Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. В. Аржанцев, О действиях редуктивных групп с однопараметрическим семейством сферических орбит, *Матем. сб.*, 1997, том 188, номер 5, 3–20

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm222>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.196.121.252

26 апреля 2023 г., 13:04:28

УДК 512.74

И. В. Аржанцев

О действиях редуктивных групп с однопараметрическим семейством сферических орбит

Данная работа посвящена изучению действий редуктивных групп на нормальных аффинных алгебраических многообразиях с однопараметрическим семейством сферических орбит максимальной размерности при условии, что категорный фактор для такого действия одномерен. В качестве приложения полученных результатов мы завершаем классификацию действий группы SL_2 на нормальных трехмерных аффинных многообразиях. Основное поле K предполагается алгебраически замкнутым и нулевой характеристики.

Библиография: 15 названий.

1. Введение

Сложностью $c(X, G)$ действия $G : X$ линейной алгебраической группы G на алгебраическом многообразии X называют коразмерность орбиты общего положения для индуцированного действия борелевской подгруппы $B : X$ или, эквивалентно,

$$c(X, G) = \text{tr. deg } K(X)^B.$$

Подробнее с понятием сложности можно познакомиться по работе [1].

Действия сложности нуль называют *сферическими*.

Для действий сложности один имеются две принципиально различные возможности:

- 1) на X имеется открытая орбита группы G , имеющая сложность 1;
- 2) группа G действует на X с однопараметрическим семейством сферических орбит максимальной размерности (будем в этом случае говорить, что X является qs -многообразием (quasi-spherical variety) относительно действия группы G).

В этой работе мы будем рассматривать только вторую возможность.

Далее, если не оговорено противное, будем считать, что G — связная редуктивная группа, регулярно действующая на неприводимом *нормальном* аффинном многообразии X .

Предположим, что орбита общего положения для такого действия сферична. Тогда и все орбиты группы G на многообразии X сферичны (см. [2]). Здесь мы покажем, что в этой ситуации при условии существования стабилизатора общего положения почти все замыкания типичной орбиты изоморфны, т.е. определено “замыкание общего положения”.

Работа выполнена при поддержке Международной соросовской программы образования в области точных наук, подпрограмма “Соросовские аспиранты” (грант № а96-423).

Затем мы переходим к случаю действий сложности один со сферическими орбитами. Примерами таких действий служат вложения однородного пространства $K^* \times G/H$, где H – алгебраическая сферическая подгруппа группы G (однородное пространство $K^* \times G/H$ сферично по отношению к группе $K^* \times G$ и имеет сложность 1 при естественном действии группы G). Такие вложения могут быть классифицированы в рамках общей теории Луны–Вуста.

Будем называть нормальное аффинное qs -многообразие с условием $\dim X//G = 1$ qs 1-многообразием. Если действие $G : X$ стабильно, в частности, если H содержит максимальный тор группы G , условие $\dim X//G = 1$ выполняется автоматически. Мы покажем, что всякое бирационально тривиальное qs 1-многообразие X можно получить с помощью определяемой ниже операции склейки из сферических вложений однородного пространства $K^* \times G/H$. Под бирационально тривиальностью здесь подразумевается наличие в X открытого G -инвариантного подмногожества, изоморфного $G/H \times U$, где U – гладкая аффинная кривая с тождественным действием группы G . Если группа эквивариантных автоморфизмов однородного пространства G/H , изоморфная $N_G(H)/H$, конечна, то склейка производится однозначно, и поэтому изучение такого класса действий сводится к хорошо разработанной теории сферических вложений. Для бирационально нетривиального действия доказывается, что оно может быть получено как фактор по действию конечной группы из бирационально тривиального действия с той же G -орбитой общего положения. Отсюда, в частности, вытекает рациональность особенностей qs 1-многообразий. Далее рассматривается класс G -многообразий, полученных с помощью операции склейки, но уже не обязательно над аффинной, а над любой гладкой алгебраической кривой. Оказывается, этот класс G -многообразий характеризуется наличием “хорошего фактора” для действия группы G в смысле работ Д. Мамфорда.

Затем изучаются свойства слоев морфизма факторизации для qs 1-многообразий.

Полученные результаты позволят нам завершить классификацию действий группы SL_2 на нормальных неприводимых трехмерных аффинных алгебраических многообразиях. Напомним необходимые для этого сведения.

ЛЕММА 1.1 (см., например, [3, п. 4.1, лемма 2]). *Любая алгебраическая подгруппа в SL_2 сопряжена одной из следующих подгрупп:*

- 1) *конечная подгруппа;*
- 2) *борелевская подгруппа B ;*
- 3) *максимальный тор T ;*
- 4) *нормализатор максимального тора N ;*
- 5) *конечное расширение максимальной унипотентной подгруппы*

$$U_n = \left\{ \begin{pmatrix} \varepsilon & a \\ 0 & \varepsilon^{-1} \end{pmatrix} \mid a, \varepsilon \in K, \varepsilon^n = 1 \right\}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

ЛЕММА 1.2. *Для всякого действия SL_2 существует стабилизатор общего положения (с.о.п.).*

Пусть имеется действие $SL_2 : X$ и многообразие X трехмерно. Если с.о.п. такого действия есть конечная подгруппа, то X содержит плотную орбиту группы SL_2 .

Такие действия классифицированы в работе [4], см. также [3]. Там показано, что локально транзитивное действие группы SL_2 на трехмерном нормальном аффинном многообразии есть либо транзитивное действие, либо определяется парой чисел из $\mathbb{N} \times (0, \frac{1}{2}] \mathbb{Q}$. Первое из этих чисел определяет порядок стабилизатора общего положения, который в этой ситуации является циклической подгруппой. Второе число называется *высотой* и характеризует алгебру U -инвариантов.

Остаются еще три возможности:

- 1) с.о.п. = U_n – назовем такие SL_2 -многообразия (S, U) -многообразиями;
- 2) с.о.п. = N – назовем такие SL_2 -многообразия (S, N) -многообразиями;
- 3) с.о.п. = T – назовем такие SL_2 -многообразия (S, T) -многообразиями.

ЗАМЕЧАНИЕ. Случай с.о.п. = B невозможен, так как SL_2/B есть проективная прямая.

Всякое (S, U) -многообразие однозначно восстанавливается по спектру алгебры U -инвариантов, который представляет собой нормальную поверхность с естественным действием максимального тора группы SL_2 . Более точно, справедлива

ТЕОРЕМА 1 [2]. *(S, U) -многообразия взаимно однозначно соответствуют нормальным аффинным поверхностям Y с фиксированной нетривиальной $\mathbb{Z}_+$ -градуировкой на алгебре регулярных функций $K[Y]$. Эта градуировка задает действие одномерного тора T на Y и соответствующее (S, U) -многообразие изоморфно многообразию*

$$X = (Y \times K^2) // T.$$

При этом $K[X]^{SL_2} \cong K[Y]^T$.

Эта теорема сводит классификацию (S, U) -многообразий к классификации действий одномерного тора на нормальных поверхностях. По поводу последней см. [5].

Рассмотрим случай (S, N) -многообразий. Всякое такое многообразие бирационально тривиально. Вложение сферического однородного пространства $K^* \times SL_2/N$ задается парой взаимно простых натуральных чисел и склейка таких вложений производится над гладкой аффинной кривой однозначно. Поэтому для задания (S, N) -многообразия необходимо задать гладкую неприводимую аффинную кривую и в конечном множестве ее точек расставить отметки – пары взаимно простых натуральных чисел, см. теорему 3 ниже. В работе [2] этот результат был получен топологическими методами над полем комплексных чисел без использования теории Луны–Вуста.

Бирационально тривиальные (S, T) -многообразия описываются абсолютно аналогично (S, N) -многообразиям. Остается разобрать случай бирационально нетривиальных (S, T) -многообразий. Каждое такое многообразие может быть получено как фактор по действию группы $\mathbb{Z}_2$ из бирационально тривиального (S, T) -многообразия. Поэтому бирационально нетривиальное многообразие определяется гладкой неприводимой аффинной кривой с фиксированным нетождественным действием группы $\mathbb{Z}_2$ и $\mathbb{Z}_2$ -инвариантной системой отметок, см. теорему 4.

Тем самым все нетождественные действия группы SL_2 на нормальных аффинных трехмерных алгебраических многообразиях описаны.

Гладкие (S, N) - и (S, T) -многообразия описаны в работе [2].

Автору хотелось бы выразить искреннюю признательность своему научному руководителю профессору Э. Б. Винбергу за постановку задачи и постоянное внимание к работе. Много фактов, использованных при написании данной работы, я узнал в беседах с М. Брионом и Ф. Кнопом во время конференции “Algebraic group actions”, проходившей в Польской Республике в июне 1996 г.

В недавно написанной работе [6] разработан подход к классификации действий сложности один в терминах теории Луны–Вуста. Сопоставление этих результатов с результатами данной работы позволило исправить ряд неточностей в последней. Автор благодарит Д. А. Тимашева за критичное прочтение предварительной версии этого текста.

2. Действия со сферической орбитой общего положения

В следующем предложении условие нормальности X несущественно.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть X есть G -многообразие, все G -орбиты на X сферичны и существует стабилизатор общего положения с.о.п. $(G : X) = H$. Тогда почти все замыкания орбит типа G/H (для открытого плотного множества орбит G/H) изоморфны некоторому вложению Y сферического однородного пространства G/H .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\Gamma(X)$ есть полугруппа старших весов G , соответствующих неприводимым G -модулям, встречающимся в разложении алгебры $K[X]$ на неприводимые G -модули. Эта полугруппа конечно порождена по теореме Хаджиева (см. [7]). Пусть $\{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$ – базис в $\Gamma(X)$. Зафиксируем некоторые старшие векторы $F_{\lambda_1}, \dots, F_{\lambda_k}$ G -модуля $K[X]$ весов $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, соответственно, и рассмотрим множество точек X , где ни одна из функций $F_{\lambda_1}, \dots, F_{\lambda_k}$ не обращается в нуль. Это множество открыто по Зарисскому. Отсюда следует, что замыкание орбиты общего положения есть аффинное многообразие с простым спектром (так как G/H сферично) и спектр этот есть $\Gamma(X)$. Остается показать, что умножение в алгебрах регулярных функций на таких замыканиях устроено одинаково. Это следует из того, что алгебра регулярных функций на замыкании орбиты типа G/H есть G -инвариантная подалгебра в $K[G/H]$. Последняя алгебра имеет простой спектр и потому мультипликативная структура на подалгебре с заданным разложением на неприводимые G -модули определена однозначно. Предложение доказано.

ЗАМЕЧАНИЯ. 1) Имеется гипотеза, согласно которой сферические подгруппы в редуктивной группе не допускают непрерывных деформаций, и потому если есть действие со сферической орбитой общего положения, то с.о.п. существует автоматически. Поэтому наше условие о существовании с.о.п. по-видимому не является ограничительным.

2) Даже при условии нормальности X многообразие Y может быть не нормальным. Например, рассмотрим действие одномерного тора на двумерной плоскости

$$(x, y) \rightarrow (t^2 x, t^3 y).$$

Здесь Y – полукубическая парабола. Ниже мы покажем, что если $\dim X//G = 1$, то многообразие Y нормально и совпадает со слоем общего положения для морфизма факторизации $\pi: X \rightarrow X//G$.

Следующий пример, предложенный Ф.Кнопом, показывает, что если орбита общего положения G/H не сферична, то замыкания общего положения может не существовать.

Рассмотрим действие группы SL_2 на трехмерном проективном пространстве $\mathbb{P}^3$ как на проективизации пространства матриц $M_{2 \times 2}$, на котором SL_2 действует левыми умножениями. В $\mathbb{P}^3$ есть открытая орбита типа PSL_2 и однопараметрическое семейство орбит $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, где группа SL_2 действует только на первом сомножителе.

Пусть Γ – некоммутативная конечная подгруппа в SL_2 . Профакторизуем пространство $\mathbb{P}^3$ по действию Γ , индуцированному действием группы Γ на $M_{2 \times 2}$ умножениями справа. В $\mathbb{P}^3/\Gamma$ по-прежнему имеется однопараметрическое семейство SL_2 -орбит $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. Рассмотрим произведение $(\mathbb{P}^3/\Gamma) \times \mathbb{P}^1$ с тривиальным действием SL_2 на втором сомножителе. Произведем раздутие подмногообразия $\mathbb{P}^1 \times \Delta \subset \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \subset \mathbb{P}^3/\Gamma \times \mathbb{P}^1$, где Δ – диагональ в произведении второго и третьего сомножителей и группа SL_2 действует лишь на первом экземпляре $\mathbb{P}^1$.

На полученном многообразии вложения однородного пространства SL_2/Γ соответствуют раздутиям различных орбит типа SL_2/B и не могут быть почти все изоморфны в силу конечности группы эквивариантных автоморфизмов пространства SL_2/Γ .

Вложению полученного после раздутия проективного многообразия P в проективное пространство соответствует некоторое очень обильное расслоение на P . Рассматривая достаточно высокую тензорную степень этого расслоения, можно добиться того, чтобы аффинный конус над P был нормальным аффинным многообразием. Этот конус и является примером многообразия с орбитой общего положения типа $(K^* \times SL_2)/\Gamma$, где отсутствует замыкание общего положения.

Представляется интересным вопрос, для каких классов квазиаффинных однородных пространств замыкание общего положения существует.

3. Основная конструкция

Пусть S – нормальное аффинное вложение сферического однородного пространства $K^* \times G/H$ группы $K^* \times G$ такое, что $S//G \cong A^1$. Возникает естественное действие K^* на факторе A^1 , единственную неподвижную точку которого будем считать нулем на прямой A^1 . Прообраз в S всякой ненулевой точки прямой A^1 есть сферическое G -многообразие Y . Назовем Y *типичным слоем* для S .

Опишем некоторые операции, позволяющие получать новые $qs1$ -многообразия из уже имеющихся.

1. Операция перехода к расслоенному произведению.

Пусть U есть гладкая аффинная кривая и задан этальный морфизм $\varphi: U \rightarrow A^1$ такой, что $\varphi^{-1}(0) = \{u\}$. Рассмотрим расслоенное произведение $X = S \times_{A^1} U$

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & S \\ \downarrow & & \downarrow \\ U & \xrightarrow{\varphi} & A^1 \end{array}$$

определенное условием $K[X] = K[U] \otimes_{K[A^1]} K[S]$. Многообразие X нормально (следует из этальности φ) и является $qs1$ -многообразием с типичным слоем Y .

2. Операция склейки.

Пусть гладкая аффинная кривая C покрыта конечным числом аффинных открытых по Зарискому множеств U_j так, что никакие два из них не совпадают, пересечение всех этих множеств есть открытое множество U и $U_j = U \cup \{c_j\}$, $c_j \in C$ для любого j .

Пусть имеется набор аффинных многообразий $\{L_j\}$ и морфизмов $\{L_j \rightarrow U_j\}$ таких, что прообразы множества U во всех многообразиях L_j изоморфны друг другу, причем изоморфизмы согласованы с данными морфизмами. Тогда отождествим многообразия L_j по этому изоморфному открытому множеству. Получим некоторое предмногообразие L и согласно аффинному критерию из [8, с. 44] заданные морфизмы “склеиваются” в морфизм $L \rightarrow C$.

Изоморфизмы открытых кусков определены не канонически, поэтому результат склейки определен не однозначно. Будем говорить, что L получено из многообразий L_j операцией склейки, если L получено с помощью описанной выше конструкции при некотором выборе изоморфизмов изоморфных открытых подмножеств.

В нашей ситуации пусть $\{S_j\}$ есть набор сферических вложений для $K^* \times G/H$ с одним и тем же типичным слоем Y . Если для всякого U_j задан этальный морфизм, использованный в операции перехода к расслоенному произведению, над каждым U_j можно построить соответствующее расслоенное произведение X_j и затем отождествить (“склеить”) их по изоморфному куску $U \times Y$. Получим некоторое предмногообразие X .

ЛЕММА 3.1. *Предмногообразие X отделимо, т.е. является алгебраическим многообразием.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Известно (см. [8, с. 50]), что отделимость предмногообразия X эквивалентна следующему свойству: для любых двух морфизмов $\varphi, \psi: Y \rightarrow X$ (Y – любое предмногообразие) множество $\{y \in Y \mid \varphi(y) = \psi(y)\}$ замкнуто в Y . Там же показано, что если любые две точки из X лежат в одном открытом аффинном подмножестве, то X отделимо. Пусть для некоторых морфизмов $\varphi, \psi: Y \rightarrow X$ множество $Z = \{y \in Y \mid \varphi(y) = \psi(y)\}$ и $z \in \bar{Z} \setminus Z$. Точки $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ не могут лежать в одном из склеиваемых аффинных многообразий, поскольку это противоречит отделимости этого аффинного многообразия. Поэтому можно считать, что $\varphi(z) \in \pi^{-1}(c_{j_1})$ и $\psi(z) \in \pi^{-1}(c_{j_2})$, $j_1 \neq j_2$. Рассмотрим композиции морфизмов $\pi \circ \varphi, \pi \circ \psi: Y \rightarrow C$. Поскольку C есть отделимое многообразие, множество $Z' = \{y \in Y \mid (\pi \circ \varphi)(y) = (\pi \circ \psi)(y)\}$ замкнуто в Y и $z \notin Z'$. С другой стороны ясно, что $Z \subset Z'$. Полученное противоречие доказывает лемму 3.1.

Аффинность многообразия X вытекает из следующей леммы.

ЛЕММА ОБ АФФИННОМ МОРФИЗМЕ (см. [9]). *Пусть $f: X \rightarrow Y$ – морфизм алгебраических многообразий такой, что существует открытое покрытие $\{V_i\}$ многообразия Y и $f^{-1}(V_i)$ аффинно для каждого i . Тогда для любого аффинного открытого множества $V \hookrightarrow Y$ $f^{-1}(V)$ – аффинно.*

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Если группа $\text{Aut}_G Y$ конечна, то склейка определена однозначно.*

Для доказательства нам потребуется

ЛЕММА 3.2. *Всякий G -автоморфизм многообразия Y однозначно продолжается до G -автоморфизма многообразия S , тождественного на факторе $S//G$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $K[Y]$ есть G -модуль с простым спектром, всякий G -автоморфизм действует на каждом его неприводимом подмодуле умножением на некоторую константу. Этот автоморфизм естественным образом продолжается на $K[(A^1 \setminus \{0\}) \times Y]$, а затем и на $K[S]$ как на G -инвариантную подалгебру. Лемма 3.2 доказана.

В силу конечности группы $\text{Aut}_G Y$ отождествление по изоморфному открытому подмножеству многообразий S_{j_1} и S_{j_2} задается одним элементом группы $\text{Aut}_G Y$ и потому единственно с точностью до изоморфизмов склеиваемых многообразий. Предложение 2 доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если группа $\text{Aut}_G Y$ бесконечна, склейка может быть осуществлена многими способами. Так если G — одномерный тор, вопрос о числе способов отождествления есть вопрос о числе локально тривиальных в топологии Зарисского линейных расслоений над гладкой аффинной кривой.

Покажем, что предложенная конструкция склейки является в некотором смысле универсальной.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Назовем $qs1$ -многообразие X *простым*, если выполнены следующие условия:

- (1) существует с.о.п. $(G : X) = H$;
- (2) многообразие X имеет тривиальный бирациональный тип, т.е. содержит открытое G -инвариантное подмножество X_0 , изоморфное $G/H \times U$ для некоторой гладкой кривой U .

Условие (2) эквивалентно тривиальности некоторого класса когомологий Галуа. Если G есть тор, то это условие выполнено для любого действия. Можно показать, что условие (2) выполнено, если группа $N_G(H)/H$ связна, см. [7, п. 2.7].

Следующее предложение показывает, что каждое $qs1$ -многообразие можно получить из простого $qs1$ -многообразия факторизацией по конечной группе.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Для любого $qs1$ -многообразия X со стабилизатором общего положения H найдется простое $qs1$ -многообразие $\tilde{X}$ с тем же стабилизатором общего положения и конечная группа F , действующая на $\tilde{X}$ регулярными G -эквивариантными автоморфизмами так, что*

$$X \cong \tilde{X} // F.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $X_1 \subset X$ — открытое подмножество, состоящее из точек, стабилизаторы которых сопряжены H , и $X_1^H \subset X_1$ — множество H -неподвижных точек. Рассмотрим произвольную кривую в X_1^H , пересекающую $N_G(H)$ -орбиты общего положения в X_1^H трансверсально. Эта кривая определяет квазисечение для действия $G : X$. Имеется естественный доминантный морфизм $G/H \times U \rightarrow X$. Рассмотрим расширение $K(X//G) \subset K(U)$ и продолжим его до расширения Галуа $K(X//G) \subset K(U) \subset K(\tilde{U})$ с группой Галуа F .

Пусть $\widetilde{K[X]}$ есть целое замыкание $K[X]$ в $K(G/H \times \widetilde{U})$ и $\widetilde{X} = \operatorname{Spec} \widetilde{K[X]}$. Из конечности морфизма $\widetilde{X} \rightarrow X$ вытекает его сюръективность. Учитывая нормальность X , мы получаем $X \cong \widetilde{X} // F$. Наконец тот факт, что $\widetilde{X}$ бирационально изоморфно $G/H \times \widetilde{U}$, вытекает из следующей стандартной леммы.

ЛЕММА 3.3. *Пусть A – конечно порожденная целостная алгебра над полем K и $F_1 = QA$ – ее поле частных. Если $F_1 \subset F_2$ – конечное расширение полей и B – целое замыкание A в поле F_2 , то $QB = F_2$.*

Вернемся к простым $qs1$ -многообразиям. Обозначим через Y замыкание орбиты G/H общего положения, которое существует согласно предложению 1. Алгебра регулярных функций на X_0 есть $K[U] \otimes_K K[G/H]$ и алгебра $K[G/H]$ имеет простой спектр. Уменьшив если нужно U , можно считать, что в X есть открытое G -инвариантное подмножество, изоморфное $U \times Y$. Далее через X_0 будем обозначать это подмножество.

Обозначим через $C = X // G$ гладкую аффинную кривую $\operatorname{Spec} K[X]^G$ (гладкость следует из нормальности X). Для морфизма факторизации $\pi: X \rightarrow C$ все компоненты слоев имеют коразмерность 1 в X . Следующее предложение показывает, что кривую U можно рассматривать как подмножество в C и $\pi^{-1}(U) = X_0 \cong U \times Y$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *Пусть $f: X \rightarrow X_1$ есть доминантный морфизм неприводимых нормальных аффинных многообразий и слои общего положения этого морфизма связны (для морфизма факторизации по связной редуктивной группе последнее условие выполнено). Тогда слои общего положения неприводимы.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\widetilde{K(X_1)}$ – алгебраическое замыкание поля $K(X_1)$ в $K(X)$. Если $\widetilde{K(X_1)} \neq K(X_1)$, то по лемме 3.3 и $\widetilde{K[X_1]} \neq K[X_1]$, где $\widetilde{K[X_1]}$ – целое замыкание $K[X_1]$ в $K(X)$. Из нормальности X вытекает включение $\widetilde{K[X_1]} \subset K[X]$ и потому имеются регулярные морфизмы $X \rightarrow \widetilde{X}_1 \rightarrow X_1$, где последний морфизм конечен и небирационален. Это противоречит условию связности слоев.

В случае $\widetilde{K(X_1)} = K(X_1)$ см. [10, с. 172]. Предложение доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ. Без условия нормальности X утверждение предложения неверно – можно рассмотреть поверхность $x^2 = y^2 z$ и проекцию на прямую с координатой z .

Пусть $K[Y] = \bigoplus_{\lambda} V_{\lambda}$ – изотипное разложение. Тогда $K[X_0] = \bigoplus (K[U] \otimes_K V_{\lambda})$ и потому в силу G -инвариантности $K[X] = \bigoplus (T_{\lambda} \otimes_K V_{\lambda})$, где $T_{\lambda} \subset K[U]$.

Алгебра $K[X]$ конечно порождена и можно считать ее порожденной элементами вида $c_{\lambda_i} v_{\lambda_i}$, $i = 1, \dots, s$, $v_{\lambda_i} \in V_{\lambda_i}$, $c_{\lambda} \in K[U]$. Уменьшая множество U , мы можем считать, что $c_{\lambda_i} \in K[U]^*$.

Пусть $C \setminus U = \{y_1, \dots, y_t\}$. Можно считать, вновь (если нужно) уменьшая U , что:

- 1) $U_j = U \cup \{y_j\}$ аффинно;
- 2) существует $\pi_j \in R_j$ такое, что $\pi_j = \varrho_j^*$, $\varrho_j: U_j \rightarrow A^1$ – этально и $\varrho_j^{-1}(0) = \{y_j\}$ (здесь $R_j = K[U_j]$).

Обозначим через R кольцо $K[U]$. Тогда $\pi_j R_j$ — идеал y_j и $R^* = R_j^* \times \{\pi_j^k\}_{k \in \mathbb{Z}}$. Пусть $X_j = \pi^{-1}(U_j)$. Тогда

$$K[X_j] = R_j[\dots, \pi_j^{r_l} V_{\lambda_l}, \dots]$$

для некоторого конечного набора пар $P_j = \{(r_l, \lambda_l) \in \mathbb{Z} \times \Gamma(X)\}$.

Рассмотрим многообразие

$$S_j = \text{Спец } K[t, \dots, t^{r_l} V_{\lambda_l}, \dots], \quad K[t, \dots, t^{r_l} V_{\lambda_l}, \dots] \subset K[t] \otimes K[Y].$$

На S_j определено естественное действие одномерного тора (на переменной t) и потому S_j становится сферическим многообразием для группы $K^* \times G$.

Имеет место коммутативная диаграмма:

$$\begin{array}{ccccc} X_j & \xrightarrow{q} & U_j \times_{A_t^1} S_j & \xrightarrow{p_2} & S_j \\ \bigcup & & \bigcup & & \bigcup \\ U \times Y & \xrightarrow{\cong} & U_j \times_{A_t^1} (Y \times K^*) & \longrightarrow & Y \times K^* \end{array}$$

и отображение q есть изоморфизм. Поскольку $\varrho_j: U_j \rightarrow A^1$ этактно, проекция p_2 также этактна. В частности, S_j нормально.

Итак, многообразие X получается переходом к расслоенным произведениям от сферических многообразий S_j к X_j и последующей склейкой X_j . В наших рассуждениях мы следовали работе [5], где подобные рассмотрения проводятся в торическом случае. Нами доказана:

ТЕОРЕМА 2.1. *Всякое простое $qs1$ -многообразие со стабилизатором общего положения H может быть получено операцией склейки из нормальных сферических вложений S_j однородного пространства $K^* \times G/H$ с одним и тем же типичным слоем Y и условием $S_j // G = A^1$.*

ЗАМЕЧАНИЕ. В духе работы [5] можно сказать, что простые $qs1$ -многообразия *сфероидальны*.

СЛЕДСТВИЕ. *Особенности $qs1$ -многообразия рациональны.*

Действительно, для сферических многообразий рациональность особенностей показана в [11] и следствие вытекает из этактности построенных морфизмов и предложения 4, так как рациональность особенностей сохраняется при факторизации по конечной (и вообще редуктивной) группе, см. [7, п. 3.9].

Далее предполагается, что читатель знаком с понятием цветного конуса. С этим понятием можно познакомиться по работе [12].

Пусть задан конечный набор цветных конусов C_j , определяющих вложения S_j однородного пространства $K^* \times G/H$. Склейка этих вложений над некоторой кривой в одно простое $qs1$ -многообразие возможна тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия: (а) $S_j // G = A^1$; (б) типичный слой Y во всех вложениях S_j изоморфен некоторому G/H -вложению Y для всех j ; (в) S_j аффинны.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Назовем qs -многообразие X *жестким*, если для стабилизатора общего положения H выполнено условие $N_G(H) = H$.

Если сферическое однородное пространство G/H квазиаффинно и группа $N_G(H)/H$ конечна, то из результатов М. Бриона и Ф. Кнопа вытекает, что подгруппа H редуктивна, см., например, [13, сог. 7.6]. Согласно критерию Луны замкнутости орбит однородное пространство G/H в этом случае допускает лишь одно аффинное вложение, состоящее из единственной орбиты G/H . Поэтому G -орбиты общего положения на X замкнуты и всякое жесткое qs -многообразие является $qs1$ -многообразием. Всякое жесткое qs -многообразие бирационально тривиально.

Для жестких qs -многообразий теорема 2.1 с учетом предложения 2 может быть переформулирована следующим образом:

ТЕОРЕМА 2.2. *Всякое жесткое qs -многообразие X со стабилизатором общего положения H однозначно определяется следующим набором данных:*

- 1) *гладкая аффинная кривая C (которая есть фактор $X//G$);*
- 2) *конечный набор P попарно различных точек кривой C (возможно, пустой);*
- 3) *каждой точке множества P поставлен в соответствие цветной конус для однородного пространства $K^* \times G/H$, не лежащий в подпространстве, соответствующем G/H и задающий аффинное вложение пространства $K^* \times G/H$.*

Обратно, всякий такой набор данных определяет жесткое qs -многообразие группы G .

ЗАМЕЧАНИЕ. В работе [12] указан критерий, позволяющий легко выяснять, аффинно ли вложение, отвечающее данному цветному конусу.

СЛЕДСТВИЕ. *Если в условиях теоремы 2.2 дополнительно известно, что ранг однородного пространства G/H равен единице, то с каждой точкой множества P вместо цветного конуса достаточно связывать пару взаимно простых натуральных чисел. В этом случае все слои морфизма факторизации $\pi: X \rightarrow C$ неприводимы.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Известно (см. [12]), что размерность конуса инвариантных нормирований $\Upsilon_{G/H}$ равна рангу соответствующего однородного пространства и при условии конечности группы $N_G(H)/H$ конус $\Upsilon_{G/H}$ строго выпуклый. Можно отождествить $\Upsilon_{G/H}$ с отрицательным лучом координатной прямой и потому конус $\Upsilon_{K^* \times G/H}$ совпадет с левым полупространством (рис. 1).

Множество красок у пространства G/H непусто, иначе G/H допускает как минимум два аффинных вложения $(0, \emptyset)$ и $(\Upsilon_{G/H}, \emptyset)$. Не все краски расположены слева, иначе имелся бы аффинный конус $(\Upsilon_{G/H}, \rho(D))$. Однородное пространство G/H аффинно, поэтому все его краски лежат справа. Применяя автоморфизм тора $K^*: t \rightarrow t^{-1}$, можно считать, что наш цветной конус расположен в верхней полуплоскости. Он должен содержать все краски пространства G/H и потому для его задания необходимо и достаточно задать один луч в левом верхнем квадранте. Поскольку объемлющее пространство задано над полем рациональных чисел, такой

Рис. 1

луч однозначно определяется парой взаимно простых натуральных чисел. Заданный луч отвечает неприводимому дивизору, который есть слой морфизма факторизации над особой точкой, и поэтому все слои неприводимы. Следствие доказано.

Ясно, что склейка аффинных вложений S_j возможна не только над аффинной, но и над произвольной гладкой алгебраической кривой. Выясним, какой класс G -многообразий сложности один так получается.

В геометрической теории инвариантов Д. Мамфорда было введено понятие “хорошего фактора” (в англоязычной литературе – “good quotient”).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть X – алгебраическое G -многообразие. Морфизм $\pi: X \rightarrow C$, где C – алгебраическое пространство, называется “хорошим фактором”, если

- а) морфизм π G -эквивариантен относительно данного действия G на X и тождественного действия G на C ;
- б) π есть аффинный морфизм;
- в) $\pi_*(O_X^G) \cong O_C$.

Условие б) означает, что на C найдется конечное аффинное покрытие такое, что его прообраз есть аффинное покрытие X . “Хороший фактор” является категорным фактором и потому определен однозначно с точностью до канонического изоморфизма. Существование такого фактора для произвольных действий на алгебраических многообразиях – явление редкое. Для этого необходимо, в частности, чтобы у каждой точки из X существовала открытая аффинная инвариантная окрестность. В случае, когда X аффинно, “хороший фактор” $\pi: X \rightarrow \text{Spec}(K[X]^G)$ существует всегда.

Известно, что “хороший фактор” получается из фактора Мамфорда для множества полустабильных точек при некотором вложении X в проективное пространство тогда и только тогда, когда C есть квазипроjektивное многообразие. В более общей ситуации “хороший фактор” изучался в работах А. Бялыничко-Бирули и Й. Свенишкой, см. [14] и библиографию там же. В этих работах рассматривалась проблема описания всех открытых инвариантных подмножеств алгебраического G -многообразия, обладающих “хорошим фактором”.

Мы можем достаточно конструктивно описать некоторый класс G -многообразий, обладающих “хорошим фактором”, безотносительно к какому-либо вложению.

ТЕОРЕМА 2.3. *Нормальное алгебраическое бирационально тривиальное G -многообразие X сложности один со стабилизатором общего положения H допускает “хороший фактор” на гладкую алгебраическую кривую C тогда и только тогда, когда оно может быть получено склейкой над кривой C нормальных аффинных сферических вложений S_j однородного пространства $K^* \times G/H$ с одним и тем же типичным слоем Y и условием $S_j // G = A^1$.*

Для доказательства теоремы 2.3 достаточно выбрать покрытие кривой C , как при проведении основной конструкции, и воспользоваться леммой об аффинном морфизме.

Поскольку всякая алгебраическая кривая квазипроективна, данный фактор можно получить с помощью конструкции Мамфорда при подходящем вложении в проективное пространство.

СЛЕДСТВИЕ. *Всякое многообразие из теоремы 2.3 квазипроективно.*

4. Свойства слоев морфизма факторизации

Теорема 2.1 сводит изучение многих геометрических вопросов о многообразиях сложности 1 с однопараметрическим семейством сферических орбит к вопросам о сферических многообразиях, которые хорошо изучены. Рассмотрим вопрос о нормальности и неприводимости слоев морфизма факторизации для простых $qs1$ -многообразий.

Обозначим через ω операцию перехода от G -алгебры к подалгебре ее U -инвариантов, где U есть максимальная унипотентная подгруппа в G , т.е. $\omega: K[X] \rightarrow K[X]^U$. Той же буквой будем обозначать аналогичный переход на уровне G -многообразий: $\omega: X \rightarrow \text{Срес } K[X]^U$. Если X есть $qs1$ -многообразие для группы G , $\text{Срес } K[X]^U$ есть $qs1$ -многообразие для максимального тора T группы G , причем операция ω коммутирует с переходом к алгебре регулярных функций на некотором слое морфизма факторизации. Учитывая что целозамкнутость и целостность алгебры есть устойчивые свойства в терминах работы [11], неприводимость и нормальность слоев для X эквивалентны неприводимости и нормальности слоев для T -многообразия $\text{Срес } K[X]^U$. Поэтому можно ограничиться действиями торов и в силу теоремы 2.1 достаточно изучить случай, когда X есть торическое многообразие для $(n+1)$ -мерного тора, где $n = \text{rk } G$.

Торическое многообразие однозначно задается выпуклым конусом C в $\mathbb{Q}^{n+1}$, линейная оболочка которого совпадает со всем $\mathbb{Q}^{n+1}$ и который порожден векторами, координаты которых соответствуют всевозможным весам тора $(K^*)^{n+1}$, встречающимся в весовом разложении алгебры $K[X]$. Такой конус является двойственным по отношению к конусу, который обычно рассматривается в теории торических многообразий. Условие $X // T = A^1$ соответствует тому, что C содержит положительный луч последней координатной оси в $\mathbb{Q}^{n+1}$ и не содержит отрицательного луча (мы предполагаем, что $T \subset (K^*)^{n+1}$ по первым n координатам).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Будем говорить, что действие $T: X$ есть *fp-действие* (fixed-point action), если проекция C_0 конуса C на $\mathbb{Q}^n$ (первые n координат) лежит в некотором замкнутом полупространстве. В противном случае будем говорить о *npfp-действии*.

Если группа G полупроста, то индуцированное действие $T : \text{Spec}(K[X]^U)$ является fp -действием.

ЛЕММА 4.1. *Все слои морфизма факторизации $\pi: X \rightarrow X//T = A^1$, кроме слоя над нулем, являются торическими многообразиями относительно тора T , соответствующими конусу C_0 .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем $K[X] = K[t, \dots, t^{r_i} \chi^{\lambda_i}, \dots]$. Тогда

$$K[\pi^{-1}(A^1 \setminus \{0\})] = K[X][t^{-1}] = K[t, t^{-1}] \otimes_K K[\dots, \chi^{\lambda_i}, \dots] = K[t, t^{-1}] \bigotimes_K K[Y].$$

Из леммы 4.1 следует, что nfp -действия характеризуются тем, что слой общего положения для морфизма $\pi: X \rightarrow X//T$ есть сам тор T .

ЗАМЕЧАНИЕ. Если у нас имеется конечный набор конусов в $\mathbb{Q}^{n+1}$, содержащих только положительный луч последней координатной оси и проекции которых на $\mathbb{Q}^n$ совпадают, то соответствующие этим конусам торические многообразия можно склеить в одно многообразие X (неоднозначно!) и всякое нормальное аффинное $(n+1)$ -мерное многообразие с эффективным действием n -мерного тора и с одномерным фактором может быть получено так.

Остается рассмотреть слой Y_0 морфизма π над нулем. На алгебре $K[Y]$ имеется корректно определенная $\mathbb{Z}$ -фильтрация: сопоставим каждому весу $(q_1, \dots, q_n)$, $q_i \in \mathbb{Z}$, из C_0 минимальное из чисел $q_{n+1} \in \mathbb{Z}$ такое, что $(q_1, \dots, q_n, q_{n+1}) \in C$.

Переход от алгебры $K[X]$ к алгебре $K[Y_0]$ заключается в факторизации по идеалу (t) , что можно интерпретировать как переход от $K[Y]$ к присоединенной алгебре $\text{gr } K[Y]$ относительно введенной выше фильтрации с последующей факторизацией по максимальному нильпотентному идеалу. После этого в $K[Y]$ останутся лишь те веса, которые являются проекциями целочисленных точек, лежащих на собственных гранях конуса C . Произведение собственных относительно тора функций, отвечающих точкам, лежащим на различных гранях конуса C , будет отвечать точке, лежащей внутри конуса C , и потому после сужения на нулевой слой станет нильпотентной функцией.

Отсюда легко видеть, что число неприводимых компонент слоя Y_0 равно числу проекций максимальной размерности граней конуса C на $\mathbb{Q}^n$. Они определяют разбиение конуса C_0 на конусы той же размерности.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. 1) *Для nfp -действий число неприводимых компонент слоя над нулевой точкой равно числу граней конуса C .*

2) *Для fp -действий число неприводимых компонент слоя над нулевой точкой меньше или равно числу граней конуса C минус n .*

СЛЕДСТВИЕ 1. *При действии полупростой группы ранга 1 или при fp -действии одномерного тора все слои морфизма факторизации неприводимы.*

Тем самым получено еще одно доказательство предложения 5 работы [2].

СЛЕДСТВИЕ 2. *Для nfp действия n -мерного тора на $(n+1)$ -мерном нормальном аффинном многообразии следующие условия эквивалентны:*

- 1) *все слои морфизма факторизации неприводимы;*
- 2) *все слои морфизма факторизации изоморфны самому n -мерному тору.*

В случае fp -действий неприводимость всех слоев означает, что соответствующий конус симплиціален.

Заметим также, что при действии n -мерного тора на $(n+1)$ -мерном многообразии доопределить это действие до локально-транзитивного действия $(n+1)$ -мерного тора можно, как правило, неединственным способом, однако число граней получающегося конуса постоянно.

Рассмотрим некоторую проекцию максимальной размерности $C_{0,i}$ некоторой грани C_i конуса C , $C_{0,i} \subset C_0$. Пусть грань C_i выделена на конусе C условием $a_1x_1 + \dots + a_nx_n + a_{n+1}x_{n+1} = 0$. Тогда проекции целочисленных точек грани C_i выделяются среди всех точек с целыми координатами, попавшими в $C_{0,i}$, условием $\frac{a_1x_1 + \dots + a_nx_n}{a_{n+1}} \in \mathbb{Z}$, т.е. принадлежат подрешетке конечного индекса. Потому неприводимая компонента нулевого слоя, соответствующая грани $C_{0,i}$, есть торическое многообразие, но уже не для самого тора T , а для его фактора по конечной подгруппе, определенной указанной подрешеткой. Отсюда следует

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. Пусть имеется простое $qs1$ -действие редуктивной группы G . Тогда все неприводимые компоненты каждого из слоев морфизма факторизации нормальны.

Перейдем теперь к случаю $G = SL_2$.

5. Классификация (S, N) -многообразий

Рассмотрим классификацию аффинных нормальных вложений однородного пространства $K^* \times SL_2/N$ в рамках теории Луны–Вуста.

Рис. 2

На рис. 2 изображены конус инвариантных нормирований Υ и “краски” для однородных пространств K^* , SL_2/N , $K^* \times SL_2/N$, соответственно. Необходимые определения см. в [12]. Критерий аффинности из [12] показывает, что все нормальные аффинные вложения однородного пространства $K^* \times SL_2/N$ задаются цветными конусами одного из типов, изображенных на рис. 3.

Первые два вложения есть $SL_2/N \times K^*$ и $SL_2/N \times K$, соответственно. Для задания конуса типа 3) достаточно задать прямую в верхнем левом квадранте, определенную над полем рациональных чисел. Задание такой прямой эквивалентно заданию пары взаимно простых натуральных чисел (n, k) .

Вложения, соответствующие конусам типа 2') и 3'), получаются из вложений для конусов 2) и 3) действием автоморфизма $t \rightarrow t^{-1}$ на торе K^* .

Рис. 3

Рис. 4

Явно алгебру регулярных функций на многообразии, отвечающем вложению, заданному парой (n, k) , можно описать так, как показано на рис. 4.

Рассмотрим конус C в $\mathbb{Q}^2$, заключенный между положительным лучом оси Oy и лучем, исходящим из начала координат и проходящим через точку с координатами (k, n) (напомним, что мы предполагаем $k > 0, n > 0$). Тогда

$$K[X] = \{t^{r_2} V_{4r_1} \mid (r_1, r_2) \in C, r_1, r_2 \in \mathbb{Z}\} \subset K[A^1] \otimes K[SL_2/N], \quad (1)$$

где через V_{4r_1} обозначен $(4r_1 + 1)$ -мерный неприводимый SL_2 -модуль. Нормальность полученного многообразия X вытекает из того, что по построению $\text{Spec } k[X]^U$ есть торическое многообразие.

Воспользовавшись склейкой и предложением 2, получаем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 3. *(S, N) -многообразия находятся во взаимно однозначном соответствии со следующим набором данных:*

- 1) C – гладкая неприводимая аффинная кривая;
- 2) W – конечный набор из t точек на этой кривой (возможно, $t = 0$);
- 3) набор пар взаимно простых натуральных чисел $(k_1, n_1), \dots, (k_t, n_t)$, поставленных по одной паре у каждой точки из множества W и называемых метками этих точек.

Утверждение теоремы 3 является частным случаем для следствия из теоремы 2.2, однако здесь можно предъявить геометрическую реализацию многообразия, отвечающего паре чисел (n, k) . Соответствующее многообразие построено в работе [2], где оно обозначено $\text{Norm } X_n^k$. Напомним необходимые сведения из работы [2]. Пусть V_2 – модуль присоединенного представления для группы SL_2 , а X^k есть фактор пространства V_2 по группе $\mathbb{Z}_{2k}$, действующей скалярно умножениями на корни степени $2k$ из единицы. Если обозначить стандартные координаты на V_2 как a, b, c , то $K[X^k] = K[a^i b^j c^l \mid i + j + l = 2k]$. Рассмотрим многообразие X_n^k , являющееся спектром алгебры $K[a^i b^j c^l \mid i + j + l = 2k, z \mid z^n = (b^2 - 4ac)^k]$. Действие группы SL_2 естественным образом индуцируется с модуля V_2 на все построенные многообразия, элемент z является инвариантным. Морфизм нормализации $\text{Norm } X_n^k \rightarrow X_n^k$ биективен. Выясним, какой конус соответствует вложению $\text{Norm } X_n^k$.

Обозначим через ϵ фундаментальный вес тора K^* , а через λ фундаментальный вес максимального тора группы SL_2 . Поскольку B -инвариантный дивизор однородного пространства $K^* \times SL_2/N$ содержит в своем замыкании единственную SL_2 -неподвижную точку многообразия $\text{Norm } X_n^k$, “краска” D_1 в данный конус входит. На многообразии $\text{Norm } X_n^k$ имеется ровно один дивизор F , инвариантный относительно группы $K^* \times SL_2$, – это слой морфизма факторизации для группы SL_2 , содержащий неподвижную точку. Функция z является SL_2 -инвариантной и собственной веса ϵ для тора K^* .

Пусть q – порядок нуля функции z на дивизоре F . Функция $\frac{a^{2k}}{(b^2 - 4ac)^k}$ является K^* -инвариантной и полуинвариантной веса $4k\lambda$ для SL_2 . На дивизоре F эта функция имеет полюс порядка qn . Итак, дивизору F соответствует нормирование, заданное в наших обозначениях координатами $(-qn/k, q)$. Соответствующий конус задается парой (n, k) .

Многообразие X_n^k получается из многообразия X^k переходом к расслоенному произведению относительно морфизма факторов $z \rightarrow z^n$. Поэтому число k отвечает за порядок стабилизатора точки из незамкнутой орбиты особого слоя многообразия X_n^k , а число n есть своего рода “индекс вращения” многообразия вокруг особого слоя. Нечто подобное возникает в теории действий компактных групп на трехмерных многообразиях. А именно, в классификации Реймонда эффективных и гладких действий окружности на гладких замкнутых связных 3-многообразиях из таких же соображений вводятся ориентированные инварианты Зейферта, см., например, [15].

6. Классификация (S, T) -многообразий

Аналогично (S, N) -многообразиям классифицируются (S, T) -многообразия бирационально тривиального типа. Единственное изменение, которое необходимо внести, — это в строке (1) заменить V_{4r_1} на V_{2r_1} . Теорема 3 справедлива и в этом случае.

Отсюда следует, что на бирационально тривиальных (S, T) -многообразиях не может быть орбиты типа SL_2/N . Это можно получить и из теории этального слайса — если бы X^T было приводимо, то и слайс в окрестности замкнутой орбиты типа SL_2/N был бы приводим и связан, и потому не нормален, а нормальность точки на слайсе эквивалентна нормальности точки на многообразии.

Однородное пространство SL_2/T допускает ровно один нетривиальный SL_2 -эквивариантный автоморфизм, который согласно леммы 3.2 можно продолжить на всякое (S, T) -многообразие. После факторизации по такому действию группы $\mathbb{Z}_2$ получается (S, N) -многообразие.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. *Всякое (S, N) -многообразие может быть двулистно накрыто указанным выше способом ровно одним (S, T) -многообразием бирационально тривиального типа. При этом отметка (k_i, n_i) на (S, N) -многообразии перейдет в отметку $(2k_i, n_i)$ при нечетном n_i и в отметку $(k_i, n_i/2)$ при четном n_i . В первом случае неподвижная точка является изолированной точкой ветвления, а во втором случае имеется дивизор ветвления.*

Доказательство вытекает из того факта, что действие $\mathbb{Z}_2$ коммутирует с операциями перехода к расслоенному произведению и склейки.

Рассмотрим бирационально нетривиальное (S, T) -многообразие X . Условие нетривиальности эквивалентно неприводимости кривой X^T . Согласно предложению 3 данное многообразие X можно двулистно накрыть бирационально тривиальным (S, T) -многообразием $\tilde{X}$, причем накрывающий морфизм будет морфизмом факторизации по группе $\mathbb{Z}_2$ (двулистное накрытие всегда является накрытием Галуа). Такое накрытие определено однозначно, так как алгебра регулярных функций на $\tilde{X}$ совпадает с целым замыканием алгебры $K[X]$ в канонически определенном расширении степени 2 поля $k(X)$.

ПРИМЕР. Трехмерное пространство присоединенного представления группы SL_2 является бирационально нетривиальным (S, T) -многообразием. Двулистно накрывающее его бирационально тривиальное (S, T) -многообразие есть гиперповерхность в четырехмерном пространстве, заданная уравнением $z^2 = b^2 - 4ac$. В терминах нашей классификации бирационально тривиальных (S, T) -многообразий этой гиперповерхности отвечает прямая с единственной отметкой $(1, 1)$ в точке 0.

SL_2 -эквивариантное действие группы $\mathbb{Z}_2$ на $\tilde{X}$ индуцирует нетождественное действие $\mathbb{Z}_2$ на факторе $\tilde{X}/SL_2 = C$. Из классификации бирационально тривиальных (S, T) -многообразий вытекает, что для того чтобы задать бирационально тривиальное (S, T) -многообразие с требуемым действием группы $\mathbb{Z}_2$ необходимо и достаточно задать неприводимую гладкую аффинную кривую с нетождественным действием группы $\mathbb{Z}_2$, а также расставить на ней отметки с единственным ограничением — точки, лежащие на одной $\mathbb{Z}_2$ -орбите должны быть либо обе не отмеченными, либо отмечены одной и той же парой чисел (в частности, на отметки

в $\mathbb{Z}_2$ -неподвижных точках никаких ограничений не накладывается). Будем называть такую систему отметок $\mathbb{Z}_2$ -инвариантной.

ТЕОРЕМА 4. *Бирационально нетривиальные (S, T) -многообразия находятся во взаимно однозначном соответствии со следующим набором данных:*

- 1) C — гладкая неприводимая аффинная кривая с заданным на ней нетождественным действием группы $\mathbb{Z}_2$;
- 2) $\mathbb{Z}_2$ -инвариантная система отметок на кривой C (возможно, пустая).

ЗАМЕЧАНИЯ. 1) Неотмеченные $\mathbb{Z}_2$ -неподвижные точки кривой C отвечают слоям типа SL_2/N на многообразии X .

2) Для бирационально нетривиального (S, T) -многообразия X неприводимая кривая X^T не обязательно является гладкой. В частности, она заведомо особа, если отметки на кривой C расставлены не только в $\mathbb{Z}_2$ -неподвижных точках.

Список литературы

1. Винберг Э. Б. Сложность действий редуктивных групп // Функ. анализ и его прил. 1986. Т. 20. № 1. С. 1–13.
2. Аржанцев И. В. О действиях сложности один группы SL_2 // Изв. РАН. Сер. матем. 1997 (в печати).
3. Крафт Х. Геометрические методы в теории инвариантов. М.: Мир, 1987.
4. Попов В. Л. Квазиоднородные аффинные алгебраические многообразия группы $SL(2)$ // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1973. Т. 37. № 4. С. 792–832.
5. Kempf G., Knudson F., Mumford D., Saint-Donat B. Toroidal embeddings // Lecture Notes in Math. 1973. V. 337.
6. Тимашев Д. А. G -многообразия сложности один // УМН. 1996. Т. 51. № 3. С. 213–214.
7. Винберг Э. Б., Попов В. Л. Теория инвариантов // Итоги науки и техники. Совр. пробл. матем. Фундам. направления. Т. 55. М.: ВИНТИ, 1989. С. 137–314.
8. Хамфри Дж. Линейные алгебраические группы. М.: Наука, 1980.
9. Хартсхорн Р. Алгебраическая геометрия. М.: Мир, 1981.
10. Шафаревич И. Р. Основы алгебраической геометрии. М.: Наука, 1988.
11. Попов В. Л. Стягивание действий редуктивных алгебраических групп // Матем. сб. 1986. Т. 130 (172). № 3 (7). С. 310–334.
12. Knop F. The Luna–Vust Theory of Spherical Embeddings // Proc. of the Hyderabad Conf. on Algebraic Groups. Madras: Manoj Prakashan, 1991. P. 225–249.
13. Knop F. The Asymptotic behavior of the invariant collective motion // Invent. Math. 1994. V. 116. P. 309–328.
14. Bialynicki-Birula A., Swiecicka J. Good Quotients for Actions of $SL(2)$ // Bull. Polish Acad. Sci. Math. 1988. V. 36. P. 375–381.
15. Orlik P. Seifert manifolds // Lecture Notes in Math. 1972. V. 291.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: arjantse@nw.math.msu.su

Поступила в редакцию
01.10.1996