Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Гончар, Е. А. Рахманов, В. Н. Сорокин, Об аппроксимациях Эрмита–Паде для систем функций марковского типа, *Матем. сб.*, 1997, том 188, номер 5, 33–58

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm225>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.208.226.222

26 апреля 2023 г., 14:51:22

УДК 517.53

А. А. Гончар, Е. А. Рахманов, В. Н. Сорокин

Об аппроксимациях Эрмита–Паде для систем функций марковского типа

Изучаются аппроксимации Эрмита–Паде для введенных в работе систем марковских функций, структура которых определяется заданным графом. Результаты асимптотического характера формулируются в терминах, связанных с теоретико-потенциальной задачей равновесия для векторных потенциалов.

Библиография: 17 названий.

§ 1. Введение

1. В классической работе Ш. Эрмита [1] о трансцендентности числа e была введена конструкция рациональных аппроксимаций, сыгравшая важную роль в ряде задач анализа и теории чисел. В дальнейшем соответствующие рациональные функции стали называться аппроксимациями Эрмита–Паде. Один из вариантов этой конструкции состоит в построении рациональных аппроксимаций с общим знаменателем для конечного набора $f = (f_1, \dots, f_m)$ степенных рядов с центром в точке $z = \infty$:

$$f_j(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_{j,k}}{z^{k+1}}, \quad j = 1, \dots, m. \quad (1)$$

А именно, фиксируем мультииндекс

$$n = (n_1, \dots, n_m) \in \mathbb{Z}_+^m;$$

в дальнейшем полагаем $|n| = n_1 + \dots + n_m$. Нетрудно видеть, что существует многочлен $Q_n(z)$, удовлетворяющий следующим условиям:

$$\begin{aligned} Q_n(z) &\neq 0, \quad \deg Q_n \leq |n|, \\ (Q_n f_j - P_{n,j})(z) &= \frac{A_{n,j}}{z^{n_j+1}} + \dots, \quad j = 1, \dots, m, \end{aligned} \quad (2)$$

где справа стоят ряды по возрастающим степеням $1/z$, $P_{n,j}$ — полиномиальная часть степенного разложения $Q_n f_j$ в точке $z = \infty$. Действительно, построение многочлена Q_n сводится к нахождению нетривиального решения однородной системы линейных уравнений, в которой число уравнений равно $|n|$, а число неизвестных (коэффициентов многочлена Q_n) равно $|n| + 1$; тем самым, нетривиальное решение всегда существует. Для любого решения задачи (2) рациональные функции

$$R_{n,j} = \frac{P_{n,j}}{Q_n}, \quad j = 1, \dots, m,$$

называются *аппроксимациями Эрмита–Паде* (или *совместными аппроксимациями Паде*) для набора степенных рядов (1).

Если любой многочлен Q_n , удовлетворяющий соотношениям (2), с необходимостью имеет степень $|n|$, то соответствующий мультииндекс n называется *нормальным* (для набора f). Если n – нормальный индекс, то существует *единственный* (с точностью до нормирующего числового множителя) многочлен Q_n , удовлетворяющий соотношениям (2), и, тем самым, *единственный* набор $\{R_{n,j}\}$ аппроксимаций Эрмита–Паде для степенных рядов (1).

Подробнее об аппроксимациях Эрмита–Паде см. [2]–[5].

2. В этой работе изучаются аппроксимации Эрмита–Паде для систем функций *марковского типа*:

$$f_j(z) = \hat{s}_j(z) = \int \frac{ds_j(x)}{z-x}, \quad j = 1, \dots, m, \quad (3)$$

где s_j – конечные положительные борелевские меры с компактными носителями на вещественной прямой $\mathbb{R}$; степенные разложения функций f_j в бесконечно удаленной точке имеют вид (1), где

$$c_{j,k} = \int x^k ds_j(x)$$

– моменты мер s_j .

Из условий (2) следует, что в рассматриваемом случае многочлен Q_n удовлетворяет следующей системе соотношений ортогональности:

$$\int Q_n(x) x^k ds_j(x) = 0, \quad k = 0, \dots, n_j - 1, \quad j = 1, \dots, m. \quad (4)$$

Для функций марковского типа (3) эта система эквивалентна системе соотношений (2) и может служить определением многочленов Эрмита–Паде Q_n , соответствующих мультииндексу n (как и выше, вместе со стандартными условиями: $Q_n(z) \not\equiv 0$, $\deg Q_n \leq |n|$). Функции

$$\Phi_{n,j}(z) = \int \frac{Q_n(x)}{z-x} ds_j(x), \quad j = 1, \dots, m,$$

называются *функциями второго рода*; из соотношений ортогональности (4) следует представление

$$\Phi_{n,j}(z) = \frac{1}{q(z)} \int \frac{Q_n(x)q(x)}{z-x} ds_j(x),$$

где q – произвольный многочлен степени не выше n_j ; тем самым,

$$\Phi_{n,j}(z) = O\left(\frac{1}{z^{n_j+1}}\right), \quad z \rightarrow \infty.$$

Отсюда, используя очевидное тождество

$$Q_n(z) \int \frac{ds_j(x)}{z-x} - \int \frac{Q_n(z) - Q_n(x)}{z-x} ds_j(x) = \int \frac{Q_n(x)}{z-x} ds_j(x),$$

получаем формулы для числителей соответствующих аппроксимаций Эрмита–Паде

$$P_{n,j}(z) = \int \frac{Q_n(z) - Q_n(x)}{z - x} ds_j(x),$$

и формулы для остатков

$$\delta_{n,j} = f_j - R_{n,j} = \frac{\Phi_{n,j}}{Q_n}, \quad j = 1, \dots, m.$$

Через $\Delta(s_j)$ будем обозначать минимальный отрезок, содержащий носитель меры s_j . В дальнейшем удобно считать, что задается система отрезков $\Delta_j \subset \mathbb{R}$ и меры s_j такие, что $\Delta(s_j) = \Delta_j$, $j = 1, \dots, m$. В этой работе предполагается, что заданные отрезки Δ_j удовлетворяют следующему условию:

(*) для любых $j \neq k$ отрезки Δ_j и Δ_k или не пересекаются, или совпадают.

Чтобы не усложнять дальнейших обозначений, удобно считать также, что допустимыми в определении функций марковского типа (3) являются знакопостоянные (положительные или отрицательные) меры s_j .

3. Остановимся сначала на двух частных (в некотором смысле – крайних) случаях систем вида (3), удовлетворяющих условию (*), – системах Анжелеско и системах Никишина. Эти два случая достаточно хорошо изучены к настоящему времени (см. [4]–[14] и приведенную в этих работах библиографию).

Системы Анжелеско соответствуют случаю, когда отрезки Δ_j , $j = 1, \dots, m$, попарно не пересекаются: $\Delta_j \cap \Delta_k = \emptyset$ при $j \neq k$. Из соотношений ортогональности (4) следует, что многочлен $Q_n \neq 0$ имеет по меньшей мере n_j нулей внутри отрезка Δ_j . Поскольку отрезки попарно не пересекаются, общее число нулей многочлена Q_n , $\deg Q_n \leq |n|$, не меньше $|n|$. Тем самым, это число равно $|n|$ и $\deg Q_n = |n|$ (свойство нормальности); как уже говорилось выше, отсюда следует единственность аппроксимаций Эрмита–Паде в рассматриваемом случае. Предельные распределения нулей многочленов Q_n и сходимости аппроксимаций Эрмита–Паде $R_{n,j}$ для систем Анжелеско изучены в работе А. А. Гончара и Е. А. Рахманова [7]; решения этих задач формулируются в терминах, связанных с задачей равновесия для векторных потенциалов (см. [15], а также §3 ниже). Отвлекаясь от других параметров этой задачи отметим, что в случае системы Анжелеско соответствующая матрица взаимодействия имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 2 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 2 \end{pmatrix}.$$

Системы Никишина определяются для случая, когда все отрезки Δ_j совпадают: $\Delta_1 = \dots = \Delta_m = \Delta$. Для того чтобы свойство нормальности и единственность аппроксимаций имели место в случае совпадающих отрезков, на меры s_j должны быть наложены условия, гарантирующие “независимость” соотношений

системы (4). С этой целью Е. М. Никишин [9] предложил специальную конструкцию мер s_j , также основанную на марковских функциях, и доказал для соответствующих функций (3) свойство нормальности.

Удобно ввести одно обозначение. Пусть F_1 и F_2 – непересекающиеся отрезки прямой $\mathbb{R}$, σ_1 и σ_2 – меры с носителями на F_1 и F_2 соответственно. Мере $\langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle$ определим формулой

$$d\langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle(x) = \int \frac{d\sigma_2(t)}{x-t} d\sigma_1(x) = \widehat{\sigma}_2(x) d\sigma_1(x);$$

$\langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle$ – знакопостоянная мера с носителем на F_1 .

Для системы отрезков $F_1, F_2, \dots, F_m$ таких, что $F_{j-1} \cap F_j = \emptyset, j = 2, \dots, m$, и мер $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m$, $\text{supp } \sigma_j \subset F_j$, индуктивно определим меры

$$\langle \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{k+1} \rangle = \langle \sigma_1, \langle \sigma_2, \dots, \sigma_{k+1} \rangle \rangle, \quad k = 2, \dots, m-1.$$

Меры s_j , приводящие к системе Никишина (3), определяются по заданным $\Delta = F_1, F_2, \dots, F_m$ и $\sigma_1, \dots, \sigma_m$:

$$s_1 = \langle \sigma_1 \rangle = \sigma_1, \quad s_2 = \langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle, \quad \dots, \quad s_m = \langle \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m \rangle.$$

Метод, основанный на векторных потенциалах, позволил исследовать ряд асимптотических свойств аппроксимаций Эрмита–Паде и для систем Никишина (см. [4], [5], [10], [13]). Отметим, что в соответствующей задаче равновесия роль “проводников” играют отрезки $F_j, j = 1, \dots, m$, а матрица взаимодействия имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

В соответствии с этим, асимптотические свойства совместных аппроксимаций в случаях Анжелеско и Никишина принципиально различны (подробнее см. § 5 ниже).

4. В этой статье рассматривается весьма общий класс систем функций марковского типа (3). Предполагается, что отрезки $\Delta_j = \Delta(s_j), j = 1, \dots, m$, удовлетворяют условию (*). Мы используем идею Е. М. Никишина для построения “независимых” мер s_j в случае совпадения соответствующих отрезков $\Delta(s_j)$ (отказываясь – не только на первом, но и на каждом последующем этапе конструкции – от условия совпадения всех отрезков). В соответствии с этим рассматриваемые системы мы называем *обобщенными системами Никишина* (GN -системами). Каждая GN -система определяется с помощью (плоского) графа-дерева G , m вершин которого, по существу, нумеруют функции соответствующей системы (3). При $m = 2$ наша конструкция не приводит к новым системам; условию (*) удовлетворяют только системы Анжелеско и Никишина. Поясним здесь, как возникают новые системы уже при $m = 3$.

Системы Анжелеско и Никишина мы связываем с графами, изображенными на рисунках 1a и 1b, соответственно.

Рис. 1a.

Рис. 1b.

Здесь и далее ребра графа изображаются сплошными линиями; пунктирные соединения обозначают одно из важных для дальнейшего отношений между вершинами (следование за одной и той же вершиной). Для удобства к каждому графу добавляется корневая вершина ω ; эта вершина не участвует в конструкции мер s_j (функций системы (3)). Каждой из трех основных вершин графа соответствует мера σ_j с носителем на отрезке F_j . Для графа Анжелеско $\Delta_j = F_j$ и $s_j = \sigma_j$, $j = 1, 2, 3$, для графа Никишина $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = F_1$ и $s_1 = \sigma_1$, $s_2 = \langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle$, $s_3 = \langle \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \rangle$ (см. п. 3 выше). При $m = 3$ есть еще два графа-дерева, определяющих различные GN -системы (рис. 1c и 1d).

Рис. 1c.

Рис. 1d.

Как и выше, каждой вершине графа (кроме корневой вершины ω) соответствуют отрезок F_j и мера σ_j , $\Delta(\sigma_j) = F_j$, $j = 1, 2, 3$. При этом, для GN -систем, соответствующих графам 1c и 1d, имеем:

$$1c: \quad \Delta_1 = F_1, \quad \Delta_2 = \Delta_3 = F_2, \quad s_1 = \sigma_1, \quad s_2 = \sigma_2, \quad s_3 = \langle \sigma_2, \sigma_3 \rangle;$$

$$1d: \quad \Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = F_1, \quad s_1 = \sigma_1, \quad s_2 = \langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle, \quad s_3 = \langle \sigma_1, \sigma_3 \rangle.$$

Основные результаты настоящей статьи относятся к асимптотическим свойствам аппроксимаций Эрмита–Паде для GN -систем. Формулируются они в терминах, связанных с равновесными мерами на “проводниках” F_j , соответствующих надлежащим задачам равновесия для векторных потенциалов. Матрицы взаимодействия зарядов в этих задачах равновесия определяются структурой графа GN -системы. Так, при $m = 3$ графам 1a–1d соответствуют следующие матрицы:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Первые две матрицы соответствуют системам Анжелеско и Никишина (см. п. 3). Уже из этих простых примеров видно, как именно матрица взаимодействия A (величины $\pm 1, 0$ вне диагонали) связана со структурой соответствующего графа.

5. В §2 мы даем формальное определение GN -систем и доказываем для них ряд вспомогательных результатов. При этом, удобным формализмом оказывается отношение частичного порядка, естественным образом определяемое графом-деревом G . Необходимые сведения, относящиеся к задаче равновесия для векторных потенциалов, приведены в §3. Основные результаты об асимптотических свойствах многочленов, связанных с аппроксимациями Эрмита–Паде (в частности, многочленов, удовлетворяющих системе соотношений ортогональности (4)), содержатся в §4. В §5 полученные асимптотические формулы применяются для изучения областей сходимости и скорости сходимости аппроксимаций Эрмита–Паде для GN -систем.

§2. Определение GN -системы.

Соотношения ортогональности и свойство нормальности

1. Пусть G – граф-дерево (ниже – просто *граф*) с числом вершин, равным $m \geq 2$. Множество вершин графа G можно рассматривать как частично упорядоченное множество $(G, \prec)$, удовлетворяющее аксиоме индукции: каждый непустой отрезок $\{\beta: \beta \prec \alpha\}$ имеет наибольший элемент α_- . В дальнейшем удобно рассматривать также расширенный граф-дерево $\bar{G} = G \cup \{\omega\}$, где $\omega \notin G$ – наименьший элемент $\bar{G}$ (корневая вершина графа).

Отношение “непосредственного исследования” для вершин α_- и α является ребром графа G или $\bar{G}$; мы будем писать $\beta \rightarrow \alpha$, если $\beta = \alpha_-$. Через α_+ обозначим множество всех минимальных элементов множества $\{\beta: \beta \succ \alpha\}$; ясно, что α_+ – это множество всех вершин, “непосредственно следующих” за α : $\alpha_+ = \{\beta: \alpha \rightarrow \beta\}$. Отношение “соседства”, в котором находятся элементы множества α_+ , изображается пунктирной линией на рисунках 1. Мы будем писать $\beta \leftrightarrow \gamma$, если для некоторого α элементы β и γ принадлежат α_+ или, что то же самое, “непосредственно следуют” за α .

Пусть каждому $\alpha \in G$ приведены в соответствие отрезок F_α вещественной прямой $\mathbb{R}$ и (конечная положительная борелевская) мера σ_α с носителем на отрезке F_α . Всюду в дальнейшем предполагаются выполненными следующие условия:

- i) два отрезка из множества $\{F_\alpha: \alpha \in G\}$ не пересекаются, если их индексы связаны отношением “непосредственного следования” $\rightarrow$ или отношением “соседства” $\leftrightarrow$.
- ii) производная $\sigma'_\alpha = d\sigma_\alpha/dx$ от абсолютно непрерывной составляющей меры σ_α положительна почти всюду (относительно меры Лебега) на отрезке F_α :

$$\sigma'_\alpha(x) > 0 \quad \text{п.в. на } F_\alpha, \quad \alpha \in G.$$

Каждому элементу $\alpha \in G$ соответствует единственная цепочка элементов графа G , имеющая вид:

$$\gamma \rightarrow \cdots \rightarrow \beta \rightarrow \alpha, \quad \gamma \in \omega_+;$$

эту цепочку будем называть *определяющей* для элемента $\alpha \in G$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Обобщенной системой Никкишина (GN -системой), соответствующей графу G и заданному набору мер $\{\sigma_\alpha : \alpha \in G\}$, назовем систему марковских функций*

$$f_\alpha(z) = \hat{s}_\alpha(z) = \int \frac{ds_\alpha(x)}{z-x}, \quad s_\alpha = \langle \sigma_\gamma, \dots, \sigma_\beta, \sigma_\alpha \rangle, \quad \alpha \in G, \quad (5)$$

где $\gamma \rightarrow \dots \rightarrow \beta \rightarrow \alpha$ – цепочка, определяющая элемент α .

Непосредственно в терминах $\sigma_\gamma, \dots, \sigma_\alpha$ функции f_α определяются по формулам:

$$f_\alpha(z) = \int \frac{d\sigma_\gamma(x_1) \cdots d\sigma_\beta(x_{j-1}) d\sigma_\alpha(x_j)}{(z-x_1)(x_1-x_2) \cdots (x_{j-1}-x_j)}, \quad \alpha \in G. \quad (6)$$

Для GN -системы $f = \{f_\alpha : \alpha \in G\}$ и мультииндекса $n = \{n_\alpha : \alpha \in G\}$ рассмотрим задачу Эрмита–Паде. Существует многочлен Q_n , удовлетворяющий условиям

$$Q_n(z) \not\equiv 0, \quad \deg Q_n \leq |n| = \sum_{\alpha \in G} n_\alpha, \\ (Q_n f_\alpha - P_{n,\alpha})(z) = O\left(\frac{1}{z^{n_\alpha+1}}\right), \quad z \rightarrow \infty, \quad \alpha \in G, \quad (7)$$

где $P_{n,\alpha}$ – некоторые многочлены (полиномиальные части степенных разложений функций $Q_n f_\alpha$ в бесконечно удаленной точке). Фигурирующие здесь многочлены называются многочленами Эрмита–Паде, а рациональные функции

$$R_{n,\alpha} = \frac{P_{n,\alpha}}{Q_n}, \quad \alpha \in G,$$

– аппроксимациями Эрмита–Паде (или совместными аппроксимациями Паде) системы f , соответствующими мультииндексу n .

Из соотношений (7) следует, что многочлен Q_n удовлетворяет следующей системе соотношений ортогональности

$$\int Q_n(x) x^k ds_\alpha(x) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n_\alpha - 1, \quad \alpha \in G. \quad (8)$$

Справедливы формулы, приведенные в п. 2, §1 в связи с функциями второго рода

$$\Phi_{n,\alpha}(z) = \int \frac{Q_n(x)}{z-x} ds_\alpha(x), \quad \alpha \in G$$

(во всех этих формулах индекс j заменяется индексом α).

Носителями мер s_α , $\alpha \in G$, являются (попарно непересекающиеся) отрезки F_γ , $\gamma \in \omega_+$; при этом, число мер s_α с носителями на фиксированном отрезке F_γ , отличных от σ_γ , равно числу элементов множества $\{\beta : \beta \succ \gamma\}$.

2. Всюду в дальнейшем будем считать, что компоненты мультииндекса n удовлетворяют следующему условию:

$$\text{если } \alpha \prec \beta, \text{ то } n_\beta \leq n_\alpha + 1 \quad (9)$$

(иначе говоря, функция $n: G \rightarrow \mathbb{Z}_+$ почти монотонна на графе G). В этом параграфе мы считаем, что мультииндекс n фиксирован; зависимость рассматриваемых функций от n не указывается явно в дальнейших обозначениях (в этом параграфе).

Исходя из многочлена Q рассмотрим функции Ψ_α , определяемые по индукции:

$$\Psi_\omega(z) = Q(z), \quad \Psi_\alpha(z) = \int \frac{\Psi_{\alpha_-}(x)}{z-x} d\sigma_\alpha(x), \quad \alpha \in G. \quad (10)$$

Фиксируем $\alpha \in \overline{G}$; положим

$$G_\alpha = \{\beta : \beta \succ \alpha\}, \quad \overline{G}_\alpha = G_\alpha \cup \{\alpha\}$$

(α – корневая вершина графа $\overline{G}_\alpha$). Для любого $\beta \in G_\alpha$ определим меры s_β^α по графу G_α так, как были определены выше меры s_α по графу $G = G_\omega$ (для $\beta \in G_\alpha$ единственным образом определена цепочка $\gamma \rightarrow \dots \rightarrow \beta$, где $\gamma \in \alpha_+$; полагаем $s_\beta^\alpha = \langle \sigma_\gamma, \dots, \sigma_\beta \rangle$).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Для любого $\alpha \in \overline{G}$ функция Ψ_α удовлетворяет следующей системе соотношений ортогональности:

$$\int \Psi_\alpha(x) x^k ds_\beta^\alpha(x) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n_\beta - 1, \quad \beta \in G_\alpha. \quad (11)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применим индукцию по α . Поскольку $\Psi_\omega = Q$, $s_\beta^\omega = s_\beta$ и $G_\omega = G$, система (11) при $\alpha = \omega$ совпадает с системой (8). Проведем шаг индукции; предположим, что соотношения (11) справедливы для функции Ψ_{α_-} . Имеем

$$\begin{aligned} \int \Psi_\alpha(x) x^k ds_\beta^\alpha(x) &= \int x^k ds_\beta^\alpha(x) \int \frac{\Psi_{\alpha_-}(t)}{x-t} d\sigma_\alpha(t) \\ &= \int \Psi_{\alpha_-}(t) d\sigma_\alpha(t) \int \frac{(x^k - t^k) + t^k}{x-t} ds_\beta^\alpha(x) \\ &= \int \Psi_{\alpha_-}(t) p_{k-1} d\sigma_\alpha(t) - \int \Psi_{\alpha_-}(t) t^k \int \frac{ds_\beta^\alpha(x)}{t-x} d\sigma_\alpha(t), \end{aligned}$$

где p_{k-1} – многочлен степени не выше $k-1$. Поскольку $\alpha \in (\alpha_-)_+$, имеем $\sigma_\alpha = s_{\alpha_-}^{\alpha_-}$; по предположению индукции,

$$\int \Psi_{\alpha_-}(t) p_{k-1}(t) ds_{\alpha_-}^{\alpha_-}(t) = 0$$

для $k \leq n_\alpha$. Так как $\alpha \prec \beta$ для всех $\beta \in G_\alpha$, имеем $n_\beta - 1 \leq n_\alpha$ (см. условие (9)) и, тем самым, этот интеграл равен нулю для всех рассматриваемых k .

Для данного β цепочка индексов, определяющая меру $s_{\beta}^{\alpha-}$, имеет вид $\alpha \rightarrow \gamma \rightarrow \dots \rightarrow \beta$, где $\gamma \rightarrow \dots \rightarrow \beta$ – цепочка, определяющая меру s_{β}^{α} ; тем самым,

$$ds_{\beta}^{\alpha-}(t) = d\langle \sigma_{\alpha}, s_{\beta}^{\alpha} \rangle(t) = \int \frac{ds_{\beta}^{\alpha}(x)}{t-x} d\sigma_{\alpha}(t).$$

Из сказанного выше и индуктивного предположения получаем требуемые соотношения

$$\int \Psi_{\alpha}(x) x^k ds_{\beta}^{\alpha}(x) = \int \Psi_{\alpha-}(x) x^k ds_{\beta}^{\alpha-}(x) = 0$$

для $k = 0, 1, \dots, n_{\beta} - 1$ и $\beta \in G_{\alpha}$. Предложение доказано.

Применяя предложение 1 к функции $\Psi_{\alpha-}$ при $\beta = \alpha$ и используя тот факт, что $s_{\alpha}^{\alpha-} = \sigma_{\alpha}$, и соответствующие соотношения ортогональности

$$\int \Psi_{\alpha-}(x) x^k d\sigma_{\alpha}(x) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n_{\alpha} - 1, \quad (12)$$

получаем

$$\Psi_{\alpha}(z) = O\left(\frac{1}{z^{n_{\alpha}+1}}\right), \quad z \rightarrow \infty, \quad \alpha \in G.$$

Для доказательства достаточно разложить ядро $1/(z-x)$ в представлении (10) по степеням $1/z$ и воспользоваться последними соотношениями ортогональности.

3. Введем ряд важных для дальнейшего обозначений. Для любого $\alpha \in G$ положим:

$$N_{\alpha} = \sum_{\kappa \in \overline{G}_{\alpha}} n_{\kappa}.$$

Через q_{α} обозначим многочлен с единичным старшим коэффициентом, множество нулей которого совпадает с множеством нулей функции $\Psi_{\alpha-}$ на отрезке F_{α} (с учетом их кратностей). Положим $N_{\alpha}^* = \deg q_{\alpha}$ и

$$q_{\alpha+} = \prod_{\kappa \in \alpha+} q_{\kappa};$$

если $\alpha+ = \emptyset$, последнее выражение по определению считаем равным единице.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Для индексов $\beta \in \overline{G}$ таких, что $\beta+ \neq \emptyset$, справедлива следующая система соотношений ортогональности:

$$\int \Psi_{\beta}(x) x^k \frac{d\sigma_{\alpha}(x)}{q_{\alpha+}(x)} = 0, \quad k = 0, 1, \dots, N_{\alpha} - 1, \quad \alpha \in \beta+. \quad (13)$$

Докажем предложение по индукции. Заметим, что если при доказательстве предложения 1 мы применили индукцию “по возрастанию” элементов графа, то теперь мы применим индукцию “по убыванию” этих элементов. Для индекса $\beta \in \overline{G}$, $\beta+ \neq \emptyset$, рассмотрим все цепочки вида

$$\beta \rightarrow \beta_1 \rightarrow \dots \rightarrow \beta_l, \quad (\beta_l)+ = \emptyset,$$

принадлежащие графу $\overline{G}$; максимально возможную длину (число ребер $\rightarrow$) цепочек такого вида обозначим через $l(\beta)$. Для рассматриваемых β имеем

$$1 \leq l(\beta) \leq l(\omega).$$

Базой индукции являются индексы β такие, что $l(\beta) = 1$. Для таких β и $\alpha \in \beta_+$ имеем $\alpha_+ = \emptyset$; из предложения 1 следуют соотношения ортогональности

$$\int \Psi_{\alpha_-}(x) x^k d\sigma_{\alpha}(x) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n_{\alpha} - 1$$

(ср. (12)). Эти соотношения для рассматриваемых индексов совпадают с соотношениями (13), поскольку для этих индексов $\alpha_- = \beta$, $N_{\alpha} = n_{\alpha}$ и $q_{\alpha_+} = 1$.

Предположим, что соотношения (13) справедливы для всех β таких, что $1 \leq l(\beta) \leq l < l(\omega)$ и докажем их справедливость для индексов γ , $l(\gamma) = l + 1$.

Фиксируем такой индекс γ ; из нашего предположения следует, что соотношения (13) имеют место для всех $\beta \in \gamma_+$. Поскольку отрезки F_{α} и F_{κ} , $\kappa \in \alpha_+$, не пересекаются, соотношения (13) представляют собой соотношения ортогональности для Ψ_{β} со знакопостоянной мерой $d\sigma_{\alpha}/q_{\alpha_+}$ (на F_{α} , $\alpha \in \beta_+$). Следовательно, функция Ψ_{β} имеет по меньшей мере N_{α} перемен знака внутри отрезка F_{α} и, тем самым, $N_{\alpha}^* \geq N_{\alpha}$.

Рассмотрим функцию

$$\psi_{\beta} = \frac{\Psi_{\beta}}{q_{\beta_+}} = \frac{\Psi_{\beta}}{\prod_{\kappa \in \beta_+} q_{\kappa}}. \quad (14)$$

Поскольку $\beta = \alpha_-$, функция $\psi_{\beta}(z)$ голоморфна в области $\overline{\mathbb{C}} \setminus F_{\beta}$ и

$$\psi_{\beta}(z) = O\left(\frac{1}{z^{N+1}}\right), \quad z \rightarrow \infty, \quad (15)$$

где

$$N = n_{\beta} + \sum_{\alpha \in \beta_+} N_{\alpha}^* = N_{\beta} + \sum_{\alpha \in \beta_+} (N_{\alpha}^* - N_{\alpha}). \quad (16)$$

Используя формулу Коши для коэффициентов степенного разложения функции ψ_{β} в точке $z = \infty$ и интегральное представление (10), из (15)–(16) получаем

$$\int \Psi_{\beta_-}(x) x^k \frac{d\sigma_{\beta}(x)}{q_{\beta_+}(x)} = 0, \quad k = 0, 1, \dots, N_{\beta} - 1 + \sum_{\alpha \in \beta_+} (N_{\alpha}^* - N_{\alpha}). \quad (17)$$

Поскольку $\beta_- = \gamma$, соотношения (17) имеют место для любого $\beta \in \gamma_+$ и $N_{\alpha}^* \geq N_{\alpha}$ для всех $\alpha \in \beta_+$, мы доказали справедливость соотношений (13) для функции Ψ_{γ} . Предложение доказано.

4. Вернемся к доказательству предложения 2 и вновь используем соотношения (17). Предположим, что для некоторого $\alpha \in G$ имеет место строгое неравенство $N_\alpha^* > N_\alpha$. Тогда из (17) в применении к $\beta = \alpha_-$ следует, что число перемен знака функции Ψ_{β_-} на отрезке F_β строго больше N_β и тем самым, $N_\beta^* > N_\beta$, $\beta = \alpha_-$. Шаг за шагом “спускаясь” вдоль цепочки вида $\omega \rightarrow \gamma \rightarrow \dots \rightarrow \beta \rightarrow \alpha$, приходим к следующему утверждению: если $N_\alpha^* > N_\alpha$ для некоторого $\alpha \in G$, то существует $\gamma \in \omega_+$ такое, что $N_\gamma^* > N_\gamma$.

Покажем теперь, что $N_\alpha^* = N_\alpha$ для всех $\alpha \in G$. Рассмотрим многочлен $Q = \Psi_\omega$; напомним, что $Q \neq 0$ и $\deg Q \leq |n|$. Число нулей этого многочлена на отрезке F_γ , $\gamma \in \omega_+$, равно N_γ^* ; отрезки F_γ , $\gamma \in \omega_+$, попарно не пересекаются. С учетом сказанного имеем

$$|n| \geq \deg Q \geq \sum_{\gamma \in \omega_+} N_\gamma^* \geq \sum_{\gamma \in \omega_+} N_\gamma = |n|.$$

Предположение о том, что $N_\gamma^* > N_\gamma$ для некоторого $\gamma \in \omega_+$, приводит к противоречию, а доказанное выше утверждение – к требуемому равенству. Кроме того, из последней цепочки неравенств следует равенство

$$\deg Q = |n|.$$

Другими словами, для GN -системы (5) рассматриваемые мультииндексы n (см. условие (9)) *нормальны* и, тем самым, для данного n *существует единственный (с точностью до числового множителя) многочлен Эрмита–Паде $Q = Q_n$ и единственный набор аппроксимаций Эрмита–Паде $R_\alpha = R_{n,\alpha}$, $\alpha \in G$.*

Для любого $\alpha \in G$ из соотношений (13) в применении к Ψ_β , $\beta = \alpha_-$, следует, что функция Ψ_α имеет N_α перемен знака внутри отрезка F_α . Поскольку общее число нулей этой функции на F_α также равно N_α , все они – простые и лежат внутри F_α . Нами доказано

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Для любого $\alpha \in G$ многочлен q_α имеет N_α простых нулей внутри отрезка F_α и $\deg q_\alpha = N_\alpha$.*

Отметим, наконец, что для многочлена Эрмита–Паде Q , нормированного условием: $Q(z) = z^{|n|} + \dots$, имеет место равенство

$$Q = q_{\omega_+} = \prod_{\gamma \in \omega_+} q_\gamma. \quad (18)$$

Из этого равенства, с учетом предложения 3, приходим к следующему выводу о структуре нулей многочлена Q : все они – простые, лежат внутри отрезков F_γ , $\gamma \in \omega_+$, и их число внутри F_γ равно N_γ , $\gamma \in \omega_+$.

§ 3. Задача равновесия для векторных потенциалов.

Равновесная мера

1. В этом параграфе мы остановимся на некоторых результатах теории потенциала, лежащих в основе изучения асимптотических свойств аппроксимаций Эрмита–Паде для марковских функций. Эти результаты были получены в работах

А. А. Гончара и Е. А. Рахманова [7], [15]–[17]; они применялись в ряде последующих работ, связанных с ортогональными многочленами и рациональными аппроксимациями. Детальные доказательства можно найти в монографии Е. М. Никишина и В. Н. Сорокина [4]. Здесь мы ограничиваемся формулировкой результатов в предположениях, достаточных для целей настоящей статьи.

Пусть ν – конечная положительная борелевская мера с компактным носителем в комплексной плоскости $\mathbb{C}$; $S(\nu)$ – носитель меры ν , $|\nu|$ – ее величина (полная вариация). Через $M_\tau(K)$, где K – компакт в $\mathbb{C}$, $\tau > 0$, будем обозначать множество мер ν таких, что $S(\nu) \subset K$ и $|\nu| = \tau$.

Логарифмический потенциал меры ν будем обозначать через V^ν :

$$V^\nu(z) = \int \log \frac{1}{|z-x|} d\nu(x), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Интеграл всегда существует (конечный или бесконечный); функция V^ν – гармоническая в дополнении к носителю меры и супергармоническая в комплексной плоскости $\mathbb{C}$.

Взаимной энергией мер ν_1, ν_2 называется интеграл

$$J(\nu_1, \nu_2) = \iint \log \frac{1}{|x-t|} d\nu_1(x) d\nu_2(t);$$

$J(\nu) = J(\nu, \nu)$ – энергия меры ν .

2. Пусть I – произвольное конечное множество индексов. Исходными данными задачи равновесия для векторных потенциалов являются:

$F = \{F_\alpha : \alpha \in I\}$ – множество отрезков вещественной прямой $\mathbb{R}$;

$\theta = \{\theta_\alpha : \alpha \in I\}$ – вектор с положительными координатами;

$A = (a_{\alpha,\beta})$, где $\alpha, \beta \in I$, – вещественная симметричная матрица.

Предполагается, что A – положительно определенная матрица и $a_{\alpha,\beta} = 0$ для индексов α, β таких, что $F_\alpha \cap F_\beta \neq \emptyset$.

В электростатистической интерпретации речь идет о распределении положительных зарядов на проводниках F_α при условии, что величина заряда на каждом проводнике фиксирована (равна θ_α на F_α), а взаимодействие точечных зарядов, принадлежащих одному и тому же или различным проводникам, характеризуется матрицей взаимодействия A .

Определим множество векторных мер $M = M_\theta(F)$ как прямое произведение множеств $M_{\theta_\alpha}(F_\alpha)$, $\alpha \in I$; элементами множества M являются меры $\mu = \{\mu_\alpha : \alpha \in I\}$ такие, что $S(\mu_\alpha) \subset F_\alpha$ и $|\mu_\alpha| = \theta_\alpha$ для всех $\alpha \in I$.

Для меры $\mu \in M$ определяется векторный потенциал

$$W^\mu = \{W_\alpha^\mu(x), x \in F_\alpha : \alpha \in I\},$$

где

$$W_\alpha^\mu(z) = \sum_{\beta \in I} a_{\alpha,\beta} V^{\mu_\beta}(z), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Энергия векторной меры μ , соответствующая матрице взаимодействия A , определяется формулой:

$$J(\mu) = J_A(\mu) = \sum_{\alpha, \beta \in I} a_{\alpha, \beta} J(\mu_\alpha, \mu_\beta).$$

Удобно ввести еще одно обозначение; для любой меры $\mu \in M$ положим:

$$w_\alpha^\mu = \min_{x \in F_\alpha} W_\alpha^\mu(x), \quad \alpha \in I.$$

Справедлива следующая

ТЕОРЕМА 1. *Каждая из следующих задач имеет единственное решение λ в классе M ; решения этих задач совпадают:*

- (A) $J(\lambda) = \min_{\mu \in M} J(\mu)$;
- (B) $W_\alpha^\lambda(x) = w_\alpha^\lambda, \quad x \in S(\lambda_\alpha), \quad \alpha \in I$;
- (C) $\max_{\mu \in M^\alpha(\lambda)} w_\alpha^\mu = w_\alpha^\lambda, \quad \alpha \in I$,

где $M^\alpha(\lambda)$ – множество мер $\mu \in M$ таких, что $\mu_\beta = \lambda_\beta$ для всех $\beta \in I, \beta \neq \alpha$.

Мера $\lambda = \lambda(F, \theta, A)$, являющаяся решением задач (A), (B), (C), называется *экстремальной* или *равновесной мерой*, соответствующей исходным данным (F, θ, A) . Наиболее важной для приложений является характеристика меры λ как решения задачи равновесия (B). Соответствующее утверждение теоремы можно сформулировать так: *существует единственная мера $\lambda \in M$ такая, что (для некоторых констант w_α) имеют место соотношения: $W_\alpha^\lambda(x) = w_\alpha$ на $S(\lambda_\alpha)$ и $W_\alpha^\lambda(x) \geq w_\alpha$ на всем отрезке $F_\alpha, \alpha \in I$. Отметим, что это свойство равновесия однозначно определяет и меру λ , и набор *равновесных констант* $w_\alpha = w_\alpha^\lambda, \alpha \in I$.*

Теорема справедлива и при более общих предположениях относительно исходных данных. В частности, она справедлива (для положительно определенных матриц A) при выполнении следующего условия: если $a_{\alpha, \beta} \neq 0$ (для некоторых $\alpha \neq \beta$), то отрезки F_α и F_β не перекрываются (если $a_{\alpha, \beta} = 0$, то никаких условий на соответствующие отрезки не накладывается).

3. В этом пункте мы приведем одну теорему о предельном распределении нулей многочленов, формулируемую в терминах равновесной меры для (скалярной) задачи равновесия при наличии внешнего поля. Определение равновесной меры дается в удобном для дальнейшего виде.

Пусть Δ – отрезок вещественной прямой, g – непрерывная функция на отрезке Δ . Существует единственная мера $\lambda \in M(\Delta) = M_1(\Delta)$ такая, что справедливо соотношение равновесия

$$(D) \quad 2V^\lambda(x) + g(x) = \min_{\Delta} (2V^\lambda + g) = w, \quad x \in S(\lambda).$$

При этом, *равновесная мера* λ совпадает с экстремальной мерой, минимизирующей интеграл энергии (с учетом внешнего поля):

$$J_g(\lambda) = \min_{\nu \in M(\Delta)} J_g(\nu),$$

где

$$J_g(\nu) = J(\nu) + \int g d\nu.$$

Для любого многочлена $q \neq 0$ через $\mu(q)$ будем обозначать дискретную меру, ассоциированную с его нулями (в каждом нуле многочлена q сосредотачивается масса, равная его кратности). Здесь и в дальнейшем запись $\nu_n \rightarrow \nu$ (в применении к последовательностям мер) означает *слабую сходимость*.

ТЕОРЕМА 2. Пусть Λ — произвольная последовательность натуральных чисел. Предположим, что последовательность многочленов q_l , $l \in \Lambda$ ($\deg q_l = l$, старший коэффициент q_l равен единице) удовлетворяет следующим соотношениям ортогональности:

$$\int q_l(x) x^k d\sigma_l(x) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, l-1, \quad l \in \Lambda,$$

где

$$d\sigma_l = e^{-g_l} d\sigma,$$

σ — положительная мера на отрезке Δ такая, что $d\sigma/dx > 0$ почти всюду на Δ , g_l , $l \in \Lambda$, — последовательность непрерывных функций на Δ , удовлетворяющая условию:

$$\lim_{l \in \Lambda} \frac{1}{l} g_l(x) = g(x), \quad x \in \Delta;$$

сходимость — равномерная на отрезке Δ .

Тогда имеют место соотношения:

$$\begin{aligned} \frac{1}{l} \mu(q_l) &\rightarrow \lambda, \quad l \in \Lambda, \\ \lim_{l \in \Lambda} \left(\int q_l^2 d\sigma_l \right)^{1/l} &= e^{-w}, \end{aligned}$$

где λ — решение задачи равновесия (D), w — соответствующая равновесная константа.

Доказательство теоремы (при более общих предположениях) содержится в работе [16].

§ 4. Предельные распределения нулей многочленов Q_n и $q_{n,\alpha}$

1. В этом параграфе мы продолжим изучение основных функций, связанных с аппроксимациями Эрмита–Паде GN -систем. Сохраняются обозначения, введенные в параграфах 2, 3; при этом, рассматривая асимптотические свойства соответствующих функций, мы явно указываем зависимость от n в их обозначениях (в отличие от пп. 2–4, § 2). Остаются в силе предположения, сделанные в § 2 относительно отрезков F_α , мер σ_α , $S(\sigma_\alpha) = F_\alpha$, и мультииндексов n .

Фиксируем распределение вероятностей $\{p_\alpha : \alpha \in G\}$ на графе G , удовлетворяющее условию: *если $\alpha \prec \beta$, то $p_\alpha \geq p_\beta$* .

Рассмотрим векторную задачу равновесия, соответствующую следующим исходным данным:

$$F = \{F_\alpha : \alpha \in G\}, \text{ где } F_\alpha - \text{носители мер } \sigma_\alpha;$$

$$\theta = \{\theta_\alpha : \alpha \in G\}, \text{ где}$$

$$\theta_\alpha = \sum_{\kappa \in \bar{G}_\alpha} p_\kappa$$

– функция распределения, соответствующая фиксированным выше p_α ;

$A = (a_{\alpha,\beta})$ – матрица взаимодействия, элементы $a_{\alpha,\beta}$ которой определяются следующим образом:

$$a_{\alpha,\beta} = 2, \text{ если } \alpha = \beta;$$

$$a_{\alpha,\beta} = -1, \text{ если индексы связаны отношением “непосредственного следования” } \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta \text{ или } \beta \rightarrow \alpha);$$

$$a_{\alpha,\beta} = 1, \text{ если индексы связаны соотношением “соседства” } \leftrightarrow (\alpha \leftrightarrow \beta);$$

$$a_{\alpha,\beta} = 0 \text{ в остальных случаях.}$$

Эти данные удовлетворяют условиям теоремы 1 (см. условие i), п. 1, § 2). Всюду в дальнейшем соответствующую равновесную (экстремальную) меру обозначаем через $\lambda = \{\lambda_\alpha : \alpha \in G\}$.

2. Рассмотрим произвольную последовательность $\Theta: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}_+^m$ мультииндексов $n = \{n_\alpha : \alpha \in G\}$, $|n| \rightarrow \infty$, для которой выполнены условия:

$$\lim_{n \in \Theta} \frac{n_\alpha}{|n|} = p_\alpha, \quad \alpha \in G. \quad (19)$$

Пусть $q_{n,\alpha} = q_\alpha$ – многочлены, определенные в п. 3, § 2. Нули многочлена $q_{n,\alpha}$ лежат внутри отрезка F_α , все они – простые и

$$\deg q_{n,\alpha} = N_{n,\alpha} = \sum_{\kappa \in \bar{G}_\alpha} n_\kappa$$

(см. предложение 3). Из (19) следуют соотношения

$$\lim_{n \in \Theta} \frac{N_{n,\alpha}}{|n|} = \theta_\alpha, \quad \alpha \in G.$$

Как и выше, через $\mu(q)$ обозначается дискретная мера, ассоциированная с многочленом q (совокупность единичных масс, сосредоточенных в нулях многочлена q). Следующая теорема характеризует предельное распределение нулей многочленов $q_{n,\alpha}$, $n \in \Theta$ (или, что то же самое, предельное распределение нулей функций $\Psi_{n,\alpha_-} = \Psi_{\alpha_-}$ на отрезке F_α ; см. (10)).

ТЕОРЕМА 3. Для любого $\alpha \in G$ справедливы предельные соотношения

$$\frac{1}{|n|} \mu(q_{n,\alpha}) \rightarrow \lambda_\alpha, \quad n \in \Theta. \quad (20)$$

Соотношения (20) можно записать в эквивалентной форме:

$$\lim_{n \in \Theta} |q_{n,\alpha}(z)|^{1/|n|} = \exp(-V^{\lambda_\alpha}(z)), \quad z \in \mathbb{C} \setminus F_\alpha, \quad \alpha \in G;$$

сходимость — равномерная внутри (на компактных подмножествах) дополнения к отрезку F_α .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Воспользуемся предложением 2 (соотношениями ортогональности (13)). Фиксируем произвольное $\alpha \in G$; пусть $\beta = \alpha_-$. Из (14) (с учетом зависимости фигурирующих ниже функций от n) следует

$$\Psi_{n,\beta} = \psi_{n,\beta} \prod_{\kappa \in \beta_+} q_{n,\kappa}; \quad (21)$$

выделяя в этом произведении множитель $q_{n,\alpha}$, из (13) получаем

$$\int q_{n,\alpha}(x) x^k h_{n,\alpha}(x) d\sigma_\alpha(x) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, N_\alpha - 1, \quad \alpha \in G, \quad (22)$$

где

$$h_{n,\alpha} = |\psi_{n,\beta}| \left| \frac{\prod_{\kappa \in \beta_+, \kappa \neq \alpha} q_{n,\kappa}}{\prod_{\kappa \in \alpha_+} q_{n,\kappa}} \right|. \quad (23)$$

Тем самым, многочлены $q_{n,\alpha}$ — ортогональные многочлены относительно переменных (зависящих от n) мер

$$d\sigma_{n,\alpha} = h_{n,\alpha} d\sigma_\alpha.$$

Далее положим

$$\mu_{n,\alpha} = \frac{1}{|n|} \mu(q_{n,\alpha}), \quad \alpha \in G.$$

Пусть $\mu_n = \{\mu_{n,\alpha} : \alpha \in G\}$ — соответствующая векторная мера. Докажем, что равновесная мера λ — единственная предельная точка последовательности μ_n , $n \in \Theta$; отсюда, очевидно, следует (слабая) сходимость $\mu_n \rightarrow \lambda$, $n \in \Theta$, что эквивалентно утверждению теоремы 3.

Пусть $\mu = \{\mu_\alpha : \alpha \in G\}$ — произвольная предельная точка последовательности μ_n , $n \in \Theta$. Это означает, что $\mu_n \rightarrow \mu$ по некоторой подпоследовательности $\Lambda \subset \Theta$. Все предельные переходы ниже (в процессе доказательства теоремы) осуществляются по этой подпоследовательности.

Рассмотрим предельное поведение весовых функций $h_{n,\alpha}$. Индексы κ , фигурирующие в (23), связаны с индексом α одним из соотношений: $\leftrightarrow$ или $\rightarrow$. Следовательно, для этих индексов отрезки F_κ не пересекаются с отрезком F_α (§2, условие i)) и

$$-\lim_{|n|} \frac{1}{|n|} \log |q_{n,\kappa}(x)| = \lim V^{\mu_{n,\kappa}}(x) = V^{\mu_\kappa}(x), \quad x \in F_\alpha;$$

тем самым,

$$-\lim_{|n|} \frac{1}{|n|} \log \left| \frac{\prod_{\kappa \in \beta_+, \kappa \neq \alpha} q_{n,\kappa}(x)}{\prod_{\kappa \in \alpha_+} q_{n,\kappa}(x)} \right| = \sum_{\kappa \in \beta_+, \kappa \neq \alpha} V^{\mu_\kappa}(x) - \sum_{\kappa \in \alpha_+} V^{\mu_\kappa}(x), \quad x \in F_\alpha; \quad (24)$$

сходимость – равномерная на F_α .

Перейдем теперь к функциям $\psi_{n,\beta}$ (см. (23)). Заметим, что $\psi_{n,\omega} \equiv 1$ (см. (14)) и рассмотрим сначала случай, когда $\alpha \in \omega_+$, $\beta = \omega$. Воспользуемся теоремой 2; из соотношений ортогональности (22) и формул (23) (с $\psi_{n,\omega} \equiv 1$), (24) (мы используем также условие ii), § 2, наложенное на меры σ_α) следует, что функция

$$W_\alpha^\mu = 2V^{\mu_\alpha} + \sum_{\kappa \in \beta_+, \kappa \neq \alpha} V^{\mu_\kappa} - \sum_{\kappa \in \alpha_+} V^{\mu_\kappa},$$

(α -компонента векторного потенциала W^μ для рассматриваемой матрицы A и $\alpha \in \omega_+$) удовлетворяет условиям равновесия

$$W_\alpha^\mu(x) = \min_{F_\alpha} W_\alpha^\mu = w_\alpha, \quad x \in S(\mu_\alpha),$$

и

$$-\lim_{|n|} \frac{1}{|n|} \log \left(\int q_{n,\alpha}^2 d\sigma_{n,\alpha} \right) = w_\alpha, \quad \alpha \in \omega_+. \quad (25)$$

В связи с приведенной выше формулой для W_α^μ отметим, что сумма по пустому множеству индексов считается равной нулю.

Для $\beta = \alpha_- \in G$ представим функцию $\psi_{n,\beta}$ по интегральной формуле Коши (в дополнении к F_β); используя (10), получаем

$$\psi_{n,\beta}(z) = \int \frac{q_{n,\beta}(t)}{z-t} d\sigma_{n,\beta}(t).$$

С учетом соотношений ортогональности (22) (в применении к $q_{n,\beta}$) отсюда приходим к формуле

$$\psi_{n,\beta}(z) = \frac{1}{q_{n,\beta}(z)} \int \frac{q_{n,\beta}^2(t)}{z-t} d\sigma_{n,\beta}(t), \quad z \in \mathbb{C} \setminus F_\beta. \quad (26)$$

Поскольку $\beta \rightarrow \alpha$, отрезок F_β не пересекается с F_α и, тем самым, последняя формула справедлива для $z = x \in F_\alpha$.

Продолжим доказательство теоремы, сделав следующее *предположение*: для индекса $\beta = \alpha_-$ существует конечный предел

$$v_\beta = -\lim_{|n|} \frac{1}{|n|} \log \left(\int q_{n,\beta}^2 d\sigma_{n,\beta} \right). \quad (27)$$

В этом предположении из (26) получаем

$$-\lim_{|n|} \frac{1}{|n|} \log |\psi_{n,\beta}(x)| = -V^{\mu_\beta}(x) + v_\beta, \quad x \in F_\alpha, \quad \beta = \alpha_-. \quad (28)$$

Из (23), учитывая (24) и (28), на F_α получаем

$$-\lim_{|n|} \frac{1}{|n|} \log h_{n,\alpha} = g_\alpha = \sum_{\kappa \in \beta_+, \kappa \neq \alpha} V^{\mu_\kappa} - \sum_{\kappa \in \alpha_+} V^{\mu_\kappa} - V^{\mu_\beta} + v_\beta, \quad \beta = \alpha_-;$$

переход к пределу – равномерный на F_α . Тем самым, к многочленам $q_{n,\alpha}$ применима теорема 2; из этой теоремы следует, что функция

$$W_\alpha^\mu = 2V^{\mu_\alpha} + g_\alpha - v_\beta = \sum_{\kappa \in G} a_{\alpha,\kappa} V^{\mu_\kappa}$$

(α -компонента векторного потенциала W^μ , соответствующего рассматриваемой матрице A и векторной мере $\mu \in M_\theta(F)$ для $\alpha \notin \omega_+$) удовлетворяет условиям равновесия:

$$W_\alpha^\mu(x) = \min_{F_\alpha} W_\alpha^\mu = w_\alpha, \quad x \in S(\mu_\alpha). \quad (29)$$

Кроме того, существует конечный предел

$$v_\alpha = -\lim_{|n|} \frac{1}{|n|} \log \left(\int q_{n,\alpha}^2 d\sigma_{n,\alpha} \right) = w_\alpha + v_\beta, \quad \beta = \alpha_-. \quad (30)$$

Отметим сначала следующее. Предположив, что существует конечный предел (27) для индекса $\beta = \alpha_-$, мы доказали то же для индекса α ; для индексов, принадлежащих ω_+ , соответствующее утверждение доказано выше (см. (25)). Следовательно (индукция вдоль цепочки $\gamma \rightarrow \dots \rightarrow \beta \rightarrow \alpha$, где $\gamma \in \omega_+$), наше *предположение доказано* (для любого индекса графа G); при этом, величины v_α определяются через константы равновесия индуктивно: $v_\alpha = w_\alpha + v_{\alpha_-}$ и из (25) следует, что можно положить $v_\omega = 0$.

Тем самым, доказано, что мера μ удовлетворяет условиям равновесия (29) для всех индексов $\alpha \in G$. Из теоремы 1 следует, что $\mu = \lambda$ (единственность равновесной меры).

Теорема доказана.

3. Учитывая равенство (18), получаем основное следствие теоремы 3 – теорему о предельном распределении нулей многочленов Эрмита–Паде Q_n (многочленов, удовлетворяющих системы соотношений ортогональности (8)) для GN -систем.

ТЕОРЕМА 4. *Справедливо предельное соотношение*

$$\frac{1}{|n|} \mu(Q_n) \rightarrow \sum_{\kappa \in \omega_+} \lambda_\kappa, \quad n \in \Theta.$$

Выделим также соотношение, полученное нами в процессе доказательства теоремы 3 (с учетом того, что сходимость векторных мер μ_n доказана для $n \in \Theta$; ср. (30)):

$$\lim_{n \in \Theta} \left(\int q_{n,\alpha}^2 d\sigma_{n,\alpha} \right)^{1/|n|} = e^{-v_\alpha}, \quad \alpha \in G, \quad (31)$$

где

$$v_\alpha = w_\alpha + v_{\alpha_-}, \quad v_\omega = 0; \quad (32)$$

w_α – равновесные константы рассматриваемой задачи равновесия. Из (32) следует, что $v_\alpha = w_\gamma + \dots + w_\beta + w_\alpha$, $\gamma \rightarrow \dots \rightarrow \beta \rightarrow \alpha$ – цепочка, определяющая индекс α .

Из интегрального представления (26) (для индекса α вместо β) следует, что $\psi_{n,\alpha}(z) \neq 0$ для $z \in \mathbb{C} \setminus F_\alpha$; тем самым, функция $\Psi_{n,\alpha}$ не имеет в дополнении к F_α нулей, отличных от нулей многочленов $q_{n,\kappa}$, $\kappa \in \beta_+$. Следующая теорема является следствием теоремы 3 и соотношений, полученных в процессе ее доказательства (см. (21), (26), с заменой β на α , и (31)–(32)).

ТЕОРЕМА 5. *Для любого $\alpha \in G$ справедлива следующая асимптотическая формула:*

$$\lim_{n \in \Theta} |\Psi_{n,\alpha}|^{1/|n|} = \exp \left(V^{\lambda_\alpha} - \sum_{\kappa \in \alpha_+} V^{\lambda_\kappa} - v_\alpha \right), \quad (33)$$

где $v_\alpha = w_\gamma + \dots + w_\alpha$ (суммирование – по цепочке индексов, определяющей индекс α).

Формула (33) справедлива в дополнении к объединению отрезков F_α и F_κ , $\kappa \in \alpha_+$ (равномерно – внутри этого дополнения). При этом, на отрезках F_κ , $\kappa \in \alpha_+$, имеет место оценка

$$\limsup_{n \in \Theta} |\Psi_{n,\alpha}|^{1/|n|} \leq \exp \left(V^{\lambda_\alpha} - \sum_{\kappa \in \alpha_+} V^{\lambda_\kappa} - v_\alpha \right);$$

верхняя регуляризация левой части восстанавливает равенство и на этих отрезках.

§ 5. О сходимости аппроксимаций Эрмита–Паде для GN -систем

1. В основе асимптотического анализа вопросов сходимости аппроксимаций Эрмита–Паде для марковских функций (в частности, для GN -систем) лежат формулы для остатков (см. § 1, п. 2):

$$\delta_{n,\alpha} = f_\alpha - R_{n,\alpha} = \frac{1}{Q_n} \Phi_{n,\alpha}, \quad \alpha \in G. \quad (34)$$

Наша цель – изучить области геометрической сходимости (и расходимости) рассматриваемых аппроксимаций для GN -систем. Из теоремы 4 следует, что равномерно внутри области

$$D = \mathbb{C} \setminus \bigcup_{\kappa \in \omega_+} F_\kappa$$

имеет место соотношение

$$\lim_{n \in \Theta} |Q_n|^{1/|n|} = \exp \left(- \sum_{\kappa \in \omega_+} V^{\lambda_\kappa} \right). \quad (35)$$

Тем самым, вопрос о предельном поведении последовательности $|\delta_{n,\alpha}|^{1/|n|}$ сводится к соответствующему вопросу для функций второго рода $\Phi_{n,\alpha}$. Установив связь между функциями типа Φ и Ψ , мы сможем применить результаты предыдущего параграфа для анализа рассматриваемой задачи.

2. Заметим сначала, что для индексов $\alpha \in \omega_+$ (и только для этих индексов) функции $\Phi_{n,\alpha}$ и $\Psi_{n,\alpha}$ совпадают:

$$\Phi_{n,\alpha}(z) = \Psi_{n,\alpha}(z) = \int \frac{Q_n(x)}{z-x} d\sigma_\alpha(x), \quad \alpha \in \omega_+.$$

Отсюда, с учетом (33) и (35), следует

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *Для любого графа G и индексов $\alpha \in \omega_+$ справедливы соотношения*

$$\lim_{n \in \Theta} |\delta_{n,\alpha}(z)|^{1/|n|} = \exp(W_\alpha^\lambda(z) - w_\alpha), \quad z \in D \setminus \bigcup_{\kappa \in \alpha_+} F_\kappa. \quad (36)$$

Для верхнего предела (вместо предела) в левой части (36) соответствующая оценка сверху имеет место во всей области D (см. замечание к теореме 5).

Системы Анжелеско соответствуют графам G , для которых $G = \omega_+$. Последнее предложение для этих систем доказано в работе [7]. В этом случае для любого $\alpha \in G$ область

$$\Omega_\alpha^c = \{z \in D : W_\alpha^\lambda(z) - w_\alpha < 0\},$$

где

$$W_\alpha^\lambda = V^{\lambda_\alpha} + \sum_{\kappa \in G} V^{\lambda_\kappa},$$

является *областью сходимости* аппроксимаций $R_{n,\alpha}$ к функции f_α . Поскольку $W_\alpha^\lambda(z) \rightarrow -\infty$ при $z \rightarrow \infty$, эта область содержит окрестность бесконечно удаленной точки; тем самым, $\Omega_\alpha^c \neq \emptyset$ для любого α . Открытое множество

$$\Omega_\alpha^d = \{z \in D : W_\alpha^\lambda(z) - w_\alpha > 0\}$$

(которое может быть пустым) является *областью расходимости* последовательности $R_{n,\alpha}$. Возникновение областей расходимости связано с эффектом отталкивания положительных зарядов, принадлежащих различным отрезкам F_κ , $\kappa \in G$. Если (в результате такого отталкивания) имеем $S(\lambda_\alpha) \neq F_\alpha$, то граница области сходимости Ω_α^c содержит носитель $S(\lambda_\alpha)$ и кривую

$$\Gamma_\alpha = \{z \in D : W_\alpha^\lambda(z) = w_\alpha\},$$

охватывающую множество $F_\alpha \setminus S(\lambda_\alpha)$, на котором $W_\alpha^\lambda > w_\alpha$ (см. условие равновесия в задаче (В) теоремы 1). Часть области D , лежащая внутри кривой Γ_α , принадлежит области расходимости Ω_α^d ; кривая Γ_α может состоять из одной или двух компонент, охватывающих концевые точки отрезка F_α (подробнее см. [7]).

Сказанное выше в связи с системами Анжелеско, по существу, остается в силе для индексов $\alpha \in \omega_+$ произвольного графа G — при условии, что число элементов множества $\omega_+ \geq 2$ (случай, когда множество ω_+ состоит из одного элемента α , мы отдельно обсудим ниже). Для индексов $\alpha \in \omega_+$ таких, что $\alpha_+ = \emptyset$, картина совершенно аналогична описанной выше. Если $\alpha_+ \neq \emptyset$, то выражение для

α -компоненты W_α^λ векторного потенциала равновесной меры λ содержит дополнительные слагаемые (потенциалы отрицательных зарядов $-V^{\lambda_\kappa} = V^{-\lambda_\kappa}$), соответствующие индексам $\kappa \in \alpha_+$:

$$W_\alpha^\lambda = V^{\lambda_\alpha} + \sum_{\kappa \in \omega_+} V^{\lambda_\kappa} - \sum_{\kappa \in \alpha_+} V^{\lambda_\kappa}.$$

Это связано с интересным фактом – наличием дополнительных (кроме $z = \infty$) точек, в которых аппроксимации $R_{n,\alpha}$ интерполируют функцию f_α . Для рассматриваемых α ($\alpha \in \omega_+$, $\alpha_+ \neq \emptyset$) имеем

$$\Phi_{n,\alpha}(z) = \frac{\prod_{\kappa \in \alpha_+} q_{n,\kappa}(z)}{q_{n,\alpha}(z)} \int \frac{q_{n,\alpha}^2(x)}{z-x} d\sigma_{n,\alpha}(x), \quad z \in \mathbb{C} \setminus F_\alpha.$$

Тем самым, разность $f - R_{n,\alpha}$ обращается в нуль во всех нулях многочленов $q_{n,\kappa}$, $\kappa \in \alpha_+$ (кроме нуля порядка $|n| + n_\alpha + 1$ в точке $z = \infty$; общий порядок интерполяции равен $|n| + N_\alpha + 1$). Отрицательные слагаемые в формуле для W_α^λ связаны с этими нулями (точнее, их предельными распределениями λ_κ , $\kappa \in \alpha_+$). Для рассматриваемых индексов области сходимости Ω_α^c содержат окрестность бесконечности (тем самым, $\Omega_\alpha^c \neq \emptyset$); отмеченный выше эффект и в этом случае может привести к (непустым) областям расходимости Ω_α^d .

В случае, когда множество ω_+ состоит из одного элемента α , имеем

$$W_\alpha^\lambda = 2V^{\lambda_\alpha} - \sum_{\kappa \in \alpha_+} V^{\lambda_\kappa}.$$

Неравенство $W_\alpha^\lambda(z) < w_\alpha$ выполняется в окрестности точки $z = \infty$; действительно,

$$W_\alpha^\lambda(z) \sim (1 + p_\alpha) \log \frac{1}{|z|} \rightarrow -\infty, \quad z \rightarrow \infty.$$

Функция W_α^λ субгармонична в области $\mathbb{C} \setminus S(\lambda_\alpha)$ и равна w_α на $S(\lambda_\alpha)$; по принципу максимума, неравенство $W_\alpha^\lambda(z) < w_\alpha$ справедливо во всей этой области. Тем самым, в рассматриваемом случае область сходимости Ω_α^c совпадает со всей областью D ; при этом $S(\lambda_\alpha) = F_\alpha$ (см. задачу (B) теоремы 1).

3. Прежде чем обсуждать вопрос о сходимости аппроксимаций Эрмита–Паде для индексов $\alpha \notin \omega_+$, установим связь между функциями $\Phi_{n,\alpha}$ и $\Psi_{n,\alpha}$ для произвольных $\alpha \in G$. Воспользуемся (непосредственно следующими из определений) интегральными представлениями этих функций по мерам σ_κ , где индекс κ пробегает цепочку элементов графа G , определяющую элемент α . Пусть $\alpha_1 \rightarrow \alpha_2 \rightarrow \dots \rightarrow \alpha_k = \alpha$, $\alpha_1 \in \omega_+$, – такая цепочка; полагая $\sigma_{\alpha_i} = \sigma_i$, $i = 1, \dots, k$, имеем:

$$\begin{aligned} \Phi_{n,\alpha}(z) &= \int \frac{Q_n(x_1) d\sigma_1(x_1) d\sigma_2(x_2) \cdots d\sigma_k(x_k)}{(z-x_1)(x_1-x_2) \cdots (x_{k-1}-x_k)}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus F_{\alpha_1}, \\ \Psi_{n,\alpha}(z) &= \int \frac{Q_n(x_1) d\sigma_1(x_1) d\sigma_2(x_2) \cdots d\sigma_k(x_k)}{(x_2-x_1) \cdots (x_k-x_{k-1})(z-x_k)}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus F_{\alpha_k} \end{aligned}$$

(ср. (6)). Отсюда получаем

$$\Phi_{n,\alpha}(z) + (-1)^k \Psi_{n,\alpha}(z) = \int \frac{Q_n(x_1)(x_1 - x_k) d\sigma_1(x_1) d\sigma_2(x_2) \cdots d\sigma_k(x_k)}{(z - x_1)(x_1 - x_2) \cdots (x_{k-1} - x_k)(z - x_k)};$$

полагая здесь $(x_1 - x_k) = (x_1 - x_2) + \cdots + (x_{k-1} - x_k)$, после очевидных преобразований приходим к формуле

$$\Psi_{n,\alpha}(z) = \sum_{l=1}^k (-1)^{l-1} \hat{s}_k^l(z) \Phi_{n,\alpha_l}(z), \quad z \in \mathbb{C} \setminus (F_{\alpha_1} \cup F_{\alpha_k}),$$

где $\hat{s}_k^l$ — марковская функция, построенная по мере $s_k^l = \langle \sigma_{l+1}, \dots, \sigma_k \rangle$, $\hat{s}_k^k = 1$ (ср. §2, п. 2). Применяя эту формулу для $\alpha = \alpha_k, \alpha_{k-1}, \dots, \alpha_1$, получаем (треугольную) систему линейных уравнений, из которой находим выражение $\Phi_{n,\alpha}$ через $\Psi_{n,\kappa}$, $\kappa = \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k = \alpha$:

$$\Phi_{n,\alpha}(z) = \sum_{l=1}^k u_l(z) \Psi_{n,\alpha_l}(z), \quad z \in \mathbb{C} \setminus \bigcup_{l=1}^k F_{\alpha_l}; \quad (37)$$

здесь u_l — функции, не зависящие от мультииндекса n ($u_k = (-1)^{k-1}$).

4. Формула (37) позволяет применить теорему 5 для анализа общей картины областей сходимости и расходимости аппроксимаций Эрмита–Паде для GN -систем. Имея в виду соотношение (33), для любого $\alpha \in G$ положим

$$U_\alpha^\lambda = V^{\lambda_\alpha} - \sum_{\kappa \in \alpha_+} V^{\lambda_\kappa} - v_\alpha;$$

отметим, что

$$U_\alpha^\lambda(z) \sim p_\alpha \log \frac{1}{|z|} \rightarrow -\infty, \quad z \rightarrow \infty.$$

Фиксируем элемент $\alpha \in G$; поскольку предложение 4 решает рассматриваемый вопрос для элементов $\alpha \in \omega_+$, будем считать, что $\alpha \in G - \omega_+$. Пусть, как и выше, $\alpha_1 \rightarrow \cdots \rightarrow \alpha_k = \alpha$ ($\alpha_1 \in \omega_+$) — цепочка, определяющая элемент α . Из (33) и (37) следует, что в области D — за исключением конечного числа разрезов (аналитических дуг и кривых, в частности, некоторых из отрезков F_κ) справедлива одна из асимптотических формул вида:

$$\lim_{n \in \Theta} |\Phi_{n,\alpha}|^{1/|n|} = \exp U_{\alpha_l}^\lambda, \quad l \in \{1, \dots, k\}. \quad (38)$$

Точнее, для любого $l \in \{1, \dots, k\}$ положим

$$D_l = \{z \in D : U_{\alpha_l}^l(z) > U_{\alpha_i}^\lambda(z) \text{ для любого } i \neq l\};$$

некоторые из множеств D_l могут быть пустыми. Соотношение (38) имеет место в D_l (кроме, быть может, дискретного множества), причем всюду в области D справедливо неравенство

$$\limsup_{n \in \Theta} |\Phi_{n,\alpha}|^{1/|n|} \leq \exp \varphi_\alpha, \quad \varphi_\alpha(z) = \max\{U_{\alpha_l}^\lambda(z) : l \in \{1, \dots, k\}\}, \quad z \in D \quad (39)$$

$(\varphi_\alpha(z) = U_{\alpha_l}^\lambda(z) \text{ для } z \in D_l, l \in \{1, \dots, k\}).$

Из (34), полагая

$$\varphi_{\omega_+} = \sum_{\kappa \in \omega_+} V^{\lambda_\kappa}$$

и учитывая (35), (38)–(39), получаем:

$$\lim_{n \in \Theta} |\delta_{n,\alpha}(z)|^{1/|n|} = \exp(\varphi_{\omega_+}(z) + \varphi_\alpha(z)), \quad z \in \tilde{D} = \bigcup_{l=1}^k D_l \quad (40)$$

(кроме, быть может, дискретного множества в $\tilde{D}$) и

$$\limsup_{n \in \Theta} |\delta_{n,\alpha}(z)|^{1/|n|} \leq \exp(\varphi_{\omega_+}(z) + \varphi_\alpha(z)), \quad z \in D. \quad (41)$$

Множество

$$\Omega_\alpha^c = \{z \in D : \varphi_{\omega_+}(z) + \varphi_\alpha(z) < 0\}$$

является *областью сходимости* аппроксимаций $R_{n,\alpha}$ к f_α ; это множество всегда содержит окрестность бесконечно удаленной точки, так как

$$\varphi_{\omega_+}(z) + \varphi_\alpha(z) \sim (1 + p_\alpha) \log \frac{1}{|z|} \rightarrow -\infty, \quad z \rightarrow \infty$$

(и, тем самым, не пусто). Сходимость – равномерная внутри Ω_α^c , скорость сходимости – геометрическая (она характеризуется соотношениями (40)–(41)). Как и выше, может быть не пустой и *область расходимости* аппроксимаций $R_{n,\alpha}$ (ср. п. 2)

$$\Omega_\alpha^d = \{z \in D : \varphi_{\omega_+}(z) + \varphi_\alpha(z) > 0\},$$

в которой $|R_{n,\alpha}| \rightarrow \infty$ (с геометрической скоростью).

Проведенный в этом пункте анализ оставляет открытыми многие вопросы, относящиеся к областям сходимости и скорости сходимости аппроксимаций Эрмита-Паде для конкретных GN -систем. Это связано, в первую очередь, с определением функции φ_α (точнее, с операцией взятия максимума по конечному набору функций $U_{\alpha_l}^\lambda$ в (39); для $\alpha \notin \omega_+$ число функций в этом наборе ≥ 2). При тех или иных дополнительных ограничениях эту операцию удастся расшифровать и представить решение рассматриваемой задачи в более явной форме. В следующих пунктах мы обсудим некоторые результаты в этом направлении.

5. Предельное поведение аппроксимаций $R_{n,\alpha}$ для $\alpha \in \omega_+$ характеризуется в терминах, связанных с α -компонентой W_α^λ векторного равновесного потенциала W^λ (см. п. 2). Для $\alpha \notin \omega_+$ это уже не так; следующее простое наблюдение показывает, что для таких α компоненты W_α^λ возникают при *сравнении* функций типа U . А именно, для любого $\alpha \notin \omega_+$ имеем:

$$U_\alpha^\lambda - U_\beta^\lambda = W_\alpha^\lambda - w_\alpha, \quad \beta = \alpha_-, \quad (42)$$

где

$$W_\alpha^\lambda = 2V^{\lambda_\alpha} + \sum_{\kappa \in \beta_+, \kappa \neq \alpha} V^{\lambda_\kappa} - \sum_{\kappa \in \alpha_+} V^{\lambda_\kappa} - V^{\lambda_\beta}. \quad (43)$$

Поведение функции W_α^λ в бесконечно удаленной точке характеризуется соотношением

$$W_\alpha^\lambda(z) \sim (p_\alpha - p_\beta) \log \frac{1}{|z|}, \quad z \rightarrow \infty;$$

тем самым, функция W_α^λ гармонична в точке $z = \infty$ при $p_\alpha = p_\beta$ и $W_\alpha^\lambda(z) \rightarrow +\infty$ при $p_\alpha < p_\beta$. Следующее предложение относится к первому случаю.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. *Если $\beta = \alpha_- \in G$, $\beta_+ = \{\alpha\}$ и $p_\alpha = p_\beta$, то $U_\beta^\lambda > U_\alpha^\lambda$ в дополнении к отрезку F_α и $U_\beta^\lambda = U_\alpha^\lambda$ на F_α .*

Действительно, в условиях этого предложения отсутствует второе слагаемое в правой части (43); функция $W_\alpha^\lambda - w_\alpha$ субгармонична в дополнении к $S = S(\lambda_\alpha)$ (включая точку $z = \infty$) и $= 0$ на S (условие равновесия). По принципу максимума, эта функция < 0 в дополнении к S (последнее слагаемое в (43) не может быть нулем); тем самым, $S = F_\alpha$ (снова – условие равновесия) и нужные утверждения вытекают из (42).

Системы Никишина соответствуют графам G , состоящим из одной цепочки $\alpha_1 \rightarrow \alpha_2 \rightarrow \dots \rightarrow \alpha_m$ ($\alpha_1 \in \omega_+$); элементы такого графа и связанные с ними функции будем нумеровать натуральными числами (k вместо α_k). Из предложения 5 и результатов п.п. 2, 4 в *диагональном случае* ($p_k = 1/m$, $k = 1, \dots, m$) для систем Никишина получаем: $D_1 = D \setminus F_2$ и для любого $k \in \{1, \dots, m\}$

$$\varphi_k = U_1^\lambda, \quad \varphi_{\omega_+} + \varphi_k = 2V^{\lambda_1} - V^{\lambda_2} - w_1 = W_1^\lambda - w_1, \quad \Omega_k^c = D.$$

Тем самым, при любом k диагональные аппроксимации Эрмита–Паде равномерно сходятся внутри всей области $D = \mathbb{C} \setminus F_1$, причем

$$\lim_{n \in \Theta} |\delta_{n,k}(z)|^{1/|n|} = \exp(W_1^\lambda(z) - w_1), \quad z \in D \setminus F_2, \quad k = 1, \dots, m;$$

для верхнего предела неравенство $\leq$ справедливо во всей области D (ср. (40), (41)).

Приведем несколько более общее следствие предложения 5.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. *Пусть G – произвольный граф, $\alpha \in G$ и $\alpha_1 \rightarrow \alpha_2 \rightarrow \dots \rightarrow \alpha_k = \alpha$, $\alpha_1 \in \omega_+$, – цепочка, определяющая элемент α . Если $(\alpha_{l-1})_+ = \{\alpha_l\}$ для любого $l = 2, \dots, k$ и $p_{\alpha_1} = \dots = p_{\alpha_k}$, то*

$$\lim_{n \in \Theta} |\delta_{n,\alpha}(z)|^{1/|n|} = \lim_{n \in \Theta} |\delta_{n,\alpha_1}(z)|^{1/|n|} = \exp(W_{\alpha_1}^\lambda(z) - w_{\alpha_1}), \quad z \in D \setminus F_{\alpha_2}.$$

Здесь не предполагается, что множество ω_+ состоит из одного элемента α_1 и, тем самым, наряду с областью сходимости $\Omega_\alpha^c = \{z : W_{\alpha_1}^\lambda(z) - w_{\alpha_1} < 0\}$ может быть непустой и область расходимости $\Omega_\alpha^d = \{z : W_{\alpha_1}^\lambda(z) - w_{\alpha_1} > 0\}$; асимптотическое поведение $\delta_{n,\alpha}$, в частности, область сходимости и скорость сходимости аппроксимаций $R_{n,\alpha}$ к функции f_α , для индекса α таковы же, как и для индекса $\alpha_1 \in \Omega_+$ (ср. п. 2).

Предложение 6 дополняет результаты К. Драйвер и Г. Шталя [13] и Ж. Бустаманте [14], относящиеся к вопросам сходимости аппроксимаций Эрмита–Паде для систем Никишина и несколько более общих систем.

6. Рассмотрим простейший пример недиагональных аппроксимаций для $\alpha \notin \omega_+$. Пусть $m = 2$, (f_1, f_2) – система Никишина и $p_1 > p_2$. Для индекса $1 \in \omega_+$ имеем

$$\lim_{n \in \Theta} |\delta_{n,1}(z)|^{1/|n|} = \exp(W_1^\lambda(z) - w_1), \quad z \in D \setminus F_2,$$

$W_1^\lambda(z) - w_1 < 0$, $z \in D$, и последовательность $R_{n,1}$, $n \in \Theta$, равномерно сходится к функции f_1 во всей области D (см. п. 2). Для индекса $2 \notin \omega_+$ имеем

$$U_2^\lambda - U_1^\lambda = W_2^\lambda - w_2 = 2V^{\lambda_2} - V^{\lambda_1} - w_2$$

(см. (42), (43)); при этом

$$2V^{\lambda_2}(z) - V^{\lambda_1}(z) \sim (p_1 - p_2) \log |z| \rightarrow +\infty, \quad z \rightarrow \infty.$$

Тем самым, $\varphi_2 = U_2^\lambda = V^{\lambda_2} - w_2 - w_1$ в области $D_2 = \{z \in D : U_2^\lambda(z) > U_1^\lambda(z)\}$, содержащей окрестность бесконечно удаленной точки, и $\varphi_2 = U_1^\lambda = V^{\lambda_1} - V^{\lambda_2} - w_1$ в области $D_1 = \{z \in D : U_1^\lambda(z) > U_2^\lambda(z)\}$ (мы используем обозначения п. 4). Множество $\Gamma \subset D$, на котором $\varphi_2 = U_2^\lambda = U_1^\lambda$, состоит из общей границы этих областей и отрезка $S(\lambda_2)$ (этот отрезок принадлежит границе области D_1 ; отсюда, в частности, следует, что $D_1 \neq \emptyset$). Тем самым, область D разбивается на две области, в которых асимптотическое поведение остатка $\delta_{n,2} = f_2 - R_{n,2}$ различно:

$$\begin{aligned} \lim_{n \in \Theta} |\delta_{n,2}(z)|^{1/|n|} &= \exp(2V^{\lambda_1}(z) - V^{\lambda_2}(z) - w_1) \\ &= \exp(W_1^\lambda(z) - w_1), \quad z \in D_1; \end{aligned} \quad (44)$$

$$\lim_{n \in \Theta} |\delta_{n,2}(z)|^{1/|n|} = \exp(V^{\lambda_1}(z) + V^{\lambda_2}(z) - w_1 - w_2), \quad z \in D_2. \quad (45)$$

Правые части соотношений (44), (45) совпадают на Γ . Поскольку $W_1^\lambda - w_1 < 0$ в области D (тем самым, в D_1 и на Γ), то $V^{\lambda_1} + V^{\lambda_2} - w_1 - w_2 < 0$ на Γ и, по принципу максимума для гармонических функций, в области D_2 (эта функция гармонична в D_2 и $\rightarrow -\infty$ при $z \rightarrow \infty$). Следовательно, область сходимости Ω_2^φ последовательности $R_{n,2}$ к функции f_2 совпадает со всей областью D . Скорость сходимости характеризуется соотношениями (44), (45); на Γ имеет место соответствующая оценка сверху для верхнего предела (ср. (40), (41)).

Аналогично, следуя общей схеме п. 4, решается вопрос о сходимости аппроксимаций Эрмита–Паде для систем Никишина $(f_1, \dots, f_m)$ при любом $m \geq 2$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. Для систем Никишина при любом $k = \{1, \dots, m\}$ аппроксимации $R_{n,k}$ равномерно сходятся (при $|n| \rightarrow \infty$, $n \in \Theta$) к функции f_k внутри области $D = \mathbb{C} \setminus F_1$.

При этом для любого k число (непустых) областей D_l с различными асимптотическими формулами для $|\delta_{n,k}|^{1/|n|}$ не может превосходить более чем на единицу числа строгих неравенств $>$ в последовательности $p_1 \geq p_2 \geq \dots \geq p_k$.

Список литературы

1. *Hermite C.* Sur la fonction exponentielle // C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 1873. V. 77. P. 18–24, 74–79, 226–233, 285–293.
2. *Mahler K.* Perfect systems // Compositio Math. 1968. V. 19. №2. P. 95–166.
3. *Nuttall J.* Asymptotics of diagonal Hermite–Padé polynomials // J. Approx. Theory. 1984. V. 42 (4). P. 259–386.
4. *Никишин Е. М., Сорокин В. Н.* Рациональные аппроксимации и ортогональность. М.: Наука, 1988.
5. *Aptekarev A. I., Stahl H.* Asymptotics of Hermite–Padé polynomials // “Progress in Approximation Theory” / ed. Gonchar A. A., Saff E. B. New York: Springer-Verlag, 1992. P. 127–167.
6. *Калягин В. А.* Об одном классе полиномов, определяемых двумя соотношениями ортогональности // Матем. сб. 1979. Т. 110 (152). С. 609–627.
7. *Гончар А. А., Рахманов Е. А.* О сходимости совместных аппроксимаций Паде для системы функций марковского типа // Труды МИАН. 1981. Т. 157. С. 31–48.
8. *Аптекарев А. И.* Асимптотика многочленов совместной ортогональности в случае Анжелеско // Матем. сб. 1988. Т. 136. С. 56–84.
9. *Никишин Е. М.* О совместных аппроксимациях Паде // Матем. сб. 1980. Т. 113 (155). №4. С. 499–519.
10. *Никишин Е. М.* Об асимптотике линейных форм для совместных аппроксимаций Паде // Изв. вузов. Матем. 1986. №2. С. 33–41.
11. *Бустаманте Ж., Лопес Г. Лагомасино* Аппроксимации Эрмита–Паде для систем Никишина аналитических функций // Матем. сб. 1992. Т. 183. №2. С. 117–138.
12. *Сорокин В. Н.* Аппроксимации Эрмита–Паде полилогарифмов // Изв. вузов. Матем. 1994. №5. С. 49–59.
13. *Driver K., Stahl H.* Simultaneous rational approximants to Nikishin systems // Acta Sci. Math. 1995. V. 61. P. 261–284.
14. *Bustamante J.* Asymptotics for Angelesco–Nikishin Systems // J. Approx. Theory. 1996. V. 85. P. 43–68.
15. *Гончар А. А., Рахманов Е. А.* О задаче равновесия для векторных потенциалов // УМН. 1985. Т. 40. №4. С. 155–156.
16. *Гончар А. А., Рахманов Е. А.* Равновесная мера и распределение нулей экстремальных многочленов // Матем. сб. 1984. Т. 125 (167). С. 117–127.
17. *Гончар А. А., Рахманов Е. А.* Равновесные распределения и скорость рациональной аппроксимации аналитических функций // Матем. сб. 1987. Т. 134 (176). С. 306–352.

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН;
 Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Поступила в редакцию
 22.01.1996