Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. Ф. Красичков-Терновский, Фундаментальный принцип для инвариантных подпространств аналитических функций. II, *Матем. сб.*, 1997, том 188, номер 6, 57–98

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm228>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.95.254.165

26 апреля 2023 г., 11:16:58

УДК 517.53

И. Ф. Красичков-Терновский

Фундаментальный принцип для инвариантных подпространств аналитических функций. II

В топологическом произведении пространств аналитических функций рассматривается замкнутое подпространство W , инвариантное относительно дифференцирования. Каждому элементу $f \in W$ соответствует формальный ряд, члены которого – образы f относительно системы специальных проекционных операторов, действующих в W .

В статье исследуются условия существования, способы построения и свойства упомянутых проекционных операторов.

Библиография: 13 названий.

§ 0. Введение

Эта работа является продолжением статьи [1] и использует обозначения последней.

Пусть $H = H(G_1) \times \dots \times H(G_q)$ – топологическое произведение пространств $H(G_1), \dots, H(G_q)$ функций, голоморфных, соответственно, в множествах Рунге $G_1, \dots, G_q$ [1, п. 2.1]. В пространстве H действует оператор покомпонентного дифференцирования

$$D: f = (f_1, \dots, f_q) \mapsto f' = (f'_1, \dots, f'_q).$$

Пусть W – замкнутое подпространство в H , инвариантное относительно D . Обозначим через $W(\lambda)$ подпространство корневых элементов оператора D , отвечающих λ и содержащихся в W . *Элементарным проектором*, отвечающим λ , называется линейное непрерывное отображение $p_\lambda: W \rightarrow W$ со свойствами:

- 1°. $\text{Im } p_\lambda = W(\lambda)$;
- 2°. $p_\lambda^2 = p_\lambda$;
- 3°. $p_\lambda \circ D = D \circ p_\lambda$.

Пусть ранг аннуляторного подмодуля I подпространства W равен q . В этом случае те точки λ , для которых $W(\lambda) = \{0\}$, образуют последовательность $\Lambda = \{\lambda_i\}$, $\lambda_i \rightarrow \infty$, и для каждой $\lambda_i \in \Lambda$ существует элементарный проектор p_{λ_i} . Элементу $f \in W$ поставим в соответствие “стандартный ряд”

$$f \sim \sum p_{\lambda_i}(f). \quad (1)$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 93-01-00259).

Фундаментальный принцип состоит в тенденции, проявляемой рядом (1) (или подпоследовательностью его частичных сумм), сходиться к f при любом выборе элемента f из W . Настоящая статья посвящена исследованию свойств элементарных проекторов. Исследование проводится по общей схеме сведения задач, относящихся к H , к задачам алгебраического типа, относящимся к пространству P “преобразований Лапласа” линейных непрерывных функционалов на H . Пространство P есть образ пространства H^* , сопряженного к H , относительно отображения T , которое каждый линейный непрерывный функционал $S = (S_1, \dots, S_q)$ переводит в его характеристический элемент $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_q)$. Каждой линейной непрерывной операции $u: W \rightarrow W$ соответствует дуальная операция $u^\circledast: P/I \rightarrow P/I$, представляющая собой “образ” относительно T операции u^* , сопряженной к u (п. 1.3). Свойства $u^\circledast$ полностью определяют свойства u . Поэтому исследование u сводится к исследованию $u^\circledast$. В частности, операция $p_\lambda^\circledast$, дуальная p_λ , переводит класс смежности Φ (по I) в класс смежности Ψ такой, что для любых представителей $\varphi \in \Phi$, $\psi \in \Psi$ этих классов выполняются соотношения (предложение 4.3):

$$\psi \equiv \begin{cases} 0 \pmod{I(\xi)}, & \xi \neq \lambda, \\ \varphi \pmod{I(\lambda)}. \end{cases}$$

Здесь $I(\xi)$ — локальный подмодуль, порождаемый I в точке ξ . Операцию такого типа можно получить факторизацией по I *элементарного интерполятора* Int_λ . Так мы называем оператор $\text{Int}_\lambda: P \rightarrow P$, действующий по правилу

$$\text{Int}_\lambda \varphi = \sum \Gamma_\lambda \frac{\Delta_p(\varphi)}{\Delta} u^{(p)},$$

где $u^{(1)}, \dots, u^{(q)}$ — фиксированная независимая система элементов из I , Δ — определитель, составленный из векторов-столбцов элементов $u^{(1)}, \dots, u^{(q)}$, $\Delta_p(\varphi)$ — определитель, полученный из Δ заменой p -го столбца на столбец элемента φ , символ Γ_λ обозначает главную часть разложения Лорана в точке λ . Опираясь на свойства дуальной операции $p_\lambda^\circledast$, мы устанавливаем следующие свойства элементарного проектора p_λ :

- 1) нетривиальный элементарный проектор существует только в случае, когда ранг I равен q (предложения 4.3, 4.6);
- 2) элементарный проектор p_λ , отвечающий λ , — единственный (предложение 4.5);
- 3) если $u: H \rightarrow H$ — оператор, прямой по отношению к Int_λ , т.е. $\text{Int}_\lambda = u^\circledast$, то сужение u на W совпадает с элементарным проектором (предложение 4.6).

Последнее утверждение дает способ построения элементарных проекторов. Для частичных сумм ряда (1), имеющих вид

$$\sum_{\lambda_i \in \Gamma} p_{\lambda_i}(f)$$

(суммирование идет по точкам λ_i , охватываемым замкнутым контуром Γ), имеет место интегральное представление, которое является аналогом известного представления А. Ф. Леонтьева для полиномов Дирихле [2]. Для наведения связей

между прямой и дуальной операциями мы используем соотношения двойственности (предложения 1.1–1.3) и понятие дивизора (§2). Последнее понятие является удобным способом описания спектра инвариантного подпространства в терминах локальных подмодулей $I(\lambda)$, порождаемых аннуляторным подмодулем I (предложение 2.4). Полезность этого понятия мы демонстрируем новым усовершенствованным доказательством теоремы двойственности в теории спектрального синтеза (п. 2.5).

§1. Вопросы двойственности

На протяжении всего параграфа будем предполагать, что G – q -множество Рунге [1, ш. 2.1, 2.2],

$$H = H(G), \quad P = P(G).$$

В этом случае каноническое отображение $T: H^* \rightarrow P$ является топологическим изоморфизмом.

1.1. Соотношение двойственности. Пространство H как топологическое произведение рефлексивных пространств $H(G_i)$ ([3, гл. IV]) само является рефлексивным, т.е. существует так называемый канонический изоморфизм $\theta: H \rightarrow H^{**}$ пространства H на его второе сопряженное. Отображение $T: H^* \rightarrow P$ и его сопряженное отображение $T^*: P^* \rightarrow H^{**}$ – топологические изоморфизмы. Поэтому композиция $\chi = T^{*-1} \circ \theta$ – также топологический изоморфизм пространства H на P^* . Образ элемента $f \in H$ относительно χ будем обозначать $f^\odot$. Справедливо следующее соотношение двойственности.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.1. Пусть $f \in H$, $f^\odot = \chi(f)$, $S \in H$, $\varphi = T(S)$. Тогда

$$\langle S, f \rangle = \langle f^\odot, \varphi \rangle. \quad (1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть f^{**} – образ f относительно канонического изоморфизма $\theta: H \rightarrow H^{**}$. Имеем

$$\langle f^{**}, S \rangle = \langle S, f \rangle \quad \forall S \in H^*.$$

Кроме того, $T^*(f^\odot) = f^{**}$. Учитывая эти соотношения, получаем

$$\begin{aligned} \langle S, f \rangle &= \langle f^{**}, S \rangle = \langle T^*(f^\odot), S \rangle \\ &= \langle f^\odot, T(S) \rangle = \langle f^\odot, \varphi \rangle. \end{aligned}$$

При $q = 1$ соотношение (1) отмечено в [4, §3]. При $q > 1$ P представляет собой топологическое произведение

$$P = P_1 \times \cdots \times P_q,$$

где P_i – модуль, ассоциированный с G_i . В соответствии с этим каждый линейный непрерывный функционал F на P представляется в виде вектора $F = (F_1, \dots, F_q)$; действие F на элемент $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_q)$ происходит по правилу

$$\langle F, \varphi \rangle = \sum \langle F_i, \varphi_i \rangle.$$

Нетрудно проверить, что если $F = f^\odot$, $f = (f_1, \dots, f_q)$, то $F_1 = f_1^\odot, \dots, F_q = f_q^\odot$. По этой причине соотношение двойственности (1) можно записать в виде

$$\sum \langle S_i, f_i \rangle = \sum \langle f_i^\odot, \varphi_i \rangle,$$

где $\varphi_i = T(S_i)$.

1.2. Представления элементов из H и P . Рассмотрим две системы единичных векторов $e_1, \dots, e_q$ и $e_1^*, \dots, e_q^*$, где $e_i = e_i^* = (0, \dots, 1, \dots, 0)$ – единичный вектор, у которого i -я компонента единица, а все остальные – нулевые. Система векторов $e_1, \dots, e_q$ предназначена для записи элементов $f = (f_1, \dots, f_q) \in H$ в виде

$$f = \sum f_i e_i,$$

а система векторов $e_1^*, \dots, e_q^*$ – для записи элементов $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_q) \in P$ в виде

$$\varphi = \sum \varphi_i e_i^*.$$

В дальнейшем мы будем рассматривать формальное выражение

$$\boxed{\exp \lambda z} := \sum_{i=1}^q e^{\lambda z} e_i e_i^*.$$

На это выражение мы будем действовать формально линейными операторами, в частности, функционалами, определенными либо на H , либо на P ; при этом векторы $e_1, \dots, e_q$ будем трактовать как перестановочные с символами операторов, действующих на P , а $e_1^*, \dots, e_q^*$ – как перестановочные с символами операторов, действующих на H .

Проиллюстрируем удобство такого соглашения. Пусть $S \in H^*$, $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_q)$ – характеристический элемент S . Учитывая линейность и перестановочность функционала S с векторами $e_1^*, \dots, e_q^*$, имеем

$$\begin{aligned} \langle S, \boxed{\exp \lambda z} \rangle &= \sum \langle S, e^{\lambda z} e_i e_i^* \rangle \\ &= \sum \langle S, e^{\lambda z} e_i \rangle e_i^* = \sum \varphi_i(\lambda) e_i^* = \varphi(\lambda). \end{aligned}$$

Таким образом, характеристический элемент функционала S представляется в виде

$$\varphi(\lambda) = \langle S, \boxed{\exp \lambda z} \rangle. \quad (2)$$

Пусть $f = (f_1, \dots, f_q) \in H$ и $f^\odot = (f_1^\odot, \dots, f_q^\odot)$ – соответствующий функционал на P (см. п. 1.1). Известно (см. доказательство теоремы 3.4 в [4]), что $f_i(z) = \langle f_i^\odot, e^{\lambda z} \rangle$. Действуя функционалом $f^\odot$ на $\boxed{\exp \lambda z}$ и учитывая перестановочность $f^\odot$ и $e_1, \dots, e_q$, имеем

$$\begin{aligned} \langle f^\odot, \boxed{\exp \lambda z} \rangle &= \left\langle f^\odot, \sum e^{\lambda z} e_i e_i^* \right\rangle \\ &= \sum \langle f^\odot, e^{\lambda z} e_i^* \rangle e_i = \sum \langle f_i^\odot, e^{\lambda z} \rangle e_i \\ &= \sum f_i(z) e_i = f(z). \end{aligned}$$

Таким образом, справедливо представление

$$f(z) = \left\langle f^\odot, \boxed{\exp \lambda z} \right\rangle. \quad (3)$$

При $q = 1$ эта формула приобретает вид

$$f(z) = \langle f^\odot, e^{\lambda z} \rangle.$$

Ранее для случая выпуклой области $G \subset \mathbb{C}$ и в более конкретной форме она была установлена в [4, теорема 3.4].

1.3. Прямые и дуальные отображения. Пусть $H = H(G)$, $H' = H(G')$ – пространства, ассоциированные с q -множествами Рунге G , G' ; W , W' – замкнутые подпространства в H , H' , соответственно. Пространства W , W' наделяются топологиями, индуцированными из пространств H , H' , и рассматриваются как самостоятельные локально выпуклые пространства. Пусть

$$\begin{aligned} W^0 &= \{S \in H^* : \langle S, f \rangle = 0 \forall f \in W\}, \\ W'^0 &= \{S \in H'^* : \langle S, f \rangle = 0 \forall f \in W'\}, \end{aligned}$$

Пространство W^* , сопряженное к пространству W , изоморфно факторпространству H^*/W^0 , наделенному фактортопологией топологии H^* по W^0 ; соответственно, пространство W'^* , сопряженное к пространству W' , изоморфно факторпространству H'^*/W'^0 , наделенному фактортопологией топологии H'^* по W'^0 [5, предложение 11]. Пусть P , P' – модули, ассоциированные с G , G' , соответственно; $I = \text{An } W$, $I' = \text{An } W'$. Очевидно, I , I' – подмодули, соответственно, в P , P' . Изоморфизмы [1, §2]

$$T: H^* \rightarrow P, \quad T': H'^* \rightarrow P$$

порождают факторизоморфизмы

$$\widehat{T}: H^*/W^0 \rightarrow P/I, \quad \widehat{T}': H'^*/W'^0 \rightarrow P'/I'.$$

Пусть $u: W \rightarrow W'$ – линейное непрерывное отображение. Сопряженное отображение u^* действует линейно и непрерывно из H'^*/W'^0 в H^*/W^0 . Отображения $\widehat{T}$ и $\widehat{T}'$ позволяют “поднять” отображение u^* до отображения

$$u^\otimes: P'/I' \rightarrow P/I,$$

именно,

$$u^\otimes = \widehat{T} \circ u^* \circ \widehat{T}'^{-1}.$$

Отображение $u^\otimes$ называется *дуальным* по отношению к отображению u [6, §1]. Из соображений рефлексивности следует, что для всякого линейного непрерывного отображения $v: P'/I' \rightarrow P/I$ существует единственное *прямое отображение* $u: W \rightarrow W'$, т.е. такое, что $v = u^\otimes$. Отметим, что если u отображает H в H' , то дуальное отображение $u^\otimes$ отображает P' в P . Справедливо следующее соотношение двойственности для отображений.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.2. Пусть $f \in H$, $f^\odot = \chi(f)$,

$$S' \in H'^*/W'^0, \quad \Phi' = \widehat{T}'(S').$$

Тогда

$$\langle S', u(f) \rangle = \langle f^\odot, u^\otimes(\Phi') \rangle. \quad (4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$\begin{aligned} \langle f^\odot, u^\otimes(\Phi') \rangle &= \langle f^\odot, \widehat{T} \circ u^* \circ \widehat{T}'^{-1}(\Phi') \rangle = \langle \widehat{T}^*(f^\odot), u^* \circ \widehat{T}'^{-1}(\Phi') \rangle \\ &= \langle \theta \circ \theta^{-1} \circ \widehat{T}^*(f^\odot), u^* \circ \widehat{T}'^{-1}(\Phi') \rangle = \langle \theta f, u^* \circ \widehat{T}'^{-1}(\Phi') \rangle \\ &= \langle u^* \circ \widehat{T}'^{-1}(\Phi'), f \rangle = \langle \widehat{T}'^{-1}(\Phi'), u(f) \rangle = \langle S', u(f) \rangle. \end{aligned}$$

При $W = H$, $W' = H'$ соотношение (4) принимает вид

$$\langle s', u(f) \rangle = \langle f^\odot, u^\otimes(\varphi') \rangle, \quad (5)$$

где

$$\varphi' = T'(s'), \quad f^\odot = \chi(f).$$

С помощью соотношения двойственности (4) можно восстановить операцию $u: W \rightarrow W'$ по ее дуальной $u^\otimes: P'/I' \rightarrow P/I$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.3. Пусть τ' – каноническое отображение P' на P'/I' . Тогда имеет место представление

$$u(f)(z) = \left\langle f^\odot, u^\otimes \circ \tau' \left(\boxed{\exp \lambda z} \right) \right\rangle. \quad (6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Соотношение (4) влечет

$$\langle s', u(f) \rangle = \langle f^\odot, u^\otimes \circ \tau' \varphi' \rangle, \quad (7)$$

где $\varphi' = T'(s')$.

Пусть δ_{iz} – функционал $f = (f_1, \dots, f_q) \mapsto f_i(z)$. Очевидно, что $\delta_{iz} \in H'^*$ при $z \in G'_i$. Простое вычисление дает, что характеристический элемент δ_{iz} есть $e^{\lambda z} e_i^*$. Полагая в (7) $s' = \delta_{iz}$ и обозначая символом $(\cdot)_i$ операцию проектирования на i -ю координату, имеем

$$(u(f))_i(z) = \langle \delta_{iz}, u(f) \rangle = \langle f^\odot, u^\otimes \circ \tau'(e^{\lambda z} e_i^*) \rangle.$$

Отсюда получаем

$$\begin{aligned} u(f)(z) &= \sum_i (u(f))_i(z) e_i = \sum_i \langle f^\odot, u^\otimes \circ \tau'(e^{\lambda z} e_i^*) \rangle e_i \\ &= \sum_i \langle f^\odot, u^\otimes \circ \tau'(e^{\lambda z} e_i^* e_i) \rangle = \left\langle f^\odot, u^\otimes \circ \tau' \left(\boxed{\exp \lambda z} \right) \right\rangle. \end{aligned}$$

При $q = 1$ соотношение (4) и представление (6) содержатся в [7, § 1].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.4. Пусть $u: H \rightarrow H'$ – линейное непрерывное отображение. Для того чтобы $u(W) \subset W'$, необходимо и достаточно, чтобы

$$u^{\otimes}(I') \subset I. \quad (8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$u(W) \subset W'. \quad (9)$$

Рассмотрим сопряженное отображение $u^*: H' \rightarrow H$. Оно связано с u соотношением

$$\langle u^*(s'), f \rangle = \langle s', u(f) \rangle.$$

Это соотношение и включение (9) влекут $\langle u^*(s'), f \rangle = 0$ при $f \in W$, $s' \in W'^0$. В силу рефлексивности (f рассматривается как функционал на H^*) и теоремы Хана–Банаха

$$u^*(s') \in W^0 \quad \forall s' \in W'^0.$$

Значит, $u^*(W'^0) \subset W^0$, что равносильно (8). То, что включение (8) влечет (9), доказывается в обратном порядке.

Рассмотрим линейное отображение $v: P' \rightarrow P$, для которого $v(I') \subset I$. В силу этого включения образ $v(\Phi')$ класса смежности $\Phi' \in P'/I'$ состоит из элементов, сравнимых по модулю I . Значит, все они содержатся в некотором классе смежности $\Phi \in P/I$. Таким образом, отображение v порождает факторотображение $\hat{v}: P'/I' \rightarrow P/I$, которое класс смежности $\Phi' \in P'/I'$ переводит в класс смежности $\Phi \in P/I$, содержащий $v(\Phi')$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.5. Пусть $u: H \rightarrow H'$ – линейное непрерывное отображение, для которого $u(W) \subset W'$. Обозначим $u_0: W \rightarrow W'$ сужение u на W . Тогда отображение, дуальное u_0 , есть факторотображение $\hat{u}^{\otimes}: P'/I' \rightarrow P/I$, порождаемое $u^{\otimes}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу предложения 1.4 включение $u(W) \subset W'$ влечет $u^{\otimes}(I') \subset I$. Значит, отображение $v = u^{\otimes}$ порождает факторотображение $\hat{v}: P'/I' \rightarrow P/I$. Последнее переводит класс смежности $\Phi' \in P'/I'$ в класс смежности Φ , содержащий $u^{\otimes}(\Phi')$. Но, как легко проверить, операция $u_0^{\otimes}$ действует точно таким же образом. Значит, $u_0^{\otimes} = \hat{v}$.

Пусть W, W' – инвариантные подпространства. Тогда $I = \text{An } W$, $I' = \text{An } W'$ обладают структурами подмодулей в P, P' , соответственно. Отсюда следует, что факторпространства $P/I, P'/I'$ обладают естественными структурами модулей над кольцом $\mathbb{C}[\lambda]$. Справедливо

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.6. Для того чтобы линейное непрерывное отображение $u: W \rightarrow W'$ было перестановочно с оператором дифференцирования, необходимо и достаточно, чтобы дуальное отображение $u^{\otimes}: P'/I' \rightarrow P/I$ было модульным гомоморфизмом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. *Необходимость.* Перестановочность u и D равносильна перестановочности дуальных отображений:

$$D^{\otimes} \circ u^{\otimes} = u^{\otimes} \circ D^{\otimes}.$$

Операция $D^{\otimes}$ есть умножение на независимую переменную λ . Поэтому для любого класса смежности $\Phi' \in P'/I'$ имеем

$$\lambda u^{\otimes}(\Phi') = u^{\otimes}(\lambda \Phi').$$

Стандартным образом это соотношение распространяется на многочлены

$$p u^{\otimes}(\Phi') = u^{\otimes}(p \Phi').$$

Последнее означает, что отображение $u^{\otimes}$ – гомоморфизм.

Достаточность доказывается в обратном порядке.

§ 2. Дивизор

Вводимое ниже понятие дивизора является эффективным инструментом исследования локальных свойств подмодулей и будет неоднократно использоваться в дальнейшем. В качестве примера применения этого понятия мы даем новое усовершенствованное доказательство теоремы двойственности [8, § 1, предложение 5].

2.1. Локальный дивизор. Рассмотрим q -многочлен

$$p(\xi) = (p_1(\xi), \dots, p_q(\xi)).$$

Этому q -многочлену соответствует дифференциальный q -оператор

$$p(D) = (p_1(D), \dots, p_q(D)),$$

который q -функцию $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_q)$, голоморфную в области $U \subset \mathbb{C}$, переводит в скалярную функцию ψ , голоморфную в той же области, по правилу

$$\psi = \sum p_i(D) \varphi_i.$$

Стандартным образом действие оператора $p(D)$ распространяется на ростки q -функций, аналитические в точке λ . Рассмотрим подмодуль $I \subset O^q(\lambda)$. *Дивизор подмодуля I* , в записи $\text{Div } I$, это множество q -многочленов

$$\text{Div } I := \{p \in \mathbb{C}^q[\xi] : p(D)\varphi|_{\lambda} = 0 \ \forall \varphi \in I\}.$$

Для исследования дивизоров нам понадобится одно обобщение формулы Лейбница.

2.2. Формула Лейбница. Пусть $p(D)$ – дифференциальный q -оператор, соответствующий q -многочлену

$$p(\xi) = a_0 + \dots + a_n \xi^n. \tag{1}$$

Справедливо следующее

ОБОБЩЕНИЕ ФОРМУЛЫ ЛЕЙБНИЦА. Пусть $u \in O^q(G)$, $v \in O(G)$. Тогда

$$p(D)vu = \sum_{k=0}^n \frac{v^{(k)} p^{(k)}(D)u}{k!}, \quad (2)$$

где $p^{(k)}$ — k -я производная многочлена (1).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим сначала скалярный случай $q = 1$. Классическую формулу Лейбница можно записать в виде

$$\frac{D^m vu}{m!} = \sum_{k=0}^m \frac{v^{(k)}}{k!} \frac{u^{(m-k)}}{(m-k)!}. \quad (3)$$

Запишем многочлен (1) в виде

$$p(\xi) = \sum_{k=0}^n \frac{c_k}{k!} \xi^k, \quad c_k = k! a_k.$$

Используя (3), имеем

$$\begin{aligned} p(D)vu &= \sum_{m=0}^n c_m \frac{D^m vu}{m!} = \sum_{m=0}^n c_m \sum_{k=0}^m \frac{v^{(k)}}{k!} \frac{u^{(m-k)}}{(m-k)!} \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{v^{(k)}}{k!} \sum_{m=k}^n c_m \frac{u^{(m-k)}}{(m-k)!} = \sum_{k=0}^n \frac{v^{(k)}}{k!} p^{(k)}(D)u, \end{aligned}$$

так как дифференциальный оператор

$$\sum_{m=k}^n c_m \frac{D^{m-k}}{(m-k)!}$$

соответствует многочлену $p^{(k)}(\xi)$.

Рассмотрим теперь случай $q > 1$. Пусть $p(\xi) = (p_1(\xi), \dots, p_q(\xi))$. Имеем

$$\begin{aligned} p(D)uv &= \sum_{i=1}^q p_i(D)vu_i = \sum_{i=1}^q \sum_{k=0}^n \frac{v^{(k)}}{k!} p_i^{(k)}(D)u_i \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{v^{(k)}}{k!} \sum_{i=1}^q p_i^{(k)}(D)u_i = \sum_{k=0}^n \frac{v^{(k)}}{k!} p^{(k)}(D)u. \end{aligned}$$

Формула (2) доказана.

В случае $q = 1$ и даже для многих переменных формула (2) выписана во введении к книге [9].

2.3. Свойства дивизоров. Дивизор обладает рядом свойств. Некоторые из них столь очевидны, что не требуют доказательств.

СВОЙСТВО 1. Если $p_1, p_2 \in \text{Div } I$ и $a_1, a_2 \in \mathbb{C}$, то $a_1 p_1 + a_2 p_2 \in \text{Div } I$.

СВОЙСТВО 2. Если I, J – подмодули в $O^q(\lambda)$ и $I \subset J$, то $\text{Div } I \supset \text{Div } J$.

СВОЙСТВО 3. Если $p \in \text{Div } I$, то $p^{(k)} \in \text{Div } I$, $k = 0, 1, \dots$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $p \in \text{Div } I$, т.е.

$$p(D)\varphi|_\lambda = 0 \quad \forall \varphi \in I.$$

Поскольку $(z - \lambda)\varphi \in I$, если $\varphi \in I$, то и

$$p(D)(z - \lambda)\varphi|_\lambda = 0 \quad \forall \varphi \in I. \quad (4)$$

Используя формулу Лейбница (2) при $u = \varphi$, $v = z - \lambda$ и (4), имеем

$$p^{(1)}(D)\varphi|_\lambda = (z - \lambda)p(D)\varphi|_\lambda + \frac{(z - \lambda)^{(1)}}{1!}p^{(1)}(D)\varphi|_\lambda = p(D)(z - \lambda)\varphi|_\lambda = 0.$$

Это верно для любого $\varphi \in I$, значит, $p^{(1)} \in \text{Div } I$. Применяя подобные рассуждения к $p^{(1)}$, получим, что $p^{(2)} \in \text{Div } I$, и т.д.

СВОЙСТВО 4. Справедливо включение

$$\text{Div}(I \cap J) \supset \text{Div } I \cup \text{Div } J.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем $I \cap J \subset I, J$. По свойству 2 $\text{Div}(I \cap J) \supset \text{Div } I, \text{Div } J$, откуда следует $\text{Div}(I \cap J) \supset \text{Div } I \cup \text{Div } J$.

Для подмодулей $I, J \subset O^q(\lambda)$ символом $I \vee J$ обозначим подмодуль в $O^q(\lambda)$, порождаемый I и J .

СВОЙСТВО 5. Справедливо соотношение

$$\text{Div } I \vee J = \text{Div } I \cap \text{Div } J. \quad (5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из включений $I \vee J \supset I, J$ следует $\text{Div } I \vee J \subset \text{Div } I, \text{Div } J$, откуда

$$\text{Div } I \vee J \subset \text{Div } I \cap \text{Div } J.$$

Установим обратное включение. Пусть $p \in \text{Div } I \cap \text{Div } J$, т.е. $p \in \text{Div } I, \text{Div } J$. Это равносильно тому, что

$$p(D)u|_\lambda = 0 \quad \forall u \in I, \quad p(D)v|_\lambda = 0 \quad \forall v \in J.$$

Любой элемент w из $I \vee J$ представляется в виде $w = u + v$, где $u \in I, v \in J$. Поэтому

$$p(D)w|_\lambda = p(D)u|_\lambda + p(D)v|_\lambda = 0.$$

Таким образом, установлено, что

$$p(D)w|_\lambda = 0 \quad \forall w \in I \vee J.$$

Это равносильно включению $p \in \text{Div } I \vee J$. Тем самым установлено, что

$$\text{Div } I \cap \text{Div } J \subset \text{Div } I \vee J.$$

Соотношение (5) доказано.

Локальные подмодули полностью определяются своими дивизорами.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. Пусть I, J – подмодули в $O^q(\lambda)$. Тогда если справедливо равенство $\text{Div } I = \text{Div } J$, то $I = J$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим билинейные формы на $O^q(\lambda)$

$$(u, v)^{(n)} := \sum_{i=1}^q (u_i v_i)^{(n)}|_{\lambda}, \quad n = 0, 1, \dots$$

Множество

$$I^{[n]} = \{u \in O^q(\lambda) : (u, v)^{(n)} = 0 \quad \forall v \in I\}$$

обладает структурой подмодуля в $O^q(\lambda)$ и называется n -м *дуальным подмодулем*, ассоциированным с I (см. [10, п. 3.4]). Мы покажем, что если дивизоры подмодулей I и J совпадают, то совпадают их дуальные подмодули:

$$I^{[n]} = J^{[n]}, \quad n = 0, 1, \dots$$

Рассмотрим отображение $\Theta_n : O^q(\lambda) \rightarrow \mathbb{C}^q[\xi]$ по правилу

$$\varphi \mapsto \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \varphi^{(n-k)}(\lambda) \xi^k.$$

Покажем, что если $p = \Theta_n(\varphi)$, то

$$p(D)u|_{\lambda} = (\varphi, u)^{(n)} \quad \forall u \in O^q(\lambda). \quad (6)$$

Учитывая, что

$$p_i(\xi) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \varphi_i^{(n-k)}(\lambda) \xi^k,$$

имеем

$$\begin{aligned} p(D)u|_{\lambda} &= \sum_{i=1}^q p_i(D)u_i|_{\lambda} = \sum_{i=1}^q \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \varphi_i^{(n-k)}(\lambda) u_i^{(k)}|_{\lambda} \\ &= \sum_{i=1}^q (\varphi_i u_i)^{(n)}|_{\lambda} = (\varphi, u)^{(n)}. \end{aligned}$$

Обозначим

$$(\text{Div } I)^{[n]} = \{p \in \text{Div } I : \deg p \leq n\}.$$

Докажем, что

$$I^{[n]} = \Theta_n^{-1}((\text{Div } I)^{[n]}). \quad (7)$$

Пусть $\varphi \in I^{[n]}$. Покажем, что q -многочлен $p = \Theta_n(\varphi)$ принадлежит $(\text{Div } I)^{[n]}$. Поскольку заведомо $\deg p \leq n$ достаточно установить, что $p \in \text{Div } I$. Включение

$\varphi \in I^{[n]}$ равносильно тому, что $(\varphi, u)^{(n)} = 0 \quad \forall u \in I$. Отсюда ввиду (6) имеем $p(D)u|_{\lambda} = 0 \quad \forall u \in I$. Это означает, что $p \in \text{Div } I$. Тем самым установлено, что

$$\Theta_n(I^{[n]}) \subset (\text{Div } I)^{[n]}. \quad (8)$$

Рассмотрим q -многочлен $p(\xi) = a_0 + a_1\xi + \dots + a_n\xi^n$. Всегда можно найти элемент $\varphi \in O^q(\lambda)$, для которого

$$\binom{n}{k} \varphi^{(n-k)}(\lambda) = a_k, \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

Это означает, что $p = \Theta_n(\varphi)$ и, следовательно, прообраз $\Theta_n^{-1}(p)$ q -многочлена p не пуст. Пусть теперь $p \in (\text{Div } I)^{[n]}$ и $\varphi \in \Theta_n^{-1}(p)$. Первое включение означает, что $p(D)u|_{\lambda} = 0 \quad \forall u \in I$. Второе включение равносильно соотношению $p_n = \Theta_n(\varphi)$. Из вышеизложенного в силу (6) следует, что $(\varphi, u)^n = 0 \quad \forall u \in I$. Это означает, что $\varphi \in I^{[n]}$. Тем самым установлено включение

$$\Theta_n^{-1}((\text{Div } I)^{[n]}) \subset I^{[n]}. \quad (9)$$

Включения (8) и (9) влекут (7).

Продолжим доказательство предложения 2.1. Пусть I, J – подмодули в $O^q(\lambda)$ с одинаковыми дивизорами: $\text{Div } I = \text{Div } J$. Очевидно, что тогда $(\text{Div } I)^{[n]} = (\text{Div } J)^{[n]}$, $n = 0, 1, \dots$. В силу соотношения (7) $I^{[n]} = J^{[n]}$, $n = 0, 1, \dots$. В статье [10, предложение 3.5] доказано, что подмодуль в $O^q(\lambda)$ полностью определяется семейством своих дуальных подмодулей. На основании этого утверждения заключаем, что $I = J$.

Свойство 6. Пусть I, J – подмодули в $O^q(\lambda)$. Если $\text{Div } J \supset \text{Div } I$, то $J \subset I$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно свойству 5

$$\text{Div } J \vee I = \text{Div } J \cap \text{Div } I,$$

откуда, учитывая включение $\text{Div } J \supset \text{Div } I$, получаем $\text{Div } J \vee I = \text{Div } I$. В силу предложения 2.1 $J \vee I = I$, откуда и следует требуемое включение $I = I \vee J \supset J$.

Для произвольного множества $I \subset O^q(\lambda)$ дивизор I определяется как дивизор подмодуля $\tilde{I}$, порождаемого I в $O^q(\lambda)$. В частности, дивизор элемента $u \in O^q(\lambda)$, в обозначении $\text{Div } u$, есть дивизор главного подмодуля, порождаемого u в $O^q(\lambda)$.

Свойство 7. Пусть I – подмодуль в $O^q(\lambda)$, $u \in O^q(\lambda)$. Если $\text{Div } u \supset \text{Div } I$, то $u \in I$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть J – подмодуль, порождаемый u . Имеем $\text{Div } J = \text{Div } u \supset \text{Div } I$. По свойству 6 $J \subset I$, откуда $u \in J \subset I$.

Пусть I, J – множества в $O^q(\lambda)$. Множество J зависит от I (над кольцом $O(\lambda)$), если каждый элемент $v \in J$ можно представить в виде конечной комбинации

$$v = \sum c_i u^{(i)}, \quad u^{(i)} \in I, \quad c_i \in O(\lambda). \quad (10)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2. *Для того чтобы множество J зависело от множества I , необходимо и достаточно, чтобы*

$$\operatorname{Div} J \supset \operatorname{Div} I.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. *Необходимость.* Пусть J зависит от I . Тогда подмодуль $\tilde{J}$, порождаемый J , принадлежит подмодулю $\tilde{I}$, порождаемому I . Поэтому согласно свойству 2

$$\operatorname{Div} J = \operatorname{Div} \tilde{J} \supset \operatorname{Div} \tilde{I} = \operatorname{Div} I.$$

Достаточность. Включение $\operatorname{Div} J \supset \operatorname{Div} I$ равносильно включению $\operatorname{Div} \tilde{J} \supset \operatorname{Div} \tilde{I}$. По свойству 6 $\tilde{J} \subset \tilde{I}$ и, тем более, $J \subset \tilde{I}$; последнее равносильно тому, что каждый элемент $v \in J$ представляется в виде (10).

2.4. Глобальный дивизор. Пусть I – подмодуль в P . *Локальный дивизор* подмодуля I в точке λ , в записи $\operatorname{Div}_\lambda I$, определяется как дивизор локального подмодуля $I(\lambda) \subset O^q(\lambda) : \operatorname{Div}_\lambda I := \operatorname{Div} I(\lambda)$. Дивизор I есть дизъюнктивное объединение локальных дивизоров:

$$\operatorname{Div} I := \bigsqcup_{\lambda \in \mathbb{C}} \operatorname{Div}_\lambda I.$$

Дивизор I можно отождествить с множеством пар (λ, p) , где $\lambda \in \mathbb{C}$, $p \in \operatorname{Div}_\lambda I$.

2.5. Теория двойственности. Пусть P – модуль, ассоциированный с q -множеством Рунге G [1, п. 2.2]; I – замкнутый подмодуль в P ; $I(\lambda)$ – локальный подмодуль, порождаемый I в точке λ . Напомним, что элемент $f \in P$ принадлежит I локально, в записи $f \in I_{\text{loc}}$, если $f \in I(\lambda) \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}$. Подмодуль I называется *обильным*, если

$$f \in P, \quad f \in I_{\text{loc}} \Rightarrow f \in I.$$

Цель этого пункта – дать усовершенствованное доказательство следующего важного утверждения [8, § 1, предложение 5].

ТЕОРЕМА ДВОЙСТВЕННОСТИ. *Для того чтобы инвариантное подпространство $W \subset H$ допускало спектральный синтез, необходимо и достаточно, чтобы аннуляторный подмодуль $I = \operatorname{An} W$ этого подпространства был обильным.*

Доказательство требует подготовки. Рассмотрим подмодуль I в P . Пусть $J = \{I'\}$ – семейство всех замкнутых подмодулей I' в P с тем же дивизором, что и $I : \operatorname{Div} I' = \operatorname{Div} I \quad \forall I' \in J$. Подмодуль I обладает *свойством максимальнойности*, если $I' \subset I \quad \forall I' \in J$. Свойство максимальнойности равносильно выполнению следующей импликации:

$$f \in P, \quad \operatorname{Div}_\lambda f \supset \operatorname{Div}_\lambda I \quad \forall \lambda \in \mathbb{C} \Rightarrow f \in I. \quad (11)$$

Здесь $\operatorname{Div}_\lambda f$ обозначает дивизор подмодуля, порождаемого f в $O^q(\lambda)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3. *Для того чтобы подмодуль $I \subset P$ был обильным, необходимо и достаточно, чтобы I обладал свойством максимальности.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Пусть I – обильный подмодуль, $f \in P$ и $\text{Div}_\lambda f \supset \text{Div}_\lambda I \ \forall \lambda \in \mathbb{C}$. Нужно показать, что $f \in I$. Для этого в силу обильности I достаточно установить, что $f \in I_{\text{loc}}$. Фиксируем точку $\lambda \in \mathbb{C}$. По условию $\text{Div}_\lambda f \supset \text{Div}_\lambda I = \text{Div } I(\lambda)$. По свойству 7 дивизора $f \in I(\lambda)$. Поскольку это верно для любого $\lambda \in \mathbb{C}$, $f \in I_{\text{loc}}$. Так как по условию I – обильный подмодуль, то $f \in I$.

Достаточность. Пусть I обладает свойством максимальности, т.е. выполняется импликация (11). Покажем, что I – обильный. Пусть $f \in P$, $f \in I_{\text{loc}}$. Согласно свойству 2 $f \in I$ влечет $\text{Div}_\lambda f \supset \text{Div}_\lambda I \ \forall \lambda \in \mathbb{C}$. В силу того, что I обладает свойством максимальности, $f \in I$. Это верно для любого элемента $f \in P$, $f \in I_{\text{loc}}$. Значит, I – обильный подмодуль.

Определение спектра $\text{Sp } W$ и локального спектра $\text{Sp}_\lambda W$ инвариантного подпространства W было дано в [1, п. 2.4]. Очевидно, запас элементарных эхр- q -многочленов с показателем λ определяется $\text{Sp}_\lambda W$. Задача спектрального анализа, т.е. задача описания элементарных эхр- q -многочленов, содержащихся в W , решается с помощью следующего утверждения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.4. *Пусть W – инвариантное подпространство в H , $I = \text{An } W$. Тогда*

$$\text{Sp } W = \text{Div } I.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. По смыслу определений спектра и дивизора последнее соотношение равносильно множеству соотношений

$$\text{Sp}_\lambda W = \text{Div}_\lambda I \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}. \quad (12)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 2.4. Пусть $p = (p_1, \dots, p_q)$ – q -многочлен. Для линейного непрерывного функционала $S = (S_1, \dots, S_q)$ на H и его характеристического элемента $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_q) \in P$ справедливо соотношение

$$p(D)\varphi|_\lambda = \langle S, p(z)e^{\lambda z} \rangle. \quad (13)$$

Действительно,

$$\begin{aligned} p(D)\varphi|_\lambda &= \sum_{i=1}^q p_i(D)\varphi_i|_\lambda = \sum_{i=1}^q p_i(D)\langle S_i, e^{\lambda z} \rangle \\ &= \sum_{i=1}^q \langle S_i, p_i(D)e^{\lambda z} \rangle = \sum_{i=1}^q \langle S_i, p_i(z)e^{\lambda z} \rangle = \langle S, p(z)e^{\lambda z} \rangle. \end{aligned}$$

Теперь зафиксируем $\lambda \in \mathbb{C}$. Докажем, что $\text{Sp}_\lambda W = \text{Div}_\lambda I$. Пусть $p \in \text{Sp}_\lambda W$, т.е. $p(z)e^{\lambda z} \in W$. Рассмотрим элемент $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_q) \in I = \text{An } W$. Пусть

$S = (S_1, \dots, S_q)$ – соответствующий функционал. Очевидно, $S \in W^0$. Это дает $\langle S, p(z)e^{\lambda z} \rangle = 0$ и в силу (13) $p(D)\varphi|_{\lambda} = 0$. Таким образом,

$$p(D)\varphi|_{\lambda} = 0 \quad \forall \varphi \in I.$$

Однако этого еще не достаточно для заключения $p \in \text{Div}_{\lambda} I$. Для этого нужно показать, что

$$p(D)v|_{\lambda} = 0 \quad \forall v \in I(\lambda).$$

Пусть $u \in I$, $c \in O(\lambda)$. Используя формулу Лейбница (2), имеем

$$p(D)cu|_{\lambda} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c^{(k)}p^{(k)}(D)u}{k!} \Big|_{\lambda}. \quad (14)$$

Сумма справа конечна, так как при достаточно больших k $p^{(k)}(\xi) \equiv 0$. Далее, $\text{Sp}_{\lambda} W$ вместе с многочленом p содержит все его производные $p^{(k)}$ [1, п. 2.4]. Рассматривая случай с $p^{(k)}$ аналогично случаю с p , получим

$$p^{(k)}(D)u|_{\lambda} = 0 \quad \forall u \in I.$$

Из (14) теперь следует, что

$$p(D)cu|_{\lambda} = 0 \quad \forall u \in I, \quad \forall c \in O(\lambda). \quad (15)$$

Пусть $v \in I(\lambda)$. Тогда v представляется в виде конечной комбинации

$$v = \sum c_i u^{(i)}, \quad u^{(i)} \in I, \quad c_i \in O(\lambda).$$

Отсюда и из (15) следует

$$p(D)v|_{\lambda} = \sum p(D)c_i u^{(i)}|_{\lambda} = 0.$$

Таким образом, $p(D)v|_{\lambda} = 0 \quad \forall v \in I(\lambda)$. Это означает, что $p \in \text{Div} I(\lambda)$. Тем самым установлено включение $\text{Sp}_{\lambda} W \subset \text{Div}_{\lambda} I$.

Докажем обратное включение. Пусть $p \in \text{Div}_{\lambda} I$, т.е. $p(D)u|_{\lambda} = 0 \quad \forall u \in I$. Зафиксируем элемент $u \in I$. Пусть S – функционал, соответствующий u . В силу (13) соотношение $p(D)u|_{\lambda} = 0$ равносильно соотношению $\langle S, p(z)e^{\lambda z} \rangle = 0$. Когда u пробегает I , соответствующий функционал S пробегает W^0 . Таким образом, $\langle S, p(z)e^{\lambda z} \rangle = 0 \quad \forall S \in W^0$. По теореме Хана–Банаха $p(z)e^{\lambda z} \in W$, т.е. $p \in \text{Sp}_{\lambda} W$. Тем самым установлено, что

$$\text{Div}_{\lambda} I \subset \text{Sp}_{\lambda} W.$$

Из вышеизложенного следует

$$\text{Div}_{\lambda} I = \text{Sp}_{\lambda} W.$$

Предложение 2.4 доказано.

Рассмотрим инвариантное подпространство W в H . Пусть $\mathcal{W} = \{W'\}$ – семейство всех инвариантных подпространств в H с тем же спектром, что и W , т.е. $\text{Sp} W' = \text{Sp} W$. Если подпространство W допускает спектральный синтез, то оно выделяется среди подпространств семейства $\mathcal{W}$ *свойством минимальности*: $W \subset W'$ для любого $W' \in \mathcal{W}$. Более того, это свойство характеризует инвариантные подпространства, допускающие спектральный синтез: если W обладает свойством минимальности, то W допускает спектральный синтез.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ ДВОЙСТВЕННОСТИ. Необходимость. Пусть W допускает спектральный синтез. Нужно показать, что подмодуль $I = \text{An } W$ является обильным. Рассмотрим замкнутый подмодуль I' в P с тем же дивизором, что и I : $\text{Div } I' = \text{Div } I$. Пусть W' — инвариантное подпространство в H , аннуляторный подмодуль которого совпадает с I' . В силу предложения 2.4

$$\text{Sp } W' = \text{Div } I' = \text{Div } I = \text{Sp } W.$$

В силу свойства минимальности W имеет место включение $W' \supset W$. Для соответствующих аннуляторных подмодулей будет выполняться $I' \subset I$. Это верно для любого замкнутого подмодуля I' с тем же дивизором, что и I . Значит, I обладает свойством максимальности. Согласно предложению 2.3 I — обильный подмодуль.

Достаточность. Пусть подмодуль I является обильным. Согласно предложению 2.3 I обладает свойством максимальности. Пусть W' — инвариантное подпространство в H с тем же спектром, что и W ; $I' = \text{An } W'$. Согласно предложению 2.4 $\text{Div } I' = \text{Sp } W' = \text{Sp } W = \text{Div } I$.

Поскольку I обладает свойством максимальности, $I' \subset I$. Отсюда для подпространств W и W' имеем $W' \supset W$. Это верно для любого инвариантного подпространства W' , для которого $\text{Sp } W' = \text{Sp } W$. Значит, W обладает свойством минимальности и, следовательно, допускает спектральный синтез.

2.6. Кратность локального подмодуля. Пусть I — подмодуль в $O^q(\lambda)$ ранга k ; $\mathcal{M}(\lambda)$ — поле ростков функций, мероморфных в точке λ ; I_0 — совокупность элементов из $O^q(\lambda)$, представимых в виде конечных комбинаций

$$u = \sum m_i u^{(i)}, \quad u^{(i)} \in I, \quad m_i \in \mathcal{M}(\lambda).$$

Очевидно, I_0 — подмодуль модуля $O^q(\lambda)$. Из определения I_0 следует, что подмодуль I_0 устойчив:

$$f \in I_0, \quad z - \lambda \mid f \Rightarrow \frac{f}{z - \lambda} \in I_0.$$

Устойчивость подмодуля в $O^q(\lambda)$ равносильна тому, что его индекс (см. [1, п. 2.7]) равен нулю [11, предложение 2.3]: $\text{Ind } I_0 = 0$. Отметим, что если ранг I_0 равен q , то $I_0 = O^q(\lambda)$. *Кратностью* подмодуля I называется наименьшее целое число $m \geq 0$, для которого

$$(z - \lambda)^m \varphi \in I \quad \forall \varphi \in I_0.$$

Это число будем обозначать m_I .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.5. Справедливо неравенство

$$m_I \leq \text{Ind } I. \tag{16}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $l = \text{Ind } I$. Выберем независимую систему $u^{(1)}, \dots, u^{(k)} \subset I$, реализующую $\text{Ind } I$. Некоторый минор

$$\Delta = \begin{bmatrix} u^{(1)} & \dots & u^{(k)} \\ i_1 & \dots & i_k \end{bmatrix} \quad (17)$$

матрицы $(u^{(1)}, \dots, u^{(k)})$ обращается в нуль в точке λ с кратностью l . Пусть φ — элемент из I_0 . Обозначим через $\Delta_p(\varphi)$ определитель, полученный из (17) заменой p -го столбца на столбец из соответствующих компонент элемента φ . Применяя правило Крамера к строкам с номерами $i_1, \dots, i_k$, получим соотношение

$$\Delta \varphi = \sum_{p=1}^k \Delta_p(\varphi) u^{(p)}. \quad (18)$$

Учитывая, что $\Delta = (z - \lambda)^l f$, где $f \in O(\lambda)$, $f(\lambda) \neq 0$, из соотношения (18) получаем

$$(z - \lambda)^l \varphi \in I.$$

Следовательно, $m_I \leq l$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Неравенство (16) можно дополнить следующим утверждением.

Если $m_I = 0$, то $\text{Ind } I = 0$. Действительно, если $m_I = 0$, то, как следует из определения m_I , $I = I_0$; как отмечалось выше $\text{Ind } I_0 = 0$; поэтому и $\text{Ind } I = 0$.

Из неравенства (16) следует, что $m_I < \infty$. В связи с предложением 2.5 возникает вопрос, возможно ли строгое неравенство $m_I < \text{Ind } I$. Ответ — положительный.

ПРИМЕР. Пусть $k > 1$ и $v^{(1)}, \dots, v^{(k)}$ — независимая система элементов с индексом α . Теперь рассмотрим систему $u^{(1)}, \dots, u^{(k)}$, где $u^{(i)} = (z - \lambda)v^{(i)}$. Пусть I — подмодуль в $O^q(\lambda)$, порождаемый последней системой. Легко подсчитать, что индекс $u^{(1)}, \dots, u^{(k)}$ равен $\alpha + k$, а так как I порожден этой системой, то индекс I также равен $\alpha + k$ [1, п. 2.7]. Оценим m_I . Для любого элемента $\varphi \in I_0$ выполняется соотношение

$$\Delta \varphi = \sum_{p=1}^k \Delta_p(\varphi) u^{(p)}, \quad (19)$$

где $\Delta, \Delta_p(\varphi)$ — те же определители, что и в доказательстве предложения 2.5. Далее, легко видеть, что кратность обращения в нуль в точке λ любого определителя $\Delta_p(\varphi)$ не менее $k - 1$, а кратность обращения в нуль определителя Δ в той же точке равна $k + \alpha$. Отсюда и соотношения (19) следует, что

$$(z - \lambda)^{\alpha+1} \varphi \in I.$$

Поскольку это верно для любого элемента $\varphi \in I_0$, заключаем, что

$$m_I \leq \alpha + 1 < k + \alpha = \text{Ind } I.$$

Пусть

$$d_I := \sup \{ \deg p : p \in \text{Div } I \}.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.6. Пусть I – подмодуль в $O^q(\lambda)$ ранга q . Тогда

$$m_I = d_I + 1. \quad (20)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим подмодуль

$$J = \{f = (z - \lambda)^{m_I} \varphi : \varphi \in O^q(\lambda)\}.$$

Поскольку m_I – кратность подмодуля I , имеет место включение $J \subset I$, которое влечет $\text{Div } I \subset \text{Div } J$. Легко проверить, что $\text{Div } J$ состоит из всех q -многочленов степени, меньшей m_I . Отсюда следует, что $d_I + 1 \leq m_I$.

Теперь установим неравенство $m_I \leq d_I + 1$. Рассмотрим подмодуль

$$J = \{f = (z - \lambda)^{d_I+1} \cdot \varphi : \varphi \in O^q(\lambda)\}.$$

Пусть $p \in \text{Div } I$. Так как $\deg p \leq d_I$, то $p(D)u|_\lambda = 0 \ \forall u \in J$, т.е. $p \in \text{Div } J$. Таким образом, имеем включение $\text{Div } I \subset \text{Div } J$. В силу свойства 6 дивизоров $J \subset I$. Это влечет $m_I \leq d_I + 1$. Тем самым, соотношение (20) доказано.

Пусть I – подмодуль в P ранга q . Кратность подмодуля I в точке λ определяется как кратность подмодуля $I(\lambda) \subset O^q(\lambda)$. Эта величина обозначается $m_I(\lambda)$. Предложение 2.5 влечет

$$m_I(\lambda) \leq \text{Ind}_\lambda I \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}.$$

Пусть

$$d_I(\lambda) = \sup \{ \deg p : p \in \text{Div}_\lambda I \}.$$

Для подмодуля I в P ранга q предложение 2.6 влечет

$$m_I(\lambda) = d_I(\lambda) + 1.$$

2.7. О степенях элементарных $\exp$ - q -многочленов. Пусть I – подмодуль в P ранга q . Рассмотрим инвариантное подпространство W с $\text{An } W = I$. Точка λ называется *спектральной точкой* подпространства W , если $\text{Sp}_\lambda W \neq \{0\}$. Совокупность Λ спектральных точек назовем *спектральным множеством* инвариантного подпространства. Напомним, что индексное множество подмодуля $I \subset P$ – это множество всех точек λ , в которых $\text{Ind}_\lambda I > 0$ (см. [1, п. 2.7]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.7. Спектральное множество инвариантного подпространства W совпадает с индексным множеством его аннуляторного подмодуля $I = \text{An } W$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\lambda \in \Lambda$, т.е. $\text{Sp}_\lambda W \neq \{0\}$. Тогда в силу соотношения (12) $\text{Div}_\lambda I \neq \{0\}$. В силу предложения 2.1 это влечет, что $I(\lambda) \neq O^q(\lambda)$. Отсюда следует, что $\text{Ind } I(\lambda) > 0$, так как соотношения $\text{Ind } I(\lambda) = 0$ и $I(\lambda) = O^q(\lambda)$ равносильны. Таким образом, установлено, что спектральное множество принадлежит индексному множеству. Обратное включение доказывается в обратном порядке.

Для $\lambda \in \Lambda$ обозначим через $d_W(\lambda)$ наибольшую степень q -многочленов, содержащихся в $\text{Sp}_\lambda W$. Величина $m_W(\lambda) = d_W(\lambda) + 1$ называется *кратностью спектральной точки λ* .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.8. *Для любой спектральной точки $\lambda \in \Lambda$ имеет место соотношение*

$$m_W(\lambda) = m_I(\lambda). \quad (21)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Соотношение (21) следует из того, что $\text{Div}_\lambda I = \text{Sp}_\lambda W$. По этой причине $d_I(\lambda) = d_W(\lambda)$; следовательно,

$$m_I(\lambda) = 1 + d_I(\lambda) = 1 + d_W(\lambda) = m_W(\lambda).$$

СЛЕДСТВИЕ. *Для любого $\lambda \in \mathbb{C}$ образ $p_\lambda(W)$ элементарного проектора $p_\lambda: W \rightarrow W$ конечномерен.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из соотношения (21) следует, что $W(\lambda)$ – подпространство эксп- q -многочленов степени $m_I(\lambda) < \infty$, а такое подпространство конечномерно.

§ 3. Элементарные интерполяторы

3.1. Определение элементарного интерполятора. Пусть P – модуль, ассоциированный с открытым q -множеством G ; I – подмодуль в P ранга k ; $\mathcal{M}$ – поле мероморфных функций на $\mathbb{C}$; $\mathcal{M}^q$ – декартово произведение q копий $\mathcal{M}$. Элементами $\mathcal{M}^q$ являются мероморфные q -функции; $\mathcal{M}^q$ обладает структурой модуля над $\mathcal{M}$; $\mathcal{M}(I)$ – мероморфное расширение I , т.е. совокупность элементов из $\mathcal{M}^q$, представимых в виде конечных комбинаций

$$\sum m_i v^{(i)}, \quad v^{(i)} \in I, \quad m_i \in \mathcal{M}. \quad (1)$$

Очевидно, $\mathcal{M}(I)$ можно рассматривать как подмодуль $\mathcal{M}$ -модуля $\mathcal{M}^q$. Пусть $u^{(1)}, \dots, u^{(k)}$ – независимая система элементов из I ,

$$\Delta = \begin{bmatrix} u^{(1)} & \dots & u^{(k)} \\ i_1 & \dots & i_k \end{bmatrix} \neq 0,$$

$\Delta_p(\varphi)$ – определитель, полученный из Δ заменой p -го столбца на столбец из соответствующих компонент элемента $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_q)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. *Для того чтобы элемент $\varphi \in \mathcal{M}^q$ принадлежал $\mathcal{M}(I)$, необходимо и достаточно, чтобы его можно было представить в виде*

$$\varphi = \sum_{p=1}^k \frac{\Delta_p(\varphi)}{\Delta} u^{(p)}. \quad (2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Пусть $\varphi \in \mathcal{M}(I)$. Тогда φ можно представить в виде (1). Так как ранг I равен k и $u^{(1)}, \dots, u^{(k)}$ – независимая система элементов из I , то элементы $v^{(i)}$ могут быть представлены в виде комбинаций элементов $u^{(1)}, \dots, u^{(k)}$ с мероморфными коэффициентами. Поэтому и φ можно представить подобным же образом:

$$\varphi = \sum c_i u^{(i)}.$$

Используя правило Крамера для строк с номерами $i_1, \dots, i_k$ и учитывая при этом, что $\Delta \neq 0$, получим, что

$$c_p = \frac{\Delta_p(\varphi)}{\Delta}.$$

Достаточность. Если элемент φ представлен в виде (2), то он принадлежит $\mathcal{M}(I)$, так как $\Delta_p(\varphi)/\Delta \in \mathcal{M}$, $p = 1, \dots, k$.

Пусть $I_0 = P \cap \mathcal{M}(I)$. Множество I_0 состоит из элементов P , представимых в виде конечных комбинаций вида (1). Поэтому естественно называть I_0 *мероморфным расширением I в P* . Легко проверить, что I_0 обладает структурой подмодуля модуля P . Рассмотрим случай, когда ранг подмодуля I равен q . Тогда в I существует независимая система из q элементов $u^{(1)}, \dots, u^{(q)}$ с определителем

$$\Delta = \begin{vmatrix} u_1^{(1)} & \dots & u_1^{(q)} \\ \dots & \dots & \dots \\ u_q^{(1)} & \dots & u_q^{(q)} \end{vmatrix},$$

отличным от тождественного нуля. Любой элемент $\varphi \in P$ можно представить по правилу Крамера в виде (2) (с $k = q$). Поэтому справедливо утверждение: *если ранг I равен q , то $I_0 = P$* .

Зафиксируем точку $\lambda \in \mathbb{C}$. Для функции f , голоморфной в проколотой окрестности точки λ , обозначим через $\Gamma_\lambda f$ главную часть разложения Лорана функции f в окрестности λ , а через $\text{Пр}_\lambda f$ – правильную часть этого разложения. Очевидно, в окрестности λ

$$f = \Gamma_\lambda f + \text{Пр}_\lambda f.$$

Рассмотрим оператор

$$\text{Int}_\lambda \varphi := \sum_{p=1}^k \left(\Gamma_\lambda \frac{\Delta_p(\varphi)}{\Delta} \right) u^{(p)}. \quad (3)$$

Оператор Int_λ назовем *элементарным интерполятором*, отвечающим λ , построенным по системе $u^{(1)}, \dots, u^{(k)}$ и строкам с номерами $i_1, \dots, i_k$. В случае $k = q$ будем выражаться более просто, а именно, будем говорить, что элементарный интерполятор Int_λ построен по системе $u^{(1)}, \dots, u^{(k)}$.

3.2. Свойства элементарного интерполятора.

Сравнение $f \equiv g \pmod{I(\lambda)}$ означает, что $f - g \in I(\lambda)$.

Свойство 1. При $\varphi \in \mathcal{M}(I)$ справедливы сравнения

$$\text{Int}_\lambda \varphi \equiv \begin{cases} 0 \pmod{I(\xi)}, & \xi \neq \lambda, \\ \varphi \pmod{I(\lambda)}. \end{cases} \quad (4)$$

Доказательство. Поскольку

$$\Gamma_{\lambda} \frac{\Delta_p(\varphi)}{\Delta}, \quad p = 1, \dots, k,$$

— рациональные функции с единственным возможным полюсом в точке λ , из выражения (3) для $\text{Int}_\lambda \varphi$ сразу следует, что $\text{Int}_\lambda \varphi \in I(\xi)$ или, что то же самое, $\text{Int}_\lambda \varphi \equiv 0 \pmod{I(\xi)}$ при $\xi \neq \lambda$. Далее, в окрестности λ имеем

$$\Gamma_{\lambda} \frac{\Delta_p(\varphi)}{\Delta} = \frac{\Delta_p(\varphi)}{\Delta} - \text{Pr}_\lambda \frac{\Delta_p(\varphi)}{\Delta}.$$

Отсюда, в той же окрестности получаем представление

$$\text{Int}_\lambda \varphi = \sum_{p=1}^k \left(\Gamma_{\lambda} \frac{\Delta_p(\varphi)}{\Delta} \right) u^{(p)} = \varphi - \sum_{p=1}^k \left(\text{Pr}_\lambda \frac{\Delta_p(\varphi)}{\Delta} \right) u^{(p)}. \quad (5)$$

Здесь мы воспользовались соотношением (2). Сумма в (5) представляет элемент из $I(\lambda)$. Следовательно,

$$\text{Int}_\lambda \varphi \equiv \varphi \pmod{I(\lambda)}.$$

Система $u^{(1)}, \dots, u^{(k)}$ элементов из P называется *допустимой*, если существует односвязная q -область $G' \subset G$ такая, что $u^{(1)}, \dots, u^{(k)} \in P(G')$. Далее везде предполагается, что интерполятор Int_λ строится по допустимой системе $u^{(1)}, \dots, u^{(k)}$ из I .

Свойство 2. Оператор Int_λ отображает I_0 в I_0 .

Доказательство. Пусть $u^{(1)}, \dots, u^{(k)} \in P(G')$, где G' — q -область, принадлежащая G . Зафиксируем элемент $\varphi \in I_0$. Сравнения (4) позволяют заключить, что $\text{Int}_\lambda \varphi$ — целая q -функция. Она представляет собой конечную комбинацию элементов $u^{(1)}, \dots, u^{(k)}$ из $P(G')$ с рациональными коэффициентами, имеющими единственный возможный полюс в точке λ . Поэтому при достаточно большом m

$$(z - \lambda)^m \text{Int}_\lambda \varphi \in P(G').$$

Так как G' — q -область, то модуль $P(G')$ устойчив относительно деления на двучлены [1, п. 3.3]; поэтому $\text{Int}_\lambda \varphi \in P(G')$ и, тем более, $\text{Int}_\lambda \varphi \in P$. Кроме того, из представления (3) видно, что $\text{Int}_\lambda \varphi \in \mathcal{M}(I)$. Следовательно, $\text{Int}_\lambda \varphi \in P \cap \mathcal{M}(I) = I_0$. Это верно для любого $\varphi \in I_0$. Таким образом, Int_λ отображает I_0 в I_0 .

Подмодуль I в P называется *квазистойчивым* (см. [1, §4]), если для любой точки $\lambda \in \mathbb{C}$ справедлива импликация

$$f \in I, \quad \frac{f}{z - \lambda} \in I(\lambda), \quad \frac{f}{z - \lambda} \in P \Rightarrow \frac{f}{z - \lambda} \in I.$$

СВОЙСТВО 3. Если I – квазиустойчивый подмодуль, то оператор Int_λ отображает I в I .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\varphi \in I$. Из свойства 1 следует

$$\text{Int}_\lambda \varphi \in I_{\text{loc}}$$

Из представления (3) видно, что $\text{Int}_\lambda \varphi$ есть линейная комбинация элементов из I с рациональными коэффициентами с единственным возможным полюсом в точке λ . Поэтому при достаточно большом целом m

$$(z - \lambda)^m \text{Int}_\lambda \varphi \in I.$$

Кроме того, по свойству 2 $\text{Int}_\lambda \varphi \in P$. На основании этих фактов и квазиустойчивости I заключаем, что $\text{Int}_\lambda \varphi \in I$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Понятие главной части в точке λ естественным образом распространяется на ростки мероморфных функций в точке λ ; соответственно этому, действие оператора Int_λ распространяется на $I(\lambda)$ – локальный подмодуль, порождаемый I в точке λ . Справедливо утверждение: если I – квазиустойчивый подмодуль, то оператор Int_λ отображает $I(\lambda)$ в I . Доказательство этого утверждения повторяет доказательство свойства 3.

СВОЙСТВО 4. Пусть I – квазиустойчивый подмодуль, $\varphi \in \mathcal{M}(I)$, p – многочлен. Тогда

$$\text{Int}_\lambda p\varphi \equiv p \text{Int}_\lambda \varphi \pmod{I}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу сравнений (4) имеем

$$\text{Int}_\lambda p\varphi = \begin{cases} 0 \pmod{I(\xi)}, & \xi \neq \lambda, \\ p\varphi \pmod{I(\lambda)}, \end{cases} \quad (6)$$

$$p \text{Int}_\lambda \varphi = \begin{cases} 0 \pmod{I(\xi)}, & \xi \neq \lambda, \\ p\varphi \pmod{I(\lambda)}. \end{cases} \quad (7)$$

Сравнивая (6) и (7), заключаем, что

$$p \text{Int}_\lambda \varphi - \text{Int}_\lambda p\varphi \in I_{\text{loc}}. \quad (8)$$

Далее, $p \text{Int}_\lambda \varphi$ и $\text{Int}_\lambda p\varphi$ – линейные комбинации элементов из I с рациональными коэффициентами с единственным возможным полюсом в точке λ . Поэтому при достаточно большом m

$$(z - \lambda)^m (p \text{Int}_\lambda \varphi - \text{Int}_\lambda p\varphi) \in I. \quad (9)$$

Кроме того,

$$p \text{Int}_\lambda \varphi - \text{Int}_\lambda p\varphi \in P. \quad (10)$$

На основании (8)–(10) заключаем, что

$$p \text{Int}_\lambda \varphi - \text{Int}_\lambda p\varphi \in I.$$

Пусть $v^{(1)}, \dots, v^{(k)}$ – еще одна допустимая независимая система элементов из I . Сравним Int_λ с элементарным интерполятором Int'_λ , построенным по системе $v^{(1)}, \dots, v^{(k)}$ и строкам с номерами $j_1, \dots, j_k$.

СВОЙСТВО 5. Если I – квазиустойчивый подмодуль, то

$$\text{Int}_\lambda \varphi \equiv \text{Int}'_\lambda \varphi \pmod{I} \quad \forall \varphi \in \mathcal{M}(I).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно свойству 1

$$\begin{aligned} \text{Int}_\lambda \varphi &\equiv \begin{cases} 0 \pmod{I(\xi)}, & \xi \neq \lambda, \\ \varphi \pmod{I(\lambda)}, \end{cases} \\ \text{Int}'_\lambda \varphi &\equiv \begin{cases} 0 \pmod{I(\xi)}, & \xi \neq \lambda, \\ \varphi \pmod{I(\lambda)}. \end{cases} \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\text{Int}_\lambda \varphi - \text{Int}'_\lambda \varphi \in I_{\text{loc}}.$$

Далее, разность $\text{Int}_\lambda \varphi - \text{Int}'_\lambda \varphi$ есть конечная линейная комбинация элементов из I с рациональными коэффициентами с единственным возможным полюсом в точке λ . Умножая эту разность на $(z - \lambda)^m$, где m достаточно большое целое число, получаем

$$(z - \lambda)^m (\text{Int}_\lambda \varphi - \text{Int}'_\lambda \varphi) \in I.$$

В силу квазиустойчивости I заключаем, что

$$\text{Int}_\lambda \varphi - \text{Int}'_\lambda \varphi \in I.$$

СВОЙСТВО 6. Пусть I – квазиустойчивый подмодуль и m – кратность I в точке λ (см. п. 2.6). Тогда

$$(z - \lambda)^m \text{Int}_\lambda \varphi \equiv 0 \pmod{I} \quad \forall \varphi \in I_0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\varphi \in I_0$. Согласно определению кратности подмодуля в точке λ $(z - \lambda)^m \varphi \in I(\lambda)$. Используя этот факт и сравнения (4), заключаем, что

$$(z - \lambda)^m \text{Int}_\lambda \varphi \in I_{\text{loc}}.$$

Теперь, учитывая квазиустойчивость I , тем же приемом, что и при доказательстве свойств 3–5, устанавливаем, что

$$(z - \lambda)^m \text{Int}_\lambda \varphi \in I.$$

СЛЕДСТВИЕ. Если $\text{Ind}_\lambda I = 0$, то

$$\text{Int}_\lambda \varphi \equiv 0 \pmod{I} \quad \forall \varphi \in I_0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно предложению 2.5 $m \leq \text{Ind}_\lambda I$. По условию $\text{Ind}_\lambda I = 0$, следовательно, $m = 0$. Теперь свойство 6 влечет

$$\text{Int}_\lambda \varphi \in I.$$

Наделим подмодуль I_0 топологией, индуцированной из P .

СВОЙСТВО 7. *Отображение $\text{Int}_\lambda: I_0 \rightarrow I_0$ непрерывно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\Delta, \Delta_p(\varphi)$ – определители, определяемые так же, как в п. 3.1, $l = \text{Ind}_\lambda \Delta$. Рассмотрим операцию v :

$$v(\varphi) = (z - \lambda)^l \text{Int}_\lambda \varphi.$$

Представим эту операцию в виде

$$v(\varphi) = \sum_{p=1}^k Q_p(\varphi) u^{(p)},$$

где

$$Q_p(\varphi)(z) = (z - \lambda)^l \Gamma_\lambda \frac{\Delta_p(\varphi)}{\Delta}$$

– многочлен степени, меньшей l , коэффициенты которого линейно зависят от $\varphi \in P$, причем эта зависимость непрерывна в топологии равномерной сходимости на компактах. Поскольку топология равномерной сходимости на компактах слабее топологии P , эти коэффициенты являются линейными непрерывными функционалами на P . Далее, существует q -область G' такая, что $u^{(1)}, \dots, u^{(k)} \in P(G')$. Умножение на многочлены непрерывно в топологии $P(G')$, поэтому v отображает линейно и непрерывно P в $P(G')$. Покажем, что Int_λ отображает непрерывно I_0 в $P(G')$. Пусть V – окрестность нуля в $P(G')$. Пространство $P(G')$ является локально равномерно устойчивым [1, теорема 3.2]. Путем l -кратного применения импликации (2) из [1, § 3] получим, что существует окрестность нуля $U' \subset P(G')$ такая, что

$$f \in U', \quad (z - \lambda)^l \mid f \Rightarrow \frac{f}{(z - \lambda)^l} \in V. \quad (11)$$

Далее, поскольку операция $v: P \rightarrow P(G')$ является непрерывной, существует окрестность нуля $U \subset P$ такая, что $v(U) \subset U'$. Пусть $\varphi \in U \cap I_0$. Тогда $v(\varphi) \in U'$, $(z - \lambda)^l \mid v(\varphi)$, и в силу импликации (11)

$$\text{Int}_\lambda \varphi = \frac{v(\varphi)}{(z - \lambda)^l} \in V.$$

Это верно для любой $\varphi \in U \cap I_0$, значит,

$$\text{Int}_\lambda(U \cap I_0) \subset V.$$

Тем самым установлено, что Int_λ непрерывно отображает I_0 в $P(G')$. Поскольку $P(G')$ непрерывно вложено в P , Int_λ будет также осуществлять непрерывное отображение I_0 в P . Чтобы завершить доказательство, достаточно заметить, что образ Int_λ лежит в I_0 и I_0 наделен топологией, индуцированной из P .

3.3. Элементарный факторинтерполятор. Пусть I – квазиустойчивый подмодуль. Согласно свойству 2

$$\text{Int}_\lambda I_0 \subset I_0;$$

согласно свойству 3 $\text{Int}_\lambda I \subset I$. Поэтому сужение оператора Int_λ на I_0 порождает факторотображение (см. п. 1.3)

$$\widehat{\text{Int}}_\lambda: I_0/I \rightarrow I_0/I,$$

которое класс смежности $\Phi \in I_0/I$ переводит в класс смежности $\Psi \in I_0/I$, содержащий $\text{Int}_\lambda \Phi$. Если ввести стандартным образом операцию умножения классов смежности на многочлены, то P/I можно рассматривать как модуль над кольцом $\mathbb{C}[z]$. Этот модуль наделяется фактортопологией топологии P по I . Очевидно, I_0/I – подпространство P/I . Это подпространство наделяется топологией, индуцированной из P/I . Последняя совпадает с фактортопологией топологии I_0 по I . В силу свойства 7 отображение $\text{Int}_\lambda: I_0 \rightarrow I_0$ непрерывно, поэтому факторотображение $\widehat{\text{Int}}_\lambda: I_0/I \rightarrow I_0/I$ будет также непрерывно.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2. Факторотображение

$$\widehat{\text{Int}}_\lambda: I_0/I \rightarrow I_0/I$$

обладает следующими свойствами:

- 1°. $\widehat{\text{Int}}_\lambda$ есть модульный гомоморфизм;
- 2°. $\widehat{\text{Int}}_\lambda$ переводит класс смежности $\Phi \in I_0/I$ в класс смежности $\Psi \in I_0/I$, причем

$$\Psi = \begin{cases} 0 \pmod{I(\xi)}, & \xi \neq \lambda, \\ \Phi \pmod{I(\lambda)}, \end{cases}$$

соотношение $\Psi \equiv \Phi \pmod{I(\xi)}$ означает, что $\psi \equiv \varphi \pmod{I(\xi)} \quad \forall \psi \in \Psi, \forall \varphi \in \Phi$;

- 3°. если m – кратность I в точке λ (см. п. 2.6), то

$$(z - \lambda)^m \widehat{\text{Int}}_\lambda \Phi = 0 \quad \forall \Phi \in I_0/I;$$

- 4°. отображение $\widehat{\text{Int}}_\lambda$ не зависит от выбора элементарного интерполятора Int_λ ;
- 5°. отображение $\widehat{\text{Int}}_\lambda$ непрерывно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Свойство 1° есть следствие свойства 4; свойство 2° – следствие свойства 1, свойство 3° – следствие свойства 6, свойство 4° – следствие свойства 5, свойство 5° – следствие свойства 7.

3.4. Интерполяторы, ассоциированные с замкнутыми контурами.

Пусть I – подмодуль в $O^q(\lambda)$ ранга k ; I_0 – мероморфное расширение I в P (см. п. 3.1); $u^{(1)}, \dots, u^{(k)}$ – допустимая (см. п. 3.2) независимая система элементов из I с определителем

$$\Delta = \begin{bmatrix} u^{(1)} & \dots & u^{(k)} \\ i_1 & \dots & i_k \end{bmatrix}, \quad (12)$$

отличным от тождественного нуля. Пусть Γ – замкнутый контур, охватывающий ограниченное открытое множество $K \subset \mathbb{C}$. Для мероморфной в $\mathbb{C}$ функции f обозначим

$$\Gamma_{\Gamma} f = \sum_{\lambda_i \in \Gamma} \Gamma_{\lambda_i} f,$$

где суммирование распространяется на полюсы λ_i функции f , охватываемые контуром Γ . Рассмотрим оператор

$$\text{Int}_{\Gamma} \varphi = \sum_{p=1}^k \left(\Gamma_{\Gamma} \frac{\Delta_p(\varphi)}{\Delta} \right) u^{(p)}.$$

Оператор Int_{Γ} назовем *интерполятором, ассоциированным с контуром Γ* , построенным по системе $u^{(1)}, \dots, u^{(k)}$ и строкам с номерами $i_1, \dots, i_k$. Легко видеть, что

$$\text{Int}_{\Gamma} \varphi = \sum_{\lambda_i \in \Gamma} \text{Int}_{\lambda_i} \varphi,$$

где λ_i – нули определителя Δ . Из этого представления следует, что оператор Int_{Γ} наследует свойства элементарных интерполяторов, а именно:

1' . для любого элемента $\varphi \in I_0$

$$\text{Int}_{\Gamma} \varphi \equiv \begin{cases} 0 \pmod{I(\lambda)}, & \lambda \notin Z_{\Gamma}, \\ \varphi \pmod{I(\lambda)}, & \lambda \in Z_{\Gamma}, \end{cases}$$

где Z_{Γ} – множество нулей Δ , охватываемых Γ ;

2' . оператор Int_{Γ} отображает I_0 в I_0 ;

3' . если I – квазиустойчивый подмодуль, то Int_{Γ} отображает I в I ;

4' . если I – квазиустойчивый подмодуль и p – многочлен, то

$$p \text{Int}_{\Gamma} \varphi \equiv \text{Int}_{\Gamma} p\varphi \quad \forall \varphi \in I_0.$$

Пусть $v^{(1)}, \dots, v^{(k)}$ – другая независимая система элементов из I и Int'_{Γ} – интерполятор, построенный по системе $u^{(1)}, \dots, u^{(k)}$ и строкам с номерами $j_1, \dots, j_k$.

5' . Если I – квазиустойчивый подмодуль, то

$$\text{Int}_{\Gamma} \varphi \equiv \text{Int}'_{\Gamma} \varphi \pmod{I} \quad \forall \varphi \in I_0.$$

Напомним, что $m_I(\lambda)$ обозначает кратность подмодуля I в точке λ . В силу предложения 2.5 множество тех λ , для которых $m_I(\lambda) > 0$ вложено в индексное множество подмодуля I (см. п. 2.6), поэтому контур Γ может охватывать лишь конечное число точек, в которых кратность подмодуля положительна.

Введем в рассмотрение многочлен

$$p_\Gamma(z) = \prod_{\lambda_i \in \Gamma} (z - \lambda_i)^{m_I(\lambda_i)},$$

где произведение берется по точкам $\lambda_i \in \Gamma$, в которых $m_I > 0$.

6'. Если I – квазиустойчивый подмодуль, то

$$p_\Gamma \operatorname{Int}_\Gamma \varphi \equiv 0 \pmod{I} \quad \forall \varphi \in I_0.$$

7'. Отображение

$$\operatorname{Int}_\Gamma: I_0 \rightarrow I_0$$

– непрерывно.

Свойства 1'–7' являются следствиями соответствующих свойств 1–7 элементарных интерполяторов.

Пусть теперь I – квазиустойчивый подмодуль. В силу свойств 2', 3' оператор $\operatorname{Int}_\Gamma$ порождает фактороператор

$$\widehat{\operatorname{Int}}_\Gamma: I_0/I \rightarrow I_0/I. \quad (13)$$

Пусть $\tau: P \rightarrow P/I$ – канонический гомоморфизм. Очевидно, что

$$(\widehat{\operatorname{Int}}_\Gamma \circ \tau)(\varphi) = (\tau \circ \operatorname{Int}_\Gamma)(\varphi) = \sum_{\lambda_i \in \Gamma} (\tau \circ \operatorname{Int}_{\lambda_i})(\varphi).$$

Свойство 4' влечет, что отображение (13) – модульный гомоморфизм, а свойство 7' – что этот гомоморфизм непрерывный. Наконец, свойство 5' позволяет утверждать, что гомоморфизм (13) не зависит от выбора системы $u^{(1)}, \dots, u^{(k)} \in I$ и строк $i_{(1)}, \dots, i_{(k)}$, для которых соответствующий определитель (12) отличен от тождественного нуля.

§ 4. Элементарные проекторы

4.1. Определение элементарного проектора. Пусть G – q -множество Рунге; $H = H(G)$; W – инвариантное подпространство в H . Для фиксированной точки $\lambda \in \mathbb{C}$ обозначим $W(\lambda)$ совокупность всех элементарных $\exp q$ -многочленов с показателем λ , содержащихся в W ; $W(\lambda)$ – линейное подпространство, содержащееся в W . *Элементарным проектором*, отвечающим λ , называется линейное непрерывное отображение $p_\lambda: W \rightarrow W$, обладающее следующими свойствами:

- 1°. $p_\lambda(W) = W(\lambda)$;
- 2°. $p_\lambda^2 = p_\lambda$;
- 3°. p_λ перестановочно с оператором дифференцирования, т.е.

$$D \circ p_\lambda = p_\lambda \circ D.$$

4.2. Преобразование элементарных ехр- q -многочленов. Пусть $G, G' - q$ -множества Рунге; $H = H(G), H' = H(G')$; W, W' – инвариантные подпространства в H, H' , соответственно; $I = \text{An } W, I' = \text{An } W'$ – аннуляторные подмодули этих подпространств.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1. Пусть $u: W \rightarrow W'$ – линейное отображение, перестановочное с оператором дифференцирования. Если $e - \text{ехр-}q\text{-многочлен с показателем } \mu$, то $u(e) - \text{ехр-}q\text{-многочлен с показателем } \mu$; при этом степень e' не превосходит степени e .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть степень e меньше n . Тогда $(D - \mu E)^n e = 0$. В силу перестановочности u и D имеем

$$(D - \mu E)^n e' = (D - \mu E)^n u(e) = u((D - \mu E)^n e) = 0.$$

Таким образом, элемент e' удовлетворяет уравнению $(D - \mu E)^n e' = 0$. Отсюда следует, что $e' - \text{элементарный ехр-}q\text{-многочлен с показателем } \mu \text{ и степенью, меньшей } n$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.2. Пусть $u: W \rightarrow W'$ – линейное непрерывное отображение, $u^{\otimes}: P'/I' \rightarrow P/I - \text{дуальное отображение (см. п. 1.3); } e(z) = p(z)e^{\lambda z}, e'(z) = p'(z)e^{\mu z} - \text{элементарные ехр-}q\text{-многочлены. Для того чтобы } e' = u(e), \text{ необходимо и достаточно, чтобы для любого класса смежности } \Phi' \in P'/I' \text{ и его образа } \Phi = u^{\otimes}(\Phi') \in P/I \text{ выполнялось соотношение}$

$$p(D)\Phi|_{\lambda} = p'(D)\Phi'|_{\mu}. \quad (1)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Соотношение (1) следует понимать в следующем смысле: для любых $\varphi \in \Phi$ и $\varphi' \in \Phi'$ выполняется соотношение

$$p(D)\varphi|_{\lambda} = p'(D)\varphi'|_{\mu}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 4.2. Необходимость. Пусть $e' = u(e)$. Сопряженное отображение $u^*: H'^*/W'^0 \rightarrow H^*/W^0$ (см. п. 1.3) переводит класс смежности $S' \in H'^*/W'^0$, содержащий функционал $s' \in H'^*$, в класс смежности $S \in H^*/W^0$, содержащий функционал $s \in H^*$, при этом

$$\langle s, f \rangle = \langle s', u(f) \rangle \quad \forall f \in W.$$

Полагая в этом соотношении $f = e$, получаем

$$\langle s, e \rangle = \langle s', e' \rangle$$

или, что то же самое,

$$\langle s, p(z)e^{\lambda z} \rangle = \langle s', p'(z)e^{\mu z} \rangle. \quad (2)$$

Последнее соотношение верно для любых функционалов $s \in S, s' \in S'$, где $S = u^*(S')$. Пусть $\varphi, \varphi' - \text{характеристические элементы, соответственно, } s, s'$. По определению дуального отображения $u^{\otimes}: P'/I' \rightarrow P/I$ (см. п. 1.3) класс

смежности $\Phi' \in P'/I'$, содержащий элемент φ' , оно переводит в класс смежности $\Phi \in P/I$, содержащий элемент φ ; при этом соответствующие функционалы s и s' связаны соотношением (2). В силу формулы (13) §2 соотношение (2) можно переписать в терминах характеристических элементов:

$$p(D)\varphi|_{\lambda} = p'(D)\varphi'|_{\mu} \quad \forall \varphi \in \Phi, \quad \forall \varphi' \in \Phi',$$

где $\Phi = u^{\otimes}(\Phi')$. Тем самым соотношение (1) доказано.

Достаточность. Пусть $\Phi = u^{\otimes}(\Phi')$ и выполняется соотношение (1). Это означает, что для любых представителей соответствующих классов $\varphi \in \Phi$, $\varphi' \in \Phi'$ выполняется соотношение

$$p(D)\varphi|_{\lambda} = p'(D)\varphi'|_{\mu}. \quad (3)$$

В терминах соответствующих функционалов s, s' соотношение (3) переписывается в виде

$$\langle s, e \rangle = \langle s', e' \rangle. \quad (4)$$

Здесь s — любой представитель класса смежности $s \in H^*/W^0$, s' — любой представитель класса $S' \in H'^*/W'^0$, причем $S = u^*(S')$.

Соотношение (4) можно записать в эквивалентной форме

$$\langle S, e \rangle = \langle S', e' \rangle,$$

откуда следует

$$\langle S', e' \rangle = \langle u^*(S'), e \rangle = \langle S', u(e) \rangle.$$

Итак,

$$\langle S', e' - u(e) \rangle = 0.$$

Это верно для любого линейного непрерывного функционала S' на W' . По теореме Хана–Банаха $e' - u(e) = 0$.

4.3. Свойства элементарного проектора. Если $W(\lambda) = \{0\}$, то существует единственный тривиальный проектор p_{λ} , переводящий любой элемент $f \in W$ в нуль. Таким образом, нетривиальный элементарный проектор может существовать только в случае $W(\lambda) \neq \{0\}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.3. Пусть существует нетривиальный элементарный проектор $p_{\lambda}: W \rightarrow W$. Тогда справедливы следующие утверждения:

1)

$$p_{\lambda}(e) = \begin{cases} 0, & e \in W(\mu), \mu \neq \lambda, \\ e, & e \in W(\lambda); \end{cases} \quad (5)$$

2) дуальное отображение $p_{\lambda}^{\otimes}$ переводит класс смежности $\Phi \in P/I$ в класс смежности $\Psi \in P/I$, удовлетворяющий условию

$$\Psi = \begin{cases} 0 \pmod{I(\mu)}, & \mu \neq \lambda, \\ \Phi \pmod{I(\lambda)}; \end{cases} \quad (6)$$

- 3) ядро $p_\lambda^\otimes$ состоит из всех классов смежности $\Phi \in P/I$, удовлетворяющих условию

$$\Phi \equiv 0 \pmod{I(\lambda)};$$

- 4) отображение

$$p_\lambda^\otimes: P/I \rightarrow P/I$$

—модульный гомоморфизм;

- 5) ранг аннуляторного подмодуля $I = \text{An } W$ равен q и $\text{Ind}_\lambda I > 0$;
 6) если m — кратность подмодуля I в точке λ , то $(z - \lambda)^m p_\lambda^\otimes = 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Для классов смежности $\Phi, \Psi \in P/I$ сравнение

$$\Phi \equiv \Psi \pmod{I(\xi)}$$

означает, что

$$\psi \equiv \varphi \pmod{I(\xi)} \quad \forall \varphi \in \Phi, \quad \forall \psi \in \Psi.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 4.3. Доказательство разбивается на пункты, соответствующие отдельным утверждениям. Исходным моментом является предположение о существовании нетривиального элементарного проектора $p_\lambda: W \rightarrow W$.

1) Пусть $e \in W(\lambda)$. Тогда по свойству 1° элементарного проектора существует элемент $f \in W$ такой, что $e = p_\lambda(f)$. По свойству 2°

$$p_\lambda(e) = p_\lambda^2(f) = p_\lambda(f) = e.$$

Таким образом, второе из соотношений (5) доказано. Докажем первое соотношение. Пусть $e \in W(\mu)$, $\mu \neq \lambda$. С одной стороны, в силу свойства 3° и предложения 4.1 образ $e' = p_\lambda(e)$ принадлежит $W(\mu)$. С другой — по свойству 1° $e' \in W(\lambda)$. Таким образом, $e' \in W(\mu) \cap W(\lambda)$, что возможно только в случае $e' = 0$.

2) Установим сравнения (6). Пусть $\mu \neq \lambda$. Воспользуемся первым из соотношений (5); $p_\lambda(e) = 0 \quad \forall e \in W(\mu)$. Элементарный $\exp q$ -многочлен e принадлежит $W(\mu)$ тогда и только тогда, когда он имеет вид $p(z)e^{\mu z}$, $p \in \text{Sp}_\mu W$. Применяя предложение 4.2, получим, что $p_\lambda^\otimes$ переводит класс смежности $\Phi \in P/I$ в класс смежности $\Psi \in P/I$ такой, что

$$p(D)\Psi|_\mu = 0 \quad \forall p \in \text{Sp}_\mu W$$

или, что то же самое,

$$p(D)\psi|_\mu = 0 \quad \forall \psi \in \Psi, \quad \forall p \in \text{Sp}_\mu W.$$

Согласно предложению 2.4 $\text{Sp}_\mu W = \text{Div } I(\mu)$. Следовательно, для любого элемента $\psi \in \Psi$

$$p(D)\psi|_\mu = 0 \quad \forall p \in \text{Div } I(\mu).$$

На основании свойства 7 дивизора (см. п. 2.3) заключаем, что $\psi \in I(\mu) \quad \forall \psi \in \Psi$. Последний факт записывается в форме $\Psi \equiv 0 \pmod{I(\mu)}$. Теперь воспользуемся

соотношением $p_\lambda(e) = e \quad \forall e \in W(\lambda)$. Элементы из $W(\lambda)$ являются эксп- q -многочленами $p(z)e^{\lambda z}$, где $p \in \text{Div } I(\lambda)$. Согласно предложению 4.2 $p_\lambda^\oplus$ переводит класс смежности Φ в класс смежности Ψ , для которого

$$p(D)\Psi|_\lambda = p(D)\Phi|_\lambda \quad \forall p \in \text{Div } I(\lambda).$$

Это означает, что для любых элементов $\varphi \in \Phi$, $\psi \in \Psi$ $p(D)\psi|_\lambda = p(D)\varphi|_\lambda$ или, что то же самое,

$$p(D)(\psi - \varphi)|_\lambda = 0 \quad \forall p \in \text{Div } I(\lambda).$$

В силу свойства 7 дивизора (см. п. 2.3) заключаем, что

$$\psi - \varphi \in I(\lambda) \quad \forall \varphi \in \Phi, \quad \forall \psi \in \Psi.$$

Это равносильно второму из соотношений (6).

3) Пусть $\hat{T}: H^*/W^0 \rightarrow P/I$ — отображение, полученное факторизацией канонического отображения $T: H^* \rightarrow P$ (см. п. 1.3). Ядро дуальной операции $p_\lambda^\oplus: P/I \rightarrow P/I$ есть образ ядра сопряженной операции $p_\lambda^*: H^*/W^0 \rightarrow H^*/W^0$ относительно $\hat{T}$. Известно, что ядро p_λ^* есть подпространство в $W^* = H^*/W^0$, ортогональное образу p_λ , т.е. подпространству $W(\lambda)$. Таким образом, ядро p_λ^* состоит из всех классов смежности $S \in H^*/W^0$, содержащих функционалы s , обращающиеся в нуль на $W(\lambda)$. Функционал s аннулирует $W(\lambda)$ тогда и только тогда, когда его характеристический элемент φ принадлежит $I(\lambda)$. Поэтому ядро $p_\lambda^\oplus$ состоит из всех классов смежности Φ , содержащих элементы φ из $I(\lambda)$.

4) Элементарный проектор $p_\lambda: W \rightarrow W$ перестановочен с оператором дифференцирования D ; поэтому согласно предложению 1.6 $p_\lambda^\oplus: P/I \rightarrow P/I$ — модульный гомоморфизм.

5) Пусть φ — произвольный элемент из P , $\Phi = [\varphi]$ — класс смежности, содержащий φ . По доказанному выполняются сравнения (6). Пусть $\psi \in \Psi$. Докажем, что $\psi \in I_0$, где I_0 — мероморфное расширение I в P (см. п. 3.1). Зафиксируем $\xi_0 \neq \lambda$. Первое из сравнений (6) влечет $\psi \in I(\xi_0)$. Пусть $u^{(1)}, \dots, u^{(k)}$ — независимая система элементов из I , порождающая $I(\xi_0)$. Элемент ψ можно представить в виде

$$\psi = \sum c_i u^{(i)}, \quad c_i \in O(\xi_0).$$

Используя правило Крамера, установим, что в действительности c_i являются мероморфными функциями на $\mathbb{C}$. Это значит, что $\psi \in I_0$. Второе сравнение в (6) влечет $\psi = \varphi \pmod{I(\lambda)}$. Так как $\psi \in I_0$, а $I \subset I_0$, то из последнего сравнения следует, что $\varphi \equiv 0 \pmod{I_0(\lambda)}$ или, что то же самое, $\varphi \in I_0(\lambda)$. Пусть $v^{(1)}, \dots, v^{(m)}$ — независимая система элементов из I_0 , порождающая $I_0(\lambda)$. Тогда

$$\varphi = \sum_{i=1}^m c_i v^{(i)}, \quad c_i \in O(\lambda). \quad (7)$$

Снова используя правило Крамера, установим, что в действительности $c_1, \dots, c_m$ — мероморфные функции. Значит, $\varphi \in I_0$. Поскольку это верно для любого элемента $\varphi \in P$, то $I_0 = P$ и, следовательно, $\text{Rank } I_0 = q$. Но из определения I_0 следует,

что $\text{Rank } I_0 = \text{Rank } I$. Следовательно, $\text{Rank } I = q$. Первая часть утверждения 5 доказана.

Докажем вторую часть. Нетривиальность элементарного проектора p_λ влечет, что $W(\lambda) \neq \{0\}$, т.е. $\text{Sp}_\lambda W \neq \{0\}$. В силу соотношения $\text{Div}_\lambda I = \text{Sp}_\lambda W$ (предложение 2.4) $\text{Div}_\lambda I \neq \{0\}$. На основании предложения 2.1 получим, что $I(\lambda) \neq O^q(\lambda)$. Нужно доказать, что $\text{Ind}_\lambda I > 0$. Предположим противное: $\text{Ind}_\lambda I = 0$. Тогда в силу предложения 2.3 статьи [11] подмодуль $I(\lambda)$ является устойчивым в следующем смысле:

$$f \in I(\lambda), \quad z - \lambda \mid f \Rightarrow \frac{f}{z - \lambda} \in I(\lambda). \quad (8)$$

Пусть $\varphi \in O^q(\lambda)$. Учитывая, что $\text{Rank } I = q$, представим элемент φ по правилу Крамера:

$$\varphi = \sum_{p=1}^q \frac{\Delta_p(\varphi)}{\Delta} u^{(p)}, \quad (9)$$

где $u^{(1)}, \dots, u^{(q)}$ — независимая система элементов из I , Δ — определитель, составленный из столбцов $u^{(1)}, \dots, u^{(q)}$. Умножая обе части соотношения (9) на $(z - \lambda)^l$, где $l = \text{Ind } \Delta$, получим, что $(z - \lambda)^l \varphi \in I(\lambda)$. Отсюда, после l -кратного применения импликации (8), получим $\varphi \in I(\lambda)$. Поскольку это рассуждение верно для любого $\varphi \in O^q(\lambda)$, то $I(\lambda) = O^q(\lambda)$. Полученное противоречие заставляет признать, что $\text{Ind}_\lambda I > 0$.

6) По определению кратности подмодуля в точке λ имеет место включение $(z - \lambda)^m \varphi \in I(\lambda)$, справедливое для любого элемента $\varphi \in I_0$. Но по доказанному ранг I равен q и, следовательно, $I_0 = P$. Поэтому включение $(z - \lambda)^m \varphi \in I(\lambda)$ имеет место для любого элемента $\varphi \in P$. Согласно 3) класс смежности $[(z - \lambda)^m \varphi]$ принадлежит ядру $p_\lambda^\otimes$. Отсюда, учитывая, что $p_\lambda^\otimes$ — модульный гомоморфизм (см. 4)), для любого класса смежности $\Phi = [\varphi]$

$$(z - \lambda)^m p_\lambda^\otimes(\Phi) = p_\lambda^\otimes((z - \lambda)^m \Phi) = p_\lambda^\otimes([(z - \lambda)^m \varphi]) = 0.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.4. Пусть подмодуль $I = \text{An } W$ имеет ранг q . Для того чтобы линейное непрерывное отображение $u: W \rightarrow W$ было элементарным проектором, отвечающим λ , необходимо и достаточно, чтобы дуальное отображение $u^\otimes: P/I \rightarrow P/I$ удовлетворяло следующим условиям:

- 1) $u^\otimes$ — модульный гомоморфизм;
- 2) $u^\otimes$ переводит класс смежности $\Phi \in P/I$ в класс смежности $\Psi \in P/I$ такой, что

$$\Psi \equiv \begin{cases} 0 \pmod{I(\mu)}, & \mu \neq \lambda, \\ \Phi \pmod{I(\lambda)}; \end{cases}$$

- 3) если m — кратность подмодуля I в точке λ , то

$$(z - \lambda)^m u^\otimes = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость условий 1)–3) содержится в предложении 4.3. Нужно доказать достаточность этих условий. Итак, пусть условия 1)–3) выполнены. Согласно предложению 1.6 то, что $u^{\otimes}$ – модульный гомоморфизм, равносильно перестановочности u и D . Таким образом, свойство 3° , входящее в определение элементарного проектора, выполнено. Далее, пусть для любого класса смежности $\Phi \in P/I$ и его образа $\Psi = u^{\otimes}(\Phi)$ выполняются сравнения (6). Нас интересует второе из этих сравнений. В силу предложения 2.1 оно равносильно соотношению

$$p(D)\varphi|_{\lambda} = p(D)\psi|_{\lambda} \quad \forall \varphi \in \Phi, \quad \forall \psi \in \Psi, \quad \forall p \in \text{Div}_{\lambda} I.$$

Применяя предложение 4.2, получим, что

$$u(e) = e \quad \forall e \in W(\lambda). \quad (10)$$

Отсюда, в частности, следует, что $u(W) \supset W(\lambda)$. Воспользуемся теперь условием 3). Это условие равносильно соотношению $u \circ (D - \lambda E)^m = 0$ или в силу перестановочности u и D – соотношению $(D - \lambda E)^m \circ u = 0$. Последнее означает, что образ $e = u(f)$ любого элемента $f \in W$ удовлетворяет уравнению $(D - \lambda E)^m e = 0$ и, следовательно, является элементарным $\text{exr-}q$ -многочленом с показателем λ . Этот $\text{exr-}q$ -многочлен лежит в W , так как весь образ $u(W)$ принадлежит W . Значит, $e \in W(\lambda)$. Тем самым установлено, что $u(W) \subset W(\lambda)$. Так как при этом в силу (10) u оставляет элементы из $W(\lambda)$ неподвижными, то $u(W) = W(\lambda)$ и $u^2 = u$. Свойства 2° , 3° , входящие в определение элементарного проектора, выполнены.

4.4. О единственности элементарного проектора.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.5. Пусть $I = \text{An } W$ – квазиустойчивый подмодуль ранга q . Тогда для фиксированного $\lambda \in \mathbb{C}$ существует не более одного элементарного проектора $p_{\lambda}: W \rightarrow W$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть существуют два элементарных проектора $p_{\lambda}, p'_{\lambda}: W \rightarrow W$. Рассмотрим оператор $q_{\lambda} = p_{\lambda} - p'_{\lambda}: W \rightarrow W$. Из свойств дуальных операторов, перечисленных в предложении 4.3, вытекают следующие свойства $q^{\otimes}: P/I \rightarrow P/I$:

- 1) $q^{\otimes}$ – модульный гомоморфизм;
- 2) для любого класса смежности Φ класс $\Psi = q^{\otimes}_{\lambda}(\Phi)$ удовлетворяет условию

$$\Psi \equiv 0 \pmod{I(\xi)} \quad \forall \xi \in \mathbb{C};$$

- 3) если m – кратность I в точке λ , то

$$(z - \lambda)^m q^{\otimes}_{\lambda} = 0.$$

Пусть $\varphi \in \Phi, \psi \in \Psi$. Из свойства 2) следует, что $\psi|_{\lambda} \in I$. Из свойства 3) следует, что $(z - \lambda)^m \psi|_{\lambda} \in I$. В силу квазиустойчивости I заключаем, что $\psi|_{\lambda} \in I$, т.е. $\Psi = I$. Это верно для любого класса $\Phi \in P/I$. Тем самым установлено, что $q^{\otimes}_{\lambda} = 0$, т.е. $p^{\otimes}_{\lambda} = p'^{\otimes}_{\lambda}$. Последнее возможно только в случае, когда $p_{\lambda} = p'_{\lambda}$.

Если G не является q -множеством Рунге, даже если G – двусвязная область в $\mathbb{C}$ ($q = 1$), вопрос о единственности элементарного проектора остается открытым.

4.5. Построение элементарного проектора.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.6. Пусть $I = \text{An } W$ – квазиустойчивый подмодуль ранга q ; Int_λ – элементарный интерполятор, построенный по допустимой независимой системе $u^{(1)}, \dots, u^{(q)}$ из I ; $u: H \rightarrow H$ – прямой оператор по отношению к Int_λ , т.е. $\text{Int}_\lambda = u^\otimes$. Тогда сужение оператора u на W есть единственный элементарный проектор $p_\lambda: W \rightarrow W$, отвечающий λ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку Int_λ отображает I в I (см. п. 3.2, свойство 3), u отображает W в W (предложение 1.4), при этом сужение $u_0: W \rightarrow W$ оператора u на W имеет в качестве дуального $\widehat{\text{Int}}_\lambda: P/I \rightarrow P/I$ (предложение 1.5). В силу предложения 3.2 $\widehat{\text{Int}}_\lambda$ обладает свойствами:

- 1) $\widehat{\text{Int}}_\lambda$ – модульный гомоморфизм;
- 2) $\widehat{\text{Int}}_\lambda$ переводит класс смежности $\Phi \in P/I$ в класс смежности $\Psi \in P/I$ такой, что

$$\Psi \equiv \begin{cases} 0 \pmod{I(\mu)}, & \mu \neq \lambda, \\ \Phi \pmod{I(\lambda)}; \end{cases}$$

- 3) если m – кратность подмодуля I в точке λ , то

$$(z - \lambda)^m \widehat{\text{Int}}_\lambda = 0.$$

На основании предложения 4.4 заключаем, что u – элементарный проектор, отвечающий λ . Единственность проектора следует из предложения 4.5.

§5. Проекторы, ассоциированные с замкнутыми контурами

5.1. Определение проектора. Пусть G – q -множество Рунге; $H = H(G)$; $P = P(G)$; W – инвариантное подпространство в H ; $I = \text{An } W$. На протяжении всего параграфа будем предполагать, что I – квазиустойчивый подмодуль ранга q . Пусть Λ – спектральное множество подпространства W , т.е. множество всех тех $\lambda \in \mathbb{C}$, для которых $W(\lambda) \neq \{0\}$. Согласно предложению 2.7 множество Λ совпадает с индексным множеством подмодуля I . Известно, что индексное множество дискретно [1, п. 2.7], в частности, каждое ограниченное множество в $\mathbb{C}$ может содержать не более конечного числа точек из Λ . Согласно предложению 4.6 для каждого $\lambda_i \in \Lambda$ существует нетривиальный элементарный проектор $p_{\lambda_i}: W \rightarrow W$. Пусть Γ – замкнутый контур в $\mathbb{C}$, охватывающий ограниченное открытое множество в $\mathbb{C}$ (т.е. являющийся границей этого множества). Рассмотрим оператор

$$p_\Gamma := \sum_{\lambda_i \in \Gamma} p_{\lambda_i},$$

где суммирование идет по точкам $\lambda_i \in \Lambda$, охватываемым контуром Γ . Оператор p_Γ называется *проектором, ассоциированным с контуром Γ* . Обозначим $W(\Gamma)$ линейную оболочку подпространств $W(\lambda_i)$, $\lambda_i \in \Gamma$. Свойства элементарных проекторов (см. п. 4.3) влекут следующие свойства p_Γ :

- 1°. p_Γ отображает W на $W(\Gamma)$;
- 2°. $p_\Gamma^2 = p_\Gamma$;
- 3°. p_Γ перестановочен с оператором дифференцирования D .

5.2. Представление проектора в терминах интерполятора. Пусть $u^{(1)}, \dots, u^{(q)}$ – допустимая независимая система элементов из I (см. п. 3.2); Δ – определитель матрицы, составленной из векторов-столбцов элементов $u^{(1)}, \dots, u^{(q)}$; $\Delta_p(\varphi)$ – определитель, полученный из Δ заменой p -го столбца на вектор-столбец элемента $\varphi \in P$. Рассмотрим интерполятор Int_Γ , ассоциированный с контуром Γ (см. п. 3.4):

$$\text{Int}_\Gamma \varphi = \sum_{p=1}^q \left(\Gamma_{\text{Л}\Gamma} \frac{\Delta_p(\varphi)}{\Delta} \right) u^{(p)},$$

где

$$\Gamma_{\text{Л}\Gamma} \frac{\Delta_p(\varphi)}{\Delta} = \sum_{z_i \in \Gamma} \Gamma_{\text{Л}z_i} \frac{\Delta_p(\varphi)}{\Delta},$$

суммирование распространяется на все нули z_i определителя Δ , охватываемые Γ . Поскольку ранг I равен q , мероморфное расширение I_0 подмодуля I в P (см. п. 3.1) совпадает с P , и оператор Int_Γ действует из P в P . Оператор u_Γ , прямой по отношению к Int_Γ , действует из H в H (см. п. 1.3).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.1. *Сужение $u_\Gamma|_W$ оператора u_Γ на W совпадает с проектором $p_\Gamma: W \rightarrow W$, ассоциированным с Γ .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $Z = \{z_i\}$ – нулевое множество определителя Δ . Согласно определению оператор Int_Γ представляется в виде суммы элементарных интерполяторов

$$\text{Int}_\Gamma = \sum_{z_i \in \Gamma} \text{Int}_{z_i}. \quad (1)$$

Пусть $u_{z_i}: H \rightarrow H$ – оператор, прямой по отношению к Int_{z_i} . Из (1) следует, что

$$u_\Gamma = \sum_{z_i \in \Gamma} u_{z_i}.$$

Согласно предложению 4.6 сужение $u_{z_i}|_W$ оператора u_{z_i} на W совпадает с элементарным проектором p_{z_i} , ассоциированным с z_i . Поэтому

$$u_\Gamma|_W = \sum_{z_i \in \Gamma} p_{z_i}. \quad (2)$$

Пусть Λ – спектральное множество подпространства W . Известно, что Λ совпадает с индексным множеством подмодуля I (предложение 2.7). Последнее является частью нулевого множества определителя Δ , т.е. $\Lambda \subset Z$. При $\lambda \notin \Lambda$ проектор p_λ является тривиальным, т.е. $p_\lambda = 0$. Поэтому

$$\sum_{z_i \in \Gamma} p_{z_i} = \sum_{\lambda_i \in \Gamma} p_{\lambda_i} = p_\Gamma.$$

Отсюда и из (2) следует

$$u_\Gamma|_W = p_\Gamma.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.2. *Справедливо представление*

$$p_{\Gamma}(f)(z) = \left\langle f^{\odot}, \text{Int}_{\Gamma} \left(\boxed{\exp \lambda z} \right) \right\rangle, \quad f \in W, \quad (3)$$

где $f^{\odot} = \chi(f)$, (см. п. 1.1),

$$\boxed{\exp \lambda z} = \sum_{i=1}^q e^{\lambda z} e_i^* e_i$$

(см. п. 1.2).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оператор Int_{Γ} является дуальным по отношению к оператору u_{Γ} . Согласно предложению 1.3 имеет место формула (в рассматриваемом случае $P = P'$, $I' = \{0\}$ и каноническое отображение τ' является тождественным):

$$u_{\Gamma}(f)(z) = \left\langle f^{\odot}, \text{Int}_{\Gamma} \left(\boxed{\exp \lambda z} \right) \right\rangle, \quad f \in H.$$

Теперь представление (3) следует из того, что согласно предложению 5.1 сужение u_{Γ} на W совпадает с p_{Γ} .

5.3. Представление элементарного проектора в терминах коэффициентов Дирихле. Пусть λ – спектральная точка инвариантного подпространства W кратности m (см. п. 2.7); $u^{(1)}, \dots, u^{(q)}$ – допустимая (см. п. 3.2) независимая система элементов из I ; $\text{Int}_{\lambda}: P \rightarrow P$ – элементарный интерполятор, построенный по системе $u^{(1)}, \dots, u^{(q)}$. Элементы

$$\mathcal{L}_{\lambda, i, p} = \text{Int}_{\lambda} \left(\frac{(\xi - \lambda)^p}{p!} e_i^* \right)$$

($i = 1, \dots, q$; $p = 0, 1, \dots$; оператор Int_{λ} действует по переменной ξ) назовем *отмеченными*. Из определения кратности для подмодулей ранга q (см. п. 2.7) следует, что элемент

$$\frac{(\xi - \lambda)^p}{p!} e_i^*$$

(здесь λ фиксированно) принадлежит I при $p \geq m$; поэтому в силу свойства 6 (см. п. 3.2) элементарного интерполятора отмеченные элементы при $p \geq m$ принадлежат I . Каждому отмеченному элементу $\mathcal{L}_{\lambda, i, p}$ соответствует линейный непрерывный функционал $S_{\lambda, i, p}$ на H . Величины

$$c_{\lambda, i, p}(f) = \langle S_{\lambda, i, p}, f \rangle$$

называются *коэффициентами Дирихле* элемента $f \in W$ [12]. Вектор

$$c_{\lambda, p}(f) = \sum c_{\lambda, i, p}(f) e_i$$

называется *векторным коэффициентом Дирихле* этого элемента.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.3. Пусть λ – спектральная точка инвариантного подпространства W кратности m . Тогда элементарный проектор $p_\lambda: W \rightarrow W$ допускает представление

$$p_\lambda(f)(z) = \sum_{p=0}^{m-1} c_{\lambda,p}(f) z^p e^{\lambda z}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно предложению 5.2 элементарный проектор p_λ можно представить в виде

$$p_\lambda(f)(z) = \left\langle f^\odot, \text{Int}_\lambda \left(\boxed{\exp \xi z} \right) \right\rangle = \sum_{i=1}^q \left\langle f^\odot, \text{Int}_\lambda (e^{\xi z} e_i^*) \right\rangle e_i.$$

При $p \geq m$

$$\text{Int}_\lambda ((\xi - \lambda)^p e_i^*) \equiv 0 \pmod{I}.$$

Поэтому, разложив $e^{\xi z}$ в ряд Тейлора по степеням $\xi - \lambda$, получим

$$\text{Int}_\lambda (e^{\xi z} e_i^*) \equiv \sum_{p=0}^{m-1} \text{Int}_\lambda \left(\frac{(\xi - \lambda)^p}{p!} z^p e^{\lambda z} e_i^* \right) \pmod{I}.$$

Пусть $f \in W$. Тогда $f^\odot$ аннулирует I . В силу соотношения двойственности (1) § 1

$$\left\langle f^\odot, \text{Int}_\lambda \frac{(\xi - \lambda)^p}{p!} e_i^* \right\rangle = \langle S_{\lambda,i,p}, f \rangle = c_{\lambda,i,p}(f).$$

Отсюда получим

$$\begin{aligned} p_\lambda(f)(z) &= \sum_{i=1}^q \left\langle f^\odot, \sum_{p=0}^{m-1} \text{Int}_\lambda \left(\frac{(\xi - \lambda)^p}{p!} e_i^* \right) z^p e^{\lambda z} \right\rangle e_i \\ &= \sum_{i=1}^q \sum_{p=0}^{m-1} \left\langle f^\odot, \text{Int}_\lambda \left(\frac{(\xi - \lambda)^p}{p!} e_i^* \right) \right\rangle z^p e^{\lambda z} e_i \\ &= \sum_{p=0}^{m-1} \sum_{i=1}^q c_{\lambda,i,p}(f) z^p e^{\lambda z} e_i = \sum_{p=0}^{m-1} c_{\lambda,p}(f) z^p e^{\lambda z}. \end{aligned}$$

5.4. Интегральное представление проектора. Пусть G – q -многообразие Рунге; P – модуль, ассоциированный с G ; $u^{(1)}, \dots, u^{(q)}$ – независимая допустимая система элементов в P (см. п. 3.2); таким образом, существует односвязная подобласть $G^{(0)} \subset G$ такая, что $u^{(1)}, \dots, u^{(q)} \in P(G^{(0)})$. Произвольным образом зафиксируем “точечное” q -многообразие $\bar{a} = (a_1, \dots, a_q) \in G^0$ и рассмотрим q -функцию $(e^{a_1 \lambda}, \dots, e^{a_q \lambda})$. Эта q -функция является элементом $P(G^0)$ и, тем более, P . Будем этот элемент обозначать символом $\exp \bar{a} \lambda$. В дальнейшем изложении удобно использовать операцию покомпонентного умножения векторов

$$(x_1, \dots, x_q) \otimes (y_1, \dots, y_q) = (x_1 y_1, \dots, x_q y_q).$$

Покомпонентное произведение ассоциативно, коммутативно и дистрибутивно относительно сложения векторов. Для $\xi \in \mathbb{C}$ и $i = 1, \dots, q$ определим элемент $u_\xi^{(i)}$ по правилу

$$u_\xi^{(i)}(\lambda) = \frac{u^{(i)}(\lambda) - \exp \bar{a}(\lambda - \xi) \otimes u^{(i)}(\xi)}{\lambda - \xi}. \quad (4)$$

Элемент в числителе этой дроби обозначим $F_\xi^{(i)}$. Легко проверить, что $\lambda - \xi \mid F_\xi^{(i)} \forall \xi \in \mathbb{C}$. В силу устойчивости $P(G^0)$ [1, п. 3.3] $u_\xi^{(i)}$ есть элемент из $P(G^0)$ при любом $\xi \in \mathbb{C}$. Пусть $S_\xi^{(1)}, \dots, S_\xi^{(q)}$ функционалы на $H(G^0)$, характеристические элементы которых совпадают с $u_\xi^{(1)}, \dots, u_\xi^{(q)}$, соответственно.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.4. Пусть Γ – гладкий замкнутый контур, не пересекающийся с нулевым множеством определителя Δ . Тогда проектор $p_\Gamma: W \rightarrow W$, ассоциированный с Γ , допускает представление

$$p_\Gamma(f)(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{\omega(\xi, f)}{\Delta(\xi)} e^{\xi z} d\xi, \quad (5)$$

где

$$\omega(\xi, f) = \sum_{p=1}^q \langle S_\xi^{(p)}, f \rangle \tilde{\Delta}_p(\xi), \quad \tilde{\Delta}_p(\xi) = \sum_{i=1}^q \Delta_{ip}(\xi) e_i,$$

Δ_{ip} – алгебраическое дополнение элемента определителя Δ , стоящего на пересечении i -й строки и p -го столбца.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем тождество

$$\langle f^\odot, \text{Int}_\Gamma \varphi \rangle = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \sum_{p=1}^q \frac{\Delta_p(\varphi)(\xi)}{\Delta(\xi)} \langle f^\odot, u_\xi^{(p)} \rangle d\xi \quad \forall f \in H, \quad \forall \varphi \in P. \quad (6)$$

Пусть K – область, охватываемая Γ . Проверим соотношение (6) в случае, когда элемент f есть q -экспонента $se^{\gamma z}$, $s = (s_1, \dots, s_q)$, с показателем $\gamma \notin \overline{K}$. С помощью соотношения двойственности (1) §1 легко установить, что $f^\odot$ есть функционал на P , действующий по правилу:

$$\varphi \mapsto \langle c, \varphi(\gamma) \rangle = \sum c_i \varphi_i(\gamma).$$

При таком f левая часть соотношения (6) равна $\langle c, (\text{Int}_\Gamma \varphi)(\gamma) \rangle$. Правая часть вычисляется следующим образом:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \sum_{p=1}^q \frac{\Delta_p(\varphi)(\xi)}{\Delta(\xi)} \langle c, u_\xi^{(p)}(\gamma) \rangle d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \sum_{p=1}^q \frac{\Delta_p(\varphi)(\xi)}{\Delta(\xi)} \left\langle c, \frac{u^{(p)}(\gamma) - \exp \bar{a}(\gamma - \xi) \otimes u^{(p)}(\xi)}{\gamma - \xi} \right\rangle d\xi \\ &= A_1 - A_2, \end{aligned}$$

где

$$A_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \sum_{p=1}^q \frac{\Delta_p(\varphi)(\xi)}{\Delta(\xi)(\gamma - \xi)} \langle c, u^{(p)}(\gamma) \rangle d\xi,$$

$$A_2 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \sum_{p=1}^q \frac{\Delta_p(\varphi)(\xi)}{\Delta(\xi)} \frac{\langle c, \exp \bar{a}(\gamma - \xi) \otimes u^{(p)}(\xi) \rangle}{\gamma - \xi} d\xi.$$

Учитывая, что

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\Delta_p(\varphi)(\xi)}{\Delta(\xi)(\gamma - \xi)} d\xi = \left(\Gamma_{\text{л}\Gamma} \frac{\Delta_p(\varphi)}{\Delta} \right) (\gamma)$$

при $\gamma \notin \overline{K}$, получаем

$$A_1 = \left\langle c, \sum_{p=1}^q \left(\Gamma_{\text{л}\Gamma} \frac{\Delta_p(\varphi)}{\Delta} \right) (\gamma) u^{(p)}(\gamma) \right\rangle = \langle c, \text{Int}_{\Gamma} \varphi(\gamma) \rangle.$$

Далее, пользуясь тем, что операция покомпонентного умножения $\otimes$ дистрибутивна относительно сложения, имеем

$$\begin{aligned} & \sum_{p=1}^q \frac{\Delta_p(\varphi)(\xi)}{\Delta(\xi)} \exp \bar{a}(\gamma - \xi) \otimes u^{(p)}(\xi) \\ &= \exp \bar{a}(\gamma - \xi) \otimes \sum_{p=1}^q \frac{\Delta_p(\varphi)(\xi)}{\Delta(\xi)} u^{(p)}(\xi) \\ &= \exp \bar{a}(\gamma - \xi) \otimes \varphi(\xi). \end{aligned}$$

При $\gamma \notin \overline{K}$ выражение

$$\frac{\exp \bar{a}(\gamma - \xi) \otimes \varphi(\xi)}{\gamma - \xi}$$

представляет собой q -функцию, голоморфную по ξ в области, охватываемой контуром Γ ; интеграл от этой функции по контуру Γ равен нулю. Поэтому

$$\begin{aligned} A_2 &= \left\langle c, \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \sum_{p=1}^q \frac{\Delta_p(\varphi)(\xi)}{\Delta(\xi)} \frac{\exp \bar{a}(\gamma - \xi) \otimes u^{(p)}(\xi)}{\gamma - \xi} d\xi \right\rangle \\ &= \left\langle c, \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\exp \bar{a}(\gamma - \xi) \otimes \varphi(\xi)}{\gamma - \xi} d\xi \right\rangle = \langle c, 0 \rangle = 0. \end{aligned}$$

Из вышеизложенного следует, что правая часть (6) также равна $\langle c, (\text{Int}_{\Gamma} \varphi)(\gamma) \rangle$. Таким образом, соотношение (6) верно на множестве q -экспонент с показателями $\gamma \notin \overline{K}$. При фиксированном $\varphi \in P$ обе части соотношения (6) представляют собой линейные непрерывные функционалы на H . Эти функционалы совпадают на множестве q -экспонент $se^{\gamma z}$, $\gamma \notin \overline{K}$. Поскольку это множество q -экспонент полно в H (это следует из того, что множество экспонент с показателями $\gamma \in \mathbb{C} \setminus \overline{K}$ полно в каждом из пространств $H(G_i)$), указанные функционалы совпадают на всем H . Тем самым соотношение (6) справедливо для всех $\varphi \in P$ и $f \in H$.

Приступаем к доказательству соотношения (5). Согласно предложению 5.2

$$p_\Gamma(f)(z) = \left\langle f^\odot, \text{Int}_\Gamma \left(\boxed{\exp \xi z} \right) \right\rangle, \quad f \in W \quad (7)$$

(интерполятор Int_Γ действует по переменной ξ). Расшифровывая символ $\boxed{\exp \xi z}$ и используя правила манипуляции с единичными векторами $e_i, e_i^*, i = 1, \dots, q$ (см. п. 1.2), имеем

$$\text{Int}_\Gamma \left(\boxed{\exp \xi z} \right) = \text{Int}_\Gamma \left(\sum_{i=1}^q e^{\xi z} e_i^* e_i \right) = \sum_{i=1}^q \text{Int}_\Gamma (e^{\xi z} e_i^*) e_i,$$

откуда

$$\left\langle f^\odot, \text{Int}_\Gamma \left(\boxed{\exp \xi z} \right) \right\rangle = \sum_{i=1}^q \left\langle f^\odot, \text{Int}_\Gamma (e^{\xi z} e_i^*) \right\rangle e_i. \quad (8)$$

Полагая в (6) $\varphi(\xi) = e^{\xi z} e_i^*, i = 1, \dots, q$, получаем

$$\left\langle f^\odot, \text{Int}_\Gamma (e^{\xi z} e_i^*) \right\rangle = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \sum_{p=1}^q \frac{\Delta_{ip}(\xi)}{\Delta(\xi)} e^{\xi z} \left\langle f^\odot, u_\xi^{(p)} \right\rangle d\xi. \quad (9)$$

В силу соотношения двойственности (1) § 1

$$\left\langle f^\odot, u_\xi^{(p)} \right\rangle = \left\langle S_\xi^{(p)}, f \right\rangle.$$

Из соотношений (7)–(9) следует, что

$$\begin{aligned} p_\Gamma(f)(z) &= \sum_{i=1}^q \left(\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \sum_{p=1}^q \frac{\Delta_{ip}(\xi)}{\Delta(\xi)} \left\langle S_\xi^{(p)}, f \right\rangle e^{\xi z} d\xi \right) e_i \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \sum_{p=1}^q \frac{\tilde{\Delta}_p(\xi)}{\Delta(\xi)} \left\langle S_\xi^{(p)}, f \right\rangle e^{\xi z} d\xi, \end{aligned}$$

где

$$\tilde{\Delta}_p(\xi) = \sum_{i=1}^q \Delta_{ip}(\xi) e_i.$$

Формула (5) доказана.

Напомним, что элементы $u^{(1)} = (u_1^{(1)}, \dots, u_q^{(1)})$, $u^{(q)} = (u_1^{(q)}, \dots, u_q^{(q)})$ принадлежат $P(G^0)$, где $G^0 = (G_1^0, \dots, G_q^0)$ – односвязная q -область [1, п. 2.2], принадлежащая G . Пусть

$$S^{(1)} = (S_1^{(1)}, \dots, S_q^{(1)}), \dots, S^{(q)} = (S_1^{(q)}, \dots, S_q^{(q)})$$

– линейные непрерывные функционалы на H , характеристические элементы которых совпадают, соответственно, с $u^{(1)} = (u_1^{(1)}, \dots, u_q^{(1)}), \dots, u^{(q)} = (u_1^{(q)}, \dots, u_q^{(q)})$.

Как вычислить $\langle S_\xi^{(p)}, f \rangle$ в терминах $S^{(p)}$ и f ? Пусть $S_{\xi,i}^{(p)}$ — i -я компонента функционала $S_\xi^{(p)}$. Характеристическая функция этого функционала совпадает с i -й компонентой $u_{\xi,i}^{(p)}$ элемента $u_\xi^{(p)}$. Функция $u_{\xi,i}^{(p)}$ имеет вид

$$u_{\xi,i}^{(p)}(\lambda) = \frac{u_i^{(p)}(\lambda) - e^{a_i(\lambda-\xi)} u_i^{(p)}(\xi)}{\lambda - \xi}.$$

Используя это выражение, найдем функционал $S_{\xi,i}^{(p)}$. Имеем

$$\begin{aligned} u_i^{(p)}(\lambda) &= \langle S_i^{(p)}, e^{\lambda z} \rangle, \\ u_i^{(p)}(\xi) &= \langle S_i^{(p)}, e^{\xi z} \rangle. \end{aligned}$$

Эти соотношения позволяют представить $u_{\xi,i}^{(p)}(\lambda)$ в следующем виде:

$$\begin{aligned} u_{\xi,i}^{(p)}(\lambda) &= \left\langle S_i^{(p)}, \frac{e^{\lambda z} - e^{\xi z} \cdot e^{a_i(\lambda-\xi)}}{\lambda - \xi} \right\rangle \\ &= \left\langle S_i^{(p)}, e^{\xi z} \frac{e^{(\lambda-\xi)z} - e^{a_i(\lambda-\xi)}}{\lambda - \xi} \right\rangle \\ &= \left\langle S_i^{(p)}, e^{\xi z} \int_{a_i}^z e^{\lambda t} e^{-\xi t} dt \right\rangle. \end{aligned}$$

В последнем выражении интеграл берется по любому пути в G_i^0 с началом в a_i и концом в z ; при этом в силу односвязности G_i^0 интеграл не зависит от пути. Отсюда видно, что $u_{\xi,i}^{(p)}(\lambda)$ есть характеристическая функция линейного непрерывного функционала (на $H(G_i)$), действующего по правилу

$$f_i \mapsto \left\langle S_i^{(p)}, e^{\xi z} \int_{a_i}^z f_i(t) e^{-\xi t} dt \right\rangle.$$

Следовательно, $S_{\xi,i}^{(p)}$ совпадает с этим функционалом. На основании вышеизложенного

$$\langle S_\xi^{(p)}, f \rangle = \sum_{i=1}^q \left\langle S_i^{(p)}, e^{\xi z} \int_{a_i}^z f_i(t) e^{-\xi t} dt \right\rangle,$$

где $f = (f_1, \dots, f_q)$.

В заключение отметим, что при $q = 1$ выражение $\omega(\xi, f)$ в формуле (5) совпадает с интерполирующей функцией А. Ф. Леонтьева (см. [2], а также [13, гл. IV]).

Список литературы

1. Красичков-Терновский И. Ф. Фундаментальный принцип для инвариантных подпространств аналитических функций. I. // Матем. сб. 1997. Т. 188. №2. С. 25–56.
2. Леонтьев А. Ф. О представлении функций последовательностями полиномов Дирихле // Матем. сб. 1966. Т. 70. №1. С. 132–144.
3. Шефер Х. Топологические векторные пространства. М.: Мир, 1971.
4. Красичков-Терновский И. Ф. Инвариантные подпространства аналитических функций. I. Спектральный синтез на выпуклых областях // Матем. сб. 1972. Т. 87. №4. С. 459–489.
5. Дрёдонне Ж., Шварц Л. Двойственность в пространствах $(\mathcal{F})$ и $(\mathcal{L}\mathcal{T})$ // Математика. 1958. Т. 2. №2. С. 77–102.
6. Красичков-Терновский И. Ф. Инвариантные подпространства аналитических функций. Аналитическое продолжение // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1973. Т. 37. №4. С. 931–945.
7. Красичков-Терновский И. Ф. Методы аппроксимации функций из инвариантных подпространств полиномами Дирихле // Сиб. матем. журн. 1975. Т. 16. №5. С. 1020–1030.
8. Красичков-Терновский И. Ф. Спектральный синтез аналитических функций на системах выпуклых областей // Матем. сб. 1980. Т. 111. №1. С. 3–41.
9. Паламодов В. П. Линейные дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами. М.: Наука, 1967.
10. Красичков-Терновский И. Ф. Спектральный синтез в комплексной области для дифференциального оператора с постоянными коэффициентами. I. Теорема двойственности // Матем. сб. 1991. Т. 182. №11. С. 1559–1587.
11. Красичков-Терновский И. Ф. Локальное описание замкнутых идеалов и подмодулей аналитических функций одной переменной. I // Изв. АН СССР. 1979. Т. 43. №1. С. 44–66.
12. Красичков-Терновский И. Ф. Спектральный синтез на системах выпуклых областей. Распространение синтеза // Матем. сб. 1980. Т. 112. №1. С. 94–114.
13. Леонтьев А. Ф. Ряды экспонент. М.: Наука, 1976.

Институт математики с ВЦ, Уфа

Поступила в редакцию
24.09.1996