon > 0$. При $p = 1$ (в более общей ситуации пространства L_1) соответствующие результаты имеются в [3] (см. также [4], где обсуждается и случай $p \in (1, +\infty)$).

Для определения порядка приближения средними $R_\varepsilon^{r,\delta}$ введем специальный модуль гладкости:

$$\omega_{2r}^0(f; h)_p = \left\| \int_{|x| \leq 1} dx \int_{|y| \leq 1} dy \cdots \int_{|w| \leq 1} \sum_{\nu=0}^r \binom{2r}{\nu} \times (-1)^\nu f((\cdot) e^{ih(\nu-r)(x+y+\cdots+w)}) dw \right\|_{H_p}.$$

Здесь число $h > 0$, а интеграл (усреднение) берется по декартовому произведению q единичных шаров в $\mathbb{R}^m$ при $q > 2m(1/p - 1/2)/(m+1)$. Можно взять, например, $q = [2m(1/p - 1/2)/(m+1)] + 1$.

ТЕОРЕМА 4. Для любого $p \in (0, 1]$, $\forall r \in \mathbb{N}$, $\forall \delta > m/p - (m+1)/2$, $\forall f \in H_p(D^m)$ и $\forall \varepsilon > 0$

$$\|f - R_\varepsilon^{r,\delta}(f)\|_{H_p} \asymp \omega_{2r}^0(f; \varepsilon)_p$$

(двустороннее неравенство с константами, не зависящими от f и ε).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4.

ЛЕММА 3. Если $P_{j,n}$, $1 \leq j \leq m$, – алгебраические полиномы степени не выше n , а P_0 – полином степени n_0 и $P_0(x) > 0 \quad \forall x \in (a, b) \subset \mathbb{R}$, то для любого набора $\{\delta_j\}_1^m$ вещественных чисел функция

$$\varphi_m(x) = \sum_{j=1}^m P_{j,n}(x) (P_0(x))^{\delta_j}$$

равна нулю тождественно на (a, b) или имеет на этом интервале не более $(n+1)(1+n_0+n_0^2+\cdots+n_0^{m-1})$ нулей (с учетом кратности).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ. Считаем далее, что $\varphi_m(x) \not\equiv 0$ и $n_0 \geq 1$. При $m = 1$ утверждение очевидно, а при $m \geq 2$ проводим индукцию по m . Легко видеть, что

$$\tilde{\varphi}_{m-1}(x) = \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} \left(\varphi_m(x) (P_0(x))^{-\delta_1} \right) = \sum_{j=2}^m \tilde{P}_{j,N}(x) (P_0(x))^{\delta_j - \delta_1 - n - 1},$$

где степень $N = n + (n_0 - 1)(n + 1)$ (достаточно проверить эту формулу при $n = 0$, т.е. при однократном дифференцировании). Если $\tilde{\varphi}_{m-1}(x) \equiv 0$, то число нулей φ_m не более $n + 1$. В противном случае из предположения индукции и теоремы Ролля следует, что число нулей $\tilde{\varphi}_{m-1}$ не более

$$n + 1 + (N + 1)(1 + n_0 + \dots + n_0^{m-2}) = (n + 1)(1 + n_0 + \dots + n_0^{m-1}),$$

что и требовалось доказать.

ЛЕММА 4. Если $p \in (0, 1]$, то функция $\varphi(x) = (1 - |x|^{2r})^\delta$, $|x| \leq 1$, и $\varphi(x) = 0$, $|x| > 1$, принадлежит M_p при $\delta > m/p - (m + 1)/2$ и только в этом случае.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ. К функции φ применяем теорему 3а). Функция φ принадлежит C^s при $s = [m/p - (m + 1)/2]$, и все частные производные $D_{s,j}\varphi$, $1 \leq j \leq m$, удовлетворяют в C условию Липшица степени $\delta - s > 0$. А для определения точек перегиба $D_{s,j}\varphi$ нужно рассмотреть уравнение $D_{s+2,j}\varphi = 0$. Но легко видеть, что при $|x| < 1$

$$D_{s+2,j}\varphi(x) = (1 - |x|^{2r})^{\delta-s-2} P_{(s+2)(2r-1)}(x),$$

где P — алгебраический полином указанной степени по x_j , и, значит, число точек перегиба по x_j ограничено степенью полинома.

Для доказательства необходимости воспользуемся теоремой 2б): при $\delta \leq m/p - (m + 1)/2$ $\hat{\varphi} \notin L_p(\mathbb{R}^m)$. Действительно, $\varphi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (1 - |x|^2)^{\delta+k}$, где $a_0 \neq 0$, а при $r = 1$ преобразование Фурье $\hat{\varphi}$ выражается через бесселеву функцию $J_{m/2+\delta}$, асимптотика которой известна (см. [17, гл. IV, теоремы 4.15, 3.3 и леммы 4.13 и 3.11], см. также в [18] асимптотику преобразования Фурье финитной радиальной функции).

Переходим к доказательству теоремы 4. Отметим, во-первых, что интеграл в определении ω_{2r}^0 равен сумме степенного ряда, множители перед тейлоровскими коэффициентами f которого равны

$$\begin{aligned} & \int_{|x| \leq 1} dx \int_{|y| \leq 1} dy \dots \int_{|w| \leq 1} \sum_{\nu=0}^{2r} \binom{2r}{\nu} (-1)^\nu \prod_{j=1}^m e^{ih(\nu-r)(x_j+y_j+\dots+w_j)k_j} dw \\ &= (2i)^{2r} \int_{|x| \leq 1} dx \int_{|y| \leq 1} dy \dots \int_{|w| \leq 1} \sin^{2r} \left(\frac{h}{2} k, x + y + \dots + w \right) dw = \psi(hk). \end{aligned}$$

Очевидно, что $1 - \varphi(x) \neq 0$ и $\psi(x) \neq 0$ при $x \neq 0$. В силу принципа сравнения (см. §1 свойство Г)) достаточно доказать, что после доопределения в нуле

$$g = \frac{1 - \varphi}{\psi} \in M_p, \quad \frac{1}{g} = \frac{\psi}{1 - \varphi} \in M_p.$$

Полагаем

$$g(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \varphi(x)}{\psi(x)} = c \neq 0$$

(этот предел легко вычислить). Воспользуемся локальным свойством D и теоремой 3. В малой окрестности нуля функции g и $1/g$ аналитичны, а функции $1 - \varphi$ и $1/(1 - \varphi)$ удовлетворяют условиям теоремы 3а). Действительно (см. доказательство леммы 4),

$$D_{s+2,j} \left(\frac{1}{1 - \varphi(x)} \right) = (1 - \varphi(x))^{-s-3} \sum_{k=1}^{s+2} (1 - |x|^{2r})^{k\delta - s - 2} P_k(x),$$

где P_k — полиномы фиксированной степени. Применяем лемму 3.

Остался случай $|x| \geq 1$. Очевидно, что

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \sum_{\nu=0}^{2r} \binom{2r}{\nu} (-1)^\nu \left(\int_{|w| \leq 1} e^{i(\nu-r)(x,w)} dw \right)^q \\ &= \frac{(2\pi)^{qm/2}}{(\sqrt{2})^q} \sum_{\nu=0}^{2r} \binom{2r}{\nu} (-1)^\nu \left(\frac{J_{m/2}(|\nu - r||x|)}{(|\nu - r||x|)^{m/2}} \right)^q \end{aligned}$$

(нужные свойства бесселевой функции $J_{m/2}$ см. в [17]). В силу леммы Римана–Лебега

$$\psi(\infty) = \lim_{|x| \rightarrow \infty} \psi(x) = (-1)^r \binom{2r}{r} \left(\int_{|w| \leq 1} dw \right)^q.$$

Из асимптотики $J_{m/2}$ и ее производных сразу следует, что функция $\psi(x) - \psi(\infty)$, как и любая ее частная производная, при $|x| \rightarrow \infty$ ведет себя как $O(|x|^{-q(m+1)/2})$. Поэтому при $|x| \geq 1$ в представлениях

$$g(x) = \frac{\psi(\infty) - \psi(x)}{\psi(\infty)\psi(x)} + \frac{1}{\psi(\infty)}, \quad \frac{1}{g(x)} = (\psi(x) - \psi(\infty)) + \psi(\infty)$$

к первым слагаемым применима теорема 3б) при $\alpha = \beta = q(m+1)/2 > m(1/p - 1/2)$. Теорема 4 доказана.

Перейдем теперь к вычислению K -функционала пары пространств, определяемых полигармоническим оператором

$$D_{2r}(f; z) = \left(\sum_{j=1}^m \left(z_j \frac{\partial}{\partial z_j} \right)^2 \right)^r f(z), \quad r \in \mathbb{N}.$$

Основные понятия и факты теории интерполяции пространств см. в [15].

$$K(\varepsilon, f, H_p(D^m), D_{2r}) = \inf_g (\|f - g\|_{H_p} + \varepsilon^{2r} \|D_{2r}(g)\|_{H_p}).$$

ТЕОРЕМА 5. При условиях теоремы 4

$$K(\varepsilon, f, H_p(D^m), D_{2r}) \asymp \|f - R_\varepsilon^{r,\delta}(f)\|_{H_p}$$

(двустороннее неравенство с константами, не зависящими от f и ε).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отметим сначала, что в этой формуле содержится ответ на вопрос о выражении K -функционала для данной пары пространств через линейные средние степенного ряда (этот вопрос формулируется, например, в [15, с. 42]).

Доказательство будет основано, и в этом состоит общая схема, на следующих двух соотношениях:

$$\begin{aligned} \|f - R_\varepsilon^{r,\delta}(f)\|_{H_p} &\leq \gamma_1 \varepsilon^{2r} \|D_{2r}(f)\|_{H_p}, \\ \varepsilon^{2r} \|D_{2r}(R_\varepsilon^{r,\delta}(f))\|_{H_p} &\leq \gamma_2 \|f - R_\varepsilon^{r,\delta}(f)\|_{H_p}, \end{aligned}$$

где $\gamma_1 = \gamma_1(m, p, r, \delta)$, $\gamma_2 = \gamma_2(m, p, r, \delta)$. Так как

$$\varepsilon^{2r} D_{2r}(f, z) = (-1)^r \sum_{k \in \mathbb{Z}_+^m} \varepsilon^{2r} |k|^{2r} c_k z^k,$$

то в силу принципа сравнения достаточно доказать, что

$$\frac{1 - \varphi(x)}{|x|^{2r}} \in M_p, \quad \frac{|x|^{2r} \varphi(x)}{1 - \varphi(x)} \in M_p.$$

Применяем те же рассуждения, что и при доказательстве теоремы 4. См. также пример I в конце §1.

Выведем теперь из этих двух соотношений оценки K -функционала сверху и снизу.

$$\begin{aligned} K(\varepsilon, f, H_p(D^m), D_{2r}) &\leq \|f - R_\varepsilon^{r,\delta}(f)\|_{H_p} + \varepsilon^{2r} \|D_{2r}(R_\varepsilon^{r,\delta}(f))\|_{H_p} \\ &\leq (1 + \gamma_2) \|f - R_\varepsilon^{r,\delta}(f)\|_{H_p}. \end{aligned}$$

При произвольной функции g такой, что $D_{2r}g \in H_p(D^m)$,

$$\begin{aligned} \|f - R_\varepsilon^{r,\delta}(f)\|_{H_p}^p &\leq \|(f - g) - R_\varepsilon^{r,\delta}(f - g)\|_{H_p}^p + \|g - R_\varepsilon^{r,\delta}(g)\|_{H_p}^p \\ &\leq (1 + \|R_\varepsilon^{r,\delta}\|_{H_p \rightarrow H_p})^p \|f - g\|_{H_p}^p + \gamma_1^p \varepsilon^{2rp} \|D_{2r}g\|_{H_p}^p. \end{aligned}$$

Осталось перейти к нижней грани по g и учесть, что

$$\sup_\varepsilon \|R_\varepsilon^{r,\delta}\|_{H_p \rightarrow H_p} = \sup_\varepsilon \|\{\varphi(\varepsilon k)\}\|_{M_p} = \|\varphi\|_{M_p} < \infty.$$

Теорема 5 доказана.

Из теорем 4 и 5 получаем

СЛЕДСТВИЕ. При указанных условиях

$$K(\varepsilon, f, H_p(D^m), D_{2r}) \asymp \omega_{2r}^0(f; \varepsilon)_p.$$

Отметим еще, что эти же рассуждения применимы и для других дифференциальных операторов и не обязательно целого порядка, а K -функционал — это модуль гладкости, определяемый данным дифференциальным оператором.

Список литературы

1. *Стейн И.* Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. М.: Мир, 1973.
2. *Рудин У.* Теория функций в поликруге. М.: Мир, 1974.
3. *Тригуб Р. М.* Абсолютная сходимость интегралов Фурье, суммируемость рядов Фурье и приближение полиномами функций на горе // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1980. Т. 44. № 6. С. 1378–1409.
4. *Тригуб Р. М.* Формула для K -функционала пары пространств функций нескольких переменных // Межвуз. сб. Исследования по теории функций многих переменных. Ярославль: Изд-во Яросл. гос. ун-та, 1988. С. 122–127.
5. *Тригуб Р. М.* Мультипликаторы рядов Фурье // Укр. матем. журн. 1991. № 12. С. 1686–1693.
6. *Стороженко Э. А.* О теоремах типа Джексона в H^p , $0 < p < 1$ // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1980. Т. 44. № 4. С. 946–962.
7. *Валашек Я.* О приближении в многомерных пространствах Харди H^p , $0 < p \leq 1$ // Сообщ. АН Гр. ССР. 1982. Т. 105. № 1. С. 21–24.
8. *Стороженко Э. А., Кротов В. Г.* Аппроксимативные и дифференциально-разностные свойства функций из пространств Харди H^p , $0 < p < 1$ // Межвуз. сб. Теория функций и приближений, ч. I. Труды Саратовской зимней школы 25 янв.–5 февр. 1982 г.. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1983. С. 65–80.
9. *Oswald P.* On Some Approximation Properties of Real Hardy Spaces ($0 < p \leq 1$) // J. Approx. Theory. 1984. V. 40. № 1. P. 45–65.
10. *Solyanik A. A.* On the order of approximation to functions of $H^p(\mathbb{R})$ ($0 < p \leq 1$) by certain means of Fourier integrals // Anal. Math. 1986. V. 12. P. 59–75.
11. *Colzani L.* Jackson Theorems in Hardy Spaces and Approximation by Riesz Means // J. Approx. Theory. 1987. V. 49. P. 240–251.
12. *Белинский Э. С.* Сильная суммируемость периодических функций и теоремы вложения // ДАН. 1993. Т. 332. № 2. С. 133–134.
13. *Прибегин С. Г.* Оценки сверху и снизу скорости приближения функций класса H^p , $0 < p \leq 1$ средними Рисса // Деп. в ГНТБ Укр. 29.06.93 № 1290-Укр.93.
14. *Тригуб Р. М.* Мультипликаторы в пространствах Харди $H_p(D^m)$ при $p \in (0, 1]$ и аппроксимативные свойства методов суммирования степенных рядов // ДАН. 1994. Т. 335. № 6. С. 697–699.
15. *Брудный Ю. А., Крейн С. Г., Семенов Е. М.* Интерполяция линейных операторов // Итоги науки и техники. Матем. анализ. М.: ВИНТИ, 1986. С. 3–163.
16. *Арестов В. В.* Об интегральных неравенствах для тригонометрических полиномов и их производных // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1981. Т. 45. № 1. С. 3–22.
17. *Стейн И., Вейс Г.* Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. М.: Мир, 1974.
18. *Тригуб Р. М.* Интегрируемость и асимптотическое поведение преобразования Фурье радиальной функции // Метрические вопросы теории функций и отображений. Киев: Наукова думка, 1977. С. 142–163.
19. *Никольский С. М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М.: Наука, 1977.
20. *Тригуб Р. М.* Мультипликаторы Фурье и некоторые вопросы теории приближения // Internat. Conf. on Appr. Theory dedicated to the memory of Prof. P. P. Korovkin. Kaluga, June 26–29, 1996. Abstracts. V. 2. P. 214–216.