Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. М. Мануйлов, Диагонализация операторов над непрерывными полями C^* -алгебр, *Матем. сб.*, 1997, том 188, номер 6, 99–118

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm229>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.187.69

26 апреля 2023 г., 14:39:58

УДК 517.98

В. М. Мануйлов

Диагонализация операторов над непрерывными полями C^* -алгебр

В работе доказывается некоммутативный аналог классической теоремы Гильберта–Шмидта о приведении самосопряженного компактного оператора в гильбертовом пространстве к диагональному виду. Именно, для некоторого класса C^* -алгебр доказано, что самосопряженный компактный оператор в гильбертовом модуле H_A над C^* -алгеброй A приводится в некотором большем модуле над большей W^* -алгеброй к диагональному виду с элементами алгебры A на диагонали.

Библиография: 25 названий.

Введение

Пусть X есть компактное хаусдорфово пространство, $\{A(x), x \in X\}$ – семейство C^* -алгебр с единицей, снабженных точными конечными следами $\tau_x, \tau_x(1_x) = 1$. Через $\prod_{x \in X} A(x)$ обозначим множество функций $a = a(x)$, определенных на X , и таких, что $a(x) \in A(x)$ для всех $x \in X$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 0.1. Пусть $\mathcal{A} \subset \prod_{x \in X} A(x)$ есть подмножество со следующими свойствами:

- i) $\mathcal{A}$ есть $*$ -подалгебра в $\prod_{x \in X} A(x)$;
- ii) для любого $x \in X$ множество $\{a(x), a \in \mathcal{A}\}$ плотно в алгебре $A(x)$;
- iii) для каждого $a \in \mathcal{A}$ функция $x \mapsto \|a(x)\|$ непрерывна;
- iv) пусть $a \in \prod_{x \in X} A(x)$; если для каждого $x \in X$ и для всех $\varepsilon > 0$ существует такой элемент $a' \in \mathcal{A}$, что $\|a(x) - a'(x)\| < \varepsilon$ в некоторой окрестности точки x , то $a \in \mathcal{A}$;
- v) для каждого $a \in \mathcal{A}$ функция $x \mapsto \tau_x(a(x))$ непрерывна.

Тогда тройка $(A(x), X, \mathcal{A})$ называется *непрерывным полем C^* -алгебр со следом*.

Отметим, что первые четыре свойства этого определения составляют стандартное определение непрерывного поля C^* -алгебр [1]. Известно, что $\mathcal{A}$ является C^* -алгеброй. Для краткости через $\|a(x)\|$ мы будем обозначать норму элемента $a = a(x) \in \mathcal{A}$, т.е. $\sup_x \|a(x)\|$. Если $V \subset X$ – замкнутое подмножество, то через $\mathcal{A}|_V$ мы будем обозначать ограничение непрерывного поля C^* -алгебр на V .

Очевидно, что $\tau: a \mapsto \tau_x(a(x))$ – следна $\mathcal{A}$, принимающий значения в $C(X) \subset \mathcal{A}$.

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-01-00276) и КЦФЕ.

Этот след задает скалярное произведение на $A(x)$

$$(b_1, b_2)_{\tau_x} = \tau_x(b_1^* b_2), \quad \|b\|_{\tau_x}^2 = (b, b)_{\tau_x},$$

и $C(X)$ -значное внутреннее произведение на $\mathcal{A}$

$$(b_1(x), b_2(x))_{\tau} = \tau_x(b_1^*(x) b_2(x)) \in C(X) \quad (0.1)$$

с нормой

$$\|b(x)\|_{\tau} = \sup_x (b(x), b(x))_{\tau}^{1/2} = \sup_x \|b(x)\|_{\tau_x}.$$

Пусть $H(x) = L^2(A(x))$ есть пополнение $A(x)$ по норме $\|\cdot\|_{\tau_x}$. Тогда алгебра $A(x)$ является точно представленной в гильбертовом пространстве $H(x)$, и мы можем перейти к соответствующей W^* -алгебре $B(x) = L^\infty(A(x))$, т.е. к слабому замыканию $A(x)$ (обозначение L^∞ выбрано по аналогии с коммутативным случаем).

Пусть теперь dx есть σ -конечная борелевская мера на X . Отметим, что функция (0.1) непрерывна, поэтому можно положить

$$(b_1, b_2)_{\tau} = \int_X (b_1(x), b_2(x))_{\tau_x} dx, \quad \|b\|_{\tau}^2 = (b, b)_{\tau}. \quad (0.2)$$

Обозначим пополнение алгебры $\mathcal{A}$ по этой норме через $H = L^2(\mathcal{A})$. Алгебра $\mathcal{A}$ точно представлена в гильбертовом пространстве H , и соответствующую W^* -алгебру мы обозначим через $\mathbf{A} = L^\infty(\mathcal{A}) \supset \mathcal{A}$. Очевидно, что

$$\mathbf{A} = \int_X^{\oplus} B(x) dx.$$

Из точности и конечности следа, определенного семейством следов τ_x на $\mathbf{A}$ и принимающего значения в $L^\infty(X)$, следует, что алгебра $\mathbf{A}$ является конечной W^* -алгеброй с конечным точным следом $\bar{\tau} = \int_X \tau_x dx$.

Далее мы будем иметь дело только со случаем, когда X есть отрезок или окружность. Тогда если X разделен точками $\{x_k\}$ на отрезки $D_k = [x_k, x_{k+1}]$ и если $a_k(x) \in \mathcal{A}|_{D_k}$ есть непрерывное поле для каждого k , то мы будем называть множество $a(x) = \{a_k(x)\}$ *кусочно-непрерывным* полем на X . Такие кусочно-непрерывные поля, очевидно, принадлежат W^* -алгебре $\mathbf{A}$. Расстояние от такого поля до C^* -алгебры $\mathcal{A}$ задается формулой

$$\text{dist}(a(x), \mathcal{A}) = \sup_k \|a_k(x_k) - a_{k+1}(x_k)\|.$$

Для удобства обозначений мы будем писать $K_1(x) \sim K_2(x)$ для двух кусочно-непрерывных полей $K_1(x)$ и $K_2(x)$, если существует кусочно-непрерывное унитарное поле $u(x)$ такое, что $u^*(x)K_1(x)u(x) = K_2(x)$.

Статья состоит из четырех параграфов. В первом параграфе мы обсуждаем понятие диагонализруемости для операторов, действующих в гильбертовых C^* -модулях.

В § 2 мы обсуждаем одну проблему, связанную с почти коммутирующими операторами, и доказываем для некоторого класса C^* -алгебр (включая матричные), что если $h \in A$ есть самосопряженный элемент, $u \in A$ — унитарный, и норма их коммутатора $[u, h]$ достаточно мала, то u можно соединить с единицей непрерывным путем $u(t)$ так, чтобы норма коммутатора $[u(t), h]$ была бы мала вдоль этого пути. Этот факт используется для доказательства основной теоремы, но он представляет также независимый интерес в связи с топологическими приложениями [2]. Оценка, которую мы даем для нормы коммутатора, не является наилучшей, но она достаточно для наших целей.

Параграф 3 содержит доказательство диагонализируемости самосопряженных компактных операторов в гильбертовых C^* -модулях над некоторыми непрерывными полями C^* -алгебр нулевого вещественного ранга со следом над одномерными многообразиями. К сожалению, наш метод не может быть применен в случае произвольной размерности базы, хотя мы предполагаем, что наш результат верен в большей общности. Условия, которым должны удовлетворять C^* -алгебры — слои, также далеки от необходимых и могут быть ослаблены в различных направлениях.

В последнем параграфе мы приводим пример C^* -алгебры, не допускающей непрерывной диагонализации самосопряженных операторов.

Автор выражает благодарность А. С. Мищенко, Е. В. Троицкому и М. Франку за полезные обсуждения.

§ 1. Диагонализация операторов в гильбертовых C^* -модулях

Пусть $\mathcal{A}$ есть C^* -алгебра с единицей, $H_{\mathcal{A}}$ — правый гильбертов $\mathcal{A}$ -модуль последовательностей $a = (a_k)$, $a_k \in \mathcal{A}$, $k \in \mathbb{N}$, таких, что ряд $\sum a_k^* a_k$ сходится в $\mathcal{A}$ по норме; в $H_{\mathcal{A}}$ введем стандартный базис $\{e_k\}$. Внутреннее $\mathcal{A}$ -значное произведение на модуле $H_{\mathcal{A}}$ задается формулой $\langle x, y \rangle = \sum x_k^* y_k$, $x, y \in \mathcal{A}$. Обозначим через $L_n(\mathcal{A}) \subset H_{\mathcal{A}}$ подмодуль, порожденный первыми n элементами $e_1, \dots, e_n$ базиса. Теория гильбертовых C^* -модулей и операторов в них подробно изложена в статьях [3]–[8] и в книге [9].

Через $H_{\mathcal{A}}^* = \text{Hom}_{\mathcal{A}}(H_{\mathcal{A}}, \mathcal{A})$ обозначим $\mathcal{A}$ -модуль, дуальный к $H_{\mathcal{A}}$, т.е. состоящий из всех ограниченных $\mathcal{A}$ -линейных $\mathcal{A}$ -значных функционалов на $H_{\mathcal{A}}$. Напомним, что модуль $L_n(\mathcal{A})$ является *автодуальным*, т.е. $L_n^*(\mathcal{A}) = L_n(\mathcal{A})$. Ограниченный оператор $K: H_{\mathcal{A}} \rightarrow H_{\mathcal{A}}$ называется *компактным* [6] [7], если он лежит в замыкании (по норме) линейной оболочки операторов вида

$$\theta_{x,y}, \quad \theta_{x,y}(z) = x\langle y, z \rangle, \quad x, y, z \in H_{\mathcal{A}}.$$

Мы называем компактный оператор K *строго положительным*, если $\langle Kx, x \rangle$ является положительным элементом в $\mathcal{A}$, и если его спектральный проектор, отвечающий нулевой точке спектра K , является нулевым. Мы используем известный факт [4], что в случае, когда $\mathcal{A}$ есть W^* -алгебра, внутреннее произведение естественным образом продолжается на дуальный модуль $H_{\mathcal{A}}^*$. Пусть $M_{\mathcal{A}}$ в дальнейшем обозначает либо $L_n(\mathcal{A})$, либо $H_{\mathcal{A}}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Пусть $\mathbf{A}$ есть W^* -алгебра. Назовем самосопряженный оператор K в $\mathbf{A}$ -модуле $M_{\mathbf{A}}$ *диагонализируемым*, если существует множество $\{x_i\}$ элементов из $M_{\mathbf{A}}^*$ и множество элементов $\lambda_i \in \mathbf{A}$ таких, что

- i) множество $\{x_i\}$ ортонормированно, т.е. $\langle x_i, x_j \rangle = \delta_{ij}$;

- ii) модуль $M_{\mathbf{A}}^*$ совпадает с $\mathbf{A}$ -модулем $\mathcal{M}^*$, дуальным к модулю $\mathcal{M}$, порожденному множеством $\{x_i\}$;
- iii) $Kx_i = x_i\lambda_i$;
- iv) для любых унитарных элементов $u_i, u_{i+1} \in \mathbf{A}$ выполнено операторное неравенство

$$u_i^* \lambda_i u_i \geq u_{i+1}^* \lambda_{i+1} u_{i+1}.$$

Элементы x_i мы называем “собственными векторами”, а операторы λ_i — “собственными значениями” оператора K . Отметим, что “собственные векторы” и “собственные значения” определены неоднозначно. Условие iv) означает, что наше определение диагонализированности включает в себя естественное упорядочение “собственных значений”.

Задача диагонализации операторов в гильбертовых модулях впервые была поставлена Р. В. Кэдисоном в [10], где доказано, что самосопряженный оператор в модуле $L_n(\mathbf{A})$ над W^* -алгеброй $\mathbf{A}$ диагонализирован. Далее эта задача обсуждалась в различных ситуациях в [11]–[14] и т. д. В работах [15], [16] нами была доказана следующая

ТЕОРЕМА 1.2. *Если $\mathbf{A}$ есть конечная W^* -алгебра с конечным нормальным точным следом, то компактный строго положительный оператор K в модуле $H_{\mathbf{A}}$ может быть диагонализирован в $H_{\mathbf{A}}^*$, и его “собственные значения” определены единственным образом с точностью до унитарной эквивалентности.*

В работе [17] было также доказано, что “собственные значения” непрерывно зависят от компактных операторов, точнее

ТЕОРЕМА 1.3. *Если $K_k: H_{\mathbf{A}} \rightarrow H_{\mathbf{A}}$, $k = 1, 2$, суть компактные строго положительные операторы и если $\|K_1 - K_2\| < \varepsilon$, то*

- i) *существует унитарный оператор U , действующий на модуле $H_{\mathbf{A}}^*$, отображающий “собственные векторы” K_2 в “собственные векторы” K_1 , $\|U^* K_1 U - K_2\| < \varepsilon$;*
- ii) *“собственные значения” $\{\lambda_i^{(k)}\}$ операторов K_k , $k = 1, 2$, можно выбрать так, что $\|\lambda_i^{(1)} - \lambda_i^{(2)}\| < \varepsilon$.*

Известно, что в коммутативном случае, т.е. когда $\mathcal{A} = C(X)$ есть C^* -алгебра непрерывных функций на компакте, компактные самосопряженные операторы не могут быть диагонализированы в модуле $H_{\mathcal{A}}$. Однако это становится возможным в большем модуле над большей W^* -алгеброй $L^\infty(X) = \mathbf{A} \supset \mathcal{A}$, которая получается из $\mathcal{A}$ ее пополнением (на ограниченных множествах) по слабой топологии в естественном представлении $\mathcal{A}$ в гильбертовом пространстве $H = L^2(X)$ с интегральной нормой, задаваемой точным конечным следом (мерой) на $\mathcal{A}$. В отличие от “собственных векторов”, “собственные значения” являются непрерывными, т.е. лежат в исходной C^* -алгебре $\mathcal{A}$. Это приводит нас к следующему определению.

Пусть $\mathcal{A}$ есть C^* -алгебра с конечным точным следом τ . Пусть $(a, b)_\tau = \tau(a^*b)$, $a, b \in \mathcal{A}$, есть невырожденное скалярное произведение на $\mathcal{A}$, а $\|\cdot\|_\tau = (\cdot, \cdot)_\tau^{1/2}$ — норма, задаваемая следом τ на $\mathcal{A}$. Пополняя $\mathcal{A}$ по этой норме, мы получаем

гильбертово пространство $L^2(\mathcal{A})$ и точное представление $\mathcal{A}$ в этом пространстве. Пусть $\mathbf{A} = L^\infty(\mathcal{A})$ есть соответствующая конечная W^* -алгебра со следом, содержащая $\mathcal{A}$ как слабо плотную подалгебру. Пусть K есть компактный строго положительный оператор в $H_{\mathcal{A}}$. Мы можем естественным образом продолжить K на больший модуль $H_{\mathbf{A}}^*$, в котором, как легко проверить, он по-прежнему будет компактным и строго положительным, и в котором он может быть диагонализирован по теореме 1.2.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.4. Назовем C^* -алгебру $\mathcal{A}$ *допускающей слабую диагонализацию*, если для любого компактного строго положительного оператора K в $H_{\mathcal{A}}$ диагональные элементы (после диагонализации в $H_{\mathbf{A}}^*$) могут быть выбраны в $\mathcal{A}$ (вместо $\mathbf{A}$).

ПРОБЛЕМА. *Описать класс C^* -алгебр с конечным точным следом, допускающих слабую диагонализацию.*

Отметим, что если C^* -алгебра допускает слабую диагонализацию, то каждый самосопряженный оператор конечного ранга $K \in M_n \otimes \mathcal{A}$ также может быть диагонализирован над W^* -алгеброй $\mathbf{A}$ с “собственными значениями”, лежащими в $\mathcal{A}$.

Напомним, что вещественный ранг нуль ($RR(\mathcal{A}) = 0$) означает, что каждый самосопряженный оператор в $\mathcal{A}$ допускает аппроксимацию операторами с конечным спектром, т.е. имеющими вид $\sum \alpha_i p_i$, где $p_i \in \mathcal{A}$ суть самосопряженные взаимно ортогональные проекторы, а $\alpha_i \in \mathbb{R}$ [18]. Согласно [18] из условия $RR(\mathcal{A}) = 0$ следует, что $RR(\text{End}_{\mathcal{A}}(L_n(\mathcal{A}))) = 0$. В работе [17] было показано, что наряду с коммутативными C^* -алгебрами класс C^* -алгебр, допускающих слабую диагонализацию, включает также C^* -алгебры нулевого вещественного ранга со следом, обладающие следующим свойством:

- (*) для любых двух проекторов $p, q \in \mathcal{A}$ в $\mathcal{A}$ существуют эквивалентные друг другу (в $\mathcal{A}$) проекторы $r_p \sim r_q$, $r_p \leq p$, $r_q \leq q$ такие, что $T(r_p) = T(r_q) = \min\{T(p)(z), T(q)(z)\}$, $z \in Z$, где Z есть пространство максимальных идеалов центра $\mathcal{Z}$ W^* -алгебры $L^\infty(A)$, а T – стандартный $\mathcal{Z}$ -значный след на $L^\infty(A)$.

Это свойство означает, что естественное отображение $K_0(\mathcal{A}) \rightarrow K_0(L^\infty(\mathcal{A}))$ является вложением, и $K_0(\mathcal{A})$ является подрешеткой в $K_0(L^\infty(\mathcal{A}))$. Кроме конечных факторов указанным свойством обладают C^* -алгебры иррационального вращения [19] и алгебры Бунса – Дедденса [20].

§ 2. О почти коммутирующих операторах

Следующий результат о почти коммутирующих операторах в некоторых C^* -алгебрах (в том числе матричных) мы используем для диагонализации непрерывных полей операторов. Напомним, что $\text{tsr}(A) = 1$ означает, что обратимые элементы плотны в A .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. *Пусть A есть C^* -алгебра со свойствами:*

- i) $RR(A) = 0$ и $\text{tsr}(A) = 1$;
- ii) *для любого проектора $p \in A$ унитарная группа C^* -алгебры pAp связна.*

Пусть $h \in A$ есть самосопряженный, $u \in A$ — унитарный элемент такие, что

$$\|u^*hu - h\| < \delta. \quad (2.1)$$

Тогда существуют константы C и $\delta_0 > 0$, зависящие только от $\|h\|$, и непрерывный унитарный путь $u(t)$, соединяющий u с единицей, такой, что для $\delta < \delta_0$ при всех значениях параметра t выполнено неравенство

$$\|u^*(t)hu(t) - h\| < C\sqrt[4]{\delta}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $RR(A) = 0$, без ограничения общности можем предположить, что оператор h является линейной комбинацией взаимно ортогональных проекторов, $h = \sum_{i=1}^n \lambda_i p_i \in A$ с вещественными собственными значениями λ_i . Мы можем также предположить, что эти собственные значения упорядочены, т.е. $\lambda_1 > \dots > \lambda_n$. Разобьем отрезок $[\lambda_n, \lambda_1]$ на меньшие отрезки длины $\sqrt[4]{\delta}$ и пронумеруем только те отрезки, которые содержат хотя бы одно собственное значение λ_i . Обозначим эти отрезки через Δ_k . Число m таких отрезков не превосходит $(\lambda_1 - \lambda_n)/\sqrt[4]{\delta} + 1$. При этом выполнены следующие свойства:

- i) если $\lambda_i, \lambda_j \in \Delta_k$, то $|\lambda_i - \lambda_j| < \sqrt[4]{\delta}$;
- ii) если $\lambda_i \in \Delta_{k-1}$ и $\lambda_j \in \Delta_{k+1}$, то $|\lambda_i - \lambda_j| \geq \sqrt[4]{\delta}$.

Обозначим через μ_k середины отрезков Δ_k . Тогда если $\mu_{k+1} - \mu_k > \sqrt[4]{\delta}$, то спектр h имеет лакуну длины не менее, чем $\sqrt[4]{\delta}$.

Обозначим спектральные проекторы оператора h , отвечающие отрезкам Δ_k , через q_k , $q_1 + \dots + q_m = 1$ (если точка спектра λ_j совпадает с граничной точкой двух соседних отрезков Δ_k и Δ_{k+1} , отнесем ее спектральный проектор произвольно либо к q_k , либо к q_{k+1}). Тогда алгебра A как A -модуль может быть разложена в прямую сумму, отвечающую этим проекторам, $A = \bigoplus_{k=1}^m q_k A$. Будем записывать элементы алгебры A в виде матриц по отношению к этому разложению: $h = \text{diag}(\{h_i\})$, $h_i = q_i h q_i$, и $u = (u_{ij})$, $u_{ij} = q_i u q_j$.

Заметим, что если $m = 1$, т.е. если все собственные значения h отличаются друг от друга не более, чем на $\sqrt[4]{\delta}$, то мы можем взять любой унитарный путь $u(t)$, соединяющий u с единицей. Поскольку при $m = 1$ существует число μ такое, что $\|h - \mu\| < \sqrt[4]{\delta}/2$, и следовательно,

$$\|v^*hv - h\| \leq \|v^*hv - v^*\mu v\| + \|\mu - h\| < 2\frac{\sqrt[4]{\delta}}{2} = \sqrt[4]{\delta}$$

для любого унитарного v , то далее мы можем предполагать, что $m > 1$.

Рассмотрим еще одно разбиение спектра оператора h на более мелкие (чем Δ_k) отрезки $\bar{\Delta}_s$ длины δ . Как и раньше, мы принимаем в рассмотрение только такие отрезки $\bar{\Delta}_s$, которые содержат хотя бы одну точку спектра оператора h . Без ограничения общности можно считать, что каждый отрезок $\bar{\Delta}_s$ лежит в одном из отрезков Δ_k . Пусть $\bar{\lambda}_s$ суть середины отрезков $\bar{\Delta}_s$ и пусть $\bar{p}_s$ — спектральные проекторы h , отвечающие отрезкам $\bar{\Delta}_s$. Положим

$$\bar{h} = \sum_s \bar{\lambda}_s \bar{p}_s.$$

Очевидно, $\|h - \bar{h}\| < \delta/2$, поэтому из (2.1) следует, что

$$\|u^* \bar{h} u - \bar{u}\| \leq \|u^* \bar{h} u - u^* h u\| + \|u^* h u - h\| + \|h - \bar{h}\| < 2\delta. \quad (2.2)$$

Пусть $A = \bigoplus_s \bar{p}_s A$ есть разложение A в прямую сумму, отвечающее спектральным проекторам h . Оно является подразложением $\bigoplus_{k=1}^m q_k A$, и матрица u может быть записана в виде $u = (v_{kl})$, $v_{kl} = \bar{p}_k u \bar{p}_l$, а матричные элементы u_{ij} могут рассматриваться как блоки элементов v_{kl} . Пусть N есть число столбцов матрицы (v_{kl}) . Тогда

$$N < \frac{2\|h\|}{\delta} + 1. \quad (2.3)$$

Перейдем теперь к построению гомотопии $u \sim 1$. Сначала мы определим путь $u(t)$, не являющийся унитарным, но проходящий в окрестности унитарной группы $U(A)$ C^* -алгебры A .

Первый шаг гомотопии. Пусть $a = (a_{ij})$ есть матрица, отвечающая прямой сумме $\bigoplus_{k=1}^m q_k A$. Обозначим через $d_0(a)$ ее главную диагональ $\text{diag}(\{a_{ii}\})$, а через $d_k(a)$ — диагональ, лежащую на k линий над (или под, если k отрицательно) главной диагональю. Покажем, что матрица $u = (u_{ij})$ “почти” трехдиагональна.

Пусть k_i и k_j суть номера отрезков Δ_k , содержащих собственные значения $\bar{\lambda}_i$ и $\bar{\lambda}_j$ оператора $\bar{h}$; $\bar{\lambda}_i \in \Delta_{k_i}$, $\bar{\lambda}_j \in \Delta_{k_j}$. Определим трехдиагональную матрицу $d(a)$ следующим образом:

- i) если $k_j \geq k_i + 2$ или $k_j \leq k_i - 2$, то положим $(d(a))_{ij} = 0$;
- ii) если $k_j = k_i \pm 1$ и $|\mu_{k_j} - \mu_{k_i}| > \sqrt[4]{\delta}$, то положим также $(d(a))_{ij} = 0$;
- iii) в остальных случаях положим $(d(a))_{ij} = a_{ij}$.

ЛЕММА 2.2. Пусть $a = (a_{ij})$, $a_{ij} \in A$, есть $(N \times N)$ -матрица такая, что для каждого i выполнена оценка $\|\sum_j a_{ij} a_{ij}^*\| < \varepsilon^2$. Тогда $\|a\| < \varepsilon \sqrt{N}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\xi = (\xi_k)$, $k = 1, \dots, N$, $\xi_i \in A$. Используя обобщенное неравенство Коши–Шварца [9], получаем, что

$$\begin{aligned} \|a\xi\|^2 &= \left\| \sum_{ijk} \xi_j^* a_{ij}^* a_{ik} \xi_k \right\|^2 \leq \sum_i \left\| \sum_{kj} \xi_j^* a_{ij}^* a_{ik} \xi_k \right\|^2 \\ &\leq \sum_i \left\| \sum_k a_{ik} a_{ik}^* \right\| \cdot \left\| \sum_k \xi_k^* \xi_k \right\| < N\varepsilon^2 \|\xi\|^2. \end{aligned}$$

Следовательно, $\|a\xi\| < \sqrt{N}\varepsilon \|\xi\|$.

ЛЕММА 2.3. Из неравенства (2.1) следует, что для достаточно малых δ выполнено неравенство

$$\|u - d(u)\| < 4\|h\|^{1/2} \sqrt[4]{\delta}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим матрицу $(\bar{h}u - u\bar{h})(\bar{h}u - u\bar{h})^*$. Из оценки (2.2) следует, что норма этой матрицы меньше, чем $4\delta^2$, поэтому норма любого матричного элемента этой матрицы также меньше $4\delta^2$. Поскольку $\bar{\lambda}_j$ коммутирует с v_{kj} , то для каждого i

$$\left\| \sum_{j=1}^N (\bar{\lambda}_i - \bar{\lambda}_j)^2 v_{ij} v_{ij}^* \right\| < 4\delta^2. \quad (2.4)$$

Пусть $\bar{\lambda}_i \in \Delta_{k_i}$, $\bar{\lambda}_j \in \Delta_{k_j}$. Так как все слагаемые в (2.4) положительны, опустив часть из них, мы не увеличим нормы суммы, поэтому

$$\left\| \sum_j' (\bar{\lambda}_i - \bar{\lambda}_j)^2 v_{ij} v_{ij}^* \right\| < 4\delta^2,$$

где сумма $\sum_j'$ берется только по тем j , для которых либо $|k_j - k_i| \geq 2$, либо $|k_j - k_i| = 1$ и $|\mu_{k_j} - \mu_{k_i}| > \sqrt[4]{\delta}$, т.е. мы отбрасываем те v_{ij} , для которых $(u - d(u))_{ij} = 0$. Поэтому в сумме $\sum_j'$ остаются лишь те слагаемые, для которых $|\bar{\lambda}_k - \bar{\lambda}_j| \geq \sqrt[4]{\delta}$, следовательно,

$$4\delta^2 > \left\| \sum_j' (\bar{\lambda}_i - \bar{\lambda}_j)^2 v_{ij} v_{ij}^* \right\| \geq \sqrt{\delta} \left\| \sum_i' v_{ij} v_{ij}^* \right\|$$

и, значит,

$$\left\| \sum_j' v_{ij} v_{ij}^* \right\| < 4\delta^{3/2}. \quad (2.5)$$

Суммы $\sum_j'$ отвечают блокам, лежащим в матрице $u - d(u)$. Из леммы 2.2 с учетом (2.3) и (2.5) (для $\varepsilon = 2\delta^{3/4}$) мы получаем для $\delta < \|h\|$, что

$$\|u - d(u)\| < \sqrt{N} 2\delta^{3/4} \leq 2\|h\|^{1/2} \delta^{-1/2} 2\delta^{3/4} = 4\|h\|^{1/2} \sqrt[4]{\delta},$$

что завершает доказательство леммы 2.3.

Определим путь $u(t)$ формулой

$$u(t) = (u - d(u))(1 - t) + d(u).$$

Тогда $u(0) = u$, $u(1) = d(u)$, и для каждого $t \in [0, 1]$ согласно лемме 2.3 мы имеем $\text{dist}(u(t), U(A)) < 4\|h\|^{1/2} \sqrt[4]{\delta}$. Оценим норму коммутатора:

$$\begin{aligned} \|u(t)\bar{h} - \bar{h}u(t)\| &\leq \|u\bar{h} - \bar{h}u\| + \|(u - d(u))\bar{h} - \bar{h}(u - d(u))\| \\ &< 2\delta + 2\|h\| \|u - d(u)\| < 2\delta + 2\|h\| 4\|h\|^{1/2} \sqrt[4]{\delta}. \end{aligned}$$

Второй шаг гомотопии. Нам нужно соединить матрицу $d(u)$ с диагональной матрицей. Для этого нам необходима следующая

ЛЕММА 2.4 (приведение к почти верхнетреугольному виду). Пусть

$$a = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

есть матрица в $q_{j_1}A \oplus q_{j_2}A$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует унитарный путь $v(t)$ такой, что $v(0) = 1$,

$$v(1) \cdot a = \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} \\ a'_{21} & a'_{22} \end{pmatrix},$$

где $\|a'_{21}\| < \varepsilon$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По предположению $\text{tsr}(A) = 1$, поэтому для любого $\varepsilon > 0$ можно найти обратимый элемент $\bar{a}_{11}$ такой, что $\|\bar{a}_{11} - a_{11}\| < \varepsilon$. Положим $\alpha = a_{21}(\bar{a}_{11})^{-1}$,

$$v(t) = \begin{pmatrix} (1 + t^2 \alpha^* \alpha)^{-1/2} & (1 + t^2 \alpha^* \alpha)^{-1/2} \cdot t \alpha^* \\ -(1 + t^2 \alpha \alpha^*)^{-1/2} \cdot t \alpha & (1 + t^2 \alpha \alpha^*)^{-1/2} \end{pmatrix}.$$

Легко видеть, что элемент $v(1)$ унитарен. Оценим матричный элемент a'_{21} в произведении $v(1) \cdot a$

$$\begin{aligned} \|a'_{21}\| &= \|(1 + \alpha \alpha^*)^{-1/2} \alpha a_{11} + (1 + \alpha \alpha^*)^{-1/2} a_{21}\| \\ &= \|(1 + \alpha \alpha^*)^{-1/2} (\alpha a_{11} - \alpha \bar{a}_{11})\| \leq \|(1 + \alpha \alpha^*)^{-1/2} \alpha\| \cdot \|a_{11} - \bar{a}_{11}\| \\ &< \varepsilon \cdot \|(1 + \alpha \alpha^*)^{-1/2} \alpha\| = \varepsilon \cdot \|f(\beta)\|^{1/2} \leq \varepsilon, \end{aligned}$$

где $\beta = \alpha \alpha^*$ и $f(\lambda) = \lambda/(1 + \lambda) \leq 1$.

Рассмотрим элемент u_{21} матрицы u . Если отрезки Δ_1 и Δ_2 отделены друг от друга, то элемент u_{21} уже достаточно мал, а элемент $(d(u))_{21}$ уже нулевой. Положим в этом случае $v_1 = 1$. Если эти отрезки имеют общую граничную точку, то по лемме 2.4 можно найти в модуле $q_1A \oplus q_2A$ унитарный путь $v_1(t)$ такой, что $v_1(0) = 1$,

$$v_1(1) = \begin{pmatrix} v_{11}^{(1)} & v_{12}^{(1)} \\ v_{21}^{(1)} & v_{22}^{(1)} \end{pmatrix}$$

и

$$\begin{pmatrix} v_{11}^{(1)} & v_{12}^{(1)} & \vdots \\ v_{21}^{(1)} & v_{22}^{(1)} & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & & & E \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & & \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} & \\ & \dots & \dots & \dots \\ & & \dots & \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{11}^{(1)} & u_{12}^{(1)} & u_{13}^{(1)} \\ u_{21}^{(1)} & u_{22}^{(1)} & u_{23}^{(1)} \\ & \dots & \dots & \dots \\ & & \dots & \dots \end{pmatrix},$$

где $\|u_{21}^{(1)}\| < \varepsilon$. Здесь E обозначает единичную матрицу, а пустые места – нули. Заметим, что третья и следующие строки матрицы u не меняются. Мы получаем путь $u(t) = v_1(t)d(u)$, и поскольку $v_1(t)$ унитарен,

$$\text{dist}(u(t), U) < 4\|h\|^{1/2} \sqrt[4]{\delta}. \quad (2.6)$$

Так как в лемме 2.4 число $\varepsilon > 0$ можно выбирать произвольным образом, оценка (2.6) остается верной, если мы заменим элемент $u_{21}^{(1)}$ на нуль.

Обратимся теперь к элементу $u_{32} = u_{32}^{(1)}$. Если отрезки Δ_2 и Δ_3 отделены друг от друга, то этот элемент уже достаточно мал. Положим тогда $v_2 = 1$. В противном случае найдем унитарный путь $v_2(t)$, $t \in [1, 2]$, такой, что $v_2(1) = 1$, а матрица

$$v_2(2) = \begin{pmatrix} v_{22}^{(2)} & v_{23}^{(2)} \\ v_{32}^{(2)} & v_{33}^{(2)} \end{pmatrix}$$

в модуле $q_2 A \oplus q_3 A$ такова, что

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & v_{22}^{(2)} & v_{23}^{(2)} & \vdots & \\ & v_{32}^{(2)} & v_{33}^{(2)} & \vdots & \\ & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & & \vdots & E \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_{11}^{(1)} & u_{12}^{(1)} & u_{13}^{(1)} & & \\ & u_{22}^{(1)} & u_{23}^{(1)} & & \\ & u_{32}^{(1)} & u_{33}^{(1)} & u_{34}^{(1)} & \\ & & \dots & \dots & \dots \\ & & & \dots & \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{11}^{(2)} & u_{12}^{(2)} & u_{13}^{(2)} & & \\ & u_{22}^{(2)} & u_{23}^{(2)} & u_{24}^{(2)} & \\ & u_{32}^{(2)} & u_{33}^{(2)} & u_{34}^{(2)} & \\ & & \dots & \dots & \dots \\ & & & \dots & \dots \end{pmatrix},$$

где $\|u_{32}^{(2)}\| < \varepsilon$. Опять мы можем заменить элемент $u_{32}^{(2)}$ нулем. Повторяя эту процедуру, получаем унитарный путь

$$v(t) = v_{m-1}(t) \cdot \dots \cdot v_2(t) \cdot v_1(t), \quad t \in [0, m-1],$$

соединяющий единицу с унитарным элементом

$$v = v(m-1) = v_{m-1}(m-1) \cdot \dots \cdot v_2(2) \cdot v_1(1).$$

Обозначим $v(t) \cdot d(u)$ через $\bar{u}(t)$, а $v \cdot d(u)$ — через $\bar{u}$. Заметим, что

$$\text{dist}(\bar{u}(t), U) < 4\|h\|^{1/2} \sqrt[4]{\delta} \quad (2.7)$$

для всех t , так как умножение на унитарный элемент не меняет расстояния до унитарной группы. Отсюда получается оценка $\|\bar{u}_{ij}(t)\| < 4\|h\|^{1/2} \sqrt[4]{\delta}$ для всех i, j . Заметим также, что для всех t путь $\bar{u}(t)$ лежит в четырехдиагональных матрицах вида

$$\bar{u}(t) = \begin{pmatrix} \bar{u}_{11} & \bar{u}_{12} & \bar{u}_{13} & & \\ \bar{u}_{21} & \bar{u}_{22} & \bar{u}_{23} & \bar{u}_{24} & \\ & \bar{u}_{32} & \bar{u}_{33} & \bar{u}_{34} & \bar{u}_{35} \\ & & \dots & \dots & \dots \\ & & & \dots & \dots \\ & & & & \dots & \dots \end{pmatrix},$$

поэтому легко оценить норму коммутатора вдоль этого пути. Для этого удобнее работать с оператором $h' = \sum \mu_k q_k$, $\|h - h'\| < \frac{1}{2} \sqrt[4]{\delta}$. Тогда

$$\begin{aligned} \|\bar{u}(t)h - h\bar{u}(t)\| &< \|[\bar{u}(t), h']\| + \sqrt[4]{\delta} \\ &\leq \| [d_{-1}(\bar{u}(t)), h'] \| + \| [d_1(\bar{u}(t)), h'] \| + \| [d_2(\bar{u}(t)), h'] \| + \sqrt[4]{\delta} \\ &\leq \sup_{i,j,k} \|\bar{u}_{ij}(t)\| (2|\mu_k - \mu_{k+1}| + |\mu_k - \mu_{k+2}|) + \sqrt[4]{\delta} < 6\sqrt[4]{\delta} \end{aligned} \quad (2.8)$$

для достаточно малых δ . Окончательная матрица $\bar{u}$ является трехдиагональной и верхнетреугольной:

$$\bar{u} = \begin{pmatrix} \bar{u}_{11} & \bar{u}_{12} & \bar{u}_{13} & & \\ & \bar{u}_{22} & \bar{u}_{23} & \bar{u}_{24} & \\ & & \bar{u}_{33} & \bar{u}_{34} & \bar{u}_{35} \\ & & & \cdots & \cdots \\ & & & & \cdots \end{pmatrix}.$$

Третий шаг гомотопии. Из (2.7) следует, что матрица $\bar{u}$ обратима и существует унитарный элемент w такой, что

$$\|\bar{u} - w\| < 4\|h\|^{1/2} \sqrt[4]{\delta}.$$

Поэтому, если δ достаточно мало,

$$\|(\bar{u})^{-1} - w^*\| < 6\|h\|^{1/2} \sqrt[4]{\delta}.$$

Следовательно, получаем оценку

$$\|(\bar{u})^{-1} - (\bar{u})^*\| < 10\|h\|^{1/2} \sqrt[4]{\delta},$$

и, значит,

$$\|d_1(\bar{u})\| < 10\|h\|^{1/2} \sqrt[4]{\delta}, \quad \|d_2(\bar{u})\| < 10\|h\|^{1/2} \sqrt[4]{\delta},$$

где $d_k - k$ -я диагональ. Поэтому

$$\text{dist}(d_0(\bar{u}), U) < \text{dist}(\bar{u}, U) + \|d_1(\bar{u})\| + \|d_2(\bar{u})\| < 24\|h\|^{1/2} \sqrt[4]{\delta}. \quad (2.9)$$

Соединим матрицы $\bar{u}$ и $d_0(\bar{u})$ линейным путем $\bar{u}(t)$. Тогда вдоль этого пути

$$\text{dist}(\bar{u}(t), U) < 24\|h\|^{1/2} \sqrt[4]{\delta}, \quad (2.10)$$

а из (2.8) следует, что

$$\|\bar{u}(t)h - h\bar{u}(t)\| < 6\|h\|^{1/2} \sqrt[4]{\delta}.$$

Четвертый шаг гомотопии. Из (2.9) следует, что для достаточно малых δ диагональная матрица $d_0(\bar{u})$ состоит из обратимых элементов, близких к унитарным, и из (2.10) следует, что для каждого $\bar{u}_{ii}$ можно найти унитарный элемент w_i такой, что $\|\bar{u}_{ii} - w_i\| < 24\|h\|^{1/2} \sqrt[4]{\delta}$. Возьмем линейный путь, соединяющий матрицы $\bar{u}$ и $\text{diag}(\{w_i\})$. Этот путь также лежит близи унитарной группы U . Соединим затем матрицу $\text{diag}(\{w_i\})$ с единицей. Последний путь лежит в U . Пусть $\tilde{u}(t)$ есть путь,

построенный на четвертом шаге гомотопии. Заметим, что он лежит в диагональных матрицах, поэтому норма коммутатора вдоль этого пути мала

$$\|\tilde{u}(t)h - h\tilde{u}(t)\| \leq \|\tilde{u}(t)h' - h'\tilde{u}(t)\| + \sqrt[4]{\delta} = \sqrt[4]{\delta}.$$

Рассмотрим теперь все четыре шага построенной гомотопии. Вдоль всего пути $u'(t)$, соединяющего u с единицей, верны оценки

$$\text{dist}(u'(t), U) < 24\|h\|^{1/2}\sqrt[4]{\delta}$$

и

$$\|u'(t)h - hu'(t)\| < 6\sqrt[4]{\delta}.$$

Поэтому существует унитарный путь $u(t)$, соединяющий u с единицей, такой, что

$$\|u(t) - u'(t)\| < 48\|h\|^{1/2}\sqrt[4]{\delta},$$

значит, мы получаем оценку

$$\begin{aligned} \|u(t)h - hu(t)\| &< \|u'(t)h - hu'(t)\| + 2\|h\|\|u(t) - u'(t)\| \\ &< 6\sqrt[4]{\delta} + 96\|h\|^{3/2}\sqrt[4]{\delta} = C\sqrt[4]{\delta}. \end{aligned}$$

Предложение 2.1 доказано.

Заметим, что класс C^* -алгебр, удовлетворяющих условиям предложения 2.1, включает конечные W^* -алгебры и, в частности, матричные алгебры. Константа C не является наилучшей. Однако степень $\frac{1}{4}$ для δ , как нам кажется, не может быть увеличена. Поскольку норма коммутатора не меняется при замене h на $h + \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$, то константа C на самом деле зависит не от нормы h , а от длины его спектра.

Заметим также, что тем же способом можно доказать аналогичный результат, если заменить самосопряженный оператор h на унитарный оператор v с достаточно большой лакунной в спектре. Последнее предположение существенно, так как в противном случае существует препятствие [2].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.5. Пусть A есть C^* -алгебра, удовлетворяющая условиям:

- i) $RR(A) = 0$ и $\text{tsr}(A) = 1$;
- ii) для любого проектора $p \in A$ унитарная группа C^* -алгебры pAp связна.

Пусть $u, v \in A$ суть унитарные элементы такие, что $\|uv - vu\| < \delta$. Предположим, что единичная окружность содержит дугу длины d , свободную от точек спектра v . Тогда существуют константы C и $\delta_0 > 0$, зависящие только от d , и унитарный путь $u(t)$, соединяющий u с единицей, такой, что при $\delta < \delta_0$ для всех t $\|u(t)v - vu(t)\| < C\sqrt[4]{\delta}$.

§ 3. Диагонализация операторов над некоторыми непрерывными полями C^* -алгебр

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть $(A(x), X, \mathcal{A})$ есть непрерывное поле C^* -алгебр со следом над отрезком или окружностью. Пусть $(B(x), X, \mathcal{B})$ есть соответствующее непрерывное поле W^* -алгебр, а $\mathbf{A}$ — соответствующая W^* -алгебра. Предположим, что для каждой точки $x \in X$ C^* -алгебра $A(x)$ обладает следующими свойствами:

- i) $RR(A(x)) = 0$ и $\text{tsr}(A(x)) = 1$;
- ii) для любого проектора $p \in A(x)$ унитарная группа C^* -алгебры $pA(x)p$ связна;
- iii) след τ_x на $A(x)$ является конечным и точным;
- iv) гомоморфизм $K_0(A(x)) \rightarrow K_0(B(x))$, индуцированный вложением $A(x) \subset B(x) = L^\infty(A(x))$, является мономорфизмом, и $K_0(A(x))$ является подрешеткой в $K_0(B(x))$.

Тогда C^* -алгебра $\mathcal{A} \in \mathbf{A}$ обладает свойством слабой диагонализации.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО основано на следующих леммах. Через M_n мы обозначаем алгебру $(n \times n)$ -матриц.

ЛЕММА 3.2. Пусть $K_1(x)$, $K_2(x)$ суть два непрерывных поля самосопряженных операторов с конечным спектром в алгебре $M_n \otimes \mathcal{A}$ таких, что K_k унитарно эквивалентны $\text{diag}(\{\lambda_i^{(k)}\})$, $k = 1, 2$. Если $\|K_1(x) - K_2(x)\| < \varepsilon$, то для любого $x_0 \in X$ существуют замкнутая окрестность W точки x_0 и непрерывные унитарные поля $u_i(x)$ в W такие, что

$$\|\lambda_i^{(1)}(x) - u_i^*(x)\lambda_i^{(2)}(x)u_i(x)\| < \varepsilon. \quad (3.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По предположению мы можем записать операторы $K_k(x)$ в виде

$$K_1(x) = \sum \alpha_m p_m(x), \quad K_2(x) = \sum \beta_j q_j(x),$$

где $p_m(x)$, $q_j(x)$ — спектральные проекторы, и собственные значения упорядочены. Так как $K_0(A(x_0)) \subset K_0(B(x_0))$ является подрешеткой по предположению, мы можем найти проекторы $r_l(x_0) \in A(x_0)$ такие, что $\sum_l r_l(x_0) = 1 \in M_n \otimes A(x_0)$, и каждый из проекторов $p_m(x_0)$, $q_j(x_0)$, а также проекторы из $M_n \otimes 1$ унитарно эквивалентны суммам некоторых $r_l(x_0)$. Перенумеровав собственные значения $K_k(x_0)$ и допуская повторение собственных значений, мы можем записать

$$K_1(x_0) = \sum \alpha_l r_l(x_0), \quad K_2(x_0) = \sum \beta_l r'_l(x_0), \quad r_l(x_0) \sim r'_l(x_0).$$

Так как в W^* -алгебре $M_n \otimes B(x_0) = M_n \otimes L^\infty(A(x_0))$ выполнена оценка $\|K_1(x_0) - K_2(x_0)\| < \varepsilon$, то (ср. [21]) для всех l получаем

$$|\alpha_l - \beta_l| < \varepsilon. \quad (3.2)$$

Разделим множество проекторов $\{r_l(x_0)\}$ на s групп

$$\{r_1(x_0), \dots, r_{l_1}(x_0)\}, \dots, \{r_{l_{s-1}+1}(x_0), \dots, r_{l_s}(x_0)\}$$

так, чтобы сумма проекторов в каждой группе была бы унитарно эквивалентна одномерному проектору в $M_n \otimes 1$. Тогда каждой группе соответствует “собственное значение” $\lambda_i^{(k)}(x_0)$:

$$\begin{aligned}\lambda^{(1)}(x_0) &= \alpha_{l_{i-1}+1} r_{l_{i-1}+1}(x_0) + \cdots + \alpha_{l_i} r_{l_i}(x_0), \\ \lambda^{(2)}(x_0) &= \beta_{l_{i-1}+1} r'_{l_{i-1}+1}(x_0) + \cdots + \beta_{l_i} r'_{l_i}(x_0).\end{aligned}$$

Выберем унитарные элементы $u_i(x_0) \in A(x_0)$ такие, что

$$r'_l(x_0) = u_i^*(x_0) r_l(x_0) u_i(x_0), \quad l_{i-1} + 1 \leq l \leq l_i.$$

Тогда оценка (3.1) следует из (3.2).

ЛЕММА 3.3. Пусть $D = [x_k, x_{k+1}]$ есть отрезок в X , $\lambda(x)$, $K'_2(x) \in \mathcal{A}|_D$ — два непрерывных поля самосопряженных операторов с конечным спектром на D таких, что $\|\lambda(x) - \mu'(x)\| < \varepsilon$. Пусть $\mu \in A(x_k)$ есть самосопряженный оператор с конечным спектром такой, что существует унитарный элемент $u \in A(x_k)$,

$$\|\mu - u^* \mu'(x_k) u\| < \delta, \quad \|\lambda(x_k) - \mu\| < \varepsilon.$$

Тогда для достаточно малых δ и ε существует кусочно-непрерывное унитарное поле $u(x)$ такое, что

- i) $u(x_k) = u$, $u(x_{k+1}) = 1$;
- ii) на D имеет место оценка

$$\|u^*(x) \mu'(x) u(x) - \lambda(x)\| < C \sqrt[4]{2\varepsilon + \delta}, \quad (3.3)$$

где C — константа, зависящая только от нормы $\lambda(x)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть u_t , $0 \leq t \leq 1$, — путь, соединяющий u с единицей, в унитарной группе алгебры $A(x_k)$. По предположению $\|\mu - \mu'(x_k)\| < 2\varepsilon$, следовательно,

$$\|\mu'(x_k) - u_t^* \mu'(x_k) u_t\| < 2\varepsilon + \delta.$$

Тогда по предложению 2.1 найдутся константа C , зависящая только от нормы $\lambda(x_k)$ (или $\mu'(x_k)$, так как они близки), и путь u_t , соединяющий u с единицей, такие, что

$$\|u_t^* \mu'(x_k) u_t - \lambda(x_k)\| < C \sqrt[4]{2\varepsilon + \delta}.$$

Из непрерывности следует, что существует точка $x'_{k+1} \in (x_k, x'_{k+1})$ такая, что над отрезком $[x_k, x_{k+1}]$ существует унитарное непрерывное поле $u_t(x)$, продолжающее u_t , и для всех $x \in [x_k, x'_{k+1}]$ по-прежнему верна оценка

$$\|u_t^*(x) \mu'(x) u_t(x) - \lambda(x)\| < C \sqrt[4]{2\varepsilon + \delta}.$$

Определим унитарное поле $u(x)$ формулой

$$u(x) = \begin{cases} u_t(x), & t = \frac{x'_{k+1} - x}{x'_{k+1} - x_k}, \text{ если } x \in [x_k, x'_{k+1}], \\ 1, & \text{если } x \in [x'_{k+1}, x_{k+1}]. \end{cases}$$

Это — унитарное непрерывное поле, и на интервале $[x_k, x'_{k+1}]$ выполняется оценка (3.3). С другой стороны, когда $x \geq x_{k+1}$, $u(x) = 1$, поэтому там эта оценка также выполнена.

ЛЕММА 3.4. Пусть $K(x)$ есть самосопряженный оператор в модуле $L_n(\mathcal{A})$, $K(x) \in M_n \otimes \mathcal{A}$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует кусочно-непрерывное поле операторов с дискретным спектром $K'(x)$, локально лежащее в $M_n \otimes \mathcal{A}$, такое, что $\|K'(x) - K(x)\| < \varepsilon$, оператор $K'(x)$ диагонализуем в $L_n \otimes \mathbf{A}$ с кусочно-непрерывными “собственными значениями” $\lambda_i(x)$, $\text{dist}(\lambda_i(x), \mathcal{A}) < 2\varepsilon$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и выберем точку $x_0 \in X$. Поскольку $RR(A(x_0)) = 0$, мы можем найти оператор $K'(x_0) \in M_n \otimes A(x_0)$ с конечным спектром, $K'(x_0) = \sum_m \alpha_m p_m(x_0)$ (где $p_m(x_0)$ – его спектральные проекторы) такой, что $\|K'(x_0) - K(x_0)\| < \varepsilon/2$. Существует окрестность точки x_0 такая, что проекторы $p_m(x_0)$ могут быть продолжены непрерывным образом до проекторов $p_m(x)$ в этой окрестности. Положим $K'(x) = \sum_m \alpha_m p_m(x)$. Тогда можно найти меньшую окрестность точки x_0 , в которой

$$\|K'(x) - K(x)\| < \varepsilon. \quad (3.4)$$

Итак, для каждой точки в X существуют окрестность W и непрерывное поле на W такие, что выполнено неравенство (3.4). Взяв конечное покрытие X такими окрестностями, можно получить разбиение X на отрезки Δ_k и кусочно-непрерывное поле (непрерывное на каждом отрезке) $K'(x) = \{K'_k(x)\}$, $K'_k(x) \in M_n \otimes \mathcal{A}|_{D_k}$ такое, что $\text{dist}(K'(x), M_n \otimes \mathcal{A}) < 2\varepsilon$. Диагонализуем операторное поле $K'(x)$ на каждом отрезке D_k , $K'(x) = \text{diag}(\{\lambda_i(x)\})$. Тогда поля $\lambda_i(x) = \{\lambda_i^{(k)}(x)\}$, $\lambda_i^{(k)}(x) \in \mathcal{A}|_{D_k}$, являются кусочно-непрерывными, и поскольку $\|K'_{k-1}(x_k) - K'_k(x_k)\| < 2\varepsilon$, то, используя леммы 3.2 и 3.3, мы можем заменить диагональные элементы $\lambda_i(x)$ на каждом интервале на унитарно эквивалентные так, чтобы выполнялась оценка

$$\text{dist}(\lambda_i(x), \mathcal{A}) = \sup_k \|\lambda_i^{(k-1)}(x_k) - \lambda_i^{(k)}(x_k)\| < 2\varepsilon.$$

ЛЕММА 3.5. Пусть $K_1(x), K_2(x) \in M_n \otimes \mathbf{A}$ суть кусочно-непрерывные поля операторов с конечным спектром, $\|K_1(x) - K_2(x)\| < \varepsilon$, $K_1(x) \sim \text{diag}(\{\lambda_i(x)\})$, $K_2(x) \sim \text{diag}(\{\mu_i(x)\})$. Пусть, далее, их диагональные элементы $\lambda_i(x)$ и $\mu_i(x)$ кусочно-непрерывны и $\text{dist}(\mu_i(x), \mathcal{A}) < \delta$. Тогда существуют кусочно-непрерывные унитарные поля $u_i(x)$, кусочно-непрерывные поля $\mu'_i(x)$ и кусочно-непрерывное поле операторов $K'_2(x) \sim \text{diag}(\{\mu'_i(x)\})$ такие, что

- i) $\|K'_2(x) - K_2(x)\| < \delta$;
- ii) $\|u_i^*(x)\mu'_i(x)u_i(x) - \mu_i(x)\| < \delta$;
- iii) $\|\lambda_i(x) - \mu'_i(x)\| < C\sqrt[4]{2\varepsilon + \delta}$;
- iv) $\text{dist}(\mu'_i(x), \mathcal{A}) < \delta$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x_0 \in X$ есть точка непрерывности для $K_2(x)$, $D \supset x_0$ – интервал в X . По лемме 3.2 мы можем диагонализировать оператор $K_2(x_0)$ так, что его “собственные значения” $\tilde{\mu}_i(x_0)$ будут удовлетворять неравенству

$$\|\tilde{\mu}_i(x_0) - \lambda(x_0)\| < \varepsilon.$$

Продолжим эти “собственные значения” произвольным образом до непрерывных полей $\tilde{\mu}_i(x)$. Тогда в некоторой окрестности точки x_0 по-прежнему выполнено неравенство

$$\|\tilde{\mu}_i(x) - \lambda_i(x)\| < \varepsilon.$$

По предположению существуют унитарные элементы $w_i \in A(x_0)$ такие, что $w_i^* \tilde{\mu}(x_0) w_i = \mu_i(x_0)$. Возьмем унитарные продолжения $w_i(x)$ элементов w_i , $w_i(x_0) = w_i$, и выберем окрестность точки x_0 так, чтобы оценка

$$\|w_i^*(x) \tilde{\mu}_i(x) w_i(x) - \mu_i(x)\| < \delta$$

выполнялась в этой окрестности. Так мы получим разбиение X на отрезки $D_k = [x_k, x_{k+1}]$, а также кусочно-непрерывные поля $\tilde{\mu}_i(x)$, $\tilde{\mu}_i(x)|_{D_k} = \tilde{\mu}_i^{(k)}(x)$, $\tilde{\mu}_i^{(k)}(x) \in \mathcal{A}|_{D_k}$, и кусочно-непрерывные унитарные поля $w_i(x) = \{w_{i,k}(x)\}$, $w_{i,k}(x) \in \mathcal{A}|_{D_k}$, такие, что на D_k выполнены оценки

$$\|\tilde{\mu}_i^{(k)}(x) - \lambda_i(x)\| < \varepsilon \quad (3.5)$$

и

$$\|w_{i,k}^*(x) \tilde{\mu}_i^{(k)}(x) w_{i,k}(x) - \mu_i(x)\| < \frac{\delta}{2}. \quad (3.6)$$

Существует также кусочно-непрерывное поле операторов $\tilde{K}_2(x)$, унитарно эквивалентное оператору $\text{diag}(\{\tilde{\mu}_i(x)\})$, и такое, что

$$\|\tilde{K}_2(x) - K_2(x)\| < \frac{\delta}{2}.$$

Из (3.6) следует, что в точке x_k

$$\|w_{i,k-1}^*(x_k) \tilde{\mu}_i^{(k-1)}(x_k) w_{i,k-1}(x_k) - w_{i,k}^*(x_k) \tilde{\mu}_i^{(k)}(x_k) w_{i,k}(x_k)\| < \delta, \quad (3.7)$$

а из (3.7) следует существование таких унитарных элементов $v_{i,k}(x_k) \in A(x_k)$, что

$$\|v_{i,k}^*(x_k) \tilde{\mu}_i^{(k-1)}(x_k) v_{i,k}(x_k) - \tilde{\mu}_i^{(k)}(x_k)\| < \delta.$$

По лемме 3.3 мы можем найти такие продолжения унитарных элементов $v_{i,k}(x_k)$ в некоторую окрестность точки x_k , для которых согласно (3.5) имеет место оценка

$$\|v_{i,k}^*(x) \tilde{\mu}_i^{(k)}(x) v_{i,k}(x) - \lambda_i(x)\| < C \sqrt[4]{2\varepsilon + \delta}.$$

Положим

$$\bar{\mu}_i^{(k)}(x) = v_{i,k}(x) \tilde{\mu}_i^{(k)}(x) v_{i,k}^*(x).$$

Тогда

$$\|\bar{\mu}_i^{(k)}(x) - \tilde{\mu}_i^{(k-1)}(x)\| < \delta \quad (3.8)$$

и

$$\|\bar{\mu}_i^{(k)}(x) - \lambda_i(x)\| < C \sqrt[4]{2\varepsilon + \delta}.$$

Действуя по индукции и переходя от D_{k-1} к D_k , мы заменяем поля $\tilde{\mu}_i^{(k)}(x)$ на $\overline{\mu}_i^{(k)}(x)$ на каждом D_k и получаем новые кусочно-непрерывные поля $\mu'_i(x) = \{\overline{\mu}_i^{(k)}(x)\}$ такие, что существуют кусочно-непрерывные поля унитарных элементов $u_i(x)$, для которых

$$\|u_i^*(x)\mu'_i(x)u_i(x) - \mu_i(x)\| < \delta.$$

Положив $K'_2(x) = \text{diag}(\{u_i(x)\mu'_i(x)u_i^*(x)\})$, получаем утверждение i), а оценка $\text{dist}(\mu'_i(x), \mathcal{A}) < \delta$ следует из (3.8).

Пусть теперь $K(x)$ есть строго положительный компактный оператор в модуле $H_{\mathcal{A}}$. Возьмем последовательность $\varepsilon_m > 0$, сходящуюся к нулю. Из компактности $K(x)$ по лемме 3.4 мы можем найти последовательность кусочно-непрерывных полей диагонализированных операторов конечного ранга $K_m(x) \in M_{n_m} \otimes \mathbf{A}$ с “собственными значениями” $\lambda_{i,m}(x) \in \mathcal{A}$ такими, что

- i) $\|K_m(x) - K(x)\| < \varepsilon_m$;
- ii) $K_m(x) \sim \text{diag}(\{\lambda_{i,m}(x)\})$, где $\text{dist}(\lambda_{i,m}(x), \mathcal{A}) < \varepsilon_m$.

Поскольку

$$\|K_1(x) - K_2(x)\| \leq \|K_1(x) - K(x)\| + \|K(x) - K_2(x)\| < \varepsilon_1 + \varepsilon_2,$$

то по лемме 3.5 можно найти кусочно-непрерывный оператор $K'_2(x) \sim \text{diag}(\{\lambda'_{i,2}(x)\})$ такой, что

$$\begin{aligned} \|K'_2(x) - K_2(x)\| &< \varepsilon_2, \\ \|\lambda'_{i,2}(x) - \lambda_{i,2}(x)\| &< \varepsilon_2, \\ \text{dist}(\lambda'_{i,2}(x), \mathcal{A}) &< \varepsilon_2, \\ \|\lambda'_{i,2}(x) - \lambda_{i,1}(x)\| &< C \sqrt[4]{2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} + \varepsilon_2 < 2C \sqrt[4]{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}. \end{aligned}$$

Тогда поскольку

$$\begin{aligned} \|K'_{m-1}(x) - K_m(x)\| &\leq \|K'_{m-1}(x) - K_{m-1}(x)\| + \|K_{m-1}(x) - K(x)\| \\ &\quad + \|K(x) - K_m(x)\| < 2\varepsilon_{m-1} + \varepsilon_m, \end{aligned}$$

то по индукции мы можем найти последовательность $K'_m(x) \sim \text{diag}(\{\lambda'_{i,m}(x)\})$ такую, что

$$\|K'_m(x) - K_m(x)\| < \varepsilon_m, \tag{3.9}$$

$$\begin{aligned} \|\lambda'_{i,m}(x) - \lambda_{i,m}(x)\| &< \varepsilon_m, \\ \text{dist}(\lambda'_{i,m}(x), \mathcal{A}) &< \varepsilon_m, \end{aligned} \tag{3.10}$$

$$\|\lambda'_{i,m}(x) - \lambda_{i,m-1}(x)\| < C \sqrt[4]{2(2\varepsilon_{m-1} + \varepsilon_m)} + \varepsilon_m < 2C \sqrt[4]{\varepsilon_{m-1} + \varepsilon_m}. \tag{3.11}$$

Поскольку по (3.9)

$$\|K'_m(x) - K(x)\| \leq \|K'_m(x) - K_m(x)\| + \|K_m(x) - K(x)\| < 2\varepsilon_m,$$

то последовательность операторов $K'_m(x)$ сходится (по норме) к оператору $K(x)$, а из (3.11) видно, что для любого i последовательности $\lambda'_{i,m}(x)$ являются последовательностями Коши, если числа ε_m стремятся к нулю достаточно быстро, именно, если сходится ряд $\sum_m \sqrt[4]{\varepsilon_{m-1} + \varepsilon_m}$. Поэтому существуют пределы

$$\bar{\lambda}_i(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} \lambda'_{i,m}(x),$$

и так как согласно (3.10) $\text{dist}(\lambda'_{i,m}(x), \mathcal{A})$ стремится к нулю, то $\bar{\lambda}_i(x) \in \mathcal{A}$. Покажем, что $\bar{\lambda}_i(x)$ являются “собственными значениями” оператора $K(x)$. По теореме 1.3 из оценки $\|K'_m(x) - K(x)\| < 2\varepsilon_m$ следует, что существуют унитарные операторы $U_m \in M_{n_m} \otimes \mathbf{A}$, отображающие “собственные векторы” $x_i \in H_{\mathbf{A}}^*$ оператора $K(x)$ в “собственные векторы” операторов $K'_m(x)$ такие, что $\|U_m^* K'_m U_m - K\| < 2\varepsilon_m$. Положим $\tilde{K}_m = U_m^* K'_m U_m \in M_{n_m} \otimes \mathbf{A}$, $\tilde{K}_m \rightarrow K$. Тогда

$$\tilde{K}_m x_i = x_i \lambda'_{i,m}. \quad (3.12)$$

Переходя к пределу в (3.12), получаем $K x_i = x_i \bar{\lambda}_i$. Теорема 3.1 доказана.

§ 4. Пример: непрерывное поле алгебр вращения

В заключение мы приводим пример C^* -алгебры без свойства слабой диагонализации. Пусть $X = [a, b]$ есть отрезок числовой прямой, содержащий целочисленную точку, например, 1. Пусть S – окружность, $C(X \times S)$ – C^* -алгебра непрерывных функций на цилиндре. Через α обозначим действие группы $\mathbb{Z}$ целых чисел на этой алгебре, определенное формулой

$$(\alpha(n)f)(x, t) = f(x, t + nx), \quad (4.1)$$

где $f(x, t) \in C(X \times S)$, $x \in X$, $t \in S$, $n \in \mathbb{Z}$. Через A_X обозначим скрещенное произведение

$$C(X \times S) \rtimes_{\alpha} \mathbb{Z}.$$

Как показано в [22], [23], алгебра A_X является непрерывным полем алгебр вращения $A_x = A(x)$ над отрезком. Заметим, что непрерывное поле $(A(x), X, A_X)$ является непрерывным полем C^* -алгебр со следом, и для иррациональных x $RR(A(x)) = 0$ и $\text{tsr}(A(x)) = 1$ [19], [24]. Более того, для каждого $x \in X$ алгебра $A(x)$ обладает свойством слабой диагонализации. Унитарная группа алгебры $A(x)$ несвязна, но препятствие к диагонализации, по-видимому, связано не с этим. Заметим, что $A_1 \cong C(\mathbf{T}^2)$ – коммутативная C^* -алгебра непрерывных функций на торе, поэтому она, в отличие от иррационального случая, не является алгеброй нулевого вещественного ранга, и гомоморфизм $K_0(A(1)) \rightarrow K_0(B(1))$ не инъективен. В $M_2 \otimes A_1$ существует проектор, являющийся образующей Ботта в $K^0(\mathbf{T}^2)$. Этот проектор можно продолжить [24], [25] до непрерывного поля проекторов $p(x)$ в некоторой окрестности точки $1 \in X$ так, что для стандартного следа τ_x на A_X

$$\tau_x(p(x)) = 1 + x. \quad (4.2)$$

Мы можем диагонализировать это поле проекторов в прямом интеграле факторов типа Π_1 , $p(x) \sim \text{diag}(\{\lambda_1(x), \lambda_2(x)\})$, где $\lambda_1(x) \geq \lambda_2(x)$. Тогда для $x = 1$ должно

быть $\lambda_1(1) = 1$, $\lambda_2(1) = 0$. Для произвольных x “собственные значения” $\lambda_i(x)$, $i = 1, 2$, должны быть проекторами. Если эти “собственные значения” являются непрерывными полями в A_X , то для всех x должно быть $\lambda_1(x) = \lambda_1(1) = 1$, $\lambda_2(x) = \lambda_2(1) = 0$, следовательно,

$$\tau_x(\text{diag}(\{\lambda_1(x), \lambda_2(x)\})) = 1.$$

Но так как след инвариантен относительно унитарной эквивалентности, это противоречит (4.2), следовательно, C^* -алгебра A_X не обладает свойством слабой диагонализации.

Отметим, что поскольку алгебры $A(x)$ удовлетворяют всем условиям теоремы 3.1 для плотного множества иррациональных точек в X , то, слегка изменяя наше доказательство, для любого заданного непрерывного поля операторов $K(x)$ и для любого $\varepsilon > 0$ мы можем найти подмножество $X_\varepsilon \subset X$ такое, что мера множества $X \setminus X_\varepsilon$ не превосходит ε , и $K(x)$ является диагонализующим на X_ε с “непрерывными” “собственными значениями” (т.е. лежащими в A_{X_ε}).

Список литературы

1. Dixmier J. Les C^* -algèbres et leurs représentations. Paris: Gauthier-Villars, 1964.
2. Exel R., Loring T. A. Invariants of almost commuting unitaries // J. Funct. Anal. 1991. V. 95. P. 364–376.
3. Paschke W. L. Inner product modules over B^* -algebras // Trans. Amer. Math. Soc. 1973. V. 182. P. 443–468.
4. Paschke W. L. The double B -dual of an inner product module over a C^* -algebra // Canad. J. Math. 1974. V. 26. P. 1272–1280.
5. Rieffel M. A. Induced representations of C^* -algebras // Adv. Math. 1974. V. 13. P. 176–257.
6. Kasparov G. G. Hilbert C^* -modules: Theorems of Stinespring and Voiculescu // J. Operator Theory. 1980. V. 4. P. 133–150.
7. Мищенко А. С., Фоменко А. Т. Индекс эллиптических операторов над C^* -алгебрами // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1979. Т. 43. С. 831–859.
8. Lin H. Injective Hilbert C^* -modules // Pacific J. Math. 1992. V. 154. P. 131–164.
9. Lance E. C. Hilbert C^* -modules – a toolkit for operator algebraists // Lecture Notes. Leeds: University of Leeds, 1993.
10. Kadison R. V. Diagonalizing matrices // Amer. J. Math. 1984. V. 106. P. 1451–1468.
11. Grove K., Pedersen G. K. Diagonalizing matrices over $C(X)$ // J. Funct. Anal. 1984. V. 59. P. 64–89.
12. Murphy Q. J. Diagonality in C^* -algebras // Math. Z. 1990. V. 199. P. 279–284.
13. Zhang S. Diagonalizing projections in multiplier algebras and in matrices over a C^* -algebra // Pacific J. Math. 1990. V. 145. P. 181–200.
14. Frank M., Manuilov V. M. Diagonalizing “compact” operators on Hilbert W^* -modules // Z. Anal. Anwendungen. 1995. V. 14. P. 33–41.
15. Мануйлов В. М. Диагонализация компактных операторов в гильбертовых модулях над W^* -алгебрами конечного типа // УМН. 1994. Т. 49. №2. С. 159–160.
16. Manuilov V. M. Diagonalization of compact operators in Hilbert modules over finite W^* -algebras // Ann. Global Anal. Geom. 1995. V. 13. P. 207–226.
17. Мануйлов В. М. Диагонализация компактных операторов в гильбертовых модулях над C^* -алгебрами нулевого вещественного ранга // Матем. заметки (в печати).
18. Brown L. G., Pedersen G. K. C^* -algebras of real rank zero // J. Funct. Anal. 1991. V. 99. P. 131–149.
19. Choi M.-D., Elliott G. A. Density of self-adjoint elements with finite spectrum in an irrational rotation C^* -algebra // Math. Scand. 1990. V. 67. P. 73–86.

20. *Bunce J., Deddens J.* A family of simple C^* -algebras related to weighted shift operators // J. Funct. Anal. 1975. V. 19. P. 13–24.
21. *Sunder V. S., Thomsen K.* Unitary orbits of selfadjoints in some C^* -algebras // Houston J. Math. 1992. V. 18. P. 127–137.
22. *Rieffel M. A.* Continuous fields of C^* -algebras coming from group cocycles and actions // Math. Ann. 1989. V. 283. P. 631–643.
23. *Elliott G. A., Natsume T., Nest R.* The Heisenberg group and K -theory // Københavns Universitet Preprint Series. №25, 1992.
24. *Rieffel M. A.* C^* -algebras associated with irrational rotations // Pacific J. Math. 1981. V. 93. P. 415–429.
25. *Мануйлов В. М.* О группе K_0 непрерывного семейства алгебр A_θ // УМН. 1989. Т. 44. №3. С. 163–164.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Поступила в редакцию
10.12.1996