Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Гейлер, М. М. Сенаторов, Структура спектра оператора Шрёдингера с магнитным полем в полосе и бесконечнозонные потенциалы, *Матем. сб.*, 1997, том 188, номер 5, 21–32

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm224>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 13:52:55

УДК 517.983

В. А. Гейлер, М. М. Сенаторов

Структура спектра оператора Шрёдингера с магнитным полем в полосе и бесконечнозонные потенциалы

Пусть $H = -d^2/dx^2 + V(x + p)$ – оператор Штурма–Лиувилля на отрезке $[a, b]$ с нулевыми граничными условиями на концах отрезка; здесь V – строго выпуклая функция класса C^2 на всей числовой прямой $\mathbb{R}$, p – произвольный числовой параметр. Исследуется поведение собственных чисел оператора H в зависимости от p . К такому исследованию сводится спектральный анализ оператора Шрёдингера с магнитным полем в полосе с граничными условиями Дирихле на границе полосы. В качестве следствия основного результата получается такая теорема.

Пусть V_1 – сужение функции V на отрезок $[a, b]$, u – периодическое продолжение функции V_1 на всю числовую ось (с периодом $b - a$). Тогда в спектре периодического оператора Шрёдингера $-d^2/dx^2 + u(x)$ все лакуны ненулевые.

Библиография: 19 названий.

Введение. Квантовомеханический гамильтониан двумерной свободной заряженной частицы в однородном магнитном поле, перпендикулярном плоскости конфайнмента частицы, в калибровке Ландау задается дифференциальным выражением

$$\tau = -\partial^2/\partial x - (\partial/\partial y - 2\pi i \xi x)^2. \quad (1)$$

Точнее, упомянутый гамильтониан H_L представляет собой самосопряженный оператор в $L^2(\mathbb{R}^2)$, являющийся замыканием симметричного оператора τ с областью определения $C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ [1]. В формуле (1) параметр ξ равен числу квантов потока магнитного поля через единичную площадку плоскости $\mathbb{R}^2$; система единиц выбрана таким образом, что заряд частицы и физические константы c и $\hbar$ равны единице, а масса частицы равна $1/2$. Хорошо известно, что спектр оператора H_L чисто точечный и состоит из бесконечно вырожденных собственных чисел (уровней Ландау) $\varepsilon_k^0 = 4\pi\xi(k + 1/2)$, $k = 0, 1, \dots$. Эта простая картина спектра оператора H_L оказывается достаточной для многих физических приложений, в частности, с ее помощью дается элементарное объяснение открытого недавно К. фон Клитцингом квантового эффекта Холла в двумерных электронных системах [2] (русский перевод см. в сборнике [3]). Более подробный анализ на одноэлектронном уровне показывает, что квантование холловской проводимости обусловлено нетривиальностью классов Чжэня расслоения магнито-блоховских функций [4]; интересно, что незадолго до открытия фон Клитцинга соответствующие числа Чжэня были вычислены С. П. Новиковым [5].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 95-01-00439).

Использование спектра оператора H_L в теории квантового эффекта Холла означает, что мы пренебрегаем такими важными факторами, как конечность размеров холловской системы, наличие в ней кристаллической решетки, примесей и т. п. Строгая математическая теория квантового эффекта Холла, учитывающая влияние решетки и дефектов, построена с использованием идей некоммутативной геометрии Конна в [6], [7]. Исследование влияния конечности размеров холловских систем приводит к необходимости учета вклада краевых состояний в холловскую проводимость. Простая модель, позволяющая учитывать этот вклад, предложена в [8]. Она основана на спектральном анализе самосопряженного оператора H , порожденного в полосе $|x| \leq a$ дифференциальным выражением τ с условиями Дирихле на границе $x = \pm a$. Преобразование Фурье по переменной y сводит спектральную задачу для этого оператора к анализу зависимостей от параметра p собственных чисел $\varepsilon_0(p), \dots, \varepsilon_k(p), \dots$ оператора Штурма–Лиувилля

$$H(p) = -d^2/dx^2 + (2\pi\xi x - p)^2 \quad (2)$$

на отрезке $[-a, a]$ с граничными условиями Дирихле на концах отрезка. Функции $\varepsilon_k(p)$ изучались численно в большом числе работ, посвященных как квантовому эффекту Холла, так и другим интересным вопросам теории двумерных электронных систем; укажем, например, работы [9]–[14] и др. (обширную библиографию можно найти в статьях [9], [10]). Типичный вид графиков функций $\varepsilon_k(p)$ приведен на рис. 1. Существенные особенности этих функций, используемые в упомянутых работах, таковы:

- 1) функции $\varepsilon_k(p)$ строго возрастают при $p > 0$ (эти функции, очевидно, четные);
- 2) при больших a и умеренных значениях p и k значения $\varepsilon_k(p)$ близки к соответствующим уровням Ландау ε_k^0 ;
- 3) при больших p зависимость $\varepsilon_k(p)$ от p близка к квадратичной;
- 4) при больших k график $\varepsilon_k(p)$ близок к некоторой параболе.

Свойства 2)–4) нетрудно вывести (разумеется, при надлежащем уточнении их формулировок) из известных результатов теории возмущений; см., например, [15, с. 46–48, 302–303]. Основная цель нашей статьи – дать строгое доказательство выполнимости свойства 1). Оказывается, что это свойство остается справедливым при замене потенциала $V(x) = (2\pi\xi x)^2$ в (2) на любую четную дважды непрерывно дифференцируемую строго выпуклую функцию $V(x)$. Доказательство базируется на совместном рассмотрении зависимости от p четырех серий собственных чисел: периодической и антипериодической задач, а также задач Дирихле и Неймана для оператора вида (2) на отрезке $[-a, a]$. Необходимо заметить, что в рамках исследования оператора H_L перечисленные задачи, кроме задачи Дирихле, не представляют интереса, так как соответствующие краевые условия на границе полосы $|x| \leq a$ не инвариантны по отношению к калибровочным преобразованиям векторного потенциала магнитного поля.

В качестве любопытного следствия из доказательства основных результатов статьи можно извлечь следующий способ построения периодических потенциалов $u(x)$, для которых никакие две зоны в спектре оператор Шрёдингера $-d^2/dx^2 + u(x)$ на всей числовой оси не смыкаются (т.е. все допустимые лакуны ненулевые). Для такого построения нужно взять сужение функции $V(x)$ с перечисленными выше свойствами на произвольный отрезок $[a, b]$ и продолжить

полученную функцию на всю ось $\mathbb{R}$ до периодической функции с периодом $T = [a, b]$ (см. теорему 3). Известно, что в пространстве непрерывных T -периодических функций с чебышевской нормой потенциалы $u(x)$, для которых все лакуны ненулевые, образуют плотное множество [15]. Несмотря на это, известно не так уж много конкретных примеров периодических потенциалов с этим свойством, поэтому предложенная выше конструкция может представлять определенный интерес.

Рис. 1.

1. На протяжении всей статьи через V будем обозначать некоторую вещественную дважды непрерывно дифференцируемую функцию, заданную на всей числовой прямой $\mathbb{R}$. Рассмотрим конечный отрезок $[a_1, a_2] \equiv [a, b]$ ($a < b$) и обозначим через $H^\Gamma = H^\Gamma(p, a, b)$ самосопряженный оператор в $L^2(a, b)$, заданный дифференциальным выражением

$$\tau[u] = -u''(x) + V(x + p)u(x) \quad (3)$$

и самосопряженными граничными условиями $\Gamma_i(u) = 0$ ($i = 1, 2$) [16]. На самом деле нам потребуются лишь четыре вида граничных условий Γ , которые ниже только и рассматриваются:

- 1) условие Дирихле, $\Gamma = D$, где $D_i(u) = u(a_i)$;
- 2) условие Неймана, $\Gamma = N$, где $N_i(u) = u'(a_i)$;
- 3) периодическое условие $\Gamma = P$, где $P_1(u) = u(a_1) - u(a_2)$, $P_2(u) = u'(a_1) - u'(a_2)$;
- 4) антипериодическое условие $\Gamma = A$, где $A_1(u) = u(a_1) + u(a_2)$, $A_2(u) = u'(a_1) + u'(a_2)$.

Разумеется, среди параметров p, a, b , от которых зависит H^Γ , по существу лишь два независимых (например, p и $b - a$), но нам будет удобно использовать все три.

Хорошо известно, что оператор H^Γ имеет дискретный спектр с кратностью, не превосходящей двух; при $\Gamma = D$ или $\Gamma = N$ спектр простой. Собственные числа $E_k^\Gamma = E_k^\Gamma(p, a, b)$ оператора H^Γ будем, как обычно, располагать в последовательность $E_0^\Gamma \leq E_1^\Gamma \leq \dots \leq E_k^\Gamma \leq \dots$, в которой каждое число встречается столько раз, какова его кратность. При фиксированных p, a, b справедливы неравенства

$$E_0^P < E_0^A \leq E_1^A < E_1^P \leq E_2^P < E_2^A \leq E_3^A < \dots \quad (4)$$

(см. [17]). Отрезки вида $[E_{2j}^P, E_{2j}^A]$ и $[E_{2j+1}^A, E_{2j+1}^P]$ всегда невырождены, их называют *зонами*. Отрезки вида $[E_{2j}^A, E_{2j+1}^A]$ и $[E_{2j+1}^P, E_{2j+2}^P]$ называют *щелями* (а соответствующие открытые отрезки называют также *лакунами*); вырожденные щели называют нулевыми или тривиальными. Числа E_k^D и E_k^N расположены следующим образом: $E_0^D \in (-\infty, E_0^P]$, $E_0^D, E_1^D \in [E_0^A, E_1^A]$, $E_1^D, E_2^D \in [E_1^P, E_2^P], \dots$.

Выберем каким-либо образом систему функций $\Phi_1(x; \lambda)$, $\Phi_2(x; \lambda)$, являющуюся при каждом $\lambda \in \mathbb{R}$ фундаментальной системой решений уравнения $-u''(x) + V(x)u(x) = \lambda u(x)$ на всей числовой прямой. Эту систему всегда можно выбрать так, что входящие в нее функции будут аналитически зависеть от λ (см., например, [18]); последнее свойство в дальнейшем считаем выполненным. Очевидно, что по переменной x функции Φ_1 и Φ_2 принадлежат классу C^4 . Обозначим через $\Phi_i^{(p)}$ функцию $\Phi_i^{(p)}(x) = \Phi_i(x + p)$ и пусть

$$F^\Gamma(p, a, b; \lambda) = \begin{vmatrix} \Gamma_1(\Phi_1^{(p)}) & \Gamma_1(\Phi_2^{(p)}) \\ \Gamma_2(\Phi_1^{(p)}) & \Gamma_2(\Phi_2^{(p)}) \end{vmatrix}. \quad (5)$$

Очевидно, F^Γ — функция класса C^4 по каждому из переменных p, a, b и аналитическая функция переменной λ . При фиксированном Γ (и фиксированном отрезке $[a, b]$) множество $\{E_k^\Gamma : k \geq 0\}$ совпадает с полным набором корней уравнения

$$F^\Gamma(p, a, b; E) = 0. \quad (6)$$

Зафиксируем p, a и b . Тогда, как хорошо известно (см., например, [17]), при $\Gamma = D$ или $\Gamma = N$ корни уравнения (6) простые, т.е. если E — корень уравнения (6), то $\partial F^\Gamma(p, a, b; \lambda) / \partial \lambda \neq 0$ при $\lambda = E$. Если $\Gamma = P$ или $\Gamma = A$, то корень E уравнения (6) является простым тогда и только тогда, когда содержащая его щель нетривиальна. Из теоремы о неявной функции вытекает, что по каждой из переменных p, a и b функции E^D и E^N принадлежат классу C^4 . Пусть $\Gamma = P$ (соответственно, пусть $\Gamma = A$); если при $p = p_0, a = a_0$ и $b = b_0$ решение E_0 уравнения (6) лежит в нетривиальной щели, то в окрестности точки (p_0, a_0, b_0) уравнение (6) определяет функцию E^P (соответственно, E^A) класса C^4 по каждой из переменных p, a и b , принимающую значение E_0 в точке (p_0, a_0, b_0) . В частности, если все щели в спектре оператора H^P (соответственно, H^A) нетривиальны, то функции E_k^P (соответственно, E_k^A) — класса C^4 при всех значениях переменных.

Через $W(\lambda)$ будем обозначать вронсиан:

$$W(\lambda) = \begin{vmatrix} \Phi_1(x; \lambda) & \Phi_2(x; \lambda) \\ \Phi_1'(x; \lambda) & \Phi_2'(x; \lambda) \end{vmatrix}. \quad (7)$$

Из очевидных равенств

$$F^D(p, a, b; \lambda) = \begin{vmatrix} \Phi_1(p+a; \lambda) & \Phi_2(p+a; \lambda) \\ \Phi_1(p+b; \lambda) & \Phi_2(p+b; \lambda) \end{vmatrix}, \quad (8)$$

$$F^N(p, a, b; \lambda) = \begin{vmatrix} \Phi'_1(p+a; \lambda) & \Phi'_2(p+a; \lambda) \\ \Phi'_1(p+b; \lambda) & \Phi'_2(p+b; \lambda) \end{vmatrix}, \quad (9)$$

$$F^{P,A}(p, a, \lambda) = \begin{vmatrix} \Phi_1(p+a; \lambda) \mp \Phi_1(p+b; \lambda) & \Phi_2(p+a; \lambda) \mp \Phi_2(p+b; \lambda) \\ \Phi'_1(p+a; \lambda) \mp \Phi'_1(p+b; \lambda) & \Phi'_2(p+a; \lambda) \mp \Phi'_2(p+b; \lambda) \end{vmatrix} \quad (10)$$

прямым вычислением нетрудно вывести следующие формулы

$$F^{P,A}(p, a, b; \lambda) = 2W(\lambda) \mp \left\{ \begin{vmatrix} \Phi_1(p+a; \lambda) & \Phi_2(p+a; \lambda) \\ \Phi'_1(p+b; \lambda) & \Phi'_2(p+b; \lambda) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \Phi_1(p+b; \lambda) & \Phi_2(p+b; \lambda) \\ \Phi'_1(p+a; \lambda) & \Phi'_2(p+a; \lambda) \end{vmatrix} \right\}, \quad (11)$$

$$\frac{\partial}{\partial p} F^{P,A}(p, a, b; \lambda) = \mp [V(p+b) - V(p+a)] F^D(p, a, b; \lambda); \quad (12)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial p^2} F^D(p, a, b; \lambda) = 2F^N(p, a; \lambda) + [V(p+b) + V(p+a) - 2\lambda] F^D(p, a, b; \lambda). \quad (13)$$

$$\frac{\partial}{\partial b} F^N(p, a, b; \lambda) = [V(p+b) - \lambda] \frac{\partial}{\partial a} F^D(p, a, b; \lambda); \quad (14)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial b^2} F^N(p, a, b; \lambda) = V'(p+b) \frac{\partial}{\partial a} F^D(p, a, b; \lambda) - [V(p+b) - \lambda] F^N(p, a, b; \lambda). \quad (15)$$

Будем обозначать через $\vec{u} \wedge \vec{v}$ ($\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^2$) стандартное симплектическое произведение в $\mathbb{R}^2$. Докажем следующую лемму.

ЛЕММА 1. Пусть для четверки векторов $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}'_1, \vec{u}'_2$ из $\mathbb{R}^2$ и пары вещественных чисел c_1, c_2 выполнены условия:

- 1) $\vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2 = 0$;
- 2) $\vec{u}_1 \wedge \vec{u}'_1 = \vec{u}_2 \wedge \vec{u}'_2 \neq 0$;
- 3) $c_1 \vec{u}_1 \wedge \vec{u}'_2 + c_2 \vec{u}'_1 \wedge \vec{u}_2 = 0$.

Тогда $c_1 |\vec{u}_1|^2 = c_2 |\vec{u}_2|^2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть α (соответственно, β) – ориентированный угол между векторами $\vec{u}_1$ и $\vec{u}'_1$ (соответственно, между $\vec{u}_2$ и $\vec{u}'_2$). Равенство 1) означает, что $\vec{u}_1$ и $\vec{u}_2$ коллинеарны. Если эти векторы сонаправлены, то 3) принимает вид $-c_1 |\vec{u}'_1| |\vec{u}_2| \sin \alpha + c_2 |\vec{u}_1| |\vec{u}'_2| \sin \beta = 0$; в противном случае равенство 3) имеет вид $-c_1 |\vec{u}'_1| |\vec{u}_2| \sin(\alpha + \pi) + c_2 |\vec{u}_1| |\vec{u}'_2| \sin(\beta + \pi) = 0$. В любом случае $c_1 |\vec{u}'_1| |\vec{u}_2| \sin \alpha = c_2 |\vec{u}_1| |\vec{u}'_2| \sin \beta$. Из соотношения 2) получаем $|\vec{u}_1| |\vec{u}'_1| \sin \alpha = |\vec{u}_2| |\vec{u}'_2| \sin \beta \neq 0$. Из последних двух равенств вытекает заключение леммы.

Следующая лемма очевидна, но ссылки на нее сократят текст некоторых доказательств.

ЛЕММА 2. Пусть на отрезке $[\alpha, \beta]$ (соответственно, $(\beta, \alpha]$) заданы две дифференцируемые функции f и g , причем $f(\alpha) = g(\alpha)$. Если в любой окрестности точки α найдется x , $x \neq \alpha$, так что $f(x) \geq g(x)$ (соответственно, $f(x) \leq g(x)$), то $f'(x) \geq g'(x)$.

Пусть $\partial F^\Gamma / \partial \lambda \neq 0$ при $p = p_0$, $a = a_0$, $b = b_0$, $\lambda = E_0$, так что в окрестности точки (p_0, a_0, b_0) уравнением (6) однозначно определена гладкая функция

$E_k^\Gamma = E_k^\Gamma(p, a, b)$, принимающая в этой точке значение E_0 . Тогда, очевидно, при всех (p, a, b) из некоторой окрестности Ω точки (p_0, a_0, b_0) определена функция $\psi_k^\Gamma(x; p, a, b)$, являющаяся нормированной собственной функцией оператора H^Γ с собственным числом $E_k^\Gamma(p, a, b)$ и имеющая по крайней мере четыре непрерывных частных производных по каждому из аргументов p, a, b .

Зафиксируем отрезок $[a, b] = [a_0, b_0]$ и точку $p_0 \in \mathbb{R}$; далее до конца пункта будем считать выполненным предположение из предыдущего абзаца. Рассмотрим функции $E_k^\Gamma(p)$ и $\psi_k^\Gamma(\cdot; p)$, определенные в некоторой окрестности Ω_1 точки p_0 . Дифференцируя по p равенство $\Gamma_i(\psi_k^\Gamma(\cdot; p)) = 0$, получаем $\Gamma_i(\partial \psi_k^\Gamma(\cdot; p)/\partial p) = 0$, т.е. получаем, что функции $\partial \psi_k^\Gamma(\cdot; p)/\partial p$ входят в область определения оператора $H^\Gamma(p)$. Дифференцируя теперь по p равенство $\tau[\psi_k^\Gamma(p)] = E_k^\Gamma(p)\psi_k^\Gamma(p)$, приходим к соотношению

$$H^\Gamma(p) \left(\frac{\partial}{\partial p} \psi_k^\Gamma(p) \right) + V'(x+p)\psi_k^\Gamma(p) = (E_k^\Gamma(p))' \psi_k^\Gamma(p) + E_k^\Gamma(p) \frac{\partial}{\partial p} \psi_k^\Gamma(p). \quad (16)$$

Умножая обе части равенства (16) скалярно на $\psi_k^\Gamma(p)$, ввиду самосопряженности оператора $H^\Gamma(p)$ находим формулу

$$(E_k^\Gamma)'(p) = \int_a^b V'(x+p) |\psi_k^\Gamma(x; p)|^2 dx. \quad (17)$$

Интегрируя (17) по частям, получаем

$$\begin{aligned} (E_k^\Gamma)'(p) &= [V(p+b) - E_k^\Gamma(p)] |\psi_k^\Gamma(b; p)|^2 \\ &\quad - [V(p+a) - E_k^\Gamma(p)] |\psi_k^\Gamma(a; p)|^2 - \left[\left| \frac{\partial}{\partial x} \psi_k^\Gamma(b; p) \right|^2 - \left| \frac{\partial}{\partial x} \psi_k^\Gamma(a; p) \right|^2 \right]. \end{aligned} \quad (18)$$

Здесь $\partial/\partial x$ есть частная производная по первому аргументу. В частности,

$$(E_k^D)'(p) = \left| \frac{\partial}{\partial x} \psi_k^D(a; p) \right|^2 - \left| \frac{\partial}{\partial x} \psi_k^D(b; p) \right|^2; \quad (19)$$

$$(E_k^N)'(p) = [V(p+b) - E_k^N(p)] |\psi_k^N(a; p)|^2 - [V(p+a) - E_k^N(p)] |\psi_k^N(b; p)|^2; \quad (20)$$

$$(E_k^{P,A})'(p) = [V(p+b) - V(p+a)] |\psi_k^{P,A}(a; p)|^2. \quad (21)$$

2. Здесь мы докажем ряд вспомогательных утверждений. В этом пункте отрезок $[a, b]$ предполагается фиксированным, так что рассматриваемые нами величины будут зависеть только от переменной p . Для простоты записи символы a и b там, где это не может вызвать недоразумений, из обозначений будут устранены.

ЛЕММА 3. Пусть $k \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{R}$. Тогда следующие условия равносильны:

- (i) $(E_k^D)'(p) = 0$;
- (ii) либо все решения уравнения $\tau[u] = Eu$, где $E = E_k^D(p)$, удовлетворяют условию $u(a) = u(b)$, либо все решения того же уравнения удовлетворяют условию $u(a) = -u(b)$;
- (iii) $E_k^D(p)$ лежит на краю соответствующей щели;
- (iv) выполнено равенство $|(\psi_k^D)'(a; p)| = |(\psi_k^D)'(b; p)|$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим вначале, что по теореме о неявной функции равенство $(E_k^D)'(p) = 0$ равносильно равенству

$$\frac{\partial}{\partial p} F^D(p, E_k^D(p)) = 0. \quad (22)$$

Введем двумерные векторы

$$\begin{aligned} \vec{u}_j &= (\Phi_1(p + a_j; E), \Phi_2(p + a_j; E)), \\ \vec{u}'_j &= (\Phi'_1(p + a_j; E), \Phi'_2(p + a_j; E)), \end{aligned}$$

где $a_1 = a$, $a_2 = b$, $E = E_k^D(p)$. Не умаляя общности, можно считать эти векторы вещественными. Теперь равенство $F^D(p; E) = 0$ запишется в виде $u_1 \wedge u_2 = 0$, равенство (22) в виде $\vec{u}'_1 \wedge \vec{u}_2 + \vec{u}_1 \wedge \vec{u}'_2 = 0$, а постоянство вронскиана приводит к соотношению $\vec{u}_1 \wedge \vec{u}'_1 = \vec{u}_2 \wedge \vec{u}'_2 \neq 0$. Тем самым из леммы 1 имеем $|\vec{u}_1| = |\vec{u}_2|$ и с учетом коллинеарности векторов $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ получаем $\vec{u}_1 = \vec{u}_2$ или $\vec{u}_1 = -\vec{u}_2$. В первом случае, для всех решений уравнения $\tau[u] = Eu$ имеем $u(a) = u(b)$, а во втором получаем $u(a) = -u(b)$. Таким образом, импликация (i) $\Rightarrow$ (ii) доказана; докажем теперь импликацию (ii) $\Rightarrow$ (i). Во введенных выше обозначениях условие (ii) равносильно выполнению соотношения $\vec{u}_1 = \pm \vec{u}_2$. С учетом равенства $\vec{u}_1 \wedge \vec{u}'_1 + \vec{u}_2 \wedge \vec{u}'_2 = 0$ (свойство вронскиана), получаем $\vec{u}_2 \wedge \vec{u}'_1 \pm \vec{u}'_2 \wedge \vec{u}_1 = 0$, что равносильно (22). Эквивалентность (i) $\Leftrightarrow$ (iv) устанавливается формулой (19). Из условия (ii) в силу формулы (10) вытекает, что $E_k^D(p)$ удовлетворяет одному из уравнений $F^{P,A}(p; E) = 0$; таким образом, справедлива импликация (ii) $\Rightarrow$ (iii). Пусть, наконец, выполнено условие (iii). Если $(\psi_k^D)'(a; p) = \pm (\psi_k^D)'(b; p)$, то выполнено условие (iv). В противном случае при $E = E_k^D(p)$ существует решение уравнения $\tau[u] = Eu$, линейно независимое с ψ_k^D и удовлетворяющее одному из равенств $u(a) = \pm u(b)$. Но тогда выполнено условие (ii).

ЛЕММА 4. Для любых $k \in \mathbb{N}$ и $p \in \mathbb{R}$ следующие условия равносильны:

- (i) щель, в которой лежит точка $E_k^D(p)$, закрыта;
- (ii) $E_k^D(p) = E_{k+1}^N(p)$ и $(E_k^D)'(p) = 0$;
- (iii) $(E_k^D)'(p) = (E_k^D)''(p) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Импликация (i) $\Rightarrow$ (iii) есть следствие леммы 3 и формулы (13), поскольку в этом случае $E_k^D(p) = E_{k+1}^N(p)$. По тем же причинам (iii) $\Rightarrow$ (ii). Если выполнено условие (ii), то число $E = E_k^D(p)$ лежит на краю щели. Но тогда из равенства $E_k^D(p) = E_{k+1}^N(p)$ вытекает выполнение условий теоремы 1.4.1 из [17], в силу которой щель, содержащая $E_k^D(p)$, замкнута.

3. Далее до конца статьи на функцию V мы налагаем следующие ограничения:

- (V1) $V''(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$;
- (V2) функция V' обращается в нуль не более чем в одной точке.

Таким образом, возможны три случая, которые в дальнейшем будем различать.

- (I) Существует единственная точка, в которой V' обращается в нуль. Не умаляя общности, мы будем считать, что $V'(0) = 0 = V(0)$;
- (II) $V'(x) > 0 \quad \forall x$;
- (III) $V'(x) < 0 \quad \forall x$.

Очевидно, при сделанных предположениях функция V выпукла, причем в случае (I)

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} V(x) = \pm\infty, \quad (23)$$

в случае (II)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} V(x) = +\infty, \quad (24)$$

в случае (III)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} V(x) = -\infty. \quad (25)$$

Поскольку случай (III) сводится заменой $V(x)$ на $V(-x)$ к случаю (II), то в дальнейшем мы ограничиваемся рассмотрением только случаев (I) и (II).

ТЕОРЕМА 1. *В предположениях (V1), (V2) при любых $p, a, b \in \mathbb{R}$ ($a < b$) и любых $k \in \mathbb{N}$ выполнены неравенства $E_k^D(p, a, b) < E_{k+1}^N(p, a, b)$. В частности, все щели у операторов H^P и H^A нетривиальны.*

Помимо результатов п. 2 доказательство теоремы будет опираться на ряд вспомогательных утверждений, с которых мы и начнем.

ЛЕММА 5. *Зафиксируем отрезок $[a, b]$. Пусть при некотором $k \in \mathbb{N}$ и $p \in \mathbb{R}$ выполнено неравенство $E_{k+1}^N(p) > \max\{V(a+p), V(b+p)\}$. Тогда $E_k^D(p) < E_{k+1}^N(p)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Введем обозначение $E = E_{k+1}^N(p)$ и рассмотрим произвольное ненулевое решение φ уравнения $-\varphi'' + V(x+p)\varphi = E\varphi$. Тогда функция $u(x) = \varphi'(x)$ удовлетворяет уравнению

$$u'' + \frac{V'(x+p)}{E - V(x+p)}u' + (E - V(x+p))u = 0. \quad (26)$$

Стандартной заменой $\eta = \Phi u$, где

$$\Phi(x) = \exp\left(\frac{1}{2} \int \frac{V'(x+p)}{E - V(x+p)} dx\right),$$

приводим (26) к виду

$$\eta'' + \left[(E - V) - \frac{2V''(E - V) + 3V'^2}{(E - V)^2}\right]\eta = 0; \quad (27)$$

в последней формуле $V = V(x+p)$. Сравним (27) с уравнением

$$\varphi'' + (E - V)\varphi = 0. \quad (28)$$

По теореме Штурма [17, теорема 1.3.1] между каждыми двумя нулями любого нетривиального решения уравнения (27) на отрезке $[a, b]$ лежит хотя бы один нуль каждого решения уравнения (28). Пусть $\varphi(x) = \psi_{k+1}^N(x; p)$. Тогда φ имеет ровно $k+1$ нуль в интервале (a, b) [17, теорема 1.3.3]. Тем самым в интервале (a, b) функция φ' имеет не менее k нулей, а на отрезке $[a, b]$ — не менее $k+2$ нулей. Следовательно, и функция $\eta = \Phi\varphi'$, являющаяся решением уравнения (27), имеет на отрезке $[a, b]$ хотя бы $k+2$ нуля. Пусть $\psi(x) = \psi(x; E)$ — решение уравнения (28), удовлетворяющее условиям $\psi(a) = 0$, $\psi'(a) = 1$. По теореме Штурма $\psi(x)$ имеет не менее $k+1$ нулей на интервале (a, b) и, значит, не менее $k+2$ — на промежутке $[a, b]$. Уменьшая E в уравнении (28), мы заставим нули функции ψ двигаться вправо [17]. Когда $(k+2)$ -й нуль этой функции (считаем a первым нулем) достигнет точки b , мы получим $\psi(x) = c\psi_k^D(x)$ [17, теорема 1.3.3]. Таким образом, $E_k^D(p) < E_{k+1}^N(p)$.

ЛЕММА 6. Пусть $C = \inf \{V(x+p) : x \in [a, b]\}$. Тогда при всех $k \in \mathbb{N}$ и $p \in \mathbb{R}$ справедливы неравенства

$$E_k^D(p), E_{k+1}^N(p) \geq \frac{(k+1)^2 \pi^2}{(b-a)^2} + C. \quad (29)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Лемма вытекает из очевидного неравенства $H^\Gamma \geq H_0^\Gamma + C$, где H_0^Γ есть оператор $-d^2/dx^2$ на отрезке $[a, b]$ с краевыми условиями Γ на концах отрезка.

ЛЕММА 7. Пусть фиксированы числа $k \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{R}$ и $a \in \mathbb{R}$. Тогда справедливы соотношения

$$\lim_{b \rightarrow a} E_k^D = \lim_{b \rightarrow a} E_{k+1}^N = +\infty.$$

Аналогичные соотношения имеют место и при фиксированных k , p и b .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Эта лемма есть непосредственное следствие предыдущей.

ЛЕММА 8. Если $E = E_k^D(p, a, b)$ или $E = E_k^N(p, a, b)$, то справедливы соотношения

$$\frac{\partial}{\partial a} F^D(p, a, b; E) \neq 0, \quad \frac{\partial}{\partial b} F^D(p, a, b; E) \neq 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно доказать первое соотношение, доказательство второго аналогично. Пусть вначале $E = E_k^D(p, a, b)$. Очевидно,

$$\frac{\partial}{\partial a} F^D(p, a, b; \lambda) = \begin{vmatrix} \Phi'_1(p+a; \lambda) & \Phi'_2(p+a; \lambda) \\ \Phi_1(p+b; \lambda) & \Phi_2(p+b; \lambda) \end{vmatrix}. \quad (30)$$

Воспользуемся леммой 1. В обозначениях, введенных при доказательстве леммы 3, получаем из (30), что условия леммы 1 выполнены при $c_1 = 0$, $c_2 = 1$. Отсюда получаем, что $\Phi_1(p+b; E) = \Phi_2(p+b; E) = 0$, что невозможно.

Пусть теперь $E = E_k^N(p, a, b)$. Предположим, что $\partial F^N / \partial a = 0$, и снова воспользуемся леммой 1, обозначив теперь

$$\vec{u}_j = (\Phi'_1(p+a_j; E), \Phi'_2(p+a_j; E)), \quad \vec{u}'_j = (\Phi_1(p+a_j; E), \Phi_2(p+a_j; E)),$$

где $a_1 = a$, $a_2 = b$, $E = E_k^N(p)$. Тогда равенство $F^N = 0$ записывается в виде $u_1 \wedge u_2 = 0$, равенство $\partial F^D / \partial a = 0$ — в виде $\vec{u}_1 \wedge \vec{u}'_2 = 0$, а постоянство вронскиана снова дает соотношение $\vec{u}_1 \wedge \vec{u}'_1 = \vec{u}_2 \wedge \vec{u}'_2 \neq 0$. Теперь из леммы 1 получаем $\Phi'_1(p+a; E) = \Phi'_2(p+a; E) = 0$, что невозможно.

ЛЕММА 9. Пусть фиксированы числа $k \in \mathbb{N}$, $p, a \in \mathbb{R}$. Тогда при всех $b > a$

$$\frac{\partial E_k^D}{\partial b} < 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как соотношения $\partial E_k^D / \partial b = 0$ и $\partial F^D / \partial b = 0$ равносильны, то доказательство леммы сразу вытекает из лемм 7 и 8.

ЛЕММА 10. Зафиксируем числа $p, a \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$, и пусть $E_k^N(b) \equiv E_k^N(p, a, b)$. Тогда на луче $(a, +\infty)$ существует единственное решение b_k уравнения

$$E_k^N(b) = V(p + b). \quad (31)$$

При этом справедливы утверждения: если $a < b < b_k$, то $(E_k^N)'(b) < 0$; если же $b > b_k$, то $(E_k^N)'(b) > 0$.

Если функция V' обращается в нуль, то $b_k > -p$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Не умаляя общности, будем считать, что $p = 0$. Так как, очевидно,

$$\frac{\partial}{\partial b} F^N(p, a, b; E) = [V(b + p) - \lambda] \frac{\partial}{\partial b} F^D(p, a, b; E), \quad (32)$$

то в силу леммы 8 равенство (31) равносильно равенству $(E_k^N)'(b) = 0$. Если уравнение (31) не имеет решений, то в силу леммы 7 при всех $b > a$ справедливо неравенство $(E_k^N)'(b) < 0$. Так как $V(b) \rightarrow +\infty$ при $b \rightarrow +\infty$, то и $V(b) - E_k^N(b) \rightarrow +\infty$ при $b \rightarrow +\infty$. С другой стороны, по лемме 7 $V(b) - E_k^N(b) \rightarrow -\infty$ при $b \rightarrow a$, поэтому уравнение (31) должно иметь решение.

Обозначим через b_k инфимум всех решений уравнения (31). Из сказанного выше вытекает, что $b_k > a$, и поэтому b_k — тоже решение этого уравнения. Кроме того, $V'(b_k) \neq 0$; в противном случае $E_k^N(b_k) = V(b_k) = V'(b_k) = 0$, что противоречит лемме 6. Если предположить, что $(E_k^N)''(b_k) = 0$, то из формулы (15) и леммы 8 получаем, что $V'(b_k) = 0$, что, как мы видели, невозможно. Из леммы 7 получаем теперь, что $(E_k^N)''(b_k) > 0$.

Заметим, что слева от точки b_k выполняется неравенство $V(b) < E_k^N(b)$, иначе уравнение (31) имело бы решение, меньшее b_k . Покажем теперь, что существует число b' , $b' > b_k$, такое, что при $b_k < b < b'$ выполнено неравенство $V(b) > E_k^N(b)$. Действительно, если это не верно, то по лемме 2 $V'(b_k) = 0$, что невозможно. Теперь ясно, что $V'(b_k) > 0$. Отсюда уже вытекает, что $b_k > 0$, если функция V' обращается в нуль.

Допустим теперь, что уравнение (31) имеет еще одно решение; обозначим через $\tilde{b}$ инфимум всех решений этого уравнения, отличных от b_k . Тогда $\tilde{b} > b'$, поэтому на отрезке $(b_k, \tilde{b})$ выполнено неравенство $V(b) > E_k^N(b)$. Рассуждая как и выше, снова найдем, что $(E_k^N)''(\tilde{b}) \neq 0$. Так как $(E_k^N)'(b) > 0$ в достаточно малой окрестности точки $\tilde{b}$ слева от этой точки, то $(E_k^N)''(\tilde{b}) < 0$. Поэтому $(E_k^N)'(b) < 0$ справа от $\tilde{b}$ вблизи этой точки. С учетом того, что $V'(\tilde{b}) > 0$, получаем, что $V(b) \geq E_k^N(b)$ в некоторой окрестности точки $\tilde{b}$, откуда по лемме 2 следует, что $V'(\tilde{b}) = 0$; противоречие. Итак, существование и единственность решения уравнения (31) доказаны. Остальные утверждения леммы вытекают из неравенства $(E_k^N)''(b_k) > 0$.

Теперь перейдем к доказательству теоремы 1, считая, по-прежнему, что $p = 0$ (это не умаляет общности). Можно считать также, что $V(a) < V(b)$ (в случае (II) это очевидно, а в случае (I) заменим $V(x)$ на $V(-x)$).

Зафиксируем число $k \in \mathbb{N}$, $k > 0$, а также числа $p, a \in \mathbb{R}$. Пусть $b < b_k$; в силу неравенства $V(a) < V(b)$ в случае (I) получаем, что $b \geq 0$. Отсюда по лемме 10 в любом случае $E_{k+1}^N(b) > E_{k+1}^N(b_k) = V(b_k) > V(b)$. Тем самым лемма 5 приводит к нужному неравенству $E_{k+1}^N(b) > E_k^D(b)$. Переходя к пределу, получим

$$E_{k+1}^N(b_k) \geq E_k^D(b_k). \quad (33)$$

Пусть теперь $b > b_k$. Тогда леммы 9, 10 и неравенство (33) дают $E_{k+1}^N(b) > E_{k+1}^N(b_k) \geq E_k^D(b_k) > E_k^D(b)$. Осталось показать, что $E_{k+1}^N(b_k) \neq E_k^D(b_k)$. Но если это не так, то из уже доказанных неравенств и лемм 2 и 10 получаем, что $(E_k^D)'(b_k) = 0$, что противоречит лемме 9.

4. В этом пункте будет доказан основной результат статьи – теорема 2.

ТЕОРЕМА 2. Пусть отрезок $[a, b]$ фиксирован.

1. Если V' не обращается в нуль, то $(E_k^D)'(p) > 0$ при всех $p \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$.
2. Если функция V' обращается в нуль, то для каждого $k \in \mathbb{N}$ существует единственная точка p_k такая, что $(E_k^D)'(p) > 0$ при $p > p_k$ и $(E_k^D)'(p) < 0$ при $p < p_k$. При этом выполнены неравенства $-b < p_k < -a$ и $(E_k^D)''(p_k) > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первая часть теоремы есть очевидное следствие формулы (17). Докажем теперь вторую часть, считая k фиксированным. Из формулы (17) вытекает, что в случае (I) $(E_k^D)'(p) < 0$ при $p < -b$ и $(E_k^D)'(p) > 0$ при $p > -a$. Поэтому существует точка $p_k \in (-b, -a)$, в которой $(E_k^D)'(p_k) = 0$. Для завершения доказательства нам потребуются некоторые вспомогательные утверждения.

Вначале заметим, что в случае (I) существует единственная точка $\hat{p}$ такая, что $V(a + \hat{p}) = V(b + \hat{p})$, и эта точка лежит на отрезке $(-b, -a)$.

Пусть теперь $\tilde{p} \in \mathbb{R}$ и пусть $\tilde{E}$ лежит на краю щели, содержащей точку $E_k^D(\tilde{p})$. Тогда в силу теоремы 1 существует однозначно определенная функция $\mathcal{E}(p)$ класса C^4 , принимающая значение $\tilde{E}$ в точке $\tilde{p}$, все значения которой лежат на краю данной щели. Из формулы (21) сразу вытекает следующая лемма.

ЛЕММА 11. Справедливы утверждения: $\mathcal{E}'(p) \geq 0$ при $p > \hat{p}$, $\mathcal{E}'(p) \leq 0$ при $p < \hat{p}$.

ЛЕММА 12. Если в некоторой точке $\tilde{p} \in \mathbb{R}$ выполнено равенство $(E_k^D)'(\tilde{p}) = 0$, то $(E_k^D)''(\tilde{p}) > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $(E_k^D)'(\tilde{p}) = 0$, тогда по лемме 3 точка $E_k^D(\tilde{p})$ лежит на краю содержащей ее щели, а по теореме 1 – это нижний край щели. Рассмотрим функцию $\mathcal{E}(p)$ из предыдущей леммы, соответствующую точке $\tilde{E} = E_k^D(\tilde{p})$. Если $(E_k^D)''(\tilde{p}) < 0$, то в силу предыдущей леммы в некоторой точке p выполнено неравенство $E_k^D(p) < \mathcal{E}(p)$, а это противоречит тому, что $\mathcal{E}(p)$ – нижний край соответствующей щели. Равенство $(E_k^D)''(\tilde{p}) = 0$ невозможно по лемме 4 и теореме 1.

Теперь из леммы 12 легко вывести единственность точки p , в которой выполняется равенство $(E_k^D)'(p) = 0$. Тем самым теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Очевидно, если функция V четная, то таковыми будут и все функции E_k^D . Тем самым, в этом случае $p_k = 0$ для всех k .

В заключение отметим еще одно любопытное утверждение, являющееся непосредственным следствием теоремы 1.

ТЕОРЕМА 3. Пусть функция V удовлетворяет условиям (V1) и (V2). Сужим функцию V на произвольный отрезок $[a, b]$ и продолжим полученную функцию на всю числовую прямую до периодической функции $u(x)$ с периодом $T = b - a$. Тогда у периодического оператора Шрёдингера $-d^2/dx^2 + u(x)$ на числовой оси все щели ненулевые.

Список литературы

1. Цикон Х., Фрёзе Р., Куш В., Саймон Б. Операторы Шрёдингера с приложениями к квантовой механике и глобальной геометрии. М.: Мир, 1990.
2. von Klitzing K., Dorda G., Pepper M. New method for high-accuracy determination of the fine-structure constant based on quantized Hall resistance // Phys. Rev. Lett. 1980. V. 45. №6. P. 494–497.
3. Квантовый эффект Холла. Сб. статей / Сост. А.Я. Шик, Ю.В. Шарцев. М.: Мир, 1986.
4. Р. Прендж, С. Гирвин (ред.) Квантовый эффект Холла. М.: Мир, 1989.
5. Ноевиков С. П. Магнитно-блоховские функции и векторные расслоения. Типичные законы дисперсии и их квантовые числа // Докл. АН СССР. 1981. Т. 257. №3. С. 538–543.
6. Bellissard J. C^* -algebras in solid state physics. 2D-electrons in a uniform magnetic field // London Math. Soc. Lecture Note Ser. 1988. №136. P. 49–76.
7. Bellissard J., van Elst A., Schulz-Baldes H. The noncommutative geometry of the quantum Hall effect // J. Math. Phys. 1994. V. 35. №10. P. 5373–5451.
8. Halperin B. Quantized Hall conductance, current-carrying edge states, and the existence of extended states in a two-dimensional disordered potential. // Phys. Rev. B. 1982. V. 25. №4. P. 2185–2190.
9. Ando T. Edge states in quantum wires in high magnetic fields // Phys. Rev. B. 1990. V. 42. №9. P. 5626–5634.
10. Büttiker M. Transmission probabilities and the quantum Hall effect // Surf. Sci. 1990. V. 229. №1. P. 201–208.
11. Ishihara A., Ebina K. The density of states of narrow two-dimensional electron system in a magnetic field // J. Phys. C. 1988. V. 33. №30. P. L1079–L1083.
12. Středa P., Kučera J., MacDonald A. M. Edge states, transmission matrices, and the quantum Hall resistance // Phys. Rev. Lett. 1987. V. 59. №17. P. 1973–1975.
13. Kinaret J. M., Lee P. A. Conductance of a disorder narrow wire in a strong magnetic field // Phys. Rev. B. 1991. V. 43. №5. P. 3847–3855.
14. Viehweger O., Pook W., Janßen M., Hajdu J. Note on the quantum Hall effect in cylinder geometry // Z. Phys. B. 1990. V. 78. №1. P. 11–16.
15. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т. 4. М.: Мир, 1982.
16. Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969.
17. Левитан Б. М., Саргсян И. С. Операторы Штурма–Лиувилля и Дирака. М.: Наука, 1988.
18. Титчмарш Э. Ч. Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка. Т. I. М.: ИЛ, 1961.
19. Като К. Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир, 1972.

Мордовский государственный
университет им. Н. П. Огарева
г. Саранск

Поступила в редакцию
22.04.1996