Общероссийский математический портал

В. В. Филиппов, О гомологических свойствах множеств решений обыкновенных дифференциальных уравнений, *Матем. сб.*, 1997, том 188, номер 6, 139–160

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm223>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.197.8

26 апреля 2023 г., 14:57:21

УДК 515.12+515.142.215+517.927.4

В. В. Филиппов

О гомологических свойствах множеств решений обыкновенных дифференциальных уравнений

В исследованиях последних лет по теоремам существования решения задачи Дирихле для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка установилась традиция опираться на теорию Лерэ–Шаудера либо на свойства оператора сдвига вдоль траекторий. Это же относится и к значительной части работ по теоремам существования периодических решений. Но первый из этих методов требует сильных ограничений на правую часть рассматриваемого уравнения, а второй до последнего времени давал менее сильные результаты. В настоящей статье теоремы о сохранении решений рассматриваемой задачи при гомотопии правой части (обычно выводимые из теории Лерэ–Шаудера) доказываются с использованием идей второго метода и предложенных ранее автором топологических структур, адекватных строению множеств решений обыкновенных дифференциальных уравнений. Наш метод нечувствителен к сложностям строения правых частей.

Библиография: 9 названий.

Есть две возможности использования методов алгебраической топологии при обсуждении краевых задач для обыкновенного дифференциального уравнения. Первая возможность связана с теорией Лерэ–Шаудера и основана на оценке гомологических свойств соответствующего интегрального оператора. Чтобы воспользоваться ею, как минимум, необходимо иметь этот интегральный оператор, что связано с ограничениями типа непрерывности правой части и существования интегрируемой мажоранты. При чуть сложнее устроенной правой части уравнения, например, при наличии разрывов, этот путь оказывается недоступным или очень трудным. Другим обстоятельством, вызывающим затруднения при использовании гомологических методов, является бесконечномерность области определения интегрального оператора.

Вторая возможность, связанная с изучением свойств оператора сдвига вдоль траекторий не встречает отмеченных трудностей, но имеет свои. Первая из них, связанная с невыполнением теоремы единственности решения задачи Коши, к настоящему времени практически преодолена, по крайней мере, в предположениях Каратеодори (см. [1]). Методы теории [2]–[4] еще более расширяют класс уравнений, для которых уже найденные здесь методы сохраняют силу. Ниже мы делаем следующий шаг в развитии этой теории. Построением в §§ 1, 2 соответствующего топологического пространства мы укажем возможность преодоления второй трудности в использовании метода сдвига вдоль траекторий, упирающейся в возможность ухода графиков решений из области определения правой части до окончания временного интервала, на котором ищется решение рассматриваемой задачи.

Тем самым метод Лерэ–Шаудера теряет свои принципиальные преимущества по сравнению со вторым методом, зато второй метод в новом исполнении нечувствителен к особенностям правых частей уравнений.

Мы будем существенно опираться на топологический аппарат, подготовленный в рамках подхода [2]–[4], и основное содержание статьи будет направлено на его дальнейшее развитие. Частью обозначений из [3] мы будем пользоваться без дополнительных пояснений.

Здесь нет физической возможности проанализировать весь спектр исследований, связанных с использованием метода Лерэ–Шаудера в теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Чтобы работа имела сколько-нибудь законченный вид, мы ограничимся двумя центральными результатами о сохранении существования решений при гомотопии правой части.

§ 1. Пространство $C_s^+(U, t_0)$

Пусть

(1.1) U – открытое подмножество произведения $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, $t_0 \in \mathbb{R}$.

Обозначим через $C_s^+(U, t_0)$ множество всевозможных непрерывных функций $z: [t_0, a) \rightarrow \mathbb{R}^n$ (для любых $a > t_0$), графики которых являются замкнутыми подмножествами множества U .

Для $z_0 \in C_s^+(U, t_0)$, $\varepsilon > 0$ и $t \in \pi(z)$ ($\pi(z)$ – область определения функции z) обозначим через $G(z_0, t, \varepsilon)$ множество

$$\{z : z \in C_s^+(U, t_0), \pi(z) \supseteq [t_0, t], \|z|_{[t_0, t]} - z_0|_{[t_0, t]}\| < \varepsilon\}$$

($\|\cdot\|$ обозначает обычную евклидову норму и определяемую по ней норму равномерной сходимости).

Заметим, что

(1.2) если $z_1 \in G(z_0, t, \varepsilon)$, то найдется такое число $\delta > 0$, что

$$G(z_1, t, \delta) \subseteq G(z_0, t, \varepsilon)$$

(в качестве δ достаточно взять число $\varepsilon - \|z_1|_{[t_0, t]} - z_0|_{[t_0, t]}\|$),

(1.3) если $s \in [t, \infty) \cup \pi(z_0)$, то

$$G(z_0, t, \varepsilon) \supseteq G(z_0, s, \varepsilon)$$

(это следует из того, что $\|z|_{[t_0, t]} - z_0|_{[t_0, t]}\| \leq \|z|_{[t_0, s]} - z_0|_{[t_0, s]}\|$),

(1.4) если число $\|z_1|_{[t_0, t]} - z_0|_{[t_0, t]}\|$ не меньше суммы двух положительных чисел ε и δ , то

$$G(z_0, t, \varepsilon) \cap G(z_1, t, \delta) = \emptyset$$

(это следует из аксиомы треугольника для нормы равномерной сходимости $\|\cdot\|$ на отрезке $[t_0, t]$).

Множество $W \subseteq C_s^+(U, t_0)$ назовем *открытым*, если для любой его точки z найдутся такие $t \geq t_0$ и $\varepsilon > 0$, что $G(z_0, t, \varepsilon) \subseteq W$. Этим на множестве $C_s^+(U, t_0)$

вводится топология. В силу (1.2) множества вида $G(z_0, t, \varepsilon)$ открыты относительно вводимой топологии. В силу (1.4) топологическое пространство $C_s^+(U, t_0)$ хаусдорфово.

Пусть $z_0 \in C_s^+(U, t_0)$ и $t \in \pi(z_0)$, $\eta = \rho(\text{Gr}(z|_{[t_0, t]}), (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n) \setminus U)$ ($\text{Gr}(f)$ – график функции f , ρ – расстояние в $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$).

Для $\varepsilon \in (0, \eta)$ определим функцию $\varphi: C_s^+(U, t_0) \rightarrow [0, \infty)$ формулой

$$\varphi(z) = \begin{cases} \|z|_{[t_0, t]} - z_0|_{[t_0, t]}\|, & \text{если } \text{Gr}(z|_{[t_0, t]}) \subseteq O_\varepsilon \text{Gr}(z_0|_{[t_0, t]}), \\ \varepsilon & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

где $O_\varepsilon Y$ – ε -окрестность множества Y .

Ее непрерывность относительно топологии пространства $C_s^+(U, t_0)$ проверяется непосредственно с использованием (1.4). Отсюда в силу того, что множества вида $G(z_0, t, \varepsilon)$ составляют базу топологии пространства $C_s^+(U, t_0)$ следует, что пространство $C_s^+(U, t_0)$ вполне регулярно.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Как легко видеть, последовательность $\{z_i : i = 1, 2, \dots\} \subseteq C_s^+(U, t_0)$ сходится к точке $z_0 \in C_s^+(U, t_0)$, если для любой точки $t \in \pi(z_0)$ выполняется $t \in \pi(z_i)$, начиная с некоторого $i = i_0$, и последовательность функций $\{z_i|_{[t_0, t]} : i = 1, 2, \dots\}$ равномерно сходится к функции $z_0|_{[t_0, t]}$.

Именно сходимость этого типа обсуждалась в [2]–[4] в связи с пространствами Z^{-+} .

Пространство $\text{exr}_c U$ компактных подмножеств множества U является сепарабельным метрическим пространством. Отсюда следует, что пространство

$$X = \{z : z \in C_s(U), \inf \pi(z) = t_0\}$$

также является сепарабельным метрическим пространством.

Пусть $\{z_i : i = 1, 2, \dots\}$ – любое его счетное всюду плотное подмножество. Для каждой функции z_i , $i = 1, 2, \dots$, зафиксируем ее продолжение вправо $y_i \in C_s^+(U, t_0)$ и последовательность $s_{i1} < s_{i2} < \dots$ точек из $\pi(y_i)$, сходящуюся к $\sup \pi(y_i)$. Нетрудно показать, что

$$\{G(y_i, s_{ik}, \varepsilon) : i, k = 1, 2, \dots, \varepsilon - \text{рациональное положительное число}\}$$

– (счетная) база пространства $C_s^+(U, t_0)$.

Таким образом, $C_s^+(U, t_0)$ вполне регулярное пространство со счетной базой. Нами доказано (см. [5])

УТВЕРЖДЕНИЕ 1.1. $C_s^+(U, t_0)$ – метризуемое пространство со счетной базой.

В следующей лемме мы будем рассматривать полунепрерывную снизу функцию $f: X \rightarrow (0, a)$, т.е. функцию, удовлетворяющую условию

(1.5) для любой точки $x \in X$ и любого числа $c \in (-\infty, f(x))$ найдется такая окрестность Ox точки x , что $f(y) > c$ для любой точки $y \in Ox$

(не путать с полунепрерывными снизу многозначными отображениями).

ЛЕММА 1.1. Пусть γ – открытое покрытие паракомпакта X , $a > 0$, функция $f: X \rightarrow (0, a)$ полунепрерывна снизу, $\eta > 0$, функция $f_1: X \rightarrow (0, a)$ непрерывна и $f_1(x) < f(x)$ для любой точки $x \in X$. Тогда найдется такая непрерывная функция $f_2: X \rightarrow (0, a)$, что

$$(1.6) \quad f_1(x) < f_2(x) < f(x) \text{ для любой точки } x \in X,$$

$$(1.7) \quad f_2(x) \geq \min\{\inf f(U) : x \in U \in \gamma\} - \eta \text{ для любой точки } x \in X.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для каждой точки $x \in X$ зафиксируем такую ее окрестность Gx , лежащую в некотором элементе покрытия γ , что

$$(1.8) \quad \sup f_1(Gx) < \inf f(Gx).$$

В покрытие $\{Gx : x \in X\}$ звездно впишем некоторое открытое покрытие γ_1 (см. [5]). Пусть $\{\alpha_V : V \in \gamma_1\}$ – локально конечное разбиение единицы, подчиненное покрытию γ_1 . Из (1.8) вытекает, что

$$\sup f_1(V) < \inf f(V) \text{ для любого } V \in \gamma_1.$$

Поэтому мы можем зафиксировать числа

$$(1.9) \quad p_V \in (\max\{\sup f_1(V), \inf f(V) - \eta\}, \inf f(V))$$

и затем положить

$$f_2(x) = \sum \{p_V \alpha_V(x) : x \in V \in \gamma_1\}.$$

Из (1.9) вытекает, что

$$p_V \in (\max\{f_1(x), \min\{\inf f(U) - \eta : x \in U \in \gamma\}\}, f(x))$$

для любого $V \in \gamma_1$, содержащего точку x , что влечет выполнение (1.6) и (1.7). Лемма доказана.

ЛЕММА 1.2. Пусть определенная на метрическом пространстве X функция $f: X \rightarrow (0, \infty)$ полунепрерывна снизу. Тогда существует такая последовательность непрерывных функций $g_i: X \rightarrow (0, \infty)$, $i = 1, 2, \dots$, что

$$(1.10) \quad g_1(x) < g_2(x) < \dots,$$

$$(1.11) \quad g_i(x) \rightarrow f(x)$$

для любой точки $x \in X$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Функция $t \mapsto \operatorname{tg} t$ является монотонно возрастающей и непрерывной. Она осуществляет гомеоморфизм $[0, \frac{\pi}{2}) \rightarrow [0, \infty)$, поэтому лемму достаточно доказать в дополнительном предположении, что $f(X) \subseteq [0, a]$ с $a = \frac{\pi}{2}$.

Положим для начала $g_0 \equiv 0$.

Пусть $i > 0$ и функция g_{i-1} уже построена. Воспользуемся леммой 1.1, взяв в качестве γ покрытие пространства X открытыми множествами диаметра $< 2^{-i}$, в качестве функции f_1 – функцию g_{i-1} , в качестве η – число $< 2^{-i}$.

Существующую по лемме 1.1 функцию f_2 зафиксируем в качестве g_i .

Выполнение условия (1.10) сразу следует из (1.6).

Докажем выполнение условия (1.11). Возьмем произвольно $\theta > 0$ и найдем такое число $\varepsilon > 0$, что

$$(1.12) \quad f(y) > f(x) - \frac{\theta}{2} \text{ для любой точки } y \in O_\varepsilon x.$$

Пусть число $i = 1, 2, \dots$ таково, что $2^{-i+1} < \min\{\varepsilon, \theta\}$.

Диаметры элементов покрытия γ , использованного при определении функции g_i , не превосходят $2^{-i} < \varepsilon$ и поэтому в силу (1.12)

$$\inf f(U) > f(x) - 2^{-i}, \quad \text{если } x \in U \in \gamma.$$

В силу (1.6) и (1.7) отсюда вытекает оценка

$$f(x) > g_i(x) > f(x) - 2^{-i} - 2^{-i} = f(x) - 2^{-i+1} > f(x) - \theta,$$

а это влечет выполнение условия (1.11). Лемма доказана.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1.2. *Существует такая последовательность непрерывных функций $g_i: C_s^+(U, t_0) \rightarrow [0, \infty)$, что для любой функции $x \in C_s^+(U, t_0)$ выполнены условия (1.11), (1.12) с $f(x) = \sup \pi(x)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из нашего определения топологии пространства $C_s^+(U, t_0)$ легко следует выполнение условия (1.5) для функции $f(x) = \sup \pi(x)$. В силу этого наблюдения доказываемое сразу следует из леммы 1.2 и утверждения 1.1.

§ 2. Пространство $Z^+(t_0)$

В обозначениях (1.1) предположим, что

$$(2.1) \quad Z \in R_{ce}(U),$$

(по поводу обозначений подобного типа см. [2]–[4]) и обозначим через $Z^+(t_0)$ пересечение $Z^+ \cap C_s^+(U, t_0)$ (Z^+ – множество максимальных продолжений вправо элементов Z , см. [2]–[4]).

Из теоремы VI.2.2 в [4] и замечаний предыдущего параграфа вытекает, что

$$(2.2) \quad \text{для любого компактного подмножества } K \text{ множества } U_{t_0} = \{y : y \in \mathbb{R}^n, (t_0, y) \in U\} \text{ подмножество } Z^+(t_0, K) = \{z : z \in Z^+(t_0), z(t_0) \in K\} \text{ пространства } C_s^+(U, t_0) \text{ компактно.}$$

Отсюда следует, что при непрерывном отображении $r: Z^+(t_0) \rightarrow U_{t_0}$, заданном формулой $r(z) = z(t_0)$, прообраз $r^{-1}(K) = Z^+(t_0, K)$ любого компакта $K \subseteq U_{t_0}$ является компактным подмножеством пространства $C_s^+(U, t_0)$. Иными словами,

$$(2.3) \quad r \text{ – совершенное отображение (см. [5]).}$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.1. *Пусть $Z \in R_{cek}(U)$ и $(t_0, y_0) \in U$. Тогда множество $Z^+(t_0, y_0) = \{z : z \in Z^+(t_0), z(t_0) = y_0\}$ связно.*

Доказательство. В силу ранее сказанного множество $Z^+(t_0, y_0) (= Z^+(t_0, K))$ с $K = \{y_0\}$ компактно.

Предположим, что множество $Z^+(t_0, y_0)$ несвязно. Это означает, что найдутся такие его непустые непересекающиеся открыто-замкнутые подмножества $H_1, H_2 \subseteq Z^+(t_0, y_0)$, что $H_1 \cup H_2 = Z^+(t_0, y_0)$. Пусть M – множество всех точек $s \in [t_0, \infty)$, удовлетворяющих условию:

$$\text{найдутся такие функции } z_1 \in H_1, z_2 \in H_2, \text{ что } z_1|_{[t_0, s]} = z_2|_{[t_0, s]}.$$

Обозначим $t_1 = \sup M$.

Множество M непусто (оно содержит точку t_0). Зафиксируем последовательность точек $s_1 \leq s_2 \leq \dots$ множества M , сходящихся к точке t_1 , и функций $z_{1i} \in H_1, z_{2i} \in H_2$, для которых

$$(2.4) \quad z_1|_{[t_0, s_i]} = z_2|_{[t_0, s_i]}.$$

В силу компактности множества $Z^+(t_0, y_0)$ этот выбор мы можем провести таким образом, что последовательность функций $\{z_{ji} : i = 1, 2, \dots\}$, $j = 1, 2$, сходится к некоторой функции $y_j \in Z^+(t_0, y_0)$. В силу замкнутости множества H_j предельная функция y_j принадлежит множеству H_j . При этом из (2.4) вытекает, что

$$y_1|_{[t_0, t_1)} = y_2|_{[t_0, t_1)}.$$

Возможны следующие случаи.

I) Пусть $t_1 = \sup \pi(y_1)$.

В силу открытости множества H_1 и нашего определения топологии пространства $C_s^+(U, t_0)$ найдутся такие $t_2 \in [t_0, t_1)$ и $\varepsilon > 0$, что $G(y_1, t_2, \varepsilon) \cap Z^+(t_0, y_0) \subseteq H_1$. Но при этом

$$y_1|_{[t_0, t_2]} = y_2|_{[t_0, t_2]}$$

и, следовательно, $y_2 \in H_1$, а это противоречит условию $y_2 \in H_2$. Таким образом, случай I) невозможен.

II) Пусть $t_1 = \sup \pi(y_2)$.

Этот случай также невозможен – ситуация вполне аналогична рассмотренной в I).

III) Пусть $t_1 \in \pi(y_1) \cap \pi(y_2)$.

Из леммы V.6.3 в [4] вытекает, что существует такое число $\eta > 0$, что область определения $\pi(z)$ любого решения задачи Коши

$$z \in Z^+, \quad z(t_1) = y_1(t_1),$$

содержит отрезок $[t_1, t_1 + \eta]$.

Пусть

$$\begin{aligned} X_1 &= \{z : z \in Z, \pi(z) = [t_0, t_1 + \eta], z|_{[t_0, t_1]} = y_1|_{[t_0, t_1]}\}, \\ X_2 &= \{z : z \in Z^+(t_0), [t_0, t_1 + \eta] \subseteq \pi(z), z|_{[t_0, t_1 + \eta]} \in X_1\}. \end{aligned}$$

Как легко видеть, множество X_2 замкнуто в компакте $Z^+(t_0, y_0)$ и потому компактно, а (сюръективное) отображение $g : X_2 \rightarrow X_1$, заданное формулой $g(z) = z|_{[t_0, t_1 + \eta]}$, непрерывно.

Из леммы VII.1.2 в [4] вытекает связность компакта X_1 . Из определения t_1 и неравенства $t_1 + \eta > t_1$ вытекает, что для любой точки a компакта X_1 множество $g^{-1}(a)$ лежит целиком либо в H_1 , либо в H_2 , и поэтому замкнутые в компакте X_1 множества $F_1 = g(H_1 \cap X_2)$ и $F_2 = g(H_2 \cap X_2)$ не пересекаются. Эти множества непусты ($y_1|_{[t_0, t_1 + \eta]} \in F_1$ и $y_2|_{[t_0, t_1 + \eta]} \in F_2$) и их объединение совпадает с X_1 , а это противоречит связности компакта X_1 . Таким образом, случай III) также невозможен.

Сделанное нами предположение о несвязности множества $Z^+(t_0, y_0)$ привело нас к противоречию. Утверждение доказано.

В силу (2.3) и равенства $r^{-1}(y_0) = Z^+(t_0, y_0)$ следствием утверждения 2.1 является

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.2. Пусть $Z \in R_{cek}(U)$ и M — связное подмножество множества U_{t_0} . Тогда множество $Z^+(t_0, M) = \{z : z \in Z^+(t_0), z(t_0) \in M\}$ связно.

Для точки $(a, y_0) \in U$ и $b > a$ обозначим

$$S_Z(y_0; a, b) = \{z : z \in Z, \pi(z) = [a, b], z(a) = y_0\}.$$

Введем теперь в рассмотрение следующее свойство пространств решений:

(h) для любой точки $(a, y_0) \in U$ множество $S_Z(y_0; a, b)$ ациклично, т.е.

$$H_i(S_Z(y_0; a, b)) = \begin{cases} \mathbb{Q} & \text{при } i = 0, \\ 0 & \text{при } i \neq 0 \end{cases}$$

для любой точки $(a, y_0) \in U$ и любого отрезка $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$, удовлетворяющего условию

$$[a, b] \subseteq \pi(z) \text{ для любого решения задачи Коши } z \in Z^{-+}, z(a) = y_0.$$

(Здесь и ниже мы рассматриваем гомологии с коэффициентами в группе $\mathbb{Q}$ рациональных чисел, что соответствует рассматриваемому кругу вопросов, см. [1].) Для уравнений с непрерывной правой частью выполнение условия (h) является следствием теоремы Ароншайна (см. [1], [8], [9]). При исследовании уравнений с разрывной правой частью выполнение условия (h) проверяется с использованием того, что множество $R_{ceh}(U)$ замкнуто в топологическом пространстве $R_c(U)$. Подход [2]–[4] дает много возможностей для указания необходимых для этого аппроксимаций.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.3. Пусть $Z \in R_{ceh}(U)$ и $(t_0, y_0) \in U$. Тогда множество $Z^+(t_0, y_0)$ ациклично.

Доказательство. I) Для преодоления основной технической трудности воспользуемся идеями лемм 1.1, 1.2 и утверждения 1.2, уточнив проведенное там построение. Как и в утверждении 1.2, положим $f(x) = \sup \pi(x)$. Будем строить функции $g_i: Z^+(t_0, y_0) \rightarrow \mathbb{R}$, следя за выполнением дополнительного условия

$$(2.5) \text{ если } z_1, z_2 \in Z^+(t_0, y_0) \text{ и } z_1|_{[t_0, g_i(z_1)]} = z_2|_{[t_0, g_i(z_1)]}, \text{ то } g_i(z_2) = g_i(z_1).$$

При $i = 0$ полагаем $g_i \equiv t_0$ и условие (2.5) для этого значения i оказывается выполненным очевидным образом.

II) Пусть $i > 0$ и функция g_{i-1} указана.

Определим отображение $\Phi: Z^+(t_0, y_0) \rightarrow C_s(U)$ формулой

$$\Phi(z) = z|_{[t_0, g_{i-1}(z)]}.$$

Его непрерывность очевидна. Из условия (2.5) следует, что если $z_1, z_2 \in Z^+(t_0, y_0)$ и $\Phi(z_1) = \Phi(z_2)$, то $z_1(t_1) \neq z_2(t_1)$ при некотором $t_1 \in \pi(z_1) \cap \pi(z_2)$, или иными словами

(2.6) если z_1, z_2 — различные элементы компакта $X = \Phi(Z^+(t_0, y_0))$, то ни одна из этих двух функций не является продолжением другой.

Для $z \in X$ положим

$$h(z) = \inf \{f(y) : y \in Z^+(t_0, y_0), \text{ функция } y \text{ продолжает функцию } z\}.$$

Функция h полунепрерывна снизу (т.е. удовлетворяет условию (1.5)) — ситуация вполне аналогична ситуации с функцией f .

Пусть γ — покрытие компакта $X \subseteq C_s(U)$ открытыми множествами диаметра $< 2^{-i-1}$. Воспользуемся леммой 1.1, взяв в качестве функции f функцию h и положив $f_1(z) = \sup \pi(z)$, $\eta = 2^{-i-1}$.

Функцию g_i определим формулой $g_i(z) = f_2(\Phi(z))$, где f_2 — функция, существование которой устанавливается в лемме 1.1.

III) Построенные в II) функции g_i , $i = 1, 2, \dots$, очевидным образом удовлетворяют условиям (2.5) и (1.10). Покажем, что они также удовлетворяют условию (1.11).

Допустим противное. Так как неравенство $g_i(z) < f(z)$ очевидно, то невыполнение условия (1.11) означает, что

$$(2.7) \text{ число } \alpha = \lim_{i \rightarrow \infty} g_i(z) \text{ строго меньше } f(z).$$

Зафиксируем $i = 1, 2, \dots$ и воспользуемся обозначениями II). Отметим такую функцию $z_i \in Z^+(t_0, y_0)$, для которой $\Phi(z_i) \in [\{U : \Phi(z) \in U \in \gamma\}]$ ($[\cdot]$ означает замыкание) и $f(z_i) = \sup \pi(z_i) = \min\{[h(U)] : \Phi(z) \in U \in \gamma\}$ (в силу полунепрерывности снизу функции h и компактности множества X такая функция z_i существует). Тогда

$$(2.8) g_i(z) \geq f(z_i) - 2^{-i-1}.$$

При этом расстояние между функциями $\Phi(z)$ и $\Phi(z_i)$ в метрическом пространстве $C_s(U)$ не больше 2^{-i-1} . Из последнего вытекает, что график функции $z_i|_{[t_0, g_{i-1}(z_i)]}$

лежит в 2^{-i-1} -окрестности графика функции z . Отсюда легко выводится, что точка z компакта $Z^+(t_0, y_0)$ является пределом последовательности $\{z_i : i = 1, 2, \dots\}$.

При этом в силу (2.7) и (2.8)

$$\limsup_{i \rightarrow \infty} f(z_i) \leq \lim_{i \rightarrow \infty} g_i(z) = \alpha < \lim_{i \rightarrow \infty} f(z),$$

что противоречит полунепрерывности снизу функции f (условию (1.8)).

Таким образом, сделанное допущение неверно и мы доказали выполнение условия (1.11).

IV) В обозначениях III) положим $z \in Z^+(t_0, y_0)$, $i = 0, 1, 2, \dots$,

$$\begin{aligned}\Phi_i(z) &= z|_{[t_0, g_i(z)]}, \\ X &= \Phi(Z^+(t_0, y_0)).\end{aligned}$$

Определим для $i = 1, 2, \dots$ отображение $\varphi_i: X_i \rightarrow X_{i-1}$ формулой

$$\varphi_i(z) = z|_{[t_0, g_i(\tilde{z})]}$$

для произвольной функции $\tilde{z} \in \Phi_i^{-1}(z)$ (в силу условия (2.5) определенное таким образом значение $\varphi_i(z)$ не зависит от выбора $\tilde{z} \in \Phi_i^{-1}(z)$). Мы имеем спектр

$$X_0 \xleftarrow{\varphi_1} X_1 \xleftarrow{\varphi_2} X_2 \xleftarrow{\varphi_3} X_3 \xleftarrow{\varphi_4} \dots,$$

предел которого гомеоморфен компакту $Z^+(t_0, y_0)$ с определенными выше отображениями Φ_i в качестве предельных проекций (см. [5]).

В силу условий (h) и (2.5) прообразы точек при проекциях φ_i ациклически. Компакт X_0 состоит из одной точки и поэтому ацикличесок. Из этих замечаний в силу теоремы 1.2 из [1] следует ациклическость компактов X_i , $i = 0, 1, 2, \dots$. Свойство ациклическости сохраняется при переходе к пределу спектра. Утверждение доказано.

§ 3. О существовании решения задачи Дирихле

Обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка имеет общеизвестную интерпретацию в виде системы из двух обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка или, переходя к векторной форме записи, в виде соответствующего уравнения вида $y' = f(t, y)$, где y — двумерная вектор-функция. В соответствии с этим рассмотрим

$$(3.1) \quad U = (a, b) \times \mathbb{R}^2, \text{ где } -\infty \leq a < 0, 1 < b \leq \infty,$$

$$(3.2) \quad Z \in R_{ce}(U)$$

(ниже мы будем усиливать последнее ограничение), а граничные условия задачи Дирихле запишем в виде

$$(3.3) \quad x(0) = x(1) = 0, \text{ где } z = (x, y) \in Z \text{ и } \pi(z) = [0, 1]$$

(для простоты обозначений ограничимся рассмотрением этой конкретной задачи Дирихле).

При использовании метода Лерэ–Шаудера для доказательства существования решения задачи Дирихле рассматриваются априорные оценки. Начнем с тех же самых исходных позиций. Пусть

(3.4) $-\infty < c < d < \infty$, при любом $\lambda \in [c, d]$ пространство Z_λ принадлежит $R_{cek}(U)$ и отображение $\varphi: [c, d] \rightarrow R_{cek}(U)$, заданное формулой $\varphi(\lambda) = Z_\lambda$, непрерывно,

(3.5) $-\infty < B < C < \infty$ и при любом $\lambda \in [c, d]$ любое решение задачи (3.3) для пространства $Z = Z_\lambda$ удовлетворяет условию $y(0), y(1) \in [B, C]$.

Начнем с простейших ситуаций. Рассмотрение более сложной ситуации будет в основном использовать ту же геометрическую идею, но она не будет столь явной из-за неизбежных технических деталей.

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть выполнены условия (3.1), (3.4), (3.5),

(3.6) $A \in (-\infty, B]$ и $D \in [C, \infty)$,

(3.7) при любом $\lambda \in [c, d]$ любое решение задачи Коши

$$z = (x, y) \in Z_\lambda^+, \quad x(0) = 0, \quad y(0) \in [A, D],$$

удовлетворяет условию $[0, 1] \subseteq \pi(z)$,

(3.8) ось ординат разделяет множества $\{z(1) : z \in Z_c^+, z(0) = (0, A)\}$ и $\{z(1) : z \in Z_c^+, z(0) = (0, D)\}$ (т.е. эти множества лежат по разные стороны от оси ординат).

Тогда

(3.9) существует такая функция $z = (x, y) \in Z_d$, для которой $x(0) = x(1) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Множество $M = \{(\lambda, r) : \lambda \in [c, d], r \in [B, C]\}$ существует такая функция $z = (x, y) \in Z_\lambda$ для которой $\pi(z) = [0, 1]$, $x(0) = x(1) = 0$, $y(0) = r\} \subseteq [c, d] \times [A, D] \subseteq \mathbb{R}^2$ компактно. Если $M \cap (\{d\} \times [A, D]) \neq \emptyset$, то мы получаем доказываемое.

Если $M \cap (\{d\} \times [A, D]) = \emptyset$, то в силу условия (3.5) множество M не пересекается с ломаной L с вершинами (c, A) , (d, A) , (d, D) , (c, D) . Из утверждения 2.1 вытекает связность компакта

$$X = \{z : z \in Z_\lambda, \pi(z) = [0, 1], (\lambda, z(0)) \in L\}.$$

В силу условия (3.8) связный компакт $X_1 = \{z(1) : z \in X\}$ содержит точки, лежащие по разные стороны от оси ординат. Следовательно, компакт X_1 имеет общую точку с осью ординат, т.е. для некоторой точки (λ, r) ломаной L найдется такая функция $z = (x, y) \in Z_\lambda$, что $\pi(z) = [0, 1]$, $x(0) = x(1) = 0$. Но это означает, что $(\lambda, r) \in M$, что противоречит исходному допущению. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 3.2. Пусть выполнены условия (3.1),

(3.10) $-\infty < c < d < \infty$, $Z_\lambda \in R_{ceu}(U)$ и при любом $\lambda \in [c, d]$ отображение $\varphi: [c, d] \rightarrow R_{ceu}(U)$, заданное формулой $\varphi(\lambda) = Z_\lambda$, непрерывно,

(3.5), (3.6), (3.8),

(3.11) любое решение задачи Коши

$$z = (x, y) \in Z_c^+, \quad x(0) = 0, \quad y(0) \in [A, D],$$

удовлетворяет условию $[0, 1] \subseteq \pi(z)$,

(3.12) существует такое число $R > 0$, что при любом $\lambda \in [c, d]$ любое решение задачи Дирихле

$$z = (x, y) \in Z_\lambda^+, \quad x(0) = x(1) = 0,$$

удовлетворяет условию $\|z\| < R$.

Тогда выполнено условие (3.9).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сохраним обозначение M из доказательства теоремы 3.1 и положим $M_1 = \{(\lambda, r) : \lambda \in [c, d], r \in [B, C], \text{ для (единственной) функции } z = (x, y) \in Z_\lambda^+ \text{ с } \inf \pi(z) = 0, x(0) = 0, y(0) = r \text{ справедливо неравенство } \sup \pi(z) \leq 1\}$. Компактность множества M следует из условия (3.12). Из леммы VI.2.1 в [4] следует замкнутость множества M_1 в компакте $[c, d] \times [A, D]$. В силу условия (3.11) множество M_1 не пересекается с отрезком $\{c\} \times [A, D]$.

Если $M \cap (\{d\} \times [A, D]) \neq \emptyset$, то мы получаем доказываемое.

В противном случае ни множество M , ни множество M_1 не разделяют точки (c, A) и (c, D) прямоугольника $[c, d] \times [A, D]$. При этом очевидно, что $M \cap M_1 = \emptyset$ (не может быть одновременно $\pi(z) = [0, 1]$ и $\sup \pi(z) < 1$ для единственного решения соответствующей задачи Коши). Из теоремы Фрагмена–Брауэра (см. [6]) следует, что множество $N = M \cup M_1$ также не разделяет точки (c, A) и (c, D) . Поэтому эти точки принадлежат к одной компоненте связности множества $([c, d] \times [A, D]) \setminus N$ и могут быть соединены путем $h: [0, 1] \rightarrow ([c, d] \times [A, D]) \setminus N: h(s) = (h_1(s), h_2(s))$ и $h(0) = (c, A)$, $h(1) = (c, D)$. Пусть для $s \in [0, 1]$ z_s – единственная функция из $Z_{h_1(s)}^+(0, h_2(s))$. Функция $g(s) = z_s(1)$ непрерывна и в силу условия (3.8) точки $g(0)$ и $g(1)$ лежат по разные стороны от оси ординат. Следовательно, при некотором $s_1 \in [0, 1]$ точка $g(s_1)$ лежит на оси ординат, а это противоречит тому, что кривая $h(s)$ проходит вне множества M . Сделанное нами допущение привело нас к противоречию, что и дает требуемое. Теорема доказана.

Перейдем теперь к основному результату этого параграфа.

ТЕОРЕМА 3.3. Пусть выполнены условия (3.1),

(3.13) $-\infty < c < d < \infty$ и при любом $\lambda \in [c, d]$ $Z_\lambda \in R_{ceh}(U)$ отображение $\varphi: [c, d] \rightarrow R_{ceh}(U)$, заданное формулой $\varphi(\lambda) = Z_\lambda$, непрерывно,

(3.5), (3.6), (3.8), (3.11) и (3.12). Тогда выполнено условие (3.9).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим

$$X = \{ \{ \lambda \} \times Z_{\lambda}^{+}(0, (0, r)) : \lambda \in [c, d], r \in [A, D] \} \subseteq [c, d] \times C_s^{+}(U, 0).$$

Отображение $\Phi: X \rightarrow [c, d] \times [A, D]$, сопоставляющее элементу $(\lambda, (x, y))$ множества X точку $(\lambda, y(0))$, непрерывно. Обратное многозначное отображение Φ^{-1} полунепрерывно сверху, поэтому множество X является компактом. Из ацикличности прямоугольника $[c, d] \times [A, D]$ и ацикличности прообразов точек при отображении Φ (в силу утверждения 2.3) по теореме 1.2 из [1] вытекает ацикличность компакта X .

Положим $M_0 = \{(\lambda, z) : z = (x, y), (\lambda, z) \in X, [0, 1] \subseteq \pi(z), x(1) = 0\}$, $M_1 = \{(\lambda, z) : (\lambda, z) \in X, \pi(z) \subseteq [0, 1]\}$.

Как легко видеть,

$$(3.14) \quad M_0 \cap M_1 = \emptyset.$$

Если множество $\Phi(M_0)$ пересекается с отрезком $L_1 = \{d\} \times [A, D]$, то мы имеем требуемое. В противном случае из условия (3.5) следует, что

$$(3.15) \quad \text{множество } \Phi(M_0) \text{ не пересекается с отрезками } L_1, L_2 = [c, d] \times \{A\} \text{ и } L_3 = [c, d] \times \{D\}.$$

Из условия (3.11) следует, что

$$(3.16) \quad \text{множество } \Phi(M_1) \text{ не пересекается с отрезком } L_4 = \{c\} \times [A, D].$$

Пусть $X_0 = X \setminus (M_0 \cup M_1)$.

Нам остается рассмотреть два случая.

I) Множество $\{z(1) : (\lambda, z) \in X_0\}$ пересекается с осью ординат.

Если точка $(\lambda, y) \in X_0$ такова, что точка $y(1)$ лежит на оси ординат, то $y \in M_0$, что невозможно, так как $M_0 \cap M_1 = \emptyset$. Таким образом, этот случай невозможен.

II) Множество $\{z(1) : (\lambda, z) \in X_0\}$ не пересекается с осью ординат. Ось ординат делит плоскость на две полуплоскости. Пусть W_A — та из этих двух полуплоскостей, которая содержит множество $\{z(1) : z \in Z_c^{+}, z(0) = (0, A)\}$, а W_D — другая полуплоскость (в силу условия (3.8) она содержит множество $\{z(1) : z \in Z_c^{+}, z(0) = (0, D)\}$). Множества $V_A = \{(\lambda, z) : (\lambda, z) \in X_0, z(1) \in W_A\}$ и $V_D = \{(\lambda, z) : (\lambda, z) \in X_0, z(1) \in W_D\}$ открыты в компакте X и не пересекаются,

$$(3.17) \quad V_A \supseteq \Phi^{-1}(c, A), \quad V_D \supseteq \Phi^{-1}(c, D),$$

$$(3.18) \quad V_A \cup V_D \cup M_0 \cup M_1 = X.$$

Определим отображение $\overline{\Psi}: X \rightarrow L$, где $L = L_1 \cup L_2 \cup L_3 \cup L_4$, следующим образом.

Для произвольной точки y множества $Y = \Phi^{-1}(L)$ положим $\Psi(y) = \Phi(y)$. Этим определено отображение $\Psi: Y \rightarrow L$.

Из теоремы Урысона о продолжении непрерывной функции вытекает существование непрерывного отображения

$$\Psi_0: Y_0 \rightarrow L_4,$$

где $Y_0 = \Phi^{-1}(L_4) \cup M_0$, продолжающего отображение $\Psi|_{\Phi^{-1}(L_4)}$, причем такого, что

$$(3.19) \quad \Psi_0(Y_0) \cap (L_2 \cup L_3) = \emptyset.$$

Из той же теоремы Урысона о продолжении вытекает существование непрерывного отображения

$$\Psi_1: Y_1 \rightarrow (L_1 \cup L_2 \cup L_3),$$

где $Y_1 = \Phi^{-1}(L_1 \cup L_2 \cup L_3) \cup M_1$, продолжающего отображение

$$\Psi|_{\Phi^{-1}(L_1 \cup L_2 \cup L_3)}.$$

Из (3.14) вытекает, что формула

$$\tilde{\Psi}(y) = \begin{cases} \Psi_1(y), & \text{если } y \in Y_1, \\ \Psi_2(y), & \text{если } y \in Y_2, \end{cases}$$

задает (непрерывное) отображение $\tilde{\Psi}: \tilde{Y} \rightarrow L$, где $\tilde{Y} = Y_1 \cup Y_2$.

Множество $\tilde{\Psi}([V_A] \cap \tilde{Y})$ не содержит точки (c, D) — это следует из (3.17). Из теоремы Урысона о продолжении вытекает существование непрерывного продолжения

$$\overline{\Psi}_A: [V_A] \rightarrow L$$

отображения $\tilde{\Psi}|_{[V_A] \cap \tilde{Y}}$. По аналогичным соображениям существует непрерывное продолжение

$$\overline{\Psi}_D: [V_D] \rightarrow L$$

отображения $\tilde{\Psi}|_{[V_D] \cap \tilde{Y}}$. Так как множества V_A и V_D не пересекаются и

$$\overline{\Psi}_A|_{[V_A] \cap [V_D]} = \overline{\Psi}_D|_{[V_A] \cap [V_D]},$$

то в силу (3.18) формула

$$\overline{\Psi}(y) = \begin{cases} \overline{\Psi}_A(y), & \text{если } y \in [V_A], \\ \overline{\Psi}_D(y), & \text{если } y \in [V_D], \end{cases}$$

задает (непрерывное) продолжение $\overline{\Psi}: X \rightarrow L$ отображения $\Psi: Y \rightarrow L$.

По теореме 1.2 из [1] отображение $\overline{\Psi}$ индуцирует изоморфизмы групп гомологий. Отсюда следует существование элемента g_Y группы $H_1(Y)$, который переходит в ненулевой элемент g_L группы $H_1(L) = \mathbb{Q}$. Но компакт X ацикличесок, поэтому образ g_X элемента g_Y при вложении $Y \hookrightarrow X$ является нулевым элементом группы $H_1(X)$. Композиция вложения $Y \hookrightarrow X$ с отображением $\overline{\Psi}$ совпадает с отображением Ψ , поэтому $\overline{\Psi}(g_X) = \Psi(g_Y) = g_L$, но это невозможно, так как $g_X = 0$, а $g_L \neq 0$. Таким образом, и случай II) невозможен.

Тем самым, $\Phi(M_0) \cap L_1 \neq \emptyset$ и теорема доказана.

§ 4. О существовании периодических решений

Предположим, что

$$(4.1) \quad U = (a, b) \times \mathbb{R}^n, \text{ где } -\infty \leq a < 0, 1 < b \leq \infty,$$

$$(4.2) \quad Z \in R_{ceh}(U).$$

Задачу о существовании периодического решения сформулируем как задачу о существовании такой функции

$$(4.3) \quad z \in Z,$$

что

$$(4.4) \quad \pi(z) = [0, 1] \text{ и } z(0) = z(1).$$

Пусть

$$(4.5) \quad r > 0, S = \{u : u \in \mathbb{R}^n, \|u\| = r\}, K = \{u : u \in \mathbb{R}^n, \|u\| \leq r\},$$

$$(4.6) \quad \text{любая функция } z \in Z^+, \text{ для которой } \inf \pi(z) = 0 \text{ и } z(0) \in K, \text{ удовлетворяет условию } \pi(z) \supseteq [0, 1],$$

$$(4.7) \quad \text{любая функция } z \in Z^+, \text{ для которой } \inf \pi(z) = 0 \text{ и } z(0) \in S, \text{ удовлетворяет условию } z(0) \neq z(1).$$

В последнем условии нетрудно увидеть аналог априорной оценки типа фигурирующих при использовании метода Лерэ–Шаудера.

По лемме VII.1.1 в [3] множество

$$X = \{z : z \in Z_s, \pi(z) = [0, 1], z(0) \in S\}$$

компактно. Отображение $\varphi: X \rightarrow S$, сопоставляющее функции $z \in X$ точку $z(0)$, ациклично (в силу условия (h)) и поэтому индуцирует изоморфизмы соответствующих групп гомологий. Отображение $\psi: X \rightarrow S_1 = \{u : u \in \mathbb{R}^n, \|u\| = 1\}$, заданное формулой

$$\psi(z) = \frac{z(1) - z(0)}{\|z(1) - z(0)\|}$$

(в силу (4.7) оно определено), непрерывно и индуцирует гомоморфизмы

$$\psi_*: H_{n-1}(X) \rightarrow H_{n-1}(S_1).$$

Обозначим через e_2 единичный элемент группы $H_{n-1}(S_1) = \mathbb{Q}$, через e_1 – элемент группы $H_{n-1}(X)$, соответствующий e_2 при изоморфизме, обратном к изоморфизму, порожденному ациклическим отображением φ . Образ элемента e_1 группы $H_{n-1}(X)$ при гомоморфизме ψ_* имеет вид ke_2 . Число k будем называть *индексом пространства Z_s на отрезке $[0, 1]$ относительно сферы S* и обозначать $k_1(Z, S, 0, 1)$.

Если в предположениях (4.1), (4.2), (4.5)–(4.7) $k_1(Z, S, 0, 1) \neq 0$, то задача (4.3), (4.4) имеет решение – ситуация вполне аналогична рассмотренной в §6 в [1].

Перейдем теперь к основному результату этого параграфа.

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть выполнены условия (3.13), (4.1), (4.5),

(4.8) пространство $Z = Z_c$ удовлетворяет условиям (4.6), (4.7) и $k_1(Z, S, 0, 1) \neq 0$,

(4.9) $R > 0$ и при любом $\lambda \in [c, d]$ любое решение задачи $z \in Z_\lambda$, (4.4) удовлетворяет условиям $z(0) \in K \setminus S$ и $\|z\| \leq R$.

Тогда задача $z \in Z_d$, (4.4) имеет решение.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через X множество

$$\bigcup \{ \{\lambda\} \times Z_\lambda^+(0, u) : \lambda \in [c, d], u \in K \} \subseteq [c, d] \times C_s^+(U, 0).$$

Отображение $\Phi: X \rightarrow [c, d] \times K$, сопоставляющее элементу (λ, z) множества X точку $(\lambda, z(0))$ непрерывно. Обратное многозначное отображение Φ^{-1} полунепрерывно сверху, поэтому множество X является компактом. Из ацикличности множества $[c, d] \times K$ и ацикличности прообразов точек при отображении Φ (в силу утверждения 2.3) по теореме 1.2 из [1] вытекает ацикличность компакта X .

Положим $M_0 = \{(\lambda, z) : (\lambda, z) \in X, [0, 1] \subseteq \pi(z), z(0) = z(1)\}$ и $M_1 = \{(\lambda, z) : (\lambda, z) \in X, \pi(z) \subseteq [0, 1]\}$.

Как легко видеть, эти множества замкнуты (см. [3], [4]) и

$$(4.10) \quad M_0 \cap M_1 = \emptyset.$$

Если множество $\Phi(M_0)$ пересекается с множеством $K_d = \{d\} \times K$, то мы имеем требуемое.

Допустим противное. Тогда из условия (4.9) следует, что

$$(4.11) \quad \text{множество } \Phi(M_0) \text{ не пересекается с множествами } K_d \text{ и } \Sigma = [c, d] \times S.$$

Из условия (4.6) (для пространства $Z = Z_c$) вытекает, что

$$(4.12) \quad \text{множество } \Phi(M_1) \text{ не пересекается с множеством } K_c = \{c\} \times K.$$

Из условий (3.13), (4.12) и теоремы VI.2.2 в [3] следует, что найдется такое число $d_0 \in (c, d]$, что

$$(4.13) \quad \text{множество } \Phi(M_1) \text{ не пересекается с множеством } [c, d_0] \times K.$$

Пусть

$$d_1 = \frac{c + d_0}{2}, \quad S^n = \{u : u \in \mathbb{R}^{n+1}, \|u\| = 1\},$$

$$A = K_c \cup K_d \cup \Sigma, \quad B = \Phi^{-1}(A) \cup M_0 \cup M_1.$$

Определим (непрерывную) функцию $\alpha: B \rightarrow [-1, 1]$ формулой

$$\alpha(\lambda, z) = \begin{cases} \frac{\lambda - d_1}{d_1 - c}, & \text{если } \lambda \in [c, d_0] \text{ и } z(0) \in S, \\ -1, & \text{если } \lambda = c \text{ или } (\lambda, z) \in M_0, \\ +1, & \text{если } \lambda = d \text{ или } (\lambda, z) \in \Phi^{-1}([d_0, d] \times S) \cup M_1. \end{cases}$$

В силу (4.11) и (4.13) это определение корректно.

По теореме Урысона существует непрерывное продолжение $\beta: X \rightarrow [-1, 1]$ функции α . Отображение $\psi: X \rightarrow S^n$ определим формулой

$$\psi(\lambda, z) = \begin{cases} \left(\frac{z(1) - z(0)}{\|z(1) - z(0)\|} \sqrt{1 - (\beta(\lambda, z))^2}, \beta(\lambda, z) \right), & \text{если } (\lambda, z) \in X \setminus M_1, \\ (\bar{0}, -1), & \text{если } (\lambda, z) \in M_0, \\ (\bar{0}, 1), & \text{если } (\lambda, z) \in M_1. \end{cases}$$

Непрерывность отображения ψ на множестве $X \setminus (M_0 \cup M_1)$ очевидна. Покажем его непрерывность в точках множества M_1 . Если $(\lambda_i, z_i) \rightarrow (\lambda_0, z_0) \in M_1$, то $\beta(\lambda_i, z_i) \rightarrow 1$ и поэтому $\psi(\lambda_i, z_i) \rightarrow (\bar{0}, 1) = \psi(\lambda_0, z_0)$. Аналогично доказывается непрерывность отображения ψ в точках множества M_0 . Таким образом, отображение ψ непрерывно на всем компакте X .

Обозначим через e единичный элемент группы $H_{n-1}(\{d_1\} \times S) = \mathbb{Q}$; через e_1 — элемент группы $H_{n-1}(Y)$, где $Y = \Phi^{-1}(\{d_1\} \times S)$, соответствующий e при изоморфизме, обратном к изоморфизму, порожденному ациклическим отображением Φ ; через e_2 — единичный элемент группы $H_{n-1}(S^{n-1}) = \mathbb{Q}$, где $S^{n-1} = \{u = (u_1, \dots, u_n, 0) : (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n, u_1^2 + \dots + u_n^2 = 1\}$.

Значения отображения $\psi|_Y$ принадлежат множеству S^{n-1} , и поэтому оно индуцирует гомоморфизм

$$\psi_*: H_{n-1}(Y) \rightarrow H_{n-1}(S^{n-1}).$$

Пусть $\psi_*(e_1) = ke_2$.

Из теоремы 1.2 в [1] легко выводится равенство $k = k_1(Z, S, 0, 1)$, а отсюда в силу условия (4.8) вытекает, что

(4.14) элемент $\psi_*(e_1)$ группы $H_{n-1}(S^{n-1})$ отличен от нулевого.

Компакты $Y_- = \Phi^{-1}(K_c \cup ([c, d_1] \times S))$ и $Y_+ = \Phi^{-1}(K_d \cup ([d_1, d] \times S))$ ациклически. Их пересечение совпадает с компактом Y , а объединение — с компактом $Y_1 = \Phi^{-1}(A)$.

Отображение Φ индуцирует изоморфизм последовательностей Майера–Виеториса пар (Y_-, Y_+) и

$$(K_c \cup ([c, d_1] \times S), K_d \cup ([d_1, d] \times S)),$$

поэтому граничный гомоморфизм

$$H_n(Y_1) \rightarrow H_{n-1}(Y)$$

первой из этих последовательностей является изоморфизмом (так как аналогичное верно для второй последовательности).

Отображение ψ индуцирует гомоморфизм последовательности Майера–Виеториса пары (Y_-, Y_+) в последовательность Майера–Виеториса пары (S_-, S_+) , где

$$\begin{aligned} S_- &= \{u = (u_1, \dots, u_n, u_{n+1}) : (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n, \\ &\quad u_1^2 + \dots + u_n^2 + u_{n+1}^2 = 1, u_{n+1} \leq 0\}, \\ S_+ &= \{u = (u_1, \dots, u_n, u_{n+1}) : (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n, \\ &\quad u_1^2 + \dots + u_n^2 + u_{n+1}^2 = 1, u_{n+1} \geq 0\}, \end{aligned}$$

причем диаграмма

$$(4.15) \quad \begin{array}{ccc} H_n(Y_1) & \longrightarrow & H_{n-1}(Y) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H_n(S^n) & \longrightarrow & H_{n-1}(S^{n-1}) \end{array}$$

коммутативна. Из (4.14) и коммутативности диаграммы (4.15) вытекает, что

(4.16) гомоморфизм $H_n(Y_1) \rightarrow H_n(S^n)$ левого столбца диаграммы (4.15) не является нулевым.

Но одновременно этот гомоморфизм является композицией гомоморфизма $H_n(Y_1) \rightarrow H_n(X)$, порожденного вложением $Y_1 \hookrightarrow X$, и гомоморфизма $H_n(X) \rightarrow H_n(S^n)$, порожденного отображением ψ . Отсюда вытекает, что гомоморфизм $H_n(Y_1) \rightarrow H_n(S^n)$ является нулевым.

Сделанное в начале доказательства допущение привело нас к противоречию и, таким образом, теорема доказана.

Вариантом теоремы 4.1 является

ТЕОРЕМА 4.2. Пусть выполнены условия (3.13), (4.1), (4.5), (4.8),

(4.17) любое решение задачи $z \in Z_c$, (4.4) удовлетворяет условию $z(0) \in K \setminus S$,

(4.18) множество $D = \{(\lambda, z) : \lambda \in [c, d], z \in Z_\lambda, \pi(z) = [0, 1], z(0) = z(1)\} \subseteq [c, d] \times C([0, 1], \mathbb{R}^n)$ распадается в объединение дискретного семейства компактов.

Тогда задача $z \in Z_d$, (4.4) имеет решение.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО этой теоремы близко к доказательству теоремы 4.1.

Пусть $\tilde{X} = \bigcup \{ \{\lambda\} \times Z_\lambda^+(0, u) : \lambda \in [c, d], u \in \mathbb{R}^n \} \subseteq [c, d] \times C_s^+(U, 0)$.

Отображение $\tilde{\Phi}: \tilde{X} \rightarrow [c, d] \times \mathbb{R}^n$, сопоставляющее элементу (λ, z) множества $\tilde{X}$ точку $(\lambda, z(0))$, непрерывно. Обратное многозначное отображение $\tilde{\Phi}^{-1}$ полунепрерывно сверху.

Положим $\tilde{M}_1 = \{(\lambda, z) : (\lambda, z) \in X, \pi(z) \subseteq [0, 1]\}$.

Как легко видеть,

$$(4.19) \quad D \cap \tilde{M}_1 = \emptyset.$$

Если множество $\tilde{\Phi}(D)$ пересекается с множеством $P_d = \{d\} \times \mathbb{R}^n$, то мы имеем требуемое.

Допустим противное, т.е. что

$$(4.20) \quad \text{множество } \tilde{\Phi}(D) \text{ не пересекается с множествами } P_d.$$

Из условия (4.8) (см. (4.6)) вытекает, что

$$(4.21) \quad \text{множество } \tilde{\Phi}(\tilde{M}_1) \text{ не пересекается с множеством } \{(c, u) : u \in \mathbb{R}^n, \|u\| \leq r\}.$$

Из условий (3.13), (4.21) и теоремы VI.2.2 в [3] следует, что найдется такое число $r_0 > r$, что

(4.22) множество $\widetilde{\Phi}(\widetilde{M}_1)$ не пересекается с множеством $\{(c, u) : u \in \mathbb{R}^n, r \leq \|u\| \leq r_0\}$.

Пусть $D = \bigcup\{D_i : i = 1, 2, \dots\}$ — представление, фигурирующее в условии (4.18). В силу компактности множества $E = \widetilde{\Phi}^{-1}([c, d] \times K_r)$, где $K_r = \{u : u \in \mathbb{R}^n, \|u\| \leq r\}$, и дискретности семейства $\{D_i : i = 1, 2, \dots\}$ найдется такой индекс $i_0 = 1, 2, \dots$, что $D_i \cap E = \emptyset$ для любого $i = i_0 + 1, i_0 + 2, \dots$.

Множество $\Phi(E \cup M_0)$, где $M_0 = \bigcup\{D_i : i = 1, \dots, i_0\}$, компактно и поэтому найдется такое число $q > r_0$, что

$$\Phi(E \cup M_0) \subseteq [c, d] \times K_q,$$

где $K_q = \{u : u \in \mathbb{R}^n, \|u\| \leq q\}$, или

$$E \cup M_0 \subseteq \Phi^{-1}([c, d] \times K_q).$$

Пусть

$$r_1 = \frac{c + r_0}{2}, \quad S^n = \{u : u \in \mathbb{R}^{n+1}, \|u\| = 1\}, \quad A = (\{c\} \times K_q) \cup (\{d\} \times K_q) \cup \widetilde{S},$$

где $\widetilde{S} = [c, d] \times \{u : u \in \mathbb{R}^{n+1}, \|u\| = q\}$,

$$M_1 = \widetilde{M}_1 \cup \bigcup\{D_i : i = i_0 + 1, i_0 + 2, \dots\},$$

$$\Phi = \Phi|_{[c, d] \times K_q},$$

$$B = \Phi^{-1}(A) \cup ((M_0 \cup M_1) \cap K_q).$$

Определим (непрерывную) функцию $\alpha : B \rightarrow [-1, 1]$ формулой

$$\alpha(\lambda, z) = \begin{cases} \frac{\|z(0)\| - r_1}{r_1 - r}, & \text{если } \lambda = c \text{ и } r \leq \|z(0)\| \leq r_0, \\ -1, & \text{если } \lambda = c, \|z(0)\| \leq r, \text{ или } (\lambda, z) \in M_0, \\ +1, & \text{если } \lambda = c, \|z(0)\| \geq r_0, \\ & \text{или } (\lambda, z(0)) \in \widetilde{S} \cup (\{d\} \times K_{r_0}), \text{ или } (\lambda, z) \in M_1. \end{cases}$$

В силу (4.21), (4.22) и дизъюнктивности семейства $\{D_i : i = 1, 2, \dots\}$ это определение корректно.

По теореме Урысона существует непрерывное продолжение $\beta : X \rightarrow [-1, 1]$ функции α . Отображение $\psi : X \rightarrow S^n$ определим формулой

$$\psi(\lambda, z) = \begin{cases} \left(\frac{z(1) - z(0)}{\|z(1) - z(0)\|} \sqrt{1 - (\beta(\lambda, z))^2}, \beta(\lambda, z) \right), & \text{если } (\lambda, z) \in X \setminus M_1, \\ (\vec{0}, -1), & \text{если } (\lambda, z) \in M_0, \\ (\vec{0}, 1), & \text{если } (\lambda, z) \in M_1. \end{cases}$$

Но существование такого непрерывного отображения ψ приводит к противоречию – это вполне аналогично ситуации, рассмотренной в доказательстве теоремы 4.1. При воспроизведении соответствующей части доказательства теоремы 4.1 надо положить

$$Y_- = \Phi^{-1}(\{(c, u) : u \in \mathbb{R}^n, \|u\| \leq r_1\}),$$

$$Y_+ = \Phi^{-1}(\{(d, u) : u \in \mathbb{R}^n, \|u\| \leq q\} \cup \tilde{S} \cup \{(c, u) : u \in \mathbb{R}^n, r_1 \leq \|u\| \leq q\}).$$

Таким образом, теорема доказана.

Естественное первое впечатление о некоторой искусственности условия (4.18) тут же пропадает, если заметить следующее. Если периодические траектории рассматриваемого уравнения связаны с вращением вокруг фиксированного множества, то функция $s(z)$, определяемая как число оборотов, совершаемых решением z , локально постоянна на множестве D . При наличии соответствующих (априорных) оценок это дает разбиение множества D на попарно не пересекающиеся компакты $\{(\lambda, z) : (\lambda, z) \in D, s(z) = i\}$, $i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ (см. [7]).

§ 5. Еще раз о задаче Дирихле

Наша цель в этом параграфе скромна – сопоставить содержание § 3 условиям (4.18).

ТЕОРЕМА 5.1. Пусть выполнены условия

$$(5.1) \quad -\infty < B < C < \infty,$$

$$(3.1), (3.6), (3.13),$$

$$(5.2) \quad \lambda \in [c, d] \text{ любое решение задачи Коши}$$

$$z = (x, y) \in Z_c^+, \quad x(0) = 0, \quad y(0) \in \mathbb{R},$$

удовлетворяет условию $[0, 1] \subseteq \pi(z)$,

$$(3.8),$$

$$(5.3) \quad \lambda \in [c, d] \text{ любое решение задачи (3.3) для пространства } Z = Z_c \text{ удовлетворяет условию } y(0), y(1) \in [B, C],$$

$$(5.4) \quad \text{множество } E = \{(\lambda, z) : \lambda \in [c, d], z = (x, y) \in Z_\lambda, \pi(z) = [0, 1], x(0) = x(1) = 0\} \subseteq [c, d] \times C([0, 1], \mathbb{R}^n) \text{ распадается в объединение дискретного семейства компактов.}$$

Тогда выполнено условие (3.9).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\tilde{X} = \{(\lambda, z) : \lambda \in [c, d], z = (x, y) \in Z_\lambda^+, \inf \pi(z) = 0\}$, $E = \bigcup \{E_i : i = 1, 2, \dots\}$ – представление, фигурирующее в условии (5.4), $E_i^* = \{(\lambda, z) : (\lambda, z) \in \tilde{X}, [0, 1] \subseteq \pi(z), z|_{[0, 1]} \in E_i\}$. Из теоремы VI.2.2 в [4] следует компактность множеств E_i^* , $i = 1, 2, \dots$.

Отображение $\Phi: X \rightarrow [c, d] \times [A, D]$, сопоставляющее элементу (λ, z) множества X точку $(\lambda, z(0))$, непрерывно. Из теоремы VI.2.2 в [4] следует совершенность отображения Φ . Отсюда и из локальной конечности семейства $\gamma = \{E_i^* : i = 1, 2, \dots\}$ следует существование такого числа $j = 1, 2, \dots$, что

$$\Phi(E_i^*) \cap ([c, d] \times [A, D]) = \emptyset$$

при любом $i > j$.

Множества $M_0 = E_1^* \cup \dots \cup E_j^*$ и $F = \Phi(M_0)$ компактны, и поэтому существуют такие числа $A_1 < A$ и $D_1 > D$, что $F \subseteq [c, d] \times [A_1, D_1]$.

Положим

$$\begin{aligned}\widetilde{M}_1 &= \{(\lambda, z) : (\lambda, z) \in \widetilde{X}, z = (x, y), \pi(z) \subseteq [0, 1], x(0) \in [A_1, d_1]\}, \\ M_1 &= \widetilde{M}_1 \cup (\Phi^{-1}([c, d] \times [A_1, D_1]) \cap (E_{j+1}^* \cup \dots \cup E_{j+2}^* \dots)), \\ X &= \Phi^{-1}([c, d] \times [A_1, D_1]).\end{aligned}$$

Повторяя теперь с новым содержанием обозначений M_0 , M_1 и X основную часть доказательства теоремы 3.3, получаем требуемое.

§ 6. Об уравнениях с непрерывной правой частью

Теория [2]–[4] основана на детальном изучении топологического строения множеств решений уравнений. Сложившаяся теория обыкновенных дифференциальных уравнений проходит мимо явного описания этих свойств (сильно сужая при этом свои возможности). Следствием этого является определенная трудность восприятия результатов [2]–[4] для специалистов, привыкших к традиционному изложению теории. Цель этого параграфа – дать формулировки полученных выше результатов, не использующие языка теории [2]–[4], и тем самым облегчить восприятие основной части работы. Ограничимся простейшим случаем уравнений с непрерывной правой частью. Хотя сразу стоит отметить, что требование непрерывности правой части можно ослабить, например, до локального выполнения условий Каратеодори, или можно рассмотреть дифференциальные включения в предположениях Дэви (см. [3], [4]). Но максимальные формулировки уже были приведены выше и здесь уже нет необходимости усложнения условий.

Для уравнений с непрерывной правой частью наши результаты могут быть получены и с использованием теории Лерэ–Шаудера, но сама она опирается на значительно более сложный аппарат алгебраической топологии. Допущение же разрывов правой части сразу делает невозможным прямое использование теории Лерэ–Шаудера, не отражаясь на силе наших методов. Например, в результатах этого параграфа требование непрерывности правой части можно ослабить и допустить возможность разрывов на счетном замкнутом подмножестве области определения правой части – это приводит к несуществованию соответствующего интегрального оператора.

Результаты этого параграфа не требуют специальных доказательств и являются прямыми следствиями ранее доказанных теорем и теоремы Ароншайна [8] (см. также [2]–[4]). В частности, из теоремы 3.3 получается

ТЕОРЕМА 6.1. Пусть

(6.1) правая часть уравнения $y'' = f(t, y, y', \lambda)$ определена и непрерывна на множестве $U = (a, b) \times \mathbb{R}^2 \times [c, d]$, где $-\infty \leq a < 0$, $1 < b \leq \infty$, $-\infty < c \leq d < \infty$,

(6.2) $-\infty < A < B < C < D < \infty$,

(6.3) при любом $\lambda \in [c, d]$ любое решение задачи $y(0) = y(1) = 0$ для уравнения $y'' = f(t, y, y', \lambda)$ удовлетворяет условию $y'(0), y'(1) \in [C, D]$,

(6.4) существует такое число $R > 0$, что при любом $\lambda \in [c, d]$ любое решение задачи $y'' = f(t, y, y', \lambda)$, $y(0) = y(1) = 0$ удовлетворяет условию $\|y\| \leq R$, $\|y'\| \leq R$,

(6.5) любое решение задачи Коши $y'' = f(t, y, y', c)$, $y(0) = 0$, $y'(0) \in [A, D]$, продолжается на отрезок $[0, 1]$,

(6.6) если y_1 — любое решение задачи Коши $y'' = f(t, y, y', c)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = A$, y_2 — любое решение задачи Коши $y'' = f(t, y, y', c)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = D$, то $y_1(1)y_2(1) < 0$.

Тогда задача Дирихле $y'' = f(t, y, y', d)$, $y(0) = y(1) = 0$ имеет решение.

Здесь (6.3) и (6.4) содержат обычную для теории краевых задач и для метода “продолжения по параметру” априорную оценку. При $\lambda = c$ мы должны иметь простое тестовое уравнение (обычно это линейное уравнение $y'' + \mu y = 0$, а в данном случае от него требуется лишь выполнение (6.5)). Условие (6.6) заменяет подсчет соответствующего индекса теории Лерэ–Шаудера. Для указанного линейного уравнения при $A < 0 < D$ оно выполняется автоматически (с небольшими очевидными оговорками).

Следствием теоремы 4.2 является

ТЕОРЕМА 6.2. Пусть

(6.7) правая часть уравнения $y' = f(t, y, \lambda)$ определена и непрерывна на множестве $U = (a, b) \times \mathbb{R}^n \times [c, d]$, где $-\infty \leq a < 0$, $1 < b \leq \infty$, $-\infty < c \leq d < \infty$,

(6.8) $r > 0$, $S = \{u : u \in \mathbb{R}^n, \|u\| = r\}$, $K = \{u : u \in \mathbb{R}^n, \|u\| \leq r\}$,

(6.9) $R > 0$, при любом $\lambda \in [c, d]$ любое решение задачи $y' = f(t, y, \lambda)$, $y(0) = y(1)$ удовлетворяет условиям $y(0) \in K \setminus S$ и $\|y\| \leq R$,

(6.10) любое решение задачи Коши $y' = f(t, y, c)$, $y(0) = 0$, $y'(0) \in K$, продолжается на отрезок $[0, 1]$,

(6.11) $k_1(Z, S, 0, 1) \neq 0$ для пространства Z решений уравнения $y' = f(t, y, c)$.

Тогда задача $y'' = f(t, y, y', d)$, $y(0) = y(1)$ имеет решение.

Условие (6.9) соответствует априорной оценке. В качестве тестового уравнения $y = f(t, y, c)$ обычно берется линейное уравнение, для которого выполнение условий (6.10), (6.11) очевидно.

Список литературы

1. *Bielawski R., Górniewicz L., Plaskacz S.* Topological approach to differential inclusions on closed subset of $\mathbb{R}^n$ // *Dynam. Report.* 1992. №1. P. 225–250.
2. *Федорчук В. В., Филиппов В. В.* Общая топология. Основные конструкции. М.: Изд-во МГУ, 1988.
3. *Филиппов В. В.* Топологическое строение пространств решений обыкновенных дифференциальных уравнений // *УМН.* 1993. Т. 48. №1. С. 103–154.
4. *Филиппов В. В.* Пространства решений обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Изд-во МГУ, 1993.
5. *Александров П. С., Пасынков Б. А.* Введение в теорию размерности. М.: Наука, 1973.
6. *Александров П. С.* Введение в гомологическую теорию размерности. М.: Наука, 1975.
7. *Mawhin J., Zanolin F.* A continuation approach to fourth order superlinear periodic boundary value problems // *Topol. Methods Nonlinear Anal.* 1993. V. 2. №1. P. 55–74.
8. *Aronszajn N.* Le correspondant topologique de l'unicité dans la théorie des équations différentielles // *Ann. of Math.* 1942. V. 43. P. 730–738.
9. *Филиппов В. В.* О теореме Ароншайна // *Дифференц. уравнения.* 1997. Т. 33. №1. С. 11–15.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Поступила в редакцию
02.05.1995 и 28.01.1997