Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. Н. Иванов, $\mathcal{H}$ -биекции групп и $\mathcal{H}_R$ -изоморфизмы групповых колец, *Матем. сб.*, 1997, том 188, номер 6, 27–46

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm227>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.130.99

26 апреля 2023 г., 13:05:08

УДК 512

Д. Н. Иванов

 $\mathcal{H}$ -биекции групп и $\mathcal{H}_R$ -изоморфизмы групповых колец

В статье вводятся и исследуются понятия, указанные в заглавии. В частности, в качестве приложения приводится доказательство гипотезы о конечности группы автоморфизмов ортогонального разложения ассоциативной алгебры для всех известных примеров ортогональных разложений.

Библиография: 5 названий.

Введение

Данная статья продолжает исследования работы [1]. В частности, доказывалась следующая теорема, представляющая обобщенный вариант гипотезы 2 из [1].

ТЕОРЕМА 1. Пусть R – кольцо без делителей нуля с единицей, G – расщепляемая группа, $\mathcal{H}$ – семейство подгрупп, расщепляющих G . Тогда если автоморфизм σ группового кольца RG переставляет подкольца RH , $H \in \mathcal{H}$, то σ переставляет R -модули Rg , $g \in G$.

Таким образом, теорема 1 подтверждает гипотезу 1 [1] о конечности группы автоморфизмов ортогонального разложения (ОР) в случае, когда это разложение определяется расщепляемой группой. Для полноты картины в заключительном параграфе приводится также доказательство гипотезы 1 [1] для ОР, связанных с ортогональными строками из групповых элементов. В результате гипотеза 1 [1] оказывается проверенной для всех известных ОР (см. также [1, теорема 1]).

Центральной темой статьи являются связанные между собой понятия $\mathcal{H}$ -биекции групп и $\mathcal{H}_R$ -изоморфизма групповых колец. Эти понятия возникли при исследовании гипотез 1 и 2 [1] и дали толчок к появлению серии задач, представляющих новую проблематику. Перейдем к основным определениям.

Пусть $\mathcal{H}$ – семейство подгрупп группы G , R – кольцо с единицей.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Изоморфизм групповых колец $\sigma: RG \rightarrow RK$ называется

- а) *базисным*, если для любого $g \in G$ найдется $k \in K$ такое, что $\sigma(Rg) = Rk$;
- б) *$\mathcal{H}_R$ -изоморфизмом*, если для любой подгруппы $H \in \mathcal{H}$ найдется подмножество $L \subseteq K$ такое, что $\sigma(RH) = RL$.

Отметим, что базисный изоморфизм имеет вид $\sigma(g) = \alpha(g) \cdot \varphi(g)$, где φ – изоморфизм групп, α – гомоморфизм G в мультипликативную группу кольца R . В частности, если $R = \mathbb{C}$ и $|G| < \infty$, то число базисных автоморфизмов алгебры $\mathbb{C}G$ равно $|\text{Aut } G| \cdot |G : G'|$, где G' – коммутант группы G .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Биекция групп $\varphi: G \rightarrow K$, удовлетворяющая для любых $x \in G$, $H \in \mathcal{H}$ условиям:

- 1) $\varphi(xH) = \varphi(x) \cdot \varphi(H)$;
- 2) $\varphi(Hx) = \varphi(H) \cdot \varphi(x)$;
- 3) $\varphi(1_G) = 1_K$ (φ сохраняет единичные элементы), называется $\mathcal{H}$ -биекцией. Биекция φ называется *левой (правой) $\mathcal{H}$ -биекцией*, если φ удовлетворяет условиям 1), 3) (2), 3)).

Отметим, что условие 3) следует из 1) или 2), если подгруппы из $\mathcal{H}$ имеют тривиальное пересечение. В самом деле, пусть $\bigcap_{H \in \mathcal{H}} H = 1_G$ и φ удовлетворяет условию 1). Тогда

$$\begin{aligned} \varphi(1_G) &= \varphi\left(\bigcap_{H \in \mathcal{H}} H\right) = \bigcap_{H \in \mathcal{H}} \varphi(H) = \bigcap_{H \in \mathcal{H}} \varphi(1_G \cdot H) = \bigcap_{H \in \mathcal{H}} \varphi(1_G) \cdot \varphi(H) \\ &= \varphi(1_G) \cdot \bigcap_{H \in \mathcal{H}} \varphi(H) = \varphi(1_G) \cdot \varphi(1_G). \end{aligned}$$

Отсюда $\varphi(1_G) = 1_K$.

Кроме того, заметим также, что для левой или правой $\mathcal{H}$ -биекции φ верно следующее: $\varphi(H)$ подгруппа в K , если $H \in \mathcal{H}$. Таким образом, (левые, правые) $\mathcal{H}$ -биекции – это отображения, сохраняющие системы (левых, правых) смежных классов по подгруппам из семейства $\mathcal{H}$.

ТЕОРЕМА 2. Следующие условия на семейство $\mathcal{H}$ подгрупп группы G эквивалентны:

- 1) каждая левая $\mathcal{H}$ -биекция есть изоморфизм;
- 2) каждая правая $\mathcal{H}$ -биекция есть изоморфизм.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) $\Rightarrow$ 2). Через τ_N обозначим инверсию группы N , т.е. $\tau_N(x) = x^{-1}$, $x \in N$. Пусть $\varphi: G \rightarrow K$ – правая $\mathcal{H}$ -биекция. Тогда $\psi = \tau_K \cdot \varphi \cdot \tau_G$ – левая $\mathcal{H}$ -биекция и, значит, изоморфизм. Отсюда следует, что $\varphi = \tau_K \cdot \psi \cdot \tau_G = \psi$ – изоморфизм. Обратная импликация аналогична. Теорема доказана.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Будем называть семейство $\mathcal{H}$ подгрупп группы G

- 1) *R -базисно жестким*, если каждый $\mathcal{H}_R$ -изоморфизм является базисным;
- 2) *сильно жестким*, если $\mathcal{H}$ удовлетворяет одному из условий теоремы 2, и *жестким*, если каждая $\mathcal{H}$ -биекция есть изоморфизм.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Группа G называется (*R -базисно, сильно*) *устойчивой*, если G допускает (*R -базисно, сильно*) жесткое семейство подгрупп.

Ясно, что если семейство $\mathcal{H}$ (*R -базисно, сильно*) жестко, то таким же будет и любое семейство, содержащее $\mathcal{H}$, в частности, семейство всех подгрупп группы G , обозначаемое через $L(G)$. Таким образом, группа G (*R -базисно, сильно*) устойчива, если $L(G)$ (*R -базисно, сильно*) жестко.

Если в определениях 3, 4 ограничиться биекциями группы G на себя и автоморфизмами кольца RG , то будем говорить о соответствующих понятиях, добавляя слова “*в изоморфном классе*”. Например, группа G устойчива в изоморфном классе, если каждая $L(G)$ -биекция $\varphi: G \rightarrow G$ есть изоморфизм.

Выделим следующие проблемы.

ПРОБЛЕМА 1. *Описать*

- 1) *устойчивые группы;*
- 2) *R -базисно устойчивые группы.*

ПРОБЛЕМА 2. *Найти критерии (R -базисной) жесткости семейства подгрупп.*

ПРОБЛЕМА 3. *Установить связь между понятиями R -базисной жесткости и жесткости.*

ПРОБЛЕМА 4. *Обозначим через $N(\mathcal{H})$ группу всех $\mathcal{H}$ -биекций группы G на себя, сохраняющих семейство $\mathcal{H}$. Через $\text{Aut}(R\mathcal{H})$ обозначим нормализатор семейства подколец $R\mathcal{H} = \{RH, H \in \mathcal{H}\}$ в группе $\text{Aut}(RG)$. Изучить группы $N(\mathcal{H})$ и $\text{Aut}(R\mathcal{H})$.*

Основными результатами статьи являются:

- по проблеме 1 – классификация устойчивых абелевых групп;
- по проблеме 2 – доказательство жесткости и R -базисной жесткости семейств расщепления для колец R без делителей нуля.

Проблема 3 имеет удовлетворительное решение в классе конечных абелевых групп, которое фактически изложено в [1]. Здесь оно переформулировано в новых терминах.

Отметим также доказательство (сильной) жесткости семейства подгрупп $\mathcal{H}$ группы G такого, что G порождается подгруппами (2-го) 3-го порядка из $\mathcal{H}$, и пример устойчивой, но не сильно устойчивой группы.

Проблема 4 не рассматривается в этой статье. Однако нужно упомянуть о большом количестве работ, посвященных проблеме 4 в одном ее частном случае, когда G – элементарная абелева p -группа, а $\mathcal{H}$ – семейство, образующее расслоение группы G (речь идет о теории плоскостей трансляций [2]).

В заключительном параграфе приводятся некоторые конкретные нерешенные вопросы.

Автор приносит благодарность А. И. Кострикину за поддержку и внимание к работе.

Соглашения и обозначения. Всюду далее будем предполагать, если не оговорено противное, что каждое семейство подгрупп содержит единичную подгруппу и саму группу. Обозначения: $X \subseteq G$, $X \leq G$, $X \trianglelefteq G$ означают, соответственно, что X – подмножество, подгруппа, нормальная подгруппа в G ; $\langle X \rangle$ – подгруппа, порожденная множеством X ; $|X|$ – мощность множества X ; $|G : X|$ – индекс подгруппы X в группе G ; $\text{ord } a$ – порядок элемента a ; 1_G – единичный элемент группы G ; $L(G)$ – семейство всех подгрупп группы G ; $\exp G$ – экспонента группы G ; $\mathbb{Z}_n$ – циклическая группа порядка n ; $\mathbb{C}$ – поле комплексных чисел; R – кольцо с единицей.

§ 1. Предварительные результаты

1.1. Общие факты. Пусть $\mathcal{H}$ – семейство подгрупп группы G . Через $\overline{\mathcal{H}}$ обозначим семейство подгрупп, структурно порожденное $\mathcal{H}$, т.е. $\overline{\mathcal{H}}$ – минимальное семейство, содержащее $\mathcal{H}$, такое, что $H_1, H_2 \in \mathcal{H}$ влечет $H_1 \cap H_2, \langle H_1, H_2 \rangle \in \mathcal{H}$.

Положим, если $H \leq G$, то $H \cap \mathcal{H} = \{H \cap X, X \in \mathcal{H}\}$, если $H \trianglelefteq G$, то $\mathcal{H}/H = \{HX/H, X \in \mathcal{H}\}$.

ТЕОРЕМА 3. 1) Каждая (левая, правая) $\mathcal{H}$ -биекция является также (левой, правой) $\overline{\mathcal{H}}$ -биекцией;

2) если $H \in \mathcal{H}$ и φ – (левая, правая) $\mathcal{H}$ -биекция, то $\varphi(H)$ – подгруппа в $\varphi(G)$;

3) если $H \in \mathcal{H}$, $H \trianglelefteq G$, φ – $\mathcal{H}$ -биекция, то $\varphi(H) \trianglelefteq \varphi(G)$;

4) если $H \in \mathcal{H}$, φ – (левая, правая) $\mathcal{H}$ -биекция, то ограничение φ на H есть (левая, правая) $(H \cap \mathcal{H})$ -биекция, кроме того, если $H \trianglelefteq G$, то факторотображение $\overline{\varphi}: G/H \rightarrow \varphi(G)/\varphi(H)$ есть (левая, правая) $(\mathcal{H}/H)$ -биекция.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Пусть φ – левая $\mathcal{H}$ -биекция, $H_1, H_2 \in \mathcal{H}$, $x \in G$. Тогда

$$\begin{aligned} \varphi(x \cdot (H_1 \cap H_2)) &= \varphi(xH_1 \cap xH_2) = \varphi(xH_1) \cap \varphi(xH_2) \\ &= \varphi(x)\varphi(H_1) \cap \varphi(x)\varphi(H_2) = \varphi(x) \cdot \varphi(H_1 \cap H_2). \end{aligned}$$

Далее, если $X \subseteq G$, то для всех $H \in \mathcal{H}$

$$\begin{aligned} \varphi(X \cdot H) &= \varphi\left(\bigcup_{x \in X} xH\right) = \bigcup_{x \in X} \varphi(xH) = \bigcup_{x \in X} \varphi(x)\varphi(H) \\ &= \left(\bigcup_{x \in X} \varphi(x)\right) \cdot \varphi(H) = \varphi(X) \cdot \varphi(H). \end{aligned}$$

Следовательно, имеем

$$\begin{aligned} \varphi(xH_{i_1} \cdots H_{i_n}) &= \varphi(xH_{i_1} \cdots H_{i_{n-1}}) \cdot \varphi(H_{i_n}) = \cdots = \varphi(x)\varphi(H_{i_1}) \cdots \varphi(H_{i_n}) \\ &= \varphi(x)\varphi(H_{i_1} \cdots H_{i_n}), \end{aligned}$$

где $i_m = 1, 2$ для $m = \overline{1, n}$. Значит, $\varphi(x\langle H_1, H_2 \rangle) = \varphi(x) \cdot \varphi(\langle H_1, H_2 \rangle)$. Таким образом, φ является левой $\overline{\mathcal{H}}$ -биекцией. Случай правой $\mathcal{H}$ -биекции аналогичен.

2) Пусть $\varphi: G \rightarrow K$ – левая $\mathcal{H}$ -биекция, $H \in \mathcal{H}$. Так как для любого $h \in H$

$$\varphi(H) = \varphi(hH) = \varphi(h) \cdot \varphi(H), \quad (1.1)$$

то $\varphi(H)$ замкнуто по умножению. Условие $\varphi(1_G) = 1_K \in \varphi(H)$ вместе с (1.1) влечет $\varphi(h)^{-1} \in \varphi(H)$, если $h \in H$. Значит, $\varphi(H)$ – подгруппа в K .

3) Равенство $xH = Hx$ влечет $\varphi(x)\varphi(H) = \varphi(xH) = \varphi(Hx) = \varphi(H)\varphi(x)$. Значит, $\varphi(H) \trianglelefteq \varphi(G)$.

4) Этот пункт вытекает из предыдущих. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 4. 1) Каждый $\mathcal{H}_R$ -изоморфизм является $\overline{\mathcal{H}}_R$ -изоморфизмом;

2) если $H \in \mathcal{H}$, $\sigma: RG \rightarrow RK$ – $\mathcal{H}_R$ -изоморфизм и $\sigma(RH) = RL$, где $L \subseteq K$, то L – подгруппа в K , ограничение σ на RH есть $(H \cap \mathcal{H})_R$ -изоморфизм, кроме того, $H \trianglelefteq G$ влечет $L \trianglelefteq K$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\sigma: RG \rightarrow RK$ — $\mathcal{H}_R$ -изоморфизм.

1) Если $H_1, H_2 \in \mathcal{H}$, $\sigma(RH_i) = RL_i$, $L_i \subseteq K$, $i = 1, 2$, то

$$\sigma(R(H_1 \cap H_2)) = \sigma(RH_1 \cap RH_2) = \sigma(RH_1) \cap \sigma(RH_2) = RL_1 \cap RL_2 = R(L_1 \cap L_2),$$

$$\sigma(R(H_1 H_2)) = \sigma(RH_1 \cdot RH_2) = RL_1 \cdot RL_2 = R(L_1 L_2).$$

Значит, σ есть $\overline{\mathcal{H}}_R$ -изоморфизм.

2) Если $H \in \mathcal{H}$, $\sigma(RH) = RL$, $L \subseteq K$, то L замкнуто по умножению, так как σ — изоморфизм. Кроме того, если $x = \sigma(y)$, где $x \in L$, $y \in RH$, то элемент y обратим в RG . Значит, $y^{-1} \in RH$ и $\sigma(y^{-1}) = x^{-1} \in L$. Таким образом, доказано, что L — подгруппа в K .

Если $H \trianglelefteq G$, то $z \cdot RH = RH \cdot z$ для любого $z \in RG$. Отсюда следует, что $u \cdot RL = RL \cdot u$ для любого $u \in RK$. Значит, $L \trianglelefteq K$.

В силу пункта 1) ограничение σ на RH является $(H \cap \mathcal{H})_R$ -изоморфизмом. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если $\sigma: RG \rightarrow RK$ — $\mathcal{H}_R$ -изоморфизм, $H \in \mathcal{H}$, $H \trianglelefteq G$ и $\sigma(RH) = RL$, где $L \subseteq K$, то неизвестно будут ли изоморфны групповые кольца $R(G/H)$ и $R(K/L)$.

ТЕОРЕМА 5. Пусть $H_i \in \mathcal{H}$, $i \in I$. Тогда

1) если $H_i \trianglelefteq G$, $\mathcal{H}/H_i$ жестко (в G/H_i) для всех $i \in I$, $\bigcap_{i \in I} H_i = 1_G$, то семейство $\mathcal{H}$ жестко (в G);

2) если для всех $i \in I$ семейства $H_i \cap \mathcal{H}$ R -базисно жестки (в H_i), группа G порождается подгруппами H_i , то семейство $\mathcal{H}$ R -базисно жестко (в G).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Пусть $\varphi: G \rightarrow K$ — $\mathcal{H}$ -биекция. Тогда по теореме 3 факторотображение $\overline{\varphi}_{H_i}: G/H_i \rightarrow K/\varphi(H_i)$ является $\mathcal{H}/H_i$ -биекцией. Значит, по условию $\overline{\varphi}_{H_i}$ — изоморфизм. Следовательно, для всех $x, y \in G$: $\varphi(xy) \cdot \varphi(y)^{-1} \cdot \varphi(x)^{-1} \in \varphi(H_i)$. Так как $\bigcap_{i \in I} H_i = 1_G$, то $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$.

Пункт 2) вытекает из теоремы 4 и из того, что условие $|\text{supp}(x)| = |\text{supp}(y)| = 1$ влечет $|\text{supp}(xy)| = 1$, где x, y — элементы произвольного группового кольца. Теорема доказана.

Пусть $\mathcal{H}_i$ — семейство подгрупп группы G_i , $i \in I$. Определим *прямую сумму* $\bigoplus_{i \in I} \mathcal{H}_i$ и *прямое произведение* $\prod_{i \in I} \mathcal{H}_i$:

$$\bigoplus_{i \in I} \mathcal{H}_i = \left\{ \bigoplus_{i \in I} H_i \mid H_i \in \mathcal{H}_i \right\}, \quad \prod_{i \in I} \mathcal{H}_i = \left\{ \prod_{i \in I} H_i \mid H_i \in \mathcal{H}_i \right\}.$$

Тогда $\bigoplus_{i \in I} \mathcal{H}_i$ и $\prod_{i \in I} \mathcal{H}_i$ — семейства подгрупп, соответственно, в $\bigoplus_{i \in I} G_i$ и в $\prod_{i \in I} G_i$.

ТЕОРЕМА 6. 1) Если все $\mathcal{H}_i$, $i \in I$, жестки, то $\bigoplus_{i \in I} \mathcal{H}_i$ и $\prod_{i \in I} \mathcal{H}_i$ жестки;

2) семейство $\bigoplus_{i \in I} \mathcal{H}_i$ R -базисно жестко тогда и только тогда, когда R -базисно жестко каждое семейство $\mathcal{H}_i$, $i \in I$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $\bigoplus_{i \in I} \mathcal{H}_i = \mathcal{H}$, $\prod_{i \in I} \mathcal{H}_i = \mathcal{H}'$.

1) Рассмотрим канонические проекции $\pi_j: \bigoplus_{i \in I} G_i \rightarrow G_j$ и $\rho_j: \prod_{i \in I} G_i \rightarrow G_j$. Тогда $\text{Кер } \pi_j \in \mathcal{H}$ и $\text{Кер } \rho_j \in \mathcal{H}'$, причем семейства $\mathcal{H} / \text{Кер } \pi_j$ и $\mathcal{H}' / \text{Кер } \rho_j$ изоморфны семейству $\mathcal{H}_j$ и, следовательно, жестки. Кроме того, пересечения $\bigcap_{j \in I} \text{Кер } \pi_j$ и $\bigcap_{j \in I} \text{Кер } \rho_j$ тривиальны. Применение теперь теоремы 5. 1) дает требуемый результат.

2) $\Leftarrow$. Отождествляя G_i с ее каноническим образом в $\bigoplus_{i \in I} G_i$, получаем, что $G_i \cap \mathcal{H} = \mathcal{H}_i$. Значит, семейство $G_i \cap \mathcal{H}$ R -базисно жестко (в G_i). Так как группы G_i порождают $\bigoplus_{i \in I} G_i$, то по теореме 5. 2) семейство $\mathcal{H}$ R -базисно жестко (в $\bigoplus_{i \in I} G_i$).

$\Rightarrow$. Пусть семейство $\mathcal{H}$ не является R -базисно жестким и $\tau_i: RG_i \rightarrow RK$ – не базисный $(\mathcal{H}_i)_R$ -изоморфизм групповых колец. Положим $G^{(i)} = \bigoplus_{j \in I \setminus i} G_j$, тогда $G = G^{(i)} \oplus G_i$. Рассмотрим изоморфизм $\tau: RG = R(G^{(i)} \oplus G_i) \rightarrow R(G^{(i)} \oplus K)$, определенный по правилу $\tau(x, y) = (x, \tau_i(y))$, где $x \in G^{(i)}$, $y \in G_i$. Ясно, что τ – не базисный $\mathcal{H}_R$ -изоморфизм. Теорема доказана.

Из теорем 5 и 6 немедленно вытекает

СЛЕДСТВИЕ 1. 1) Пусть $\{H_i, i \in I\}$ – семейство нормальных подгрупп группы G такое, что все группы G/H_i , $i \in I$, устойчивы и $\bigcap_{i \in I} H_i = 1_G$. Тогда группа G устойчива. В частности, прямые суммы и прямые произведения устойчивых групп устойчивы.

2) Группа, которая порождается R -базисно устойчивыми группами, R -базисно устойчива. В частности, прямая сумма R -базисно устойчивых групп R -базисно устойчива.

ЗАМЕЧАНИЕ. Неизвестно, обязано ли быть прямое произведение R -базисно устойчивых групп R -базисно устойчивым.

Если прямая сумма групп устойчива, то не обязательно каждое слагаемое будет устойчивым. В качестве примера можно привести прямую сумму групп простого порядка $p > 3$ (см. классификацию устойчивых абелевых групп). Назовем прямую сумму $\bigoplus_{i \in I} G_i$ *вполне разложимой*, если каждая ее подгруппа разлагается в прямую сумму своих проекций. Будем отождествлять слагаемые G_i с их каноническими образами в $\bigoplus_{i \in I} G_i$. Легко видеть, что прямая сумма $G = \bigoplus_{i \in I} G_i$ вполне разложима тогда и только тогда, когда слагаемые G_i являются p_i -подгруппами, причем $p_i \neq p_j$ при $i \neq j$.

ТЕОРЕМА 7. Пусть $\mathcal{H}$ – семейство подгрупп вполне разложимой прямой суммы $G = \bigoplus_{i \in I} G_i$, причем $G_i \in \mathcal{H}$ для всех $i \in I$. Положим $\mathcal{H}_i = G_i \cap \mathcal{H}$. Тогда

1) $\mathcal{H} = \bigoplus_{i \in I} \mathcal{H}_i$;

2) семейство $\mathcal{H}$ жестко (в G) тогда и только тогда, когда жестко каждое семейство $\mathcal{H}_i$ (в G_i).

В частности, вполне разложимая прямая сумма групп устойчива тогда и только тогда, когда устойчиво каждое ее слагаемое.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Этот пункт сразу следует из определений.

2) $\Leftarrow$. Следует из п. 1.1 и теоремы 6.

$\Rightarrow$. Пусть семейство $\mathcal{H}_i$ не жестко и $\varphi_i: G_i \rightarrow K$ — $\mathcal{H}_i$ -биекция, не являющаяся изоморфизмом. Положим $G^{(i)} = \bigoplus_{j \in I \setminus i} G_j$, тогда $G = G^{(i)} \oplus G_i$. Определим биекцию $\varphi: G = G^{(i)} \oplus G_i \rightarrow G^{(i)} \oplus K$ по правилу $\varphi(xy) = x\varphi_i(y)$, где $x \in G^{(i)}$, $y \in G_i$. Пусть $H \leq G$, $x \in G$. Тогда $H = H^{(i)}H_i$, $x = x^{(i)} \cdot x_i$, где $H^{(i)} \leq G^{(i)}$, $H_i \leq G_i$, $x^{(i)} \in G^{(i)}$, $x_i \in G_i$. Имеем

$$\begin{aligned}\varphi(xH) &= \varphi(x^{(i)}H^{(i)} \cdot x_iH_i) = x^{(i)}H^{(i)} \cdot \varphi_i(x_iH_i) = x^{(i)}H^{(i)}\varphi_i(x_i)\varphi_i(H_i) \\ &= (x^{(i)}\varphi_i(x_i)) \cdot H^{(i)}\varphi_i(H_i) = \varphi(x) \cdot \varphi(H).\end{aligned}$$

Таким образом, φ — $\mathcal{H}$ -биекция, не являющаяся изоморфизмом. Значит, семейство $\mathcal{H}$ не жестко. Теорема доказана.

1.2. Жесткость и $\mathbb{C}$ -базисная жесткость в классе конечных абелевых групп. Тесная связь между понятиями $\mathcal{H}$ -биекции и $\mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ -изоморфизма проявляется в случае конечных абелевых групп. Пусть $\mathcal{H}$ — семейство подгрупп конечной абелевой группы A , $\text{Ch } A$ — группа одномерных комплексных характеров A , $H \leq A$. Через H^* обозначим подгруппу характеров в $\text{Ch } A$, ограничение которых на H равно единичному характеру. Положим $\mathcal{H}^* = \{H^* \mid H \in \mathcal{H}\}$ — семейство подгрупп в $\text{Ch } A$.

Индексируем примитивные идемпотенты групповой алгебры $\mathbb{C}A$ элементами группы характеров $\text{Ch } A$:

$$e_\chi = \frac{1}{|A|} \cdot \sum_{a \in A} \chi(a) \cdot a.$$

Пусть $\sigma: \mathbb{C}A \rightarrow \mathbb{C}B$ — изоморфизм групповых алгебр. Тогда B — конечная абелева группа, σ индуцирует отображение $\sigma^*: \text{Ch } A \rightarrow \text{Ch } B$ по формуле $\sigma(e_\chi) = f_{\sigma^*(\chi)}$, где $\{f_\tau, \tau \in \text{Ch } B\}$ — множество примитивных идемпотентов алгебры $\mathbb{C}B$.

Образование $t_a: x \mapsto xa$, где $x, a \in A$, будем называть *сдвигом* группы A на элемент a .

ТЕОРЕМА 8. 1) *Изоморфизм групповых алгебр $\sigma: \mathbb{C}A \rightarrow \mathbb{C}B$ является базисным тогда и только тогда, когда σ^* представляется в виде композиции сдвига и изоморфизма групп.*

2) *Изоморфизм σ является $\mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ -изоморфизмом тогда и только тогда, когда σ^* представляется в виде композиции сдвига и $\mathcal{H}^*$ -биекции.*

3) *Семейство $\mathcal{H}$ $\mathbb{C}$ -базисно жестко (в изоморфном классе) тогда и только тогда, когда семейство $\mathcal{H}^*$ жестко (в изоморфном классе).*

4) *Группа A $\mathbb{C}$ -базисно устойчива (в изоморфном классе) тогда и только тогда, когда A устойчива (в изоморфном классе).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пункт 1) есть переформулировка леммы 5 [1]; п. 2) вытекает из леммы 4 [1]; п. 3) является следствием п.п. 1) и 2). Для доказательства п. 4) достаточно заметить, что группы A и $\text{Ch } A$ изоморфны, и применить п. 3). Теорема доказана.

1.3. Две технические леммы. Следующая лемма будет часто использоваться при исследовании $\mathcal{H}$ -биекций.

ЛЕММА 1. 1) Пусть $H_1, H_2 \leq G$, $h_1 \in H_1$, $h_2 \in H_2$. Тогда

$$|H_1 h_2 \cap h_1 H_2| = |H_1 \cap H_2|.$$

2) Пусть φ – $\mathcal{H}$ -биекция группы G , $H_1, H_2 \in \mathcal{H}$, $H_1 \cap H_2 = 1_G$. Тогда для всех $h_1 \in H_1$, $h_2 \in H_2$

$$\varphi(h_1 h_2) = \varphi(h_1) \cdot \varphi(h_2).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Справедлива следующая цепочка равенств:

$$|H_1 h_2 \cap h_1 H_2| = |h_1 H_1 h_2 \cap h_1 H_2 h_2| = |h_1 (H_1 \cap H_2) h_2| = |H_1 \cap H_2|.$$

2) Так как $|H_1 \cap H_2| = 1$, то $|\varphi(H_1) \cap \varphi(H_2)| = 1$, и в силу п. 1) имеем

$$h_1 h_2 = H_1 h_2 \cap h_1 H_2, \quad \varphi(h_1) \varphi(h_2) = \varphi(H_1) \varphi(h_2) \cap \varphi(h_1) \varphi(H_2).$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} \varphi(h_1 h_2) &= \varphi(H_1 h_2 \cap h_1 H_2) = \varphi(H_1 h_2) \cap \varphi(h_1 H_2) \\ &= \varphi(H_1) \varphi(h_2) \cap \varphi(h_1) \varphi(H_2) = \varphi(h_1) \varphi(h_2). \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Пусть RG – групповое кольцо, $x = \sum \alpha_g g \in RG$. Положим $\text{supp}(x) = \{g \in G \mid \alpha_g \neq 0\}$ – носитель элемента x .

ЛЕММА 2. Пусть $H_1, H_2 \leq G$, $H_1 \cap H_2 = 1_G$, R – кольцо без делителей нуля. Тогда для всех $x_1 \in RH_1$, $x_2 \in RH_2$

$$|\text{supp}(x_1 x_2)| = |\text{supp}(x_1)| \cdot |\text{supp}(x_2)|.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $H_1 \cap H_2 = 1_G$, то

$$|\text{supp}(x_1) \cdot \text{supp}(x_2)| = |\text{supp}(x_1)| \cdot |\text{supp}(x_2)|.$$

Отсюда и в силу того, что R – кольцо без делителей нуля, получаем требуемое.

Лемма доказана.

1.4. Бесконечная циклическая группа не является сильно устойчивой. Пусть $G = \langle a \rangle_\infty$ – бесконечная циклическая группа, $K = \langle b, \alpha \mid \alpha^2 = 1, \alpha b \alpha = b^{-1} \rangle$. Положим $\varphi(a^{2n}) = b^n$, $\varphi(a^{2n+1}) = b^n \alpha$. Ясно, что φ – биекция из G в K .

Имеем

$$\begin{aligned} \varphi(\langle a^{2n} \rangle) &= \langle b^n \rangle, \\ \varphi(\langle a^{2n+1} \rangle) &= \varphi\{a^{(2n+1)(2m+1)}, a^{(2n+1)2m} \mid m \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{b^{(2n+1)m+n} \cdot \alpha, b^{(2n+1)m} \mid m \in \mathbb{Z}\} \\ &= \langle b^n \alpha, b^{2n+1} \rangle = \langle \alpha b^{n+1}, b^{2n+1} \rangle. \end{aligned}$$

Пусть $x \in G$, $H < G$. Рассмотрим возможные 4 случая:

1) $x = a^{2m}$, $H = \langle a^{2n} \rangle$, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$,

$$\varphi(xH) = \varphi\{a^{2m+2nk} \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{b^{m+nk} \mid k \in \mathbb{Z}\} = b^m \cdot \langle b^n \rangle = \varphi(x)\varphi(H);$$

2) $x = a^{2m+1}$, $H = \langle a^{2n} \rangle$, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \varphi(xH) &= \varphi\{a^{2m+1+2nk} \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{b^{m+nk} \cdot \alpha \mid k \in \mathbb{Z}\} \\ &= \langle b^n \rangle \cdot b^m \alpha = b^m \alpha \cdot \langle b^n \rangle = \varphi(x)\varphi(H); \end{aligned}$$

3) $x = a^{2m}$, $H = \langle a^{2n+1} \rangle$, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \varphi(xH) &= \varphi\{a^{2m+(2n+1)(2k+1)}, a^{2m+(2n+1)2k} \mid k \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{b^{m+(2n+1)k+n} \cdot \alpha, b^{m+(2n+1)k} \mid k \in \mathbb{Z}\} \\ &= b^m \cdot \langle b^n \alpha, b^{2n+1} \rangle = \varphi(x)\varphi(H); \end{aligned}$$

4) $x = a^{2m+1}$, $H = \langle a^{2n+1} \rangle$, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \varphi(xH) &= \varphi\{a^{2m+1+(2n+1)(2k+1)}, a^{2m+1+(2n+1)2k} \mid k \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{b^{(2n+1)k+m+n+1}, b^{(2n+1)k+m} \cdot \alpha \mid k \in \mathbb{Z}\} \\ &= b^m \alpha \cdot \{\alpha b^{(2n+1)k+n+1}, b^{-(2n+1)k} \mid k \in \mathbb{Z}\} \\ &= b^m \alpha \cdot \langle \alpha b^{n+1}, b^{2n+1} \rangle = \varphi(x)\varphi(H). \end{aligned}$$

Таким образом, во всех случаях $\varphi(xH) = \varphi(x)\varphi(H)$. Значит, φ — левая $L(G)$ -биекция, не являющаяся изоморфизмом. Кроме этого заметим, что φ не является правой $L(G)$ -биекцией, так как бесконечная циклическая группа устойчива (это будет установлено в § 3).

§ 2. Семейства расщепления и другие жесткие семейства подгрупп

2.1. Пустое семейство подгрупп. Зададимся вопросом: в каких группах пустое семейство подгрупп является жестким или R -базисно жестким? Заметим, что жесткость пустого семейства равносильна его сильной жесткости. Если пустое семейство подгрупп группы G (R -базисно) жестко, то будем называть группу G тривиально (R -базисно) устойчивой.

ТЕОРЕМА 9. *Группа G тривиально устойчива (в изоморфном классе) тогда и только тогда, когда G изоморфна $\mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_3$, $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. $\Leftarrow$. Ясно, что группы $\mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_3$ тривиально устойчивы, а группа $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ тривиально устойчива в изоморфном классе.

$\Rightarrow$. Пусть группа G тривиально устойчива в изоморфном классе и $|G| > 3$. Так как транспозиция φ любых двух неединичных элементов $a, b \in G$ является изоморфизмом, то для $c \in G \setminus \{1_G, a, b\}$ имеем $\varphi(ac) = \varphi(a)\varphi(c) = bc$. Так как $ac \neq bc$, то ac не является неподвижным относительно φ элементом. Поэтому ac равно a или b . Значит, $ac = b$ и $|G| = 4$, т.е. G изоморфна $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. Осталось заметить, что в силу неизоморфности групп $\mathbb{Z}_4$ и $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ последняя не может быть тривиально устойчивой. Теорема доказана.

Вопрос о тривиальной R -базисной устойчивости группы G очень обширен. Например, он включает в себя вопрос о тривиальности обратимых элементов кольца RG (обратимый элемент кольца RG тривиален, если он имеет вид rg , где $r \in R$, $g \in G$). Последней теме посвящено много работ. Пионером в этой области является Г. Хигман. Ограничимся здесь приведением двух его результатов, взятых из обзоров [3], [4].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1 [3]. *Если G – периодическая группа, то обратимые элементы кольца $\mathbb{Z}G$ тривиальны тогда и только тогда, когда G либо абелева группа и ее показатель делит 4 или 6, либо гамильтонова 2-группа.*

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2 [4]. *Если каждая неединичная конечно-порожденная подгруппа группы G обладает бесконечной циклической факторгруппой, то обратимые элементы кольца RG , где R – поле, тривиальны.*

Следующая теорема очень похожа на теорему 9 и показывает, что в классе конечных групп свойства тривиальной устойчивости и тривиальной $\mathbb{C}$ -базисной устойчивости совпадают.

ТЕОРЕМА 10. *Конечная группа G тривиально $\mathbb{C}$ -базисно устойчива (в изоморфном классе) тогда и только тогда, когда G изоморфна $\mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_3$, $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует в основном доказательству теоремы 8 [1] (формулировка которой неточна). Ясно, что группы $\mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_3$ тривиально $\mathbb{C}$ -базисно устойчивы, а группа $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ тривиально $\mathbb{C}$ -базисно устойчива в изоморфном классе.

Пусть группа G тривиально $\mathbb{C}$ -базисно устойчива в изоморфном классе. Тогда число базисных автоморфизмов алгебры $\mathbb{C}G$, равное $|\text{Aut } G| \cdot |G : G'|$ (G' – коммутант группы G), совпадает с $|\text{Aut } \mathbb{C}G| = n!$, где $n = |G|$. Значит, группа G абелева (иначе группа $\text{Aut } \mathbb{C}G$ бесконечна) и $|\text{Aut } G| = (n - 1)!$, т.е. $\text{Aut } G$ действует на $G \setminus \{1_G\}$ $(n - 1)$ -транзитивно. Отсюда следует, что G изоморфна одной из групп $\mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_3$, $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. Осталось заметить, что группа $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ не является тривиально $\mathbb{C}$ -базисно устойчивой в силу изоморфности алгебр $\mathbb{C}(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)$ и $\mathbb{C}\mathbb{Z}_4$. Теорема доказана.

2.2. Семейства расщепления. Семейством расщепления называется семейство собственных подгрупп, имеющих попарно тривиальное пересечение, и объединение которых совпадает со всей группой.

ТЕОРЕМА 11. *Семейство расщепления жестко.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathcal{H}$ – семейство расщепления группы G , φ – $\mathcal{H}$ -биекция, x, y – неединичные элементы в G . Возможны два случая.

Случай 1. Элементы x и y лежат в разных подгруппах X и Y семейства $\mathcal{H}$. Так как $X \cap Y = 1_G$, то в силу леммы 1 $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$.

Случай 2. Элементы x и y лежат в одной подгруппе $H \in \mathcal{H}$. Пусть $Z \in \mathcal{H}$ и $Z \neq H$. Рассмотрим в Z неединичный элемент z . Так как элементы в следующих парах z и xy , zx и y , z и x лежат в разных подгруппах семейства $\mathcal{H}$, то в силу леммы 1

$$\varphi(z)\varphi(xy) = \varphi(zxy) = \varphi(zx)\varphi(y) = \varphi(z)\varphi(x)\varphi(y).$$

Отсюда, $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$. Таким образом, φ – изоморфизм, и, значит, семейство $\mathcal{H}$ жестко. Теорема доказана.

Сформулированная во введении теорема 1 является частным случаем следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 12. Семейство расщепления R -базисно жестко, если R – кольцо без делителей нуля.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathcal{H}$ – семейство расщепления группы G , σ – $\mathcal{H}_R$ -изоморфизм. Рассмотрим неединичный элемент $g_0 \in G$, для которого $|\text{supp}(\sigma(g_0))|$ минимален. Пусть $g_0 \in H \in \mathcal{H}$ и $g \in G \setminus H$. Тогда элементы g_0g^{-1} и g лежат в разных подгруппах семейства $\mathcal{H}$. Значит, по лемме 2

$$|\text{supp}(\sigma(g_0))| = |\text{supp}(\sigma(g_0g^{-1}))| \cdot |\text{supp}(\sigma(g))|. \quad (2.1)$$

В силу минимальности $|\text{supp}(\sigma(g_0))|$ получаем, что порядки всех трех носителей в (2.1) равны 1. В частности, $|\text{supp}(\sigma(g))| = 1$ для любого $g \in G \setminus H$. Так как равенство $|\text{supp}(x)| = |\text{supp}(y)| = 1$ влечет $|\text{supp}(xy)| = 1$, и элементы из $G \setminus H$ порождают группу G , то $|\text{supp}(\sigma(g))| = 1$ для всех $g \in G$, т.е. σ – базисный изоморфизм. Теорема доказана.

2.3. Другие жесткие семейства.

ТЕОРЕМА 13. Если группа G порождается подгруппами семейства $\mathcal{H}$, изоморфными

- 1) $\mathbb{Z}_2$, то $\mathcal{H}$ сильно жестко;
- 2) $\mathbb{Z}_3$, то $\mathcal{H}$ жестко.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Пусть φ – левая $\mathcal{H}$ -биекция, $\langle a \rangle \in \mathcal{H}$, $\text{ord } a = 2$, $x \in G$. Тогда $\varphi(x \cdot \langle a \rangle) = \varphi\{x, xa\} = \{\varphi(x), \varphi(xa)\}$. С другой стороны, $\varphi(x \cdot \langle a \rangle) = \varphi(x) \cdot \varphi(\langle a \rangle) = \varphi(x) \cdot \{1_G, \varphi(a)\} = \{\varphi(x), \varphi(x)\varphi(a)\}$. Значит, $\varphi(xa) = \varphi(x)\varphi(a)$.

Пусть теперь $y \in G$. Разложим элемент y в произведение инволюций, порождающих подгруппы 2-го порядка, входящие в $\mathcal{H}$, $y = a_1 \cdots a_s$. Имеем

$$\begin{aligned} \varphi(xy) &= \varphi(xa_1 \cdots a_s) = \varphi(xa_1 \cdots a_{s-1})\varphi(a_s) = \cdots = \varphi(x)\varphi(a_1) \cdots \varphi(a_s) \\ &= \varphi(x)\varphi(a_1 \cdots a_s) = \varphi(x)\varphi(y). \end{aligned}$$

Значит, φ – изоморфизм и семейство $\mathcal{H}$ сильно жестко.

2) Пусть φ — $\mathcal{H}$ -биекция, $\langle a \rangle \in \mathcal{H}$, $\text{ord } a = 3$, $x \in G$. Тогда

$$\varphi(x \cdot \langle a \rangle) = \varphi\{x, xa, xa^{-1}\} = \{\varphi(x), \varphi(xa), \varphi(xa^{-1})\}.$$

С другой стороны,

$$\varphi(x \cdot \langle a \rangle) = \varphi(x) \cdot \varphi(\langle a \rangle) = \{\varphi(x), \varphi(x)\varphi(a), \varphi(x)\varphi(a^{-1})\}.$$

Так как $\text{ord } a = 3$, то $\varphi(a^{-1}) = \varphi(a)^{-1}$. Отсюда, $\varphi(xa) = \varphi(x)\varphi(a)^\varepsilon$, $\varepsilon = \pm 1$. Аналогично получаем $\varphi(ax) = \varphi(a)^\delta \varphi(x)$, $\delta = \pm 1$.

Докажем индукцией по n , что

$$\varphi(a_1 \cdots a_n) = \varphi(a_1) \cdots \varphi(a_n), \quad (*)$$

где $\langle a_i \rangle \in \mathcal{H}$, $\text{ord } a_i = 3$, $i = \overline{1, n}$.

База индукции: $n = 2$. Если $\langle a_1 \rangle = \langle a_2 \rangle$, то $(*)$ выполняется в силу того, что ограничение φ на $\langle a_1 \rangle$ является изоморфизмом. Если $\langle a_1 \rangle \cap \langle a_2 \rangle = 1_G$, то $(*)$ выполняется в силу леммы 1.

Пусть $n > 2$. Положим $b = a_2 \cdots a_{n-1}$. Тогда по предположению индукции $\varphi(a_1 b) = \varphi(a_1)\varphi(b)$, $\varphi(ba_n) = \varphi(b)\varphi(a_n)$. В результате имеем

$$\begin{aligned} \varphi(a_1 ba_n) &= \varphi(a_1 b)\varphi(a_n)^{\varepsilon_1} = \varphi(a_1)\varphi(b)\varphi(a_n)^{\varepsilon_1}, \\ \varphi(a_1 ba_n) &= \varphi(a_1)^{\varepsilon_2}\varphi(ba_n) = \varphi(a_1)^{\varepsilon_2}\varphi(b)\varphi(a_n), \end{aligned}$$

где $\varepsilon_1, \varepsilon_2 = \pm 1$. Ясно, что $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$. Пусть $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = -1$. Тогда

$$\begin{aligned} \varphi(a_1)\varphi(b)\varphi(a_n)^{-1} &= \varphi(a_1)^{-1}\varphi(b)\varphi(a_n) \Rightarrow \varphi(a_1)^2\varphi(b) = \varphi(b)\varphi(a_n)^2 \\ &\Rightarrow \varphi(a_1^{-1})\varphi(b) = \varphi(b)\varphi(a_n^{-1}) \Rightarrow \varphi(a_1^{-1}b) = \varphi(ba_n^{-1}) \Rightarrow a_1^{-1}b = ba_n^{-1} \\ &\Rightarrow a_n = b^{-1}a_1b \Rightarrow \varphi(a_1 ba_n) = \varphi(a_1 b b^{-1}a_1 b) = \varphi(a_1^{-1}b) = \varphi(a_1)^{-1}\varphi(b). \end{aligned}$$

Но $\varphi(a_1 ba_n) = \varphi(a_1)^{-1}\varphi(b)\varphi(a_n)$, так как по предположению $\varepsilon_2 = -1$. Значит, $a_n = 1_G$. Противоречие (так как $\text{ord } a_n = 3$) доказывает, что $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$. Таким образом,

$$\varphi(a_1 \cdots a_n) = \varphi(a_1 ba_n) = \varphi(a_1)\varphi(b)\varphi(a_n) = \varphi(a_1)\varphi(a_2) \cdots \varphi(a_{n-1})\varphi(a_n)$$

и по индукции заключаем, что $(*)$ выполняется для всех n .

Пусть теперь $x, y \in G$. Разложим элементы x и y в произведение элементов 3-го порядка, порождающих подгруппы, входящие в $\mathcal{H}$, $x = a_1 \cdots a_s$, $y = b_1 \cdots b_t$. В итоге имеем

$$\begin{aligned} \varphi(xy) &= \varphi(a_1 \cdots a_s b_1 \cdots b_t) = \varphi(a_1) \cdots \varphi(a_s)\varphi(b_1) \cdots \varphi(b_t) \\ &= \varphi(a_1 \cdots a_s)\varphi(b_1 \cdots b_t) = \varphi(x)\varphi(y). \end{aligned}$$

Таким образом, φ — изоморфизм и семейство $\mathcal{H}$ жестко. Теорема доказана.

Так как конечная неабелева простая группа порождается инволюциями, то справедлива

ТЕОРЕМА 14. *Конечные неабелевы простые группы сильно устойчивы.*

§ 3. Устойчивые абелевы группы

ЛЕММА 3. *Бесконечная циклическая группа устойчива.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $G = \langle a \rangle_\infty$ – бесконечная циклическая группа и $\varphi: G \rightarrow K - L(G)$ -биекция. Положим $\varphi(\langle a^n \rangle) = K_n$ и $\varphi(a^n) = b_n, n \in \mathbb{Z}$.

Шаг 1. Покажем, что K – абелева группа без кручения. Пусть $x \in K, \text{ord } x = n$, и S – бесконечное множество различных простых чисел, не делящих n . Так как $\bigcap_{p \in S} \langle a^p \rangle = 1_G$, то $\bigcap_{p \in S} K_p = 1_K$. В силу теоремы 3. 3) $K_p \triangleleft K$. Порядок факторгруппы K/K_p равен простому числу p , не делящему n . Значит, K/K_p – абелева группа, и $x^n = 1_K$ влечет $x \in K_p$. Таким образом, для всех $y, z \in K, p \in S$ справедливо $x \in K_p$ и $y^{-1}z^{-1}yz \in K_p$. Значит, $x = y^{-1}z^{-1}yz = 1_K$.

Шаг 2. Покажем, что $\varphi(x^{-1}) = \varphi(x)^{-1}$ для всех $x \in G$. Имеем

$$a^{\pm n} = \langle a^n \rangle \setminus \left(\bigcup_{i > n} \langle a^i \rangle \right) \implies b_{\pm n} = \varphi(a^{\pm n}) = K_n \setminus \left(\bigcup_{i > n} K_i \right).$$

Так как множество $K_n \setminus \left(\bigcup_{i > n} K_i \right)$ замкнуто относительно операции взятия обратного элемента (инверсии), то $b_n^{-1} = b_{\pm n}$. Но в силу шага 1 группа K не имеет кручения, поэтому $b_n^{-1} \neq b_n$. Значит, $b_n^{-1} = b_{-n}$ и $\varphi(a^{-n}) = \varphi(a^n)^{-1}$. В силу произвольности $n \in \mathbb{Z}$ получаем $\varphi(x^{-1}) = \varphi(x)^{-1}$ для всех $x \in G$.

Шаг 3. Покажем, что $b_n b_m \in K_{n+m}$. В самом деле, так как a^n и a^{-m} лежат в одном смежном классе группы G по подгруппе $\langle a^{n+m} \rangle$, то b_n и b_{-m} лежат в одном смежном классе группы K по подгруппе K_{n+m} . Учитывая доказанное в шаге 2, получаем, что $K_{n+m} \ni b_n b_{-m}^{-1} = b_n b_m$.

Шаг 4. Так как $K_l = \varphi(\langle a^l \rangle) = \varphi\{a^{il} \mid l \in \mathbb{Z}\} = \{b_{il} \mid l \in \mathbb{Z}\}$, то в силу шага 3 $b_n b_m = b_{\alpha(n, m)(n+m)}$, где $\alpha(n, m) \in \mathbb{Z}$. Положим $n \circ m = \alpha(n, m)(n+m)$. Тогда в силу шага 1 $(\mathbb{Z}, \circ, 0)$ – абелева группа. Без ограничения общности можно считать $\alpha(n, -n) = 1$ для всех $n \in \mathbb{Z}$. Заметим теперь, что $\alpha(n, m) \neq 0$ при любых $n, m \in \mathbb{Z}$, так как $b_n b_m = b_0 = 1_K$ влечет $n = -m$. Ясно также, что $\alpha(0, n) = \alpha(n, 0) = 1$. Наша цель доказать, что $\alpha(n, m) = 1$ или, что то же самое, $n \circ m = n + m$ для всех $n, m \in \mathbb{Z}$. Это и будет означать, что φ – изоморфизм.

В силу коммутативности и ассоциативности операции $\circ$ имеем тождество

$$\begin{aligned} m &= (n \circ (-n)) \circ m = (n \circ m) \circ (-n) \\ &= \alpha(\alpha(n, m)(n+m), -n) \cdot (\alpha(n, m)(n+m) - n). \end{aligned} \quad (3.1)$$

Шаг 5. Покажем, что $\alpha(1, k) = 1$ для каждого $k \in \mathbb{Z}$. Положим в тождестве (3.1) $m = kn$

$$kn = \beta \cdot (\alpha(n, kn)(n+kn) - n) = \beta \cdot (\alpha(n, kn)(1+k) - 1) \cdot n, \quad (3.2)$$

где $\beta = \alpha(\alpha(n, kn)(n+kn), -n) \in \mathbb{Z}, \beta \neq 0$. При $n \neq 0$ и $k > 0$ из (3.2) следует

$$\begin{aligned} k &= \beta \cdot (\alpha(n, kn)(1+k) - 1) \geq |\alpha(n, kn)(1+k) - 1| \\ &\geq |\alpha(n, kn)| \cdot (1+k) - 1 \geq 1+k-1 = k, \end{aligned} \quad (3.3)$$

где последнее неравенство вытекает из того, что $\alpha(n, kn) \neq 0$. Если $\alpha(n, kn) < 0$, то $|\alpha(n, kn)(1+k) - 1| \geq 1+k+1 = k+2$. Поэтому из (3.3) следует, что $|\alpha(n, kn)| = 1$, и, значит, $\alpha(n, kn) = 1$.

Теперь из (3.1) и (3.2) имеем

$$1 = \beta = \alpha(n + kn, -n). \quad (3.4)$$

Полагая в (3.4) $n_1 = -n$, получим $\alpha(-(1+k)n_1, n_1) = 1$. Таким образом, учитывая равенства $\alpha(n, 0) = \alpha(n, -n) = 1$, выводим, что $\alpha(n, kn) = 1$ при всех $n, k \in \mathbb{Z}$, и, в частности, $\alpha(1, k) = 1$ для каждого $k \in \mathbb{Z}$.

Шаг 6. В силу доказанного на предыдущем шаге для любых $n, m \in \mathbb{Z}$ имеем

$$\begin{aligned} (1 \circ (n-1)) \circ m &= n \circ m = \alpha(n, m)(n+m), \\ (1 \circ (n-1)) \circ m &= 1 \circ ((n-1) \circ m) = 1 + \alpha(n-1, m)(n-1+m). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что равенства $\alpha(n, m) = 1$ и $\alpha(n-1, m) = 1$ равносильны. Так как $\alpha(0, m) = 1$, то $\alpha(n, m) = 1$ для всех $n, m \in \mathbb{Z}$. Это значит, что φ – изоморфизм и группа G устойчива. Лемма доказана.

ЛЕММА 4. Пусть G – абелева группа и $\varphi - L(G)$ -биекция. Если ограничение φ на каждую циклическую подгруппу в G является изоморфизмом, то φ – изоморфизм.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если H – конечно-порожденная подгруппа в G , то H есть прямая сумма циклических групп: $H = \langle a_1 \rangle \times \cdots \times \langle a_n \rangle$. В силу леммы 1

$$\varphi(a_i)\varphi(a_j) = \varphi(a_i a_j) = \varphi(a_j a_i) = \varphi(a_j)\varphi(a_i).$$

Поэтому если $x, y \in H$ и $x = a_1^{\alpha_1} \cdots a_n^{\alpha_n}$, $y = a_1^{\beta_1} \cdots a_n^{\beta_n}$, то

$$\begin{aligned} \varphi(xy) &= \varphi(a_1^{\alpha_1+\beta_1} \cdots a_n^{\alpha_n+\beta_n}) = \varphi(a_1)^{\alpha_1+\beta_1} \cdots \varphi(a_n)^{\alpha_n+\beta_n} \\ &= \varphi(a_1)^{\alpha_1} \cdots \varphi(a_n)^{\alpha_n} \cdot \varphi(a_1)^{\beta_1} \cdots \varphi(a_n)^{\beta_n} = \varphi(x)\varphi(y). \end{aligned}$$

Таким образом, ограничение φ на H является изоморфизмом. В частности, ограничение φ на подгруппу $\langle x, y \rangle$ есть изоморфизм для любых $x, y \in G$. Значит, φ – изоморфизм. Лемма доказана.

ЛЕММА 5. Непериодическая абелева группа устойчива.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть G – непериодическая абелева группа, $\varphi - L(G)$ -биекция, $a \in G$, $\text{ord } a = \infty$. Если b – элемент конечного порядка в G , то

$$\langle ab^i \rangle \cap \langle b^j \rangle = 1_G.$$

Поэтому в силу леммы 1

$$\varphi(a)\varphi(b^{i+j}) = \varphi(ab^{i+j}) = \varphi(ab^i)\varphi(b^j) = \varphi(a)\varphi(b^i)\varphi(b^j).$$

Значит, $\varphi(b^{i+j}) = \varphi(b^i)\varphi(b^j)$. Таким образом, учитывая лемму 3, получаем, что ограничение φ на любую циклическую подгруппу в G является изоморфизмом. Отсюда по лемме 4 вытекает, что φ – изоморфизм. Лемма доказана.

Будем называть элементы a и b группы G *независимыми*, если $\langle a \rangle \cap \langle b \rangle = 1_G$.

ЛЕММА 6. Абелева p -группа G устойчива тогда и только тогда, когда выполняется одно из двух условий:

- 1) для любого элемента в G существует независимый с ним элемент того же порядка;
- 2) G изоморфна $\mathbb{Z}_2$ или $\mathbb{Z}_3$.

При этом неустойчивая абелева p -группа тогда и только тогда будет устойчивой в изоморфном классе, когда ее экспонента равна 4.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. $\Leftarrow$. Как отмечалось в теореме 9, группы $\mathbb{Z}_2$ и $\mathbb{Z}_3$ тривиально устойчивы. Предположим, что выполняется условие 1).

Пусть φ — $L(G)$ -биекция, $a \in G$, b — независимый с a элемент того же порядка. Тогда $\langle ba^i \rangle \cap \langle a^j \rangle = 1_G$. Отсюда, как и в лемме 5, получаем $\varphi(a^{i+j}) = \varphi(a^i)\varphi(a^j)$. Таким образом, ограничение φ на любую циклическую подгруппу в G является изоморфизмом. Теперь из леммы 4 следует, что φ — изоморфизм и группа G устойчива.

$\Rightarrow$. Предположим, что условия 1) и 2) не выполняются. Покажем, что группа G в этом случае не является устойчивой.

Пусть a — элемент группы G такой, что

$$\text{в } G \text{ не существует независимого с ним элемента того же порядка,} \quad (**)$$

т.е. если $\langle b \rangle \cap \langle a \rangle = 1_G$, то $\text{ord } b < \text{ord } a$. Положим $\text{ord } a = p^n$. Возможны пять случаев, в каждом из них будет построена $L(G)$ -биекция φ группы G (в случаях 1–4 на саму себя), не являющаяся изоморфизмом.

Случай 1: $n = 1$, в G не существует элемента, удовлетворяющего условию (**), порядка большего, чем $\text{ord } a$. В этом случае $|G| = p > 3$ и, определяя $\varphi: G \rightarrow G$ как произвольную транспозицию двух неединичных элементов группы G , получаем $L(G)$ -биекцию, не являющуюся изоморфизмом, так как каждый из оставшихся неподвижными неединичных элементов порождает G .

Случай 2: $n > 1, p > 2$. Положим

$$\varphi(x) = \begin{cases} x, & \text{если } \text{ord } x < \text{ord } a, \\ x \cdot a^{p^{n-1}}, & \text{если } \text{ord } x \geq \text{ord } a. \end{cases}$$

Случай 3: $p = 2, n \geq 3$, в G нет независимых с a элементов порядка 2^{n-1} . Положим

$$\varphi(x) = \begin{cases} x, & \text{если } \text{ord } x \leq 2^{n-2}, \\ x \cdot a^{2^{n-1}}, & \text{если } \text{ord } x > 2^{n-2}. \end{cases}$$

Случай 4: $p = 2, n \geq 3$, в G существует независимый с a элемент порядка 2^{n-1} и $\exp G = \text{ord } a$. Положим

$$\varphi(x) = \begin{cases} x, & \text{если } \text{ord } x \leq 2^{n-1}, \\ x \cdot a^{2^{n-2}}, & \text{если } \text{ord } x > 2^{n-1}. \end{cases}$$

Случай 5: $p = 2$, $n = 2$, $\exp G = 4$. Пусть $G_0 = \{x \in G \mid \text{ord } x = 2\}$, тогда $G = G_0 \cup aG_0$. Рассмотрим группу $K = G_0 \times \langle \alpha \rangle$, $\text{ord } \alpha = 2$, и определим биекцию $\varphi: G \rightarrow K$ по правилу

$$\varphi(x) = \begin{cases} x, & \text{если } x \in G_0, \\ y\alpha, & \text{если } x = ay, \text{ где } y \in G_0. \end{cases}$$

В случае 5 биективность φ очевидна. В случаях 2–4 обозначим через G_0 множество неподвижных относительно φ элементов. Тогда G_0 – подгруппа в G и φ действует на $G \setminus G_0$ сдвигом на элемент из G_0 . Это значит, что φ биективно и в этих случаях.

Так как группы G и $\varphi(G)$ во всех случаях абелевы, то для доказательства того, что φ – $L(G)$ -биекция, достаточно установить равенство $\varphi(xH) = \varphi(x)\varphi(H)$ для всех $x \in G$, $H < G$.

Рассмотрим случай 2. Пусть $H < G$. Если $\exp H < \text{ord } a$, то φ тождественно на H . Если $\exp H \geq \text{ord } a$, то $H \ni a^{p^{n-1}}$. В обоих случаях $\varphi(H) = H$.

Заметим, далее, что $\text{ord } x < \text{ord } a$ влечет $\varphi(xy) = x\varphi(y)$ для любого $y \in G$. Поэтому равенство $\varphi(xH) = \varphi(x)\varphi(H)$ выполняется, если $\text{ord } x$ или $\exp H$ меньше $\text{ord } a$. Если $\text{ord } x$, $\exp H \geq \text{ord } a$, то $a^{p^{n-1}} \in H$, и, значит,

$$a^{p^{n-1}} \in H_0 = H \cap G_0 = \{h \in H \mid \varphi(h) = h\}.$$

Поэтому $\varphi(yH_0) = yH_0$ для любого $y \in G$ (так как $\varphi(y)$ равно y или $ya^{p^{n-1}}$). Отсюда следует, что

$$\varphi(xH) = \varphi\left(\bigcup_i x_i H_0\right) = \bigcup_i x_i H_0 = xH.$$

Но $\varphi(x)\varphi(H) = (xa^{p^{n-1}})H = xH$. В результате получаем $\varphi(xH) = \varphi(x)\varphi(H)$, т.е. φ – $L(G)$ -биекция.

Так как $p > 2$, то $x \in G \setminus G_0$ влечет $x^2 \in G \setminus G_0$. Значит,

$$\varphi(x^2) = x^2 a^{p^{n-1}} \neq x^2 (a^{p^{n-1}})^2 = \varphi(x)\varphi(x),$$

т.е. φ – неизоморфизм.

Случай 3 аналогичен случаю 2. Только неизоморфность φ здесь вытекает из того, что $|G : G_0| > 2$. Последнее условие позволяет выбрать в $G \setminus G_0$ элементы x и y такие, что $xy \in G \setminus G_0$. Тогда

$$\varphi(x)\varphi(y) = xa^{2^{n-1}} ya^{2^{n-1}} = xy \neq xy a^{2^{n-1}} = \varphi(xy).$$

Перейдем к случаю 4. Положим $\alpha = a^{2^{n-2}}$, тогда $\text{ord } \alpha = 4$. Заметим, что

- (i) $|G : G_0| = 2$;
- (ii) если $H < G$ и $\exp H \geq \text{ord } a$, то $H \ni \alpha^2$;
- (iii) $\text{ord } x < \text{ord } y$ влечет $\text{ord } xy = \text{ord } y$.

Пусть $x \in G$, $H < G$. Так как $\text{ord } y < \text{ord } a$ влечет $\varphi(yz) = y\varphi(z)$ для каждого $z \in G$, то $\varphi(xH) = \varphi(x)\varphi(H)$, если $\text{ord } x$ или $\exp H$ меньше $\text{ord } a$. Пусть $\text{ord } x, \exp H \geq \text{ord } a$ (фактически имеет место равенство, так как $\text{ord } a = \exp G$), положим $H_0 = H \cap G_0 = \{h \in H \mid \varphi(h) = h\}$. Тогда $H = H_0 \cup bH_0$, где $\text{ord } b = \text{ord } a$, и, значит, в силу (iii) $\text{ord } bh_0 = \text{ord } a$ для всех $h_0 \in H_0$. Имеем $\varphi(x) = x\alpha$, $\varphi(H) = \varphi(H_0) \cup \varphi(bH_0) = H_0 \cup \alpha bH_0$. Отсюда

$$\varphi(x)\varphi(H) = \alpha xH_0 \cup \alpha^2 xbH_0 = \alpha xH_0 \cup xbH_0,$$

где последнее равенство справедливо, так как в силу (ii) $\alpha^2 \in H$, и, значит, $\alpha^2 \in H_0$. В силу (i) $\text{ord } xb < \text{ord } a$ и в силу (iii) $\text{ord } xh_0 = \text{ord } x$, поэтому

$$\varphi(xH) = \varphi(xH_0 \cup xbH_0) = \varphi(xH_0) \cup \varphi(xbH_0) = \alpha xH_0 \cup xbH_0.$$

В итоге получаем $\varphi(x)\varphi(H) = \varphi(xH)$, т.е. $\varphi - L(G)$ -биекция.

В силу (i) $x \in G \setminus G_0$ влечет $x^2 \in G_0$. Значит, $\varphi(x^2) = x^2 \neq x^2\alpha^2 = \varphi(x)\varphi(x)$, т.е. φ — неизоморфизм.

Наконец, рассмотрим случай 5. Будем отождествлять элементы подгруппы G_0 с их каноническими образами в $K = G_0 \times \langle \alpha \rangle$.

Пусть $x \in G$, $H < G$. Так как $\text{ord } y < \text{ord } a$ влечет $\varphi(yz) = y\varphi(z)$ для каждого $z \in G$, то $\varphi(xH) = \varphi(x)\varphi(H)$, если $\text{ord } x$ или $\exp H$ меньше $\text{ord } a$. Пусть $\text{ord } x, \exp H \geq \text{ord } a$ (имеет место равенство, так как $\text{ord } a = \exp G = 4$), тогда $x = ax_0$, $H = H_0 \cup ag_0H_0$, где $x_0, g_0 \in G_0$, $H_0 = H \cap G_0$. Имеем $\varphi(x) = \alpha x_0$, $\varphi(H) = H_0 \cup \alpha g_0H_0$, $\varphi(xH) = \varphi(ax_0H_0 \cup a^2x_0g_0H_0) = \alpha x_0H_0 \cup a^2x_0g_0H_0$, $\varphi(x)\varphi(H) = \alpha x_0 \cdot (H_0 \cup \alpha g_0H_0) = \alpha x_0H_0 \cup x_0g_0H_0$. Так как $\exp H \geq \text{ord } a$, то $a^2 \in H$, и, значит, $a^2 \in H_0$. Поэтому $\varphi(xH) = \alpha x_0H_0 \cup x_0g_0H_0 = \varphi(x)\varphi(H)$.

В итоге получаем, что $\varphi - L(G)$ -биекция. Так как $\exp K = 2 \neq 4 = \exp G$, то φ — неизоморфизм.

Построенные отображения φ доказывают, что в случаях 1–4 группа G неустойчива в изоморфном классе. Покажем, что в случае 5 группа G устойчива в изоморфном классе. Пусть $\psi: G \rightarrow G - L(G)$ -биекция. Тогда ψ переводит инволюции в инволюции, т.е. $\psi(G_0) \leq G_0$. Так как индексы G_0 и $\psi(G_0)$ в G равны, то $\psi(G_0) = G_0$. Значит, $\psi(G \setminus G_0) = G \setminus G_0$, т.е. ψ элементы 4-го порядка переводит в элементы 4-го порядка. Отсюда следует, что ограничение ψ на любую циклическую подгруппу есть изоморфизм. Поэтому в силу леммы 4 ψ — изоморфизм. Лемма доказана.

Суммируя результаты теоремы 7, леммы 5 и леммы 6, получаем итоговую классификационную теорему об устойчивых абелевых группах.

ТЕОРЕМА 15. 1) *Непериодическая абелева группа устойчива;*

2) *периодическая абелева группа устойчива (в изоморфном классе) тогда и только тогда, когда устойчивы (в изоморфном классе) все ее p -компоненты;*

3) *абелева p -группа G устойчива тогда и только тогда, когда выполняется одно из двух условий:*

- (i) *для любого элемента в G существует независимый с ним элемент того же порядка;*
- (ii) *G изоморфна $\mathbb{Z}_2$ или $\mathbb{Z}_3$,*

при этом неустойчивая абелева p -группа тогда и только тогда будет устойчивой в изоморфном классе, когда ее экспонента равна 4.

Заключительная теорема касается связи свойств устойчивости и $\mathbb{C}$ -базисной устойчивости в классе абелевых групп.

ТЕОРЕМА 16. *Устойчивая (в изоморфном классе) абелева группа $\mathbb{C}$ -базисно устойчива (в изоморфном классе).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть G – непериодическая абелева группа. Тогда G порождается своими бесконечными циклическими подгруппами, которые $\mathbb{C}$ -базисно устойчивы в силу предложения 2. В силу следствия 1. 2) группа G $\mathbb{C}$ -базисно устойчива.

Пусть G – периодическая устойчивая абелева группа. Для каждого $x \in G$ примарного порядка рассмотрим подгруппу $H_x = \langle x, a_x \rangle$, где a_x – некоторый независимый с x элемент того же порядка, если $\text{ord } x > 3$ (a_x существует в силу леммы 6), и $a_x = 1_G$, если $\text{ord } x \leq 3$. В силу леммы 6, теорем 8 и 10 группа H_x $\mathbb{C}$ -базисно устойчива. Так как подгруппы H_x порождают G , то в силу следствия 1. 2) группа G $\mathbb{C}$ -базисно устойчива.

Пусть G – неустойчивая абелева группа экспоненты 4, $G_0 = \{g \in G \mid g^2 = 1_G\}$, $\sigma: \mathbb{C}G \rightarrow \mathbb{C}G - L(G)_{\mathbb{C}}$ -изоморфизм. Тогда $\sigma(\mathbb{C}G_0) \subseteq \mathbb{C}G_0$. Если $a \in G$, $\text{ord } a = 4$, то $\mathbb{C}G$ порождается элементом a и подалгеброй $\mathbb{C}G_0$. Значит, $\mathbb{C}G$ порождается элементом $\sigma(a)$ и подалгеброй $\sigma(\mathbb{C}G_0)$. Отсюда следует, что $\sigma(a) \notin \mathbb{C}G_0$. Поэтому $\sigma(\mathbb{C}\langle a \rangle) = \mathbb{C}\langle b \rangle$, где $b \in G$, $\text{ord } b = 4$. Тогда легко видеть, что ограничение σ на $\mathbb{C}\langle a \rangle$ есть базисный изоморфизм. Так как элементы 4-го порядка группы G порождают $\mathbb{C}G$, то σ – базисный изоморфизм. Теорема доказана.

§ 4. Заключение

4.1. Автоморфизмы ортогональных разложений (ОР). Две строки $X = (x_1, \dots, x_n)$ и $Y = (y_1, \dots, y_n)$ длины n из элементов группы G называются *ортогональными* (точнее, *левоортогональными*), если строка $X^{-1}Y = (x_1^{-1}y_1, \dots, x_n^{-1}y_n)$ содержит каждый элемент группы G ровно $n/|G|$ раз. Пусть строки $(g_{i1}, \dots, g_{in})$, $i = \overline{1, n}$, из элементов группы G попарно ортогональны, $\tau: G \rightarrow \text{GL}(n, \mathbb{C})$ – неприводимое проективное представление группы G степени n , τ^* – линейаризация τ с помощью группы представления G^* (G^* – конечное центральное расширение группы G с ядром, изоморфным мультипликатору Шура группы G [5]). Для $X \in M_m$, $g \in G$ положим $g(X) = \tau(g)X\tau(g)^{-1}$. Тогда подалгебры $B_i = \{(g_{i1}(X), \dots, g_{in}(X)) \mid X \in M_m\}$, $i = \overline{1, n}$, $C = \{(\alpha_1 E_m, \dots, \alpha_n E_m) \mid \alpha_i \in \mathbb{C}\}$ (E_m – единичная матрица порядка m) образуют ОР D алгебры nM_m . Покажем, что группа $\text{Aut } D$ конечна ($\text{Aut } D$ – нормализатор системы подалгебр D в группе $\text{Aut}(nM_m)$).

Рассмотрим в $\text{Aut } D$ подгруппу N конечного индекса, состоящую из автоморфизмов, стабилизирующих подалгебру C и нормализующих каждую из оставшихся подалгебр системы D . Без ограничения общности можно считать $g_{11} = \dots = g_{1n} = 1_G$. Заметим, что автоморфизмы, стабилизирующие подалгебру C и нормализующие подалгебру B_1 , имеют вид

$$I_\sigma: (X_1, \dots, X_n) \mapsto (\sigma(X_1), \dots, \sigma(X_n)),$$

где $\sigma \in \text{Aut } M_m$. Пусть $I_\sigma \in N$, тогда I_σ нормализует подалгебру B_2 . Значит, $g(\sigma(X)) = \sigma(g(X))$ для всех $g \in G$, $X \in M_m$ (так как среди элементов строки $(g_{21}, \dots, g_{2n})$ присутствуют все элементы группы G). Отсюда получаем $\sigma(\tau^*(g)) = \alpha(g)\tau^*(g)$, где $g \in G^*$, и α — одномерный комплексный характер группы G^* . Так как τ^* — неприводимое представление, то матрицы $\tau^*(g)$, $g \in G^*$, порождают (линейно) M_m . Значит, σ определяется своим действием на матрицах $\tau^*(g)$, т.е. определяется характером α . Так как группа G^* имеет конечное число (равное индексу своего коммутанта) одномерных комплексных характеров, то группа N конечна. Следовательно, конечна и группа $\text{Aut } D$.

4.2. Открытые вопросы. 1) Пусть $\varphi: G \rightarrow K$ — (левая) $L(G)$ -биекция такая, что φ^{-1} — (левая) $L(K)$ -биекция. Следует ли отсюда изоморфность групп G и K ?

2) Пусть $\sigma: RG \rightarrow RK$ — $L(G)_R$ -изоморфизм такой, что σ^{-1} — $L(K)_R$ -изоморфизм. Следует ли отсюда изоморфность групп G и K ?

3) Пусть $\sigma: RG \rightarrow RK$ — изоморфизм, $X \triangleleft G$, $\sigma(RX) = RY$, $Y \subseteq K$. Можно ли утверждать, что групповые кольца $R(G/X)$ и $R(K/Y)$ изоморфны?

4) Для каких семейств $\mathcal{H}$ подгрупп группы можно утверждать, что группа $\text{Aut}(\mathbb{C}\mathcal{H})$

а) конечна;

б) состоит из базисных автоморфизмов?

Следует ли из положительного ответа на вопрос б) $\mathbb{C}$ -базисная жесткость в изоморфном классе семейства $\mathcal{H}$? Какой будет ответ на эти вопросы в случае, когда $\mathcal{H}$ — семейство силовских p -подгрупп в G для некоторого p ?

5) Пусть $\mathcal{H}$ — семейство подгрупп группы G такое, что $N(\mathcal{H}) \leq \text{Aut } G$. Следует ли отсюда, что семейство $\mathcal{H}$ жестко в изоморфном классе?

6) Пусть $\mathcal{H}$ — семейство подгрупп группы G . Когда свойства жесткости и $\mathbb{C}$ -базисной жесткости семейства $\mathcal{H}$ равносильны? Будет ли это так в следующих случаях:

а) G — конечная абелева группа;

б) G — абелева группа, $\mathcal{H} = L(G)$;

в) G — конечная группа, $\mathcal{H}$ — семейство силовских p -подгрупп в G для некоторого p ;

г) G — конечная группа?

7) Какие семейства расщепления являются сильно жесткими, а какие нет?

8) Существуют ли левые $L(G)$ -биекции, не являющиеся $L(G)$ -биекциями и отображающие группу G на себя?

9) Каковы жесткие семейства подгрупп в

а) нециклической элементарной абелевой p -группе;

б) бесконечной циклической группе?

Список литературы

1. Иванов Д. Н. Автоморфизмы ортогональных разложений и групповых алгебр расщепляемых групп // Матем. сб. 1995. Т. 186. № 9. С. 77–86.
2. Lüneburg H. Translation planes. Berlin: Springer-Verlag, 1980.

3. *Артамонов В. А., Бовди А. А.* Целочисленные групповые кольца: группы обратимых элементов и классическая K -теория // Итоги науки и техники. Алгебра. Топология. Геометрия. Т. 27. М.: ВИНТИ, 1989. С. 3–43.
4. *Залесский А. Е., Михалев А. В.* Групповые кольца // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Т. 2. М.: ВИНТИ, 1973. С. 5–118.
5. *Кэртис Ч., Райнер И.* Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр. М.: Наука, 1969.

Тверской государственный университет

Поступила в редакцию
21.11.1995