Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. В. Осипов, Адельные конструкции прямых образов дифференциалов и символов, *Матем. сб.*, 1997, том 188, номер 5, 59–84

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm230>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.208.226.222

26 апреля 2023 г., 03:33:22

УДК 512.71+512.73

Д. В. Осипов

Адельные конструкции прямых образов дифференциалов и символов

В работе явно строятся некоторые вычеты и символы из дифференциалов и K_2 -групп двумерных локальных полей в дифференциалы и мультипликативные группы одномерных локальных полей. Полученные отображения применяются для построения морфизмов Гизина между когомологиями пучков регулярных дифференциальных форм и между группами Чжоу в случае проективного морфизма алгебраической поверхности на алгебраическую кривую.

Библиография: 8 названий.

В данной работе в ситуации проективного морфизма алгебраической поверхности X на алгебраическую кривую S , определенных над полем k , строится отображение Гизина в двух случаях: из $H^2(X, \Omega_X^2)$ в $H^1(S, \Omega_S^1)$, а также, если $\text{char } k = 0$ или k – конечное поле, из $CH^2(X)$ в $CH^1(S)$.

Для этого в первом случае, пользуясь аделным представлением $H^2(X, \Omega_X^2)$ и $H^1(S, \Omega_S^1)$, мы сводим отображение Гизина к отображениям прямых образов дифференциалов двумерных локальных полей в дифференциалы одномерных локальных полей.

Во втором случае доказывается теорема о представлении $CH^2(X)$ посредством K_2 -аделей (см. теорему 3) и, таким образом, отображение Гизина сводится к построению символов из двумерных локальных полей, ассоциированных с парами $x \in C \subset X$, в одномерные локальные поля, ассоциированные с дискретными нормированиями на кривой S . Для этих отображений доказываются законы взаимности.

Следует отметить, что в случае двумерного локального поля, ассоциированного с точкой и кривой, не совпадающей со слоем отображения из X в S , построенный символ оказывается хорошо известным ручным символом. В случае же двумерного локального поля, ассоциированного с точкой и кривой, являющейся слоем отображения из X в S , ситуация сложнее. Существование искомого символа, без задания его явной формулой, было доказано К. Kato (см. работу [1, §1]). В данной работе в случае $\text{char } k = 0$ для этого символа предъявлена конкретная формула (см. теорему 2).

Все конструкции и доказательства в данной работе построены и проведены при помощи явных формул и не используют, в частности, высшую квилленовскую K -теорию.

Автор хотел бы выразить глубокую признательность своему научному руководителю А. Н. Паршину за постоянное внимание к работе.

1. Дифференциалы и их прямые образы

1.1. Непрерывные дифференциалы. Пусть $K = k((t))$ – одномерное локальное поле, $\mathcal{O}_K = k[[t]]$ – кольцо целых в K , m – максимальный идеал в $\mathcal{O}_K$,

$D_k^1(K)$ – модуль 1-дифференциалов поля K и $Q = \bigcap_{n \geq 0} m^n d(\mathcal{O}_K)$. Тогда определим непрерывные дифференциалы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. $\tilde{\Omega}_{K/k}^1 \stackrel{\text{def}}{=} D_k^1(K)/Q$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть $f \in K$ и $\frac{\partial f}{\partial t}$ – операция формальной производной. Тогда $df = \frac{\partial f}{\partial t} dt$ и dt образует базис $\tilde{\Omega}_{K/k}^1$ над k .

Доказательство см. в [2, гл. 2, п. 11].

Теперь и до конца п. 1.1 пусть $K = k((u))((t)) = \bar{K}((t)) = F\{\{u\}\}$ – двумерное локальное поле, где $\bar{K} = k((u))$, $F = k((t))$. Пусть $\mathcal{O}_K = k((u))[[t]]$, $m = t \cdot \mathcal{O}_K$ – максимальный идеал в кольце $\mathcal{O}_K$, ν_K – дискретное нормирование поля K и $\pi: \mathcal{O}_K \rightarrow \bar{K}$ – каноническая проекция. Пусть $\mathcal{O}_{\bar{K}} = k[[u]]$, $m_{\bar{K}} = u \cdot k[[u]]$ – максимальный идеал в кольце $\mathcal{O}_{\bar{K}}$, $\nu_{\bar{K}}$ – дискретное нормирование поля $\bar{K}$. Пусть $I = k[[u, t]]$ и $\varphi: I \rightarrow \mathcal{O}_{\bar{K}}$ – фактор по идеалу, порожденному элементом (t) . Пусть P_i – подгруппа в $D_k^1(K)$, порожденная элементами $(\varphi^{-1}(m_{\bar{K}}))^i dI$, и T_j – подгруппа в $D_k^1(K)$, порожденная элементами $m^j d(\mathcal{O}_K)$, где $D_k^1(K)$ – модуль 1-дифференциалов поля K . Пусть $Q = K \cdot \bigcap_{i,j \geq 0} (P_i + T_j)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. $\tilde{\Omega}_{K/k}^1 \stackrel{\text{def}}{=} D_k^1(K)/Q$.

Тем же способом, что и предложение 1, доказывается следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. $\tilde{\Omega}_{K/k}^1$ – двумерное векторное пространство над полем K , порожденное du и dt . Причем, для любого $f \in K$ $df = \frac{\partial f}{\partial u} du + \frac{\partial f}{\partial t} dt$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. $\tilde{\Omega}_{K/k}^2 \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{\Omega}_{K/k}^1 \wedge_K \tilde{\Omega}_{K/k}^1$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Отметим, что при выборе другого изоморфизма $K = k((u'))((t'))$ подкольцо I в K может измениться, поэтому наше определение $\tilde{\Omega}_{K/k}^*$ зависит от выбора вложения $I \hookrightarrow K$. Более того, определение вычета, данное ниже в этом пункте, будет зависеть от выбора вложения кольца I в K . Поэтому всюду на протяжении п. 1.1 мы будем считать выбор вложения кольца I в поле K фиксированным.

Кроме того, “правильные”, т.е. непрерывные дифференциалы поля K можно получить, введя топологию на модуле алгебраических дифференциалов $D_k^*(K)$ и профакторизовав затем их по замыканию нуля (см. [3].) Но и в этом случае полученный модуль непрерывных дифференциалов будет зависеть от выбора топологии поля K , которая не единственна в случае $\text{char } K = 0$ и однозначно определяется лишь выбором вложения кольца I в K . (Топология на поле K вводится следующим способом: базу окрестностей нуля составляют подгруппы $J_{i,j} = u^i I + t^j \mathcal{O}_K$, см. подробности в [4].)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Пусть $\omega \in \tilde{\Omega}_{K/k}^2$, $\omega = \sum_i \omega_i(u) \wedge t^i dt$, тогда $\text{res}_t \omega \stackrel{\text{def}}{=} \omega_{-1}(u) \in \tilde{\Omega}_{\bar{K}}^1$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть задано вложение $\bar{K} \hookrightarrow K$, тогда res_t не зависит от выбора локального параметра $t \in I$.

(Поэтому далее наряду с обозначением res_t будет использоваться эквивалентное ему $\text{res}_{K/\bar{K}}$.)

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Это фактически доказательство инвариантности вычета в одномерном локальном поле (см. [2, гл. 2]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Пусть $\omega \in \tilde{\Omega}_{K/k}^2$, $\omega = \sum_i u^i du \wedge \omega_i(t)$, тогда $\text{res}_u \omega \stackrel{\text{def}}{=} \omega_{-1}(t) \in \tilde{\Omega}_F^1$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Пусть задано вложение $F \hookrightarrow K$, тогда res_u не зависит от выбора локального параметра $u \in I$.

(Поэтому далее наряду с обозначением res_u будет использоваться эквивалентное ему $\text{res}_{K/F}$.)

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть u' — другой параметр, т.е. $u' \in I$, $\nu_{\overline{K}}(\pi(u')) = 1$. Пусть

$$\text{res}_u \omega = \sum_i a_i t^i dt \quad \text{и} \quad \text{res}_{u'} \omega = \sum_i a'_i t'^i dt.$$

Тогда имеем

$$\begin{aligned} a_i &= \text{res}_{F/k}(t^{-1-i} \text{res}_u(\omega)) = \text{res}_{F/k} \cdot \text{res}_u(t^{-1-i} \omega) = \text{res}_{t,u}(t^{-1-i} \omega), \\ a'_i &= \text{res}_{F/k}(t'^{-1-i} \text{res}_{u'}(\omega)) = \text{res}_{F/k} \cdot \text{res}_{u'}(t'^{-1-i} \omega) = \text{res}_{t',u'}(t'^{-1-i} \omega), \end{aligned}$$

где $\text{res}_{F/k}$ — стандартный вычет в одномерном локальном поле (см. [2, гл. 2]), $\text{res}_{t,u}$ и $\text{res}_{t',u'}$ — вычеты в двумерных локальных полях ($\text{res}_{t,u}(\sum a_{i,j} u^i t^j du \wedge dt) = a_{-1,-1}$), подробнее см. [4, гл. 2.5.3], там же доказана независимость последнего вычета от выбора локальных параметров t и u . Таким образом, $\text{res}_{K/k} \stackrel{\text{def}}{=} \text{res}_{t,u} = \text{res}_{t',u'}$, отсюда $a_i = a'_i$ и, следовательно, $\text{res}_u = \text{res}_{u'}$. Предложение доказано.

1.2. Прямые образы. Теперь пусть X — гладкая алгебраическая поверхность, S — гладкая алгебраическая кривая, $f: X \rightarrow S$ — гладкий проективный морфизм со связными слоями, все определено над совершенным полем k . Выберем любую замкнутую точку $s \in S$ (для простоты обозначений предположим, что точка s определена над k , т.е. $k(s) = k$). Пусть $\mathcal{O}_s$ — локальное кольцо дискретного нормирования в точке s , $\widehat{\mathcal{O}}_s$ — пополнение кольца $\mathcal{O}_s$ по максимальному идеалу и K_s — поле частных кольца $\widehat{\mathcal{O}}_s$. Пусть $x \in F$ — замкнутая точка на слое $F = f^{-1}(s)$, $k' = k(x)$ — конечное расширение поля k . Пусть $C \in X$ — неприводимая неособая кривая, причем $x \in C$. Рассмотрим двумерное локальное поле $K_{x,C}$, построенное по паре данных: кривая C и точка $x \in C$ (см. [4]), пусть ν_C — дискретное нормирование в этом поле. Далее существенны два разных случая:

1) $C \neq F$.

Тогда $f|_C: C \rightarrow S$ — конечное накрытие. При этом $k(C)_x$ — пополнение поля функций на кривой C в точке x — будет конечным расширением поля K_s . Как известно, $K_{x,C} \simeq k(C)_x((t_C))$, где $t_C = 0$ — локальное уравнение кривой C в точке x . Теперь если $\tau = 0$ — локальное уравнение точки s на S , то $t = 0$, где $t = f^*(\tau)$, — локальное уравнение слоя F на X . Если e — индекс ветвления поля $k(C)_x$ над K_s , то существует элемент $t^C \in k(C)_x$ такой, что $t^C = \sqrt[e]{t}$. При этом t^C и t_C будут локальными параметрами в формальной окрестности точки x на X , $k(C)_x \simeq k'((t^C))$ и f^* задает вложение: $K_s \hookrightarrow k'((t^C))$. Как следствие, получаем:

$$K_{x,C} \simeq k'((t^C))((t_C)).$$

2) $C = F$.

Выберем $u \in k(X)$ так, чтобы t, u были локальными параметрами в точке x . Тогда

$$K_{x,F} \simeq k'((u))((t)).$$

Пусть $\widehat{\mathcal{O}}_{x,X}$ – пополнение двумерного локального кольца в точке x на поверхности X по максимальному идеалу, т.е. $\widehat{\mathcal{O}}_{x,X} = k'[[u, t]]$, где u и t – локальные параметры в точке x на поверхности X . Тогда для любой кривой $C \ni x$ существует каноническое вложение кольца $\widehat{\mathcal{O}}_{x,X}$ в поле $K_{x,C}$. И кольцо $\widehat{\mathcal{O}}_{x,X}$ есть в точности кольцо I из п. 1.1. Поэтому можно считать, что вложение кольца I в двумерное локальное поле выбирается однозначно в случае, когда это поле возникает из геометрических данных. Следовательно, в геометрической ситуации все конструкции п. 1.1 определяются однозначно.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Определим *отображение прямого образа*

$$f_*^{x,C}: \widetilde{\Omega}^2(K_{x,C}) \rightarrow \widetilde{\Omega}^1(K_s).$$

1) $C \neq F$. Тогда для любой $\omega \in \widetilde{\Omega}^2(K_{x,C})$

$$f_*^{x,C}(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} \text{Tr}_{k'((t^C))/K_s} \cdot \text{res}_{K_{x,C}/k'((t^C))}(\omega) \in \widetilde{\Omega}^1(K_s).$$

2) $C = F$. Для любой $\omega \in \widetilde{\Omega}^2(K_{x,F})$

$$f_*^{x,F}(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} \text{Tr}_{k'((t))/K_s} \cdot \text{res}_{K_{x,F}/k'((t))}(\omega) \in \widetilde{\Omega}^1(K_s).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Здесь след Tr применяется к дифференциальным формам. Определение см. в [2, гл. 2].

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Это определение распространяется на особые или на приводимые в окрестности точки x кривые C . В этом случае надо брать сумму по всем формальным ветвям этой кривой. (См. подробности в [4]).

Следующее утверждение тривиальным образом следует из определения 6.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Пусть $\omega \in \widetilde{\Omega}_{K_{x,C}/k}^2$, $\omega = g dt^C \wedge dt_C$ (в случае $C = F$ $\omega = g du \wedge dt$), причем $\nu_C(g) \geq 0$, т.е. $\omega \in \widetilde{\Omega}_{\mathcal{O}_{K_{x,C}/k}}^2$, тогда

1) если $C \neq F$, то $f_*^{x,C}(\omega) = 0$;

2) если $C = F$, то $f_*^{x,F}(\omega) \in \widetilde{\Omega}_{\mathcal{O}_s/k}^1$, т.е. $f_*^{x,F}(\omega) = \varepsilon$, где $\varepsilon = h d\tau$ и $\nu_\tau(h) \geq 0$.

Обозначим через K_F пополнение поля функций на поверхности по дискретному нормированию, ассоциированному с кривой F , и через K_C – аналогичное поле для кривой C . Тогда $K_F = k(F)((t))$, где $k(F)$ – поле функций на кривой F , и $K_C = k(C)((t_C))$, где $k(C)$ – поле функций на кривой C .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6 (закон взаимности вдоль слоя). Пусть $\omega \in \widetilde{\Omega}_{K_F/k}^2$, тогда следующий ряд сходится относительно дискретного нормирования в точке s и

$$\sum_{x \in F} f_*^{x,F}(\omega) = 0. \quad (1)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 4. В сумме (1) на самом деле может быть бесконечное количество слагаемых, отличных от нуля, вот пример (см. также [1]).

Пусть $X = \mathbf{P}^1 \times \mathbf{A}^1$ и (u, t) – координаты, $S = \mathbf{A}^1$ – с координатой t , $F = \mathbf{P}^1$ и точка $s = (0, 0)$.

Тогда если $\omega = \left(u^{-1} + \frac{1}{u-1}t + \frac{1}{u-2}t^2 + \frac{1}{u-3}t^3 + \dots \right) du \wedge dt \in \tilde{\Omega}_{K_F/k}^2$, то

$$\begin{aligned} \text{при } x = (l, 0) \quad f_*^{x,F}(\omega) &= t^l dt, \quad l = 0, 1, 2, \dots, \\ \text{при } x = (\infty, 0) \quad f_*^{x,F}(\omega) &= (-1 - t - t^2 - t^3 - \dots) dt, \\ \text{при других } x \quad f_*^{x,F}(\omega) &= 0. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $\omega \in \tilde{\Omega}_{K_F/k}^2$, то $\omega = g du \wedge dt$, где $g \in K_F$.

1) Ясно, что для любой точки $x \in F$ если $f_*^{x,F}(\omega) = h dt$, то $\nu_t(h) \geq \nu_t(g) = n$.

2) Для любого $m \geq n$ существует лишь конечное число точек $x \in F$ таких, что если $f_*^{x,F}(\omega) = h dt$, где $h = a_n t^n + a_{n+1} t^{n+1} + \dots + a_m t^m + \dots$, то $a_m \neq 0$. Причем сумма всех таких a_m будет равна нулю (при каждом фиксированном m).

Действительно, зафиксируем точку $x \in F$ и $m \geq n$, тогда

$$\begin{aligned} a_m &= \text{res}_{k((t))/k} (t^{-1-m} \cdot f_*^{x,F}(\omega)) \\ &= \text{res}_{k((t))/k} (t^{-1-m} \cdot \text{Tr}_{k'((t))/k((t))} \text{res}_{K_{x,F}/k'((t))}(\omega)) \\ &= \text{res}_{k((t))/k} (\text{Tr}_{k'((t))/k((t))} \text{res}_{K_{x,F}/k'((t))} (t^{-1-m} \cdot \omega)) \\ &\quad (\text{см. замечание 5}) \\ &= \text{Tr}_{k'/k} \text{res}_{k'((t))/k'} \text{res}_{K_{x,F}/k'((t))} (t^{-1-m} \cdot \omega) \\ &= \text{res}_{x,F} (t^{-1-m} \cdot \omega). \end{aligned}$$

Так как $(t^{-1-m}\omega) \in \tilde{\Omega}_{K_F/k}^2$, то ясно, что когда точка x пробегает F , только конечное число a_m (при фиксированном m) не равны нулю и их сумма равна нулю, так как F – проективная кривая (см. [4, гл. 4.1]).

Теперь, очевидно, из 1) и 2) следует, что сумма (1) сходится к нулю.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Мы использовали то, что операции res и Tr коммутируют (см. [2, гл. 2]).

Рассмотрим точку $x \in F$ и введем кольцо $K_x = \widehat{\mathcal{O}}_{x,X} \cdot k(X)$, где $k(X)$ – поле функций на поверхности X , и $\widehat{\mathcal{O}}_{x,X}$ – пополнение двумерного локального кольца в точке x на поверхности X по максимальному идеалу, т.е. если u и t – локальные параметры в точке x , то $\widehat{\mathcal{O}}_{x,X} \simeq k'[[u, t]]$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7 (закон взаимности вокруг точки). Зафиксируем точку $x \in F$. Пусть $\omega \in \tilde{\Omega}_{K_x/k}^2$, тогда в следующей сумме только конечное число слагаемых отлично от нуля и

$$\sum_{C \ni x} f_*^{x,C}(\omega) = 0. \quad (2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что если $C \not\subset \text{Supp}(\omega)$, то $f_*^{x,C}(\omega) = 0$. Поэтому в сумме (2) только конечное число членов отлично от нуля (ср. с предложением 6).

Пусть $\sum_{C \ni x} f_*^{x,C}(\omega) = (\sum_m a_m t^m) dt$, тогда

$$\begin{aligned}
 a_m &= \text{res}_{k((t))/k} \left(t^{-1-m} \cdot \sum_{C \ni x} f_*^{x,C}(\omega) \right) \\
 &= \text{res}_{k((t))/k} \left(t^{-1-m} \cdot \left(\sum_{C \ni x} \text{Tr}_{k'((t^C))/k((t))} \text{res}_{K_{x,C}/k'((t^C))}(\omega) \right) \right) \\
 &= \text{res}_{k((t))/k} \left(\sum_{C \ni x} \text{Tr}_{k'((t^C))/k((t))} t^{-1-m} \cdot \text{res}_{K_{x,C}/k'((t^C))}(\omega) \right) \\
 &= \text{res}_{k((t))/k} \left(\sum_{C \ni x} \text{Tr}_{k'((t^C))/k((t))} t^{-1-m} \cdot \text{res}_{K_{x,C}/k'((t^C))}(\omega) \right) \\
 &= \sum_{C \ni x} \text{Tr}_{k'/k} \text{res}_{k'((t^C))/k'} \text{res}_{K_{x,C}/k'((t^C))}(t^{-1-m} \cdot \omega) \\
 &= \sum_{C \ni x} \text{res}_{x,C}(t^{-1-m} \cdot \omega) = 0
 \end{aligned}$$

(см. [4, гл. 4.1]).

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Последнее равенство в доказательстве предложения 7 фигурирует в [4] как закон взаимности вокруг точки. Однако там он доказан только для проективной поверхности X , а мы его используем для любой поверхности. Но, как нетрудно видеть, он верен и в этой ситуации, так как при его доказательстве в [4] используются раздутия, когда вклеиваются *проективные* прямые и все сводится к закону взаимности вдоль проективных кривых.

1.3. Адельные дифференциалы и отображение Гизина. Сохраним здесь все определения предыдущего пункта.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Для кривой S положим

$$\Omega_{\mathbb{A}_S}^1 \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ (\dots, f_s d\tau_s, \dots) \in \prod_{s \in S} \tilde{\Omega}_{K_s/k}^1, \text{ где, кроме конечного числа точек, } \nu_s(f_s) \geq 0 \right\}.$$

Здесь τ_s — локальный параметр в точке s , ν_s — соответствующее дискретное нормирование.

Для дивизора D на S определим

$$\Omega_{\mathbb{A}_S}^1(D) \stackrel{\text{def}}{=} \{ f \in \Omega_{\mathbb{A}_S}^1, \text{ при этом } \nu_s(f_s) \geq -\nu_s(D) \}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. Пусть X — поверхность, тогда

$$\Omega_{\mathbb{A}_X}^2 \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ (\dots, \omega_{x,C}, \dots) \in \prod_{x \in C} \tilde{\Omega}_{K_{x,C}/k}^2 \text{ при следующих условиях} \right\}.$$

Если $\omega_{x,C} = \sum_{i \geq \nu(\omega_{x,C})} \omega_i^{x,C}(u_{x,C}) \wedge t_C^i dt_C$, где $t_C = 0$ — локальное уравнение кривой C , и для всех точек x из некоторого открытого множества U на кривой C

$$K_{x,C} = k(x)((u_{x,C}))((t_C)), \quad \omega_i^{x,C}(u_{x,C}) \in \tilde{\Omega}_{k(x)((u_{x,C}))}^1,$$

то

- 1) существует такой дивизор $D = \sum \nu_C(D) \cdot C$ на X , что $\nu(\omega_{x,C}) \geq \nu_C(D)$;
- 2) для фиксированной кривой C при фиксированном i набор $\omega_i^{x,C}(u_{x,C})$, когда x пробегает U , принадлежит $\Omega_{\mathbb{A}_U}^1$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9. Пусть D – дивизор на X , тогда

$$\Omega_{\mathbb{A}_X}^2(D) \stackrel{\text{def}}{=} \{\omega \in \Omega_{\mathbb{A}_X}^2, \text{ при этом } \nu(\omega_{x,C}) \geq -\nu_C(D)\}.$$

Пусть Ω_S^1 – пучок регулярных 1-дифференциалов на кривой S . Зафиксируем $\omega \in \Omega_{k(S)/k}^1$, где $k(S)$ – поле функций на кривой S . Тогда (см. [2])

$$H^1(S, \Omega_S^1) \simeq H^1(S, \theta_S(\omega)) \simeq \mathbb{A}_S / (k(S) + \mathbb{A}_S(\omega)), \quad (3)$$

где $\mathbb{A}_S$ – адели на кривой S . Домножим в равенствах (3) все на ω . Тогда

$$\mathbb{A}_S \cdot \omega \simeq \Omega_{\mathbb{A}_S}^1, \quad k(S) \cdot \omega \simeq \Omega_{k(S)/k}^1, \quad \mathbb{A}_S(\omega) \cdot \omega \simeq \Omega_{\mathbb{A}_S}^1(0),$$

отсюда

$$H^1(S, \Omega_S^1) \simeq \Omega_{\mathbb{A}_S}^1 / (\Omega_{k(S)/k}^1 + \Omega_{\mathbb{A}_S}^1(0)).$$

Теперь перейдем к поверхности X . Пусть Ω_X^2 – пучок регулярных 2-дифференциалов на X , $k(X)$ – поле функций на X . Выберем $\omega \in \Omega_{k(X)/k}^2$. Тогда (см. [4, гл. 4.2])

$$H^2(X, \Omega_X^2) \simeq H^2(X, \theta_X(\omega)) \simeq \mathbb{A}_X / (\mathbb{A}_1 + \mathbb{A}_2 + \mathbb{A}_X(\omega)), \quad (4)$$

где $\mathbb{A}_X \subset \prod_{x \in C} K_{x,C}$ – адели на поверхности X и, используя диагональное вложение K_x в $\prod_{C \ni x} K_{x,C}$ и K_C в $\prod_{x \in C} K_{x,C}$,

$$\mathbb{A}_1 \stackrel{\text{def}}{=} \left(\prod_{C \subset X} K_C \right) \cap \mathbb{A}_X, \quad \mathbb{A}_2 \stackrel{\text{def}}{=} \left(\prod_{x \in X} K_x \right) \cap \mathbb{A}_X.$$

Домножим в равенствах (4) все на ω . Тогда, как нетрудно проверить,

$$\mathbb{A}_X \cdot \omega \simeq \Omega_{\mathbb{A}_X}^2, \quad \mathbb{A}_1 \cdot \omega \simeq \Omega_{\mathbb{A}_1}^2, \quad \mathbb{A}_2 \cdot \omega \simeq \Omega_{\mathbb{A}_2}^2, \quad \mathbb{A}_X(\omega) \cdot \omega \simeq \Omega_{\mathbb{A}_X}^2(0).$$

Поэтому можно написать:

$$H^2(X, \Omega_X^2) \simeq \Omega_{\mathbb{A}_X}^2 / (\Omega_{\mathbb{A}_1}^2 + \Omega_{\mathbb{A}_2}^2 + \Omega_{\mathbb{A}_X}^2(0)).$$

Теперь определим отображение f_* из $H^2(X, \Omega_X^2)$ в $H^1(S, \Omega_S^1)$ следующим образом:

$$\begin{array}{ccc} H^2(X, \Omega_X^2) & \simeq & \Omega_{\mathbb{A}_X}^2 / (\Omega_{\mathbb{A}_1}^2 + \Omega_{\mathbb{A}_2}^2 + \Omega_{\mathbb{A}_X}^2(0)) \\ \downarrow f_* & & \downarrow \sum_{\substack{f(x)=s \\ C \ni x}} f_*^{x,C} \\ H^1(S, \Omega_S^1) & \simeq & \Omega_{\mathbb{A}_S}^1 / (\Omega_{k(S)/k}^1 + \Omega_{\mathbb{A}_S}^1(0)). \end{array}$$

Проверим корректность построенного отображения f_* .

1) Отображение $\sum_{\substack{f(x)=s \\ C \ni x}} f_*^{x,C}$ из $\Omega_{\mathbb{A}_X}^2$ в $\Omega_{\mathbb{A}_S}^1$ хотя и может содержать бесконечное количество слагаемых, но имеет смысл. Действительно, над каждой точкой $s \in S$:

$$\sum_{\substack{f(x)=s \\ C \ni x}} f_*^{x,C} = \sum_{f(x)=s} f_*^{x,F} + \sum_{\substack{f(x)=s \\ C \ni x \\ C \neq F}} f_*^{x,C}. \quad (5)$$

Первая сумма из правой части равенства (5) может быть и бесконечной (см. замечание 4), но из адельных условий на элементы из $\Omega_{\mathbb{A}_X}^2$ она сходится (доказывается так же, как соответствующее утверждение из предложения 6).

Вторая сумма содержит лишь конечное число слагаемых, отличных от нуля, что легко следует из определений $f_*^{x,C}$ (когда $C \neq F$) и $\Omega_{\mathbb{A}_X}^2$.

2) $f_*(\Omega_{\mathbb{A}_2}^2) = 0$, так как $\sum_{\substack{f(x)=s \\ C \ni x}} f_*^{x,C} = \sum_{f(x)=s} (\sum_{C \ni x} f_*^{x,C})$, и по предложению 7 $\sum_{C \ni x} f_*^{x,C} = 0$ для каждой фиксированной точки $x \in X$.

3) $f_*(\Omega_{\mathbb{A}_1}^2) \subset \Omega_{k(S)}^1$. Действительно, первая сумма из правой части выражения (5) равна нулю по предложению 6, при применении второй суммы получаются элементы из $\Omega_{k(S)/k}^1$.

4) $f_*(\Omega_{\mathbb{A}_X}^2(0)) \subset \Omega_{\mathbb{A}_S(0)}^1$. Это следует из предложения 5.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8. Пусть поверхность X и кривая S проективны, тогда коммутативна следующая диаграмма:

$$\begin{array}{ccc} k \xleftarrow{\sum \text{res}_{K_{x,C}/k}} & H^0(X, \mathcal{O}_X) \simeq k \times \Omega_{\mathbb{A}_X}^2 / (\Omega_{\mathbb{A}_1}^2 + \Omega_{\mathbb{A}_2}^2 + \Omega_{\mathbb{A}_X}^2(0)) & \\ \parallel & \uparrow \text{id} & \downarrow f_* \\ k \xleftarrow{\sum \text{res}_{K_s/k}} & H^0(S, \mathcal{O}_S) \simeq k \times \Omega_{\mathbb{A}_S}^1 / (\Omega_{k(S)/k}^1 + \Omega_{\mathbb{A}_S}^1(0)), & \end{array}$$

где “ $\times$ ” обозначает умножение в когомологиях, устанавливающее двойственность Серра между $H^0(X, \mathcal{O}_X)$ и $H^2(X, \Omega_X^2)$ на поверхности, между $H^0(S, \mathcal{O}_S)$ и $H^1(S, \Omega_S^1)$ на кривой.

Следовательно, в этой ситуации $f_*: H^2(X, \Omega_X^2) \rightarrow H^1(S, \Omega_S^1)$ является отображением Гизина.

Доказательство следует из определения f_* , из того, что $\text{res}_{K_s/k} f_*^{x,C} = \text{res}_{K_{x,C}/k}$, и из фактов про двойственность Серра в адельных конструкциях (см. [4, гл. 4.3]).

ЗАМЕЧАНИЕ 7. Пользуясь адельным языком, можно определить аналогичное отображение Гизина из $H^1(X, \Omega_X^1)$ в $H^0(X, \Omega_S^1)$. При этом следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{array}{ccc} k \longleftarrow & H^1(X, \mathcal{O}_X) \times H^1(X, \Omega_X^1) & \\ \parallel & \uparrow f_* & \downarrow \text{морфизм Гизина} \\ k \longleftarrow & H^1(S, \mathcal{O}_S) \times H^0(X, \Omega_S^1). & \end{array}$$

2. Прямые образы и символы

На протяжении этого пункта будем предполагать, если не будет оговорено специально противное, что $\text{char } k = 0$. Все остальные соглашения и обозначения сохраним из пункта 1.2, дополнительно добавив, что если L – поле, то L^* – мультипликативная группа этого поля.

Отметим следующие факты.

Если $K = k((t))$ – одномерное локальное поле, то

$$K^* \simeq \{t^m\} \times \mathcal{E}_K \simeq \mathbb{Z} \times \mathcal{E}_K \quad \text{и} \quad \mathcal{E}_K \simeq k^* \times \mathcal{E}_K^1, \quad (6)$$

где $\mathcal{E}_K^1 = 1 + t \cdot k[[t]]$ – группа главных единиц.

Если $K = k((u))(t)$ – двумерное локальное поле, то

$$K^* \simeq \{t^m u^n\} \times \mathcal{E}_K \simeq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathcal{E}_K \quad \text{и} \quad \mathcal{E}_K \simeq k^* \times \mathcal{E}_K^1, \quad (7)$$

где $\mathcal{E}_K^1 = 1 + u \cdot k[[u]] + t \cdot k((u))[[t]]$ – группа главных единиц.

Напомним, что если K – поле с дискретным нормированием ν , максимальным идеалом m и полем вычетов k , то ручной символ $(, ,)_K$ со значениями в k^* можно определить следующим способом:

$$(\varphi, \psi)_K \stackrel{\text{def}}{=} ((-1)^{\nu(\varphi)\nu(\psi)} \varphi^{\nu(\psi)} \psi^{-\nu(\varphi)}) \bmod m, \quad (8)$$

где φ и ψ из K^* .

Если $K = k((u))(t)$ – двумерное локальное поле, то можно определить аналог ручного символа $(, , ,)_K$ со значениями в k^* следующим образом: для любых ϕ, φ и ψ из K^*

$$(\phi, \varphi, \psi)_K \stackrel{\text{def}}{=} (\partial_2 \partial_3 (\phi, \varphi, \psi))^{-1}, \quad (9)$$

где (ϕ, φ, ψ) рассматривается как элемент $K_3^M(K)$ – K -группы Милнора, $\partial_m: K_m^M(L) \rightarrow K_{m-1}^M(\bar{L})$ – граничное отображение для произвольного локального поля L и его поля вычетов $\bar{L}$. (См. [5] или [4, гл. 3.1]). Символ $(, , ,)_K$ также можно задать явной формулой, см. по этому поводу [4, гл. 3.2].

ТЕОРЕМА 1. *Зафиксируем любые точку $x \in X$, кривую $C \ni x$ и точку $s \in S$ такие, что $f(x) = s$. Тогда существует отображение*

$$f_*(, ,)_{x,C}: K_{x,C}^* \times K_{x,C}^* \rightarrow K_s^*, \quad \phi \times \psi \mapsto f_*(\phi, \psi)_{x,C},$$

со следующими свойствами:

- 1) для любых $\varphi, \psi \in K_{x,C}^*$, $\xi \in K_s^*$

$$\text{Nm}_{k(x)/k}(\varphi, \psi, f^*(\xi))_{K_{x,C}} = (f_*(\varphi, \psi)_{x,C}, \xi)_{K_s} \quad \text{в } k^*, \quad (10)$$

где $(, , ,)_{K_{x,C}}$ – ручной символ в двумерном локальном поле $K_{x,C}$, $(, ,)_{K_s}$ – ручной символ в одномерном локальном поле K_s и Nm – отображение нормы;

- 2) для любых $\varphi, \psi \in K_{x,C}^*$, $\zeta \in K_s$

$$\text{Tr}_{k(x)/k}(\varphi, \psi; f^*(\zeta))_{K_{x,C}} = (f_*(\varphi, \psi)_{x,C}; \zeta)_{K_s} \quad \text{в } k, \quad (11)$$

где

$$(\varphi, \psi; \varsigma]_{K_{x,C}} = \text{res}_{K_{x,C}/k(x)} \left(\varsigma \frac{d\varphi}{\varphi} \wedge \frac{d\psi}{\psi} \right), \quad \varsigma \in K_{x,C},$$

и

$$(\xi; \zeta]_{K_s} = \text{res}_{K_s/k} \left(\zeta \frac{d\xi}{\xi} \right), \quad \xi \in K_s^*.$$

Эта теорема при помощи явной формулы для $f_*(,)_{x,C}$ (см. теорему 2) будет доказана ниже. А пока замечания и следствия.

ЗАМЕЧАНИЕ 8. Когда k — конечное поле, то существование $f_*(,)_{x,C}$ следует из локальной теории полей классов для двумерных локальных полей (см. [4, гл. 3]). Причем в случае, когда кривая $C \neq F$, сразу же видна явная конструкция, совпадающая с той, которая будет предъявлена ниже.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Отображение $f_*(,)_{x,C}$ единственно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть существуют два отображения, удовлетворяющие условиям теоремы 1. Тогда, разделив одно на другое, получим, что существует элемент $\zeta \in K_s^*$, $\zeta \neq 1$, такой, что для любого элемента $\xi \in K_s^*$:

$$(\zeta, \xi)_{K_s} = 1 \quad \text{и} \quad (\zeta; \xi]_{K_s} = 0. \quad (12)$$

Но этого не может быть, так как:

- 1) если $\nu_\tau(\zeta) \neq 0$, то взяв $\xi \in k^*$, $\xi^{\nu_\tau(\zeta)} \neq 1$, получим $(\zeta, \xi)_{K_s} \neq 1$, что противоречит (12) (напомним, что $K_s \simeq k((\tau))$);
- 2) если $\nu_\tau(\zeta) = 0$, но $\zeta \notin \mathcal{O}_{K_s}^1$, то $(\zeta, \tau)_{K_s} \neq 1$;
- 3) если $\zeta \in \mathcal{O}_{K_s}^1$ и $\nu_\tau(\zeta - 1) = n$, то $(\zeta; \tau^{-n}]_{K_s} \neq 0$.

СЛЕДСТВИЕ 2. *Отображение $f_*(,)_{x,C}$ обладает следующими свойствами:*

- 1) $f_*(,)_{x,C}$ мультипликативно по каждому аргументу;
- 2) $f_*(\varphi, 1 - \varphi)_{x,C} = 1$ для любых $\varphi \in K_{x,C}^*$, $1 - \varphi \neq 0$.

То есть $f_*(,)_{x,C}$ спускается до отображения

$$f_*(,)_{x,C}: K_2(K_{x,C}) \rightarrow K_1(K_s).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проводится теми же методами, что и при доказательстве следствия 1, с использованием того, что мультипликативность и “символьное” свойство по первым двум аргументам выполняются для $(, ,)_{K_{x,C}}$ и $(, ;]_{K_{x,C}}$ на поверхности (см. их определение, а также [4]).

СЛЕДСТВИЕ 3 (закон взаимности вдоль слоя). Пусть $\varphi, \psi \in K_F^*$. Тогда бесконечное произведение $\prod_{x \in F} f_*(\varphi, \psi)_{x,F}$ сходится в $k((\tau))^*$, причем

$$\prod_{x \in F} f_*(\varphi, \psi)_{x,F} = 1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Аналогичные законы взаимности верны для $(\ , \ )_{K_{x,F}}$ и $(\ , \ ; \ ]_{K_{x,F}}$, только для $(\ , \ ; \ ]$ нужно знак суммы $\sum$ заменить на произведение $\prod$. При этом и в произведении, и в сумме только конечное количество сомножителей (или слагаемых) будут отличны от единицы (нуля) (см. [4, гл. 7.1]).

Поэтому при помощи формул (10) и (11) мы получаем, что для фиксированного $\xi \in K_s^*$ существует лишь конечное число таких точек $x \in F$, что $(f_*(\varphi, \psi)_{x,F}, \xi)_{K_s} \neq 1$, и конечное число таких точек $x \in F$, что $(f_*(\varphi, \psi)_{x,F}, \xi]_{K_s} \neq 0$.

Действуя, как при доказательстве следствия 1, берем $\xi = a \in k^*$, $a \neq 1$, получаем, что существует лишь конечное число точек $x \in F$, что $\nu_\tau(f_*(\varphi, \psi)_{x,F}) \neq 0$. Рассмотрев $\xi = \tau$, получим, что существует конечное число точек $x \in F$ таких, что $\nu_\tau(f_*(\varphi, \psi)_{x,F}) = 0$, но $f_*(\varphi, \psi)_{x,F} \notin \mathcal{E}_{K_s}^1$. Рассмотрев $\xi = \tau^{-n}$, $n \geq 1$, получим, что для данного $n \geq 1$ существует лишь конечное число таких точек $x \in F$, что $f_*(\varphi, \psi)_{x,F} \in \mathcal{E}_{K_s}^1$ и $\nu_\tau(f_*(\varphi, \psi)_{x,F} - 1) = n$. Отсюда следует, что это произведение сходится в $k((\tau))^*$.

Тогда $\prod_{x \in F} f_*(\varphi, \psi)_{x,F} = 1$, это следует из соответствующих законов взаимности для $(\ , \ )_{K_{x,F}}$ и $(\ , \ ; \ ]_{K_{x,F}}$ вдоль слоя F , следствия 1 и замечания 6.

СЛЕДСТВИЕ 4 (закон взаимности вокруг точки). *Зафиксируем какую-нибудь точку $x \in F$, пусть $\varphi, \psi \in K_x^*$. Тогда в бесконечном произведении $\prod_{C \ni x} f_*(\varphi, \psi)_{x,C}$ только конечное число сомножителей отлично от единицы и*

$$\prod_{C \ni x} f_*(\varphi, \psi)_{x,C} = 1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. То, что конечное число сомножителей отлично от единицы, будет следовать из дальнейшей явной конструкции для $f_*(\varphi, \psi)_{x,C}$, когда $C \neq F$. Сам же закон взаимности верен по тем же причинам, что и в следствии 3.

ТЕОРЕМА 2 (явные формулы). *Отображение $f_*(\ , \ )_{x,C}$, единственное по следствию 1 из теоремы 1, имеет следующий вид.*

1) Если $C \neq F$, тогда для любых φ и ψ из $K_{x,C}^*$

$$f_*(\varphi, \psi)_{x,C} \stackrel{\text{def}}{=} \text{Nm}_{k'((t^C))/K_s}(\varphi, \psi)_{K_{x,C}},$$

где $(\ , \ )_{K_{x,C}}$ — ручной символ, задаваемый дискретным нормированием с локальным параметром t_C в поле $K_{x,C}$.

2) Если $C = F$, то для любых φ и ψ из $K_{x,F}^*$

$$f_*(\varphi, \psi)_{x,F} \stackrel{\text{def}}{=} \text{Nm}_{k'((t))/k((t))}((\varphi, \psi)_{f,F}),$$

где бимультимпликативное отображение $(\varphi, \psi)_{f,F}: K_{x,F}^* \times K_{x,F}^* \rightarrow k'((t))^*$ удобно задать на мультипликативных образующих в виде следующей таблицы (напомним, что $K_{x,F} \simeq k'((u))((t))$).

	u	t	$b \in k'^*$	$\varepsilon_2 \in \mathcal{E}_{K_{x,F}}^1$
u	-1	t	a	$\exp \text{res}_u(\ln \varepsilon_2 \frac{du}{u})$
t	t^{-1}	1	1	1
$a \in k'^*$	a^{-1}	1	1	1
$\varepsilon_1 \in \mathcal{E}_{K_{x,F}}^1$	$(\exp \text{res}_u(\ln \varepsilon_1 \frac{du}{u}))^{-1}$	1	1	$(\exp \text{res}_u(\ln \varepsilon_1 \frac{du \varepsilon_2}{\varepsilon_2}))^{-1}$

(13)

Здесь первый вертикальный столбец есть первый аргумент отображения $(,)_{f,F}$, первая горизонтальная строка – второй аргумент этого отображения.

Далее, пользуясь разложением (7), отображение $(,)_{f,F}$ по мультипликативности продолжается на всю группу $K_{x,F}^* \times K_{x,F}^*$.

Теперь если мы проверим, что построенные отображения $f_*(,)_{x,C}$ и $f_*(,)_{x,F}$ удовлетворяют формулам (10) и (11), мы одновременно докажем теоремы 2 и 1.

ЗАМЕЧАНИЕ 9. Идея явной конструкции для отображения $(,)_{f,F}$ была подсказана автору А. Н. Паршиным.

ЗАМЕЧАНИЕ 10. Здесь res_u – немного измененное отображение res_u из п. 1.1: мы “убрали” dt и рассматриваем res_u как отображение из $K_{x,F} \cdot d_u(K_{x,F})$ в $k'((t))$, где d_u – дифференциал по переменной u , т.е. для любого ϕ из $K_{x,F}$ $d_u \phi = \frac{\partial \phi}{\partial u} du$. Все свойства “старого” отображения без изменений переносятся на “новое” отображение.

ЗАМЕЧАНИЕ 11. Отметим некоторые свойства таблицы (13), полезные далее.

- Она кососимметрична относительно диагонали.
- Элементы на диагонали $(u, u)_{f,F}$ и $(t, t)_{f,F}$ восстанавливаются из недиагональных при помощи равенства $(\varphi, \varphi)_{f,F} = (-1, \varphi)_{f,F}$, верного вообще для любого символа.
- Последнюю строку можно представить в виде единой формулы: для любых $\varphi \in \mathcal{E}_{K_{x,F}}^1$ и $\psi \in K_{x,F}^*$

$$(\varphi, \psi)_{f,F} = \left(\exp \text{res}_u \left(\ln \varphi \frac{d_u \psi}{\psi} \right) \right)^{-1}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 12. Так как при определении $f_*(,)_{x,F}$ используются образующие t и u , то возникает вопрос о независимости этого определения от выбора локальных параметров. Но $f_*(,)_{x,F}$ удовлетворяет теореме 1. По следствию 1 из теоремы 1 $f_*(,)_{x,F}$ единственно и поэтому не зависит от выбора локальных параметров $u \in \widehat{\mathcal{O}}_{x,X}$ и $\tau \in K_s$. (Напомним, что у нас фиксировано вложение $f^*: K_s \hookrightarrow K_{x,F}$ и $t = f^*(\tau)$.)

В таблице (13) используются $\exp$ и $\ln$ в локальных полях. Вопросы корректности их определения и применения следуют из следующих двух лемм.

ЛЕММА 1. Пусть K – двумерное локальное поле и $m = \mathcal{E}_K^1 - 1$. Тогда можно определить гомоморфизмы-изоморфизмы: $\ln: \mathcal{E}_K^1 \rightarrow m$ и $\exp: m \rightarrow \mathcal{E}_K^1$, где отображения $\ln$ и $\exp$ задаются соответствующими рядами.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для того чтобы доказать, что формальные ряды для $\ln$ и $\exp$ сходятся на указанных множествах, достаточно доказать, что если $x \in m$, то $x^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. (По поводу сходимости рядов в двумерных локальных полях см. [4]). Последнее же достаточно очевидно. А то, что $\ln$ и $\exp$ устанавливают взаимно обратные гомоморфизмы на указанных множествах, доказывается точно так же, как в [6].

Следующая лемма показывает корректность применения $\exp$ в одномерном локальном поле в таблице (13).

ЛЕММА 2. Пусть $K = k((u))((t))$ – двумерное локальное поле, n – максимальный идеал в локальном кольце $k[[u]]$. Тогда для любых $\varphi \in \mathcal{O}_K^1$ и $\psi \in K$ выражение $\text{res}_u \left(\ln \varphi \frac{d_u \psi}{\psi} \right)$ принимает значения в n .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $\text{res}_u \left(\ln \varphi \frac{d_u \psi}{\psi} \right)$ переводит умножение по второму аргументу в сложение в кольце $k[[u]]$, то утверждение леммы достаточно проверить на мультипликативных образующих поля K . Эти возникающие несколько случаев довольно просты, поэтому их разбор мы здесь опускаем.

Приступим теперь к доказательству свойств (10) и (11) для отображений из теоремы 2.

ЛЕММА 3. Пусть есть вложение полей $k((\tau)) \hookrightarrow k'((\tau'))$. Тогда для любых ζ из $k'((\tau'))^*$ и ξ из $k((\tau))^*$:

$$\text{Nm}_{k'/k}(\zeta, \xi)_{k'((\tau'))} = (\text{Nm}_{k'((\tau'))/k((\tau))} \zeta, \xi)_{k((\tau))},$$

где $(\cdot, \cdot)_{k'((\tau'))}$ и $(\cdot, \cdot)_{k((\tau))}$ – ручные символы в одномерных локальных полях $k'((\tau'))$ и $k((\tau))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Это тождество хорошо известно, см. [2, гл. 3, § 4, лемма 3].

Докажем теперь формулу (10) для отображения $f_*(\cdot, \cdot)_{x,C}$, когда $C \neq F$. Из леммы 3 и определения $f_*(\cdot, \cdot)_{x,C}$ видно, что для этого достаточно доказать:

$$(\varphi, \psi, f^*(\xi))_{K_{x,C}} = ((\varphi, \psi)_C, \xi)_{k(C)_x}.$$

Но последнее есть очевидное следствие формулы (9) и того, что

$$(\alpha, \beta, \gamma)_{K_{x,C}} = (\partial_2(\alpha, \beta), \gamma)_{k(C)_x},$$

где α и β из $K_{x,C}^*$, γ из $k(C)_x^*$. Итак, этот случай разобран.

Теперь разберемся с формулой (11) для случая $C \neq F$. Следующая лемма хорошо известна.

ЛЕММА 4. Пусть есть вложение полей $k((\tau)) \hookrightarrow k'((\tau'))$. Тогда коммутативна следующая диаграмма:

$$\begin{array}{ccc} k'((\tau'))^* & \xrightarrow{f \mapsto \frac{df}{f}} & \tilde{\Omega}_{k'((\tau'))/k'}^1 \\ \downarrow \text{Nm} & & \downarrow \text{Tr} \\ k((\tau))^* & \xrightarrow{g \mapsto \frac{dg}{g}} & \tilde{\Omega}_{k((\tau))/k}^1 \end{array}$$

Рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccc} K_{x,C}^* \times K_{x,C}^* & \xrightarrow{(\varphi, \psi) \mapsto \frac{d\varphi}{\varphi} \wedge \frac{d\psi}{\psi}} & \tilde{\Omega}_{K_{x,C}/k'}^2 \\ \downarrow (\cdot, \cdot)_C & & \downarrow \text{res}_{K_{x,C}/k'((t^C))} \\ k'((t^C))^* & \xrightarrow{g \mapsto \frac{dg}{g}} & \tilde{\Omega}_{k'((t^C))/k'}^1 \\ \downarrow \text{Nm} & & \downarrow \text{Tr} \\ k((t))^* & \xrightarrow{h \mapsto \frac{dh}{h}} & \tilde{\Omega}_{k((t))/k}^1 \end{array} \quad (14)$$

Ясно, что композиция отображений в левом столбце есть $f_*(\ , \ )_{x,C}$, композиция отображений в правом столбце есть $f_*^{x,C}$.

ЛЕММА 5. *Справедливы следующие утверждения.*

- 1) *Коммутативность верхнего квадрата диаграммы (14) эквивалентна формуле*

$$(\varphi, \psi; \xi]_{K_{x,C}} = ((\varphi, \psi)_C; \xi]_{k'((t^C))},$$

где φ и ψ из $K_{x,C}^*$, ξ из $k'((t^C))$.

- 2) *Коммутативность всей прямоугольной диаграммы (14) эквивалентна формуле (11).*
- 3) *Коммутативность верхнего квадрата диаграммы (14) влечет коммутативность всей прямоугольной диаграммы (14) и формулу (11).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Напомним, что $K_{x,C} \simeq k'((t^C))((t_C))$. Пункт 1) следует из следующей цепочки равенств:

$$\begin{array}{ccc} \text{res}_{k'((t^C))/k'} \left(\xi \cdot \frac{d(\varphi, \psi)_C}{(\varphi, \psi)_C} \right) & \xlongequal{\quad} & \text{res}_{k'((t^C))/k'} \left(\xi \cdot \text{res}_{K_{x,C}/k'((t^C))} \left(\frac{d\varphi}{\varphi} \wedge \frac{d\psi}{\psi} \right) \right) \\ \parallel & & \parallel \\ ((\varphi, \psi)_C; \xi]_{k'((t^C))} & \xlongequal{\quad} & (\varphi, \psi; \xi]_{K_{x,C}} \end{array}$$

Пункт 2) доказывается аналогичными выкладками, но только длиннее. При доказательстве следует использовать лемму 4, а также то, что операции res и Tg коммутативны.

Пункт 3) следует из леммы 4 и пункта 2) этой леммы.

ЛЕММА 6. Пусть $K = k((t))((u))$ – двумерное локальное поле с полем вычетов $\overline{K} = k((t))$, $(\ , \ )_K$ – ручной символ, определяемый нормированием по переменной u . Тогда для любых ξ из $\overline{K}$, f и g из K^*

$$\text{res}_{\overline{K}/k} \left(\xi \cdot \frac{d(f, g)_K}{(f, g)_K} \right) = \text{res}_{K/k} \left(\xi \cdot \frac{df}{f} \wedge \frac{dg}{g} \right). \quad (15)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что левая и правая часть формулы (15) аддитивны по ξ и бимультимпликативны по f и g , к тому же левая и правая части (15) удовлетворяют основному свойству символа, т.е. они обращаются в нуль, если $f = \varphi$, $g = 1 - \varphi$ для любого φ . Поэтому достаточно рассмотреть случаи, когда $\nu_t(\xi) \geq 0$ или $\xi = t^{-l}$ для всех $l \geq 1$.

В случае $\nu_t(\xi) \geq 0$ формула (15) фактически превращается в равенство (6) из [4, гл. 2.5.3].

Теперь пусть $\xi = t^{-l}$, $l \geq 1$. Пользуясь мультипликативностью, достаточно ограничиться случаями, когда f из k^* , или из $\mathcal{E}_K^1$, или просто t или u , аналогично для g . Количество случаев можно значительно сократить, если воспользоваться кососимметричностью левой и правой части (15) по f и g , следующей из основного свойства символа. Возникает довольно простой перебор, который мы здесь опускаем. Разберем, для примера, только один случай.

Пусть $f \in \mathcal{E}_K^1, g = u$. Так как $\mathcal{E}_K^1 = (1 + t \cdot k[[t]])(1 + u \cdot k((t))[[u]])$, то существует разложение $f = e_1 \cdot e_2$, где $e_1 \in 1 + t \cdot k[[t]], e_2 \in 1 + u \cdot k((t))[[u]]$. Тогда в левой части (15) мы имеем:

$$\text{res}_{\overline{K}/k} \left(t^{-l} \cdot \frac{\frac{\partial}{\partial t}(e_1 \cdot e_2, u)_K}{(e_1 \cdot e_2, u)_K} dt \right) = \text{res}_{\overline{K}/k} \left(t^{-l} \cdot \frac{\frac{\partial}{\partial t} e_1}{e_1} dt \right). \quad (16)$$

Справа же имеем:

$$\begin{aligned} & \text{res}_{K/k} \left(t^{-l} \cdot \frac{d(e_1 \cdot e_2)}{e_1 \cdot e_2} \wedge \frac{du}{u} \right) \\ &= \text{res}_{K/k} \left(t^{-l} \cdot \frac{de_1}{e_1} \wedge \frac{du}{u} \right) + \text{res}_{K/k} \left(t^{-l} \cdot \frac{de_2}{e_2} \wedge \frac{du}{u} \right) \\ &= \text{res}_{\overline{K}/k} \left(t^{-l} \cdot \frac{\frac{\partial}{\partial t} e_1}{e_1} dt \right) + \text{res}_{K/k} \left(t^{-l} \cdot \frac{de_2}{e_2} \wedge \frac{du}{u} \right). \end{aligned}$$

Сравнивая последнее с (16), видим, что достаточно показать, что последнее слагаемое в последней строчке равно нулю. Но $t^{-l} \cdot \frac{de_2}{e_2} \wedge \frac{du}{u} = t^{-l} \cdot \frac{\frac{\partial}{\partial t} e_2}{e_2 \cdot u} \wedge du$, и $\frac{\frac{\partial}{\partial t} e_2}{e_2} \in u \cdot k((t))[[u]]$, следовательно, $\frac{\frac{\partial}{\partial t} e_2}{e_2 \cdot u} \in k((t))[[u]]$, поэтому

$$\text{res}_{K/\overline{K}} \left(t^{-l} \cdot \frac{de_2}{e_2} \wedge \frac{du}{u} \right) = 0.$$

Итак, этот случай разобран.

Теперь, применив лемму 6 для поля $K_{x,C}$ ($C \neq F$) и пункты 1) и 2) из леммы 5, сразу же получаем формулу (11) для случая $C \neq F$.

Теперь рассмотрим отображение $f_*(\cdot, \cdot)_{x,F}$ из теорем 2 и 1.

Докажем сначала формулу (10) ($C = F$). Пользуясь леммой 3, как и раньше, для этого достаточно будет доказать следующую формулу для $(\cdot, \cdot)_{f,F}$:

$$(\varphi, \psi, \xi)_{K_{x,F}} = ((\varphi, \psi)_{f,F}, \xi)_{k'((t))} \quad (17)$$

для любых φ и ψ из $K_{x,F}^*$, ξ из $k'((t))^*$. (Напомним, см. п. 1.2, что $K_{x,F} \simeq k'((u))((t))$). Так как левая и правая части формулы (17) мультипликативны по φ , ψ и ξ , то ее достаточно проверить только на мультипликативных образующих полей $K_{x,F}$ и $k'((t))$. Количество случаев для перебора можно сократить, если воспользоваться кососимметричностью по φ и ψ левой и правой частей формулы (17). Разбор возникающих случаев мы здесь опускаем в силу их простоты.

Теперь будем доказывать формулу (11) ($C = F$). В этом случае верен следующий аналог леммы 6:

ЛЕММА 7. Пусть $K = k((u))((t))$ – двумерное локальное поле, $\overline{K} = k((u))$ и $\pi: \mathcal{O}_K \rightarrow \overline{K}$ – каноническая проекция. Тогда для любых φ и ψ из K^* , ξ из $k((t))$:

$$\text{res}_{K/k} \left(\xi \frac{d\varphi}{\varphi} \wedge \frac{d\psi}{\psi} \right) = \text{res}_{k((t))/k} \left(\xi \frac{d(\varphi, \psi)_{f,F}}{(\varphi, \psi)_{f,F}} \right). \quad (18)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как левая и правая части (18) аддитивны по ξ , мультипликативны по φ и ψ и кососимметричны по φ и ψ , то, действуя как и раньше, все доказательство сведем к разбору двух случаев.

1) $\nu_{k((t))}(\xi) \geq 0$, тогда левая часть в формуле (18) будет (см. [4, гл. 2.5.3, предл. 6]) равна $\bar{\xi} \cdot \det \begin{pmatrix} \nu_{\bar{K}}(\pi(\varphi)) & \nu_K(\varphi) \\ \nu_{\bar{K}}(\pi(\psi)) & \nu_K(\psi) \end{pmatrix}$, где $\bar{\xi} \in k$, $\bar{\xi} = \xi \bmod (t \cdot k[[t]])$. Возникают подслучаи.

(а) Пусть $\nu_{k((t))}(\xi) > 0$, тогда $\bar{\xi} = 0$ и левая часть (18) равна нулю, и, как сразу видно проверкой на мультипликативных образующих для φ и ψ , правая часть (18) тоже нуль.

(б) Пусть $\nu_{k((t))}(\xi) = 0$. По линейности можно считать, что $\xi \in \mathcal{E}_{k((t))}^1$, тогда надо доказать, что

$$\det \begin{pmatrix} \nu_{\bar{K}}(\pi(\varphi)) & \nu_K(\varphi) \\ \nu_{\bar{K}}(\pi(\psi)) & \nu_K(\psi) \end{pmatrix} = \text{res}_{k((t))/k} \left(\xi \frac{d(\varphi, \psi)_{f,F}}{(\varphi, \psi)_{f,F}} \right).$$

Последняя формула доказывается при помощи проверки на мультипликативных образующих. Возникающие несколько несложных вариантов мы здесь опускаем.

2) По линейности можно считать, что $\xi = t^{-k}$, $k \geq 1$. Опять возникают несложные варианты для различных значений φ и ψ . Их разбор мы здесь опускаем. Приведем здесь лишь самый нетривиальный случай, когда $\varphi \in \mathcal{E}_K^1$, ψ любое. Тогда (18) эквивалентно следующему:

$$\text{res}_u \frac{d\varphi}{\varphi} \wedge \frac{d\psi}{\psi} = \frac{d_t \left(\exp \text{res}_u \left(-\ln \varphi \cdot \frac{d_u \psi}{\psi} \right) \right)}{\exp \text{res}_u \left(-\ln \varphi \cdot \frac{d_u \psi}{\psi} \right)}. \quad (19)$$

Преобразуем правую часть формулы (19):

$$\begin{aligned} \frac{d_t \left(\exp \text{res}_u \left(-\ln \varphi \cdot \frac{d_u \psi}{\psi} \right) \right)}{\exp \text{res}_u \left(-\ln \varphi \cdot \frac{d_u \psi}{\psi} \right)} &= d_t \left(\ln \left(\exp \text{res}_u \left(-\ln \varphi \cdot \frac{d_u \psi}{\psi} \right) \right) \right) \\ &= d_t \left(\text{res}_u \left(-\ln \varphi \cdot \frac{d_u \psi}{\psi} \right) \right) \\ &= \text{res}_u \left(\frac{\partial}{\partial t} \left(-\ln \varphi \cdot \frac{\partial \psi}{\partial u} \cdot \frac{1}{\psi} \right) \right) du \wedge dt. \end{aligned}$$

Теперь (19) переписывается так:

$$\text{res}_u \frac{d\varphi}{\varphi} \wedge \frac{d\psi}{\psi} = \text{res}_u \left(\frac{\partial}{\partial t} \left(-\ln \varphi \cdot \frac{\partial \psi}{\partial u} \cdot \frac{1}{\psi} \right) \right) du \wedge dt.$$

Сравним две дифференциальные формы из левой и правой частей последнего равенства, а именно, $\frac{d\varphi}{\varphi} \wedge \frac{d\psi}{\psi}$ и $\frac{\partial}{\partial t} \left(-\ln \varphi \cdot \frac{\partial \psi}{\partial u} \cdot \frac{1}{\psi} \right) du \wedge dt$. Сначала преобразуем первую дифференциальную форму.

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{\varphi} \wedge \frac{d\psi}{\psi} &= \frac{1}{\varphi\psi} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} du + \frac{\partial \varphi}{\partial t} dt \right) \wedge \left(\frac{\partial \psi}{\partial u} du + \frac{\partial \psi}{\partial t} dt \right) \\ &= \frac{1}{\varphi\psi} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{\partial \varphi}{\partial t} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial u} \right) du \wedge dt. \end{aligned} \quad (20)$$

Рассмотрим другую дифференциальную форму.

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial t} \left(-\ln \varphi \cdot \frac{\partial \psi}{\partial u} \cdot \frac{1}{\psi} \right) du \wedge dt \\
&= \left(-\frac{\partial \ln \varphi}{\partial t} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial u} \cdot \frac{1}{\psi} \right) du \wedge dt - \ln \varphi \cdot \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \psi}{\partial u} \cdot \frac{1}{\psi} \right) du \wedge dt \\
&= -\frac{1}{\varphi \psi} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial u} du \wedge dt - \ln \varphi \cdot \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \psi}{\partial u} \cdot \frac{1}{\psi} \right) du \wedge dt. \tag{21}
\end{aligned}$$

Вычтем из (20) выражение (21), получим:

$$\begin{aligned}
& \frac{d\varphi}{\varphi} \wedge \frac{d\psi}{\psi} - \frac{\partial}{\partial t} \left(-\ln \varphi \cdot \frac{\partial \psi}{\partial u} \cdot \frac{1}{\psi} \right) du \wedge dt \\
&= \frac{1}{\varphi \psi} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial u} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial t} du \wedge dt + \ln \varphi \cdot \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \psi}{\partial u} \cdot \frac{1}{\psi} \right) du \wedge dt \\
&= \frac{\partial(\ln \varphi)}{\partial u} \cdot \frac{1}{\psi} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial t} du \wedge dt + \ln \varphi \cdot \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \psi}{\partial u} \cdot \frac{1}{\psi} \right) du \wedge dt \\
&= \frac{\partial(\ln \varphi)}{\partial u} \cdot \frac{1}{\psi} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial t} du \wedge dt + \ln \varphi \cdot \left(\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial u} \psi \right) \cdot \frac{1}{\psi} du \wedge dt \\
&\quad + \ln \varphi \cdot \frac{\partial \psi}{\partial u} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{\psi} \right) du \wedge dt \\
&= \frac{\partial(\ln \varphi)}{\partial u} \cdot \frac{1}{\psi} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial t} du \wedge dt + \ln \varphi \cdot \left(\frac{\partial}{\partial u} \frac{\partial}{\partial t} \psi \right) \cdot \frac{1}{\psi} du \wedge dt \\
&\quad + \ln \varphi \cdot \frac{\partial \psi}{\partial u} \cdot \left(-\frac{1}{\psi^2} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) du \wedge dt \\
&= \frac{\partial(\ln \varphi)}{\partial u} \cdot \frac{1}{\psi} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial t} du \wedge dt + \ln \varphi \cdot \left(\frac{\partial}{\partial u} \frac{\partial}{\partial t} \psi \right) \cdot \frac{1}{\psi} du \wedge dt \\
&\quad + \ln \varphi \cdot \frac{\partial \psi}{\partial t} \cdot \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{\psi} \right) du \wedge dt \\
&= \frac{\partial(\ln \varphi)}{\partial u} \cdot \frac{1}{\psi} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial t} du \wedge dt + \ln \varphi \cdot \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{\psi} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) du \wedge dt \\
&= \frac{\partial}{\partial u} \left(\ln \varphi \cdot \frac{1}{\psi} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) du \wedge dt.
\end{aligned}$$

Но для любого ζ из K

$$\operatorname{res}_u \left(\frac{\partial}{\partial u} (\zeta) du \wedge dt \right) = 0.$$

Поэтому выражения (20) и (21) дают один и тот же вычет по переменной u . Разбор этого варианта и завершает доказательство последней леммы.

Теперь, воспользовавшись леммой 7 для поля $K_{x,F}$, леммой 4 и аналогом в нашей ситуации леммы 5, мы сразу же получаем формулу (11) для случая $C = F$.

Этот последний разобранный случай и завершает доказательство теорем 2 и 1.

3. K_2 -адели, когомологии K_2 -функторов и K_2 -гомоморфизм Гизина

Сохраним здесь все обозначения из раздела 2 и п. 1.2. Введем дополнительные обозначения. Если двумерное локальное поле, ассоциированное с парой: кривая C и точка $x \in C$, $K_{x,C} \simeq k((t_1))((t_2))$, то обозначим через $\mathcal{O}_{x,C}$ одномерное кольцо дискретного нормирования в поле $K_{x,C}$, т.е. $\mathcal{O}_{x,C} \simeq k((t_1))[[t_2]]$. Напомним, что $K_C \simeq k(C)((t_C))$, обозначим через $\mathcal{O}_C$ кольцо дискретного нормирования в поле K_C , т.е. $\mathcal{O}_C \simeq k(C)[[t]]$. Напомним, что $\widehat{\mathcal{O}}_{x,X}$ – пополнение двумерного локального кольца в точке x на поверхности X по максимальному идеалу, т.е. те функции из формальной окрестности точки x , которые регулярны в ней. Обозначим тогда через $\widehat{\mathcal{O}}_{x,X}(\infty C)$ те функции из кольца $\widehat{\mathcal{O}}_{x,X}$, которые регулярны вне кривой C , т.е. $\widehat{\mathcal{O}}_{x,X}(\infty C) \simeq (\widehat{\mathcal{O}}_{x,X})_{(t_C)}$ – локализация кольца $\widehat{\mathcal{O}}_{x,X}$ по идеалу, порожденному элементом t_C .

Пусть A – кольцо и $K_2(A)$ – K -функтор Квиллена. Далее удобно будет принять за определение следующий результат Штейна (см. [7]).

ТЕОРЕМА-ОПРЕДЕЛЕНИЕ. 1) Пусть A – локальное кольцо, тогда $K_2(A)$ – группа, порожденная символами (u, v) , где u и v из A^* , с обычными символическими соотношениями, т.е. бимультпликативностью и $(\varphi, 1 - \varphi) = 1$ для φ и $1 - \varphi$ из A^* .

2) Пусть γ – идеал кольца A , лежащий в максимальном идеале кольца A , пусть $K_2(A, \gamma) \stackrel{\text{def}}{=} \text{Ker}(K_2(A) \xrightarrow{p} K_2(A/\gamma))$, где естественный для K -функтора гомоморфизм p в рамках предыдущего пункта этого определения задается просто факторизацией символов по соответствующему идеалу (так как если q – естественный гомоморфизм из A в A/γ , то $(A/\gamma)^* = q(A^*)$). Тогда $K_2(A, \gamma)$ как подгруппа в $K_2(A)$ порождается следующими символами: $(1 + i, u)$, где $i \in \gamma$, $u \in A^*$.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $\widehat{K}$ – поле, полное относительно некоторого дискретного нормирования, $\mathcal{O}$ – соответствующее кольцо дискретного нормирования, $\overline{K}$ – поле вычетов. Тогда

$$K_2(\mathcal{O}) \cong \text{Ker}(K_2(\widehat{K}) \xrightarrow{(\cdot, \cdot)_{\widehat{K}}} \overline{K}^*),$$

где $(\cdot, \cdot)_{\widehat{K}}$ – отображение, задаваемое ручным символом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что $K_2(\mathcal{O}) \subset \text{Ker}(K_2(\widehat{K}) \xrightarrow{(\cdot, \cdot)_{\widehat{K}}} \overline{K}^*)$. Докажем обратное включение. Пусть символ (u, v) , где u и v из K^* , таков, что $(u, v)_{\widehat{K}} = 1$. Пусть $u = a \cdot \varepsilon_1 \cdot t^{k_1}$, $v = b \cdot \varepsilon_2 \cdot t^{k_2}$, где a и b из $\overline{K}^*$, ε_1 и ε_2 из $\mathcal{O}_{\widehat{K}}^1$, t – локальный параметр (см. разложение (6)). Тогда $(u, v) = (a, b) \cdot (a, \varepsilon_2) \cdot (\varepsilon_1, b) \cdot (a, t)^{k_2} \cdot (t, b)^{k_1} \cdot (t, t)^{k_1 k_2} \cdot (\varepsilon_1, t)^{k_2} \cdot (t, \varepsilon_2)^{k_1}$. Отсюда видно, что для того, чтобы доказать следствие, достаточно доказать, что символ вида (ε, t) принадлежит $K_2(\mathcal{O})$ для всех ε из $\mathcal{O}_{\widehat{K}}^1$. Пусть m – максимальный идеал в $\mathcal{O}$. Тогда если $(\varepsilon - 1) \in m$, но $(\varepsilon - 1) \notin m^2$, то $(\varepsilon, t) = (\varepsilon, t) \cdot (\varepsilon, 1 - \varepsilon)^{-1} = (\varepsilon, t \cdot (1 - \varepsilon)^{-1})$. И так как $(t \cdot (1 - \varepsilon)^{-1}) \in \mathcal{O}^*$ (где $\mathcal{O}^*$ – обратимые элементы в кольце $\mathcal{O}$), то в этом случае все доказано. Если же $\varepsilon - 1 \in m^k$, где $k > 1$, то $(\varepsilon, t) = (\varepsilon, t)(1 - t, t) = (\varepsilon \cdot (1 - t), t)$, причем $(\varepsilon \cdot (1 - t) - 1) \in m$, но $(\varepsilon \cdot (1 - t) - 1) \notin m^2$ и все свелось к предыдущему случаю.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $\widehat{\mathcal{O}}_{x,X}$ – кольцо формальных степенных рядов от двух переменных, т.е. $\widehat{\mathcal{O}}_{x,X} \simeq k[[u, t]]$. Пусть $\widehat{K}_{x,X}$ – поле частных кольца $\widehat{\mathcal{O}}_{x,X}$. Тогда

$$K_2(\widehat{\mathcal{O}}_{x,X}) \simeq \text{Ker} \left(K_2(\widehat{K}_{x,X}) \xrightarrow{\oplus(\cdot, \cdot)_C} \bigoplus_C k(C)^* \right),$$

где прямая сумма берется по всем C – простым идеалам высоты 1 в кольце $\widehat{\mathcal{O}}_{x,X}$, т.е. формальным “кривым”, проходящим через точку x , $k(C)$ – поле функций на таких “формальных кривых”, $(\cdot, \cdot)_C$ – ручной символ, построенный по дискретному нормированию поля $\widehat{K}_{x,X}$, ассоциированному с данной кривой C .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что $K_2(\widehat{\mathcal{O}}_{x,X}) \subset \text{Ker}(K_2(\widehat{K}_{x,X}) \rightarrow \bigoplus_C k(C)^*)$. Докажем обратное включение. Пусть $a = \prod_i (f_i, g_i) \in K_2(\widehat{K}_{x,X})$ – такой элемент, что $a_C = \prod_i (f_i, g_i)_C = 1$ для любой формальной кривой C . Докажем тогда, что $a \in K_2(\widehat{\mathcal{O}}_{x,X})$, т.е. $a = \prod_j (h_j, d_j)$, где h_j и d_j из $\widehat{\mathcal{O}}_{x,X}^*$.

Отметим, что в кольце $\widehat{\mathcal{O}}_{x,X}$ разложение на простые множители однозначно: любой простой идеал высоты 1 – главный и порождается простым элементом. Тогда, пользуясь бимультимпликативностью символов, можно считать, разложив каждый f_i и g_i на простые множители, что $a = \prod_k a_k$, где $a_k = (p_k, q_k)$ и q_k, p_k – простые или обратимые элементы в $\widehat{\mathcal{O}}_{x,X}$.

Зафиксируем какой-нибудь простой элемент t из набора $\{p_k\}$ или $\{q_k\}$. Обозначим теперь через b произведение всех только тех a_k , для которых или $p_k = t$ или $q_k = t$.

Докажем, что $b \in K_2(\widehat{\mathcal{O}}_{x,X})$. Из-за бимультимпликативности, кососимметричности и тождества $(t, t) = (-1, t)$ можно считать, что, с точностью до элемента из $K_2(\widehat{\mathcal{O}}_{x,X})$, $b = (\gamma \cdot t_1^{m_1} \cdot \dots \cdot t_l^{m_l}, t)$, где $\gamma \in \widehat{\mathcal{O}}_{x,X}^*$, t_i – простые элементы из $\widehat{\mathcal{O}}_{x,X}$ и $t_i \neq t$ для всех i . Ясно из построения элемента b , что $(a \cdot b^{-1})_{(t)} = 1$, и так как $(a)_{(t)} = 1$ по условию, то $(b)_{(t)} = 1$. Отсюда $\gamma \cdot t_1^{m_1} \cdot \dots \cdot t_l^{m_l} = 1 + t \cdot d$ для некоторого $d \in \widehat{\mathcal{O}}_{x,X}$. Отсюда, так как $1 + t \cdot d \in \widehat{\mathcal{O}}_{x,X}^*$ и в силу однозначности разложения на множители, $m_i = 0$ для всех i . Поэтому $b = (1 + t \cdot e, t)$ для некоторого $e \in \widehat{\mathcal{O}}_{x,X}$. Осталось разобрать два случая: если $e \in \widehat{\mathcal{O}}_{x,X}^*$, то $(1 + t \cdot e, t) = (1 + t \cdot e, t)(1 + t \cdot e, -t \cdot e)^{-1} = (1 + t \cdot e, -e^{-1}) \in K_2(\widehat{\mathcal{O}}_{x,X})$; если $e \notin \widehat{\mathcal{O}}_{x,X}^*$, то $(1 + t \cdot e, t) = ((1 - t)(1 + t \cdot e), t) = (1 + t \cdot (-1 + e - t \cdot e), t)$ и теперь $-1 + e - t \cdot e \in \widehat{\mathcal{O}}_{x,X}^*$, поэтому все сводится к предыдущему случаю.

Так как $b \in K_2(\widehat{\mathcal{O}}_{x,X})$, то $b_C = 1$ для всех C , поэтому $(a \cdot b^{-1})_C = 1$ для всех C , причем среди символьного разложения $a \cdot b^{-1}$ уже не будет простого элемента t . Далее индукция по всем простым элементам из наборов $\{p_k\}$ и $\{q_k\}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 13. На самом деле, следствие 1 и следствие 2 сразу же следуют из резольвенты Герстена. Например, для кольца $\widehat{\mathcal{O}}_{x,X}$ ее начало выглядит так:

$$0 \longrightarrow K_2(\widehat{K}_{x,X}) \xrightarrow{\oplus(\cdot, \cdot)_C} \bigoplus_{C \subset X} K_1(k(C)) \longrightarrow \dots$$

(см. [8, § 7, теорема 5.13]). И, как хорошо известно, начальные когомологии этого комплекса совпадают с $H^0(\text{Срес } \widehat{\mathcal{O}}_{x,X}, K_2(\text{Срес } \widehat{\mathcal{O}}_{x,X})) \simeq K_2(\widehat{\mathcal{O}}_{x,X})$.

Напомним, что $K_x = \widehat{\mathcal{O}}_{x,X} \cdot k(X)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9. Пусть обозначения такие же, как и в следствии 2 последней теоремы. Тогда следующий комплекс точен в среднем члене:

$$K_2(K_x) \xrightarrow{\varphi} K_2(\widehat{K}_{x,X}) \xrightarrow{\oplus(\cdot, \cdot)_{\tilde{C}}} \bigoplus_{\tilde{C}} k(\tilde{C})^*,$$

где сумма берется по всем таким неприводимым формальным кривым $\tilde{C}$, которые определены лишь в формальной окрестности и не определены глобально на всей поверхности X , а также не являются формальными ветвями кривых, определенных глобально.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что $\widehat{K}_{x,X}$ — поле частных кольца K_x . Кроме того, легко проверяется, что K_x — одномерная область главных идеалов, т.е. K_x — дедекиндово кольцо. При этом, максимальные идеалы в кольце K_x взаимно однозначно соответствуют тем простым идеалам кольца $\widehat{\mathcal{O}}_{x,X}$, которые определяют кривые, определенные лишь в формальной окрестности (но не определенные глобально на всей поверхности X), а также не являющиеся формальными ветвями кривых, определенных глобально.

Комплекс из предложения 9 теперь является фрагментом длинной точной K -последовательности для произвольного дедекиндова кольца, доказанной в [8]. Предложение 9 доказано.

Обозначим $\check{K}_2(K_x) \stackrel{\text{def}}{=} \text{Im}(K_2(K_x) \xrightarrow{\varphi} K_2(\widehat{K}_{x,X}))$. Тогда, пользуясь предложением 9, легко описать $\check{K}_2(K_x)$ в терминах символов, а именно:

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 10. Группа $\check{K}_2(K_x)$ как подгруппа в $K_2(\widehat{K}_{x,X})$ порождается символами (u, v) , где $u \in K_x^*$ и $v \in K_x^*$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из предложения 9 сразу же следует, что символы (u, v) , где $u \in K_x^*$ и $v \in K_x^*$, принадлежат $\check{K}_2(K_x)$. Обратное включение, пользуясь предложением 9, доказывается совершенно аналогичными выкладками, как при доказательстве следствия 2 из теоремы-определения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 11. Пусть обозначения такие же, как и в следствии 2 последней теоремы, тогда:

1) следующий комплекс точен в среднем члене:

$$K_2(\widehat{K}_{x,X}) \xrightarrow{\oplus(\cdot, \cdot)_C} \bigoplus_C k(C)^* \xrightarrow{\oplus_C \nu_x} \mathbb{Z}, \quad (22)$$

где ν_x — нормирование поля функций на “формальной кривой” C в точке x ;

2) следующий комплекс точен в среднем члене:

$$K_2(K_x) \xrightarrow{\oplus(\cdot, \cdot)_{\check{C}}} \bigoplus_{\check{C}} k(\check{C})^* \xrightarrow{\oplus_{\check{C}} \nu_x} \mathbb{Z}. \quad (23)$$

В отличие от комплекса (22), в комплексе (23) прямая сумма берется по тем только неприводимым формальным кривым $\check{C}$, которые или определены в настоящей окрестности точки x на поверхности X , а не в формальной окрестности, или являются формальными ветвями кривых, определенных глобально. Иначе говоря, из простых элементов кольца $\widehat{\mathcal{O}}_{x,X}$, определяющих простые идеалы высоты 1, мы выбираем только те, которые или приходят из соответствующих простых элементов неполного локального кольца простой точки $\mathcal{O}_{x,X}$, или входят в разложение простых элементов, приходящих из $\mathcal{O}_{x,X}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 14. В кольце $\mathcal{O}_{x,X}$, так же как и в кольце $\widehat{\mathcal{O}}_{x,X}$, разложение на простые множители однозначно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем сначала (22). То, что

$$\left(\bigoplus_C \nu_x \right) \circ \left(\bigoplus (,)_C \right) = 0 \quad (24)$$

доказано в [4, гл. 6.1]. Докажем обратное: если есть набор $\{f\} = \{f_C : f_C \in k(C)^*; f_C \neq 1, \text{ кроме конечного числа кривых } C; \bigoplus_C \nu_x(f_C) = 0\}$, то существуют $g, h \in \widehat{K}_{x,X}^*$ такие, что для всех кривых C $(g, h)_C = f_C$.

Пусть t_C – локальный параметр в точке x вдоль “кривой” C . Доказательство будем вести индукцией по количеству “формальных кривых” C таких, что $f_C \neq 1$.

1) Пусть такое C только одно. Выберем элемент $u \in \widehat{\mathcal{O}}_{x,X}$, чтобы элементы t_C и u образовывали пару локальных параметров в точке x , т.е. $\widehat{\mathcal{O}}_{x,X} \simeq k[[t_C, u]]$. Если $k(C) \simeq k((t))$, то пусть $i: k(C) \hookrightarrow \widehat{K}_{x,X}$ – вложение, индуцированное отображением $t \xrightarrow{i} u$. Тогда символ $(i(f_C), t_C)$ и есть искомый, так как очевидно, что

$$(i(f_C), t_C)_C = f_C, \quad (i(f_C), t_C)_{(u)} = 1,$$

так как $\nu_x(f_C) = 0$ и, следовательно, $i(f_C)$ обратим в $k[[u]]$, а значит и в $\widehat{\mathcal{O}}_{x,X}$. (Здесь (u) – “формальная кривая”, получающаяся из идеала высоты 1 кольца $\widehat{\mathcal{O}}_{x,X}$, порожденного элементом u .)

Очевидно, что

$$(i(f_C), t_C)_E = 1,$$

где E – любая другая “кривая”, $E \neq C$, $E \neq (u)$.

2) Пусть теперь есть набор из n “кривых” C_i ($i = 1, \dots, n$): $f_C \neq 1$. Пусть $\Psi \in K_2(\widehat{K}_{x,X})$ – тот неизвестный символ, который мы должны построить. Сейчас мы вычислим его явно. Предположим, что существует такая пара $i \neq j$, что касательные у кривых C_i и C_j разные, т.е. C_i и C_j пересекаются в точке x трансверсально. (Что делать, если такой пары i и j не существует, мы обсудим позднее.) Без ограничения общности можно считать далее, что $i = 1, j = 2$. Тогда t_{C_1} и t_{C_2} образуют систему локальных параметров и $\widehat{\mathcal{O}}_{x,X} \simeq k[[t_{C_1}, t_{C_2}]]$. Если $k(C_i) \simeq k((t_i))$, то пусть $i_{C_1}: k(C_1) \hookrightarrow \widehat{K}_{x,X}$ – вложение, индуцированное отображением $t_1 \xrightarrow{i_{C_1}} t_{C_2}$. Рассмотрим теперь символ $\Theta_1 = (i_{C_1}(f_{C_1}), t_{C_1}) \in K_2(\widehat{K}_{x,X})$. Очевидно, что

$$(i_{C_1}(f_{C_1}), t_{C_1})_{C_1} = f_C, \quad (i_{C_1}(f_{C_1}), t_{C_1})_E = 1$$

при любых “кривых” $E \neq C_1, E \neq C_2$. Так как $\Theta_1 \in K_2(\widehat{K}_{x,X})$, то для него выполнено свойство (24). Для Ψ свойство (24) выполнено по условию. Поэтому оно выполнено и для $\Theta_1^{-1}\Psi$, при этом

$$(\Theta_1^{-1}\Psi)_{C_1} = 1, \quad (\Theta_1^{-1}\Psi)_E = 1$$

для всех “кривых” $E \neq C_2, \dots, C_n$. Поэтому предположение индукции можно применить к $n - 1$ “кривым” $C_2, \dots, C_n$ и набору

$$f_{C_2} = (\Theta_1^{-1}\Psi)_{C_2}, \dots, f_{C_n} = (\Theta_1^{-1}\Psi)_{C_n}.$$

По предположению индукции существует Θ_2 и можно написать:

$$\Theta_1^{-1}\Psi = \Theta_2, \quad \text{отсюда} \quad \Psi = \Theta_1\Theta_2$$

и в этом случае формула (22) доказана.

Если все “кривые” C_i ($i = 1, \dots, n$) касаются друг друга, то мы можем провести “кривую” G , трансверсальную всем C_i ($i = 1, \dots, n$). Тогда, проделав те же операции, что и выше, теперь уже с “кривыми” C_1 и G (выше им соответствовали “кривые” C_1 и C_2), мы все сведем к случаю набора n “кривых” $\{G, C_2, \dots, C_n\}$, где “кривая” G уже трансверсальна всем остальным “кривым”. И все свелось к уже разобранному случаю. Теперь формула (22) полностью доказана.

Точная последовательность (23) следует сразу же из точной последовательности (22) и предложения 9.

ЗАМЕЧАНИЕ 15. На самом деле, точность (22) следует из резольвенты Герстена, ассоциированной с локальным кольцом $\widehat{\mathcal{O}}_{x,X}$. Действительно, точность в данном случае означает лишь то, что $H^1(\text{Spec } \widehat{\mathcal{O}}_{x,X}, K_2(\text{Spec } \widehat{\mathcal{O}}_{x,X})) \simeq 0$. Но у таких локальных колец все высшие когомологии любых пучков нулевые в силу единственности производного функтора, так как функтор глобальных сечений точен на локальных кольцах.

Введем определение K_2 -аделей.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10 (K_2 -адели).

$$K'_2(\mathbb{A}_X) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ (\dots, f_{x,C}, \dots) \in \prod_{x \in C} K_2(K_{x,C}) \text{ при следующих условиях} \right\}.$$

- 1) $f_{x,C} \in K_2(\mathcal{O}_{x,C})$ для почти всех кривых $C \subset X$;
- 2) для всех кривых $C \subset X$, всех целых $l \geq 1$ и всех, исключая конечное множество (зависящее от l) не особых точек $x \in C$:

$$f_{x,C} \in K_2(\mathcal{O}_{x,C}, m_C^l) \cdot K_2(\widehat{\mathcal{O}}_{x,X}(\infty C)),$$

где m_C — максимальный идеал в кольце $\mathcal{O}_{x,C}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 16. Это определение фактически такое же, как и в [4], только “убраны” значки “top”.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 12. Пусть $f = \{f_{x,C}\}$ и $g = \{g_{x,C}\}$ принадлежат $\mathbb{A}_X^*$ -аделям. Тогда элемент (f, g) принадлежит $K'_2(\mathbb{A}_X)$, т.е. существует естественное для K_2 -функтора умножение:

$$\mathbb{A}_X^* \otimes \mathbb{A}_X^* \rightarrow K'_2(\mathbb{A}_X).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нетрудные проверки условий 1) и 2) из определения 10 мы здесь опускаем, заметим лишь, что при доказательстве существенно используется то, что в определении 10 присутствуют группы $K_2(\mathcal{O}_{x,C}, m_C^k)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 13. Пусть $(f, g) \in K'_2(\mathbb{A}_X)$. Тогда при отображении Тейта

$$(f, g) \mapsto \frac{df}{f} \wedge \frac{dg}{g} \in \prod_{x \in C} \tilde{\Omega}_{K_{x,C}/k}^2$$

для дифференциальной формы $\frac{df}{f} \wedge \frac{dg}{g}$ выполняется второе адельное условие из определения 8.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как

$$\frac{df}{f} \wedge \frac{dg}{g} = \frac{1}{f \cdot g} \left(\frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial g}{\partial t} - \frac{\partial f}{\partial t} \cdot \frac{\partial g}{\partial u} \right) du \wedge dt,$$

то, как сразу же проверяется,

- если $(f, g) \in K_2(\widehat{\mathcal{O}}_{x,X}(\infty C))$, то, очевидно, $\frac{df}{f} \wedge \frac{dg}{g}$ удовлетворяет требуемому условию;
- если $(f, g) \in K_2(\mathcal{O}_{x,C}, m_C^l)$ и $\frac{df}{f} \wedge \frac{dg}{g} = \omega_{x,C}$, то $\omega_{k-1}^{x,C}(u_{x,C})$ удовлетворяют требуемому условию (по поводу обозначений см. определение 8).

Предложение доказано.

ТЕОРЕМА 3. Пусть

$$\begin{aligned} K'_2(\mathbb{A}_1) &\stackrel{\text{def}}{=} \prod_{C \in X} K_2(K_C) \cap K'_2(\mathbb{A}_X), \\ K'_2(\mathbb{A}_2) &\stackrel{\text{def}}{=} \prod_{x \in X} K_2(K_x) \cap K'_2(\mathbb{A}_X), \\ K'_2(\mathbb{A}_X(0)) &\stackrel{\text{def}}{=} \prod_{x \in C} K_2(\mathcal{O}_{x,C}) \cap K'_2(\mathbb{A}_X), \\ K'_2(\mathcal{O}_1) &\stackrel{\text{def}}{=} \prod_{C \subset X} K_2(\mathcal{O}_C) \subset K'_2(\mathbb{A}_X), \\ K'_2(\mathcal{O}_2) &\stackrel{\text{def}}{=} \prod_{x \in X} K_2(\widehat{\mathcal{O}}_{x,X}) \subset K'_2(\mathbb{A}_X). \end{aligned}$$

Тогда i -е когомологии следующего комплекса

$$\begin{array}{ccccccc} K_2(K) \times K'_2(\mathcal{O}_1) \times K'_2(\mathcal{O}_2) & \longrightarrow & K'_2(\mathbb{A}_2) \times K'_2(\mathbb{A}_1) \times K'_2(\mathbb{A}_X(0)) & \longrightarrow & K'_2(\mathbb{A}_X) \\ (f_0, f_1, f_2) & \mapsto & (f_2 \cdot f_0^{-1}, f_0 \cdot f_1, f_1^{-1} \cdot f_2^{-1}) & & \\ & & (g_1, g_2, g_3) & \mapsto & g_1 \cdot g_2 \cdot g_3 \end{array}$$

совпадают с $H^i(X, \mathcal{K}_2(X))$, где $\mathcal{K}_2(X)$ – пучок в топологии Зарисского на X , ассоциированный с предпучком $\{U \mapsto K_2(U)\}$. При этом $H^2(X, \mathcal{K}_2(X))$ совпадает с $CH^2(X)$ – алгебраическими циклами коразмерности 2 по модулю рациональной эквивалентности.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В доказательстве будет использоваться резольвента Герстена для поверхности X :

$$K_2(K) \longrightarrow \bigoplus_{C \subset X} K_1(k(C)) \longrightarrow \bigoplus_{x \in X} K_0(k(x)).$$

i -е когомологии этого комплекса совпадают с $H^i(X, \mathcal{K}_2(X))$. Докажем, что этот комплекс квазиизоморфен комплексу в условии теоремы. Рассмотрим следующую диаграмму:

$$\begin{array}{ccccc} K_2(K) & \longrightarrow & \bigoplus_{C \subset X} K_1(k(C)) & \longrightarrow & \bigoplus_{x \in X} K_0(k(x)) \\ \uparrow \varphi_1 & & \uparrow \varphi_2 & & \uparrow \varphi_3 \\ K_2(K) \times K'_2(\mathcal{O}_1) \times K'_2(\mathcal{O}_2) & \longrightarrow & K'_2(\mathbb{A}_2) \times K'_2(\mathbb{A}_1) \times K'_2(\mathbb{A}_X(0)) & \longrightarrow & K'_2(\mathbb{A}_X) \\ \uparrow \phi_1 & & \uparrow \phi_2 & & \uparrow \phi_3 \\ K'_2(\mathcal{O}_1) \times K'_2(\mathcal{O}_2) & \longrightarrow & K'_2(\mathbb{A}_2) \times K'_2(\mathcal{O}_1) \times K'_2(\mathbb{A}_X(0)) & \longrightarrow & \Phi \end{array}$$

где $\Phi \stackrel{\text{def}}{=} \text{Ker } \varphi_3 \subset K'_2(\mathbb{A}_X)$ и отображения $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \phi_1, \phi_2, \phi_3$ задаются следующим образом:

$$\begin{aligned} \varphi_1 : K_2(K) \times K'_2(\mathcal{O}_1) \times K'_2(\mathcal{O}_2) &\longrightarrow K_2(K) \\ g_1 \times g_2 \times g_3 &\mapsto g_1, \\ \varphi_2 : K'_2(\mathbb{A}_2) \times K'_2(\mathbb{A}_1) \times K'_2(\mathbb{A}_X(0)) &\longrightarrow \bigoplus_{C \subset X} K_1(k(C)) \\ g_1 \times g_2 \times g_3 &\mapsto \bigoplus_{C \subset X} (g_2), \\ \varphi_3 : K'_2(\mathbb{A}_X) &\longrightarrow \bigoplus_{x \in X} K_0(k(x)) \\ (\alpha_{x,C}, \beta_{x,C}) &\mapsto \bigoplus_{x \in X} (\sum_{C \ni x} \nu_x(\alpha_{x,C}, \beta_{x,C})_C), \\ \phi_1 : K'_2(\mathcal{O}_1) \times K'_2(\mathcal{O}_2) &\longrightarrow K_2(K) \times K'_2(\mathcal{O}_1) \times K'_2(\mathcal{O}_2) \\ f_1 \times f_2 &\mapsto 1 \times f_1 \times f_2, \\ \phi_2 : K'_2(\mathbb{A}_2) \times K'_2(\mathcal{O}_1) \times K'_2(\mathbb{A}_X(0)) &\longrightarrow K'_2(\mathbb{A}_2) \times K'_2(\mathbb{A}_1) \times K'_2(\mathbb{A}_X(0)) \\ g_1 \times g_2 \times g_3 &\mapsto g_1 \times g_2 \times g_3, \\ \phi_3 : \Phi &\longrightarrow K'_2(\mathbb{A}_X) \\ \text{Ker } \varphi_3 &\hookrightarrow K'_2(\mathbb{A}_X). \end{aligned}$$

Очевидно, что все три вертикальных трехчленных комплекса точны в каждом своем члене. (Точность среднего вертикального комплекса следует из следствия 1 теоремы-определения.) Поэтому, если мы докажем точность самого нижнего горизонтального комплекса, то квазиизоморфизм двух верхних горизонтальных комплексов диаграммы будет установлен. Но точность в левом члене нижнего горизонтального комплекса очевидна, точность в члене Φ следует из (23) предложения 11. Точность в среднем члене следует из следствия 2 теоремы-определения. Теорема доказана.

Пусть $f: X \rightarrow S$ — проективный морфизм поверхности X на кривую S с условиями, как в п. 1.2. Определим отображение f_* из $K'_2(\mathbb{A}_X)$ в $\mathbb{A}_S^*$ следующим образом:

$$\begin{array}{ccc} K'_2(\mathbb{A}_X) & \xrightarrow{i} & \prod_{x \in C} K_2(K_{x,C}) \\ \downarrow f_* & & \downarrow \prod_{C \ni x} f_*(x)=s \quad f_*(\cdot, \cdot)_{x,C} \\ \mathbb{A}_S^* & \simeq & \mathbb{A}_S^*, \end{array}$$

где i – естественное вложение.

Возникает вопрос о том, как понимать бесконечное произведение у правой вертикальной стрелки этой диаграммы.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 14. *Бесконечное произведение из определения f_* , ограниченное на $K'_2(\mathbb{A}_X)$, сходится, а именно, для фиксированной точки $s \in S$*

$$\prod_{\substack{f(x)=s \\ C \ni x}} f_*(,)_{x,C} = \prod_{\substack{f(x)=s \\ C \ni x \\ C \neq F}} f_*(,)_{x,C} \times \prod_{f(x)=s} f_*(,)_{x,F}.$$

И в первом произведении правой части последнего равенства, ограниченном на $K'_2(\mathbb{A}_X)$, только конечное число сомножителей отлично от 1, второе бесконечное произведение из правой части, ограниченное на $K'_2(\mathbb{A}_X)$, сходится. (Напомним, что кривая F – слой отображения f над точкой s из S .)

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. То, что в указанном первом произведении только конечное число сомножителей отлично от 1, прямо следует из 1-го адельного условия в определении 10. То, что вдоль слоя F возникает произведение, которое сходится, доказывается так же, как следствие 3 из теоремы 1, при этом надо использовать предложение 13, а также формулы (10) и (11) из теоремы 1.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 15. *Отображение f_* корректно опускается до отображения из*

$$H^2(X, \mathcal{K}_2(X)) \cong \frac{K'_2(\mathbb{A}_X)}{K'_2(\mathbb{A}_2) \times K'_2(\mathbb{A}_1) \times K'_2(\mathbb{A}_X(0))}$$

в

$$H^1(S, \mathcal{K}_1(S)) \cong \frac{\mathbb{A}_S^*}{k(S)^* \times \prod_{s \in S} \widehat{\mathcal{O}}_s^*}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Получается при использовании следствия 3 и следствия 4 из теоремы 1, а также явной конструкции для отображения $f_*(,)_{x,F}$ (см. таблицу (13) из теоремы 2) для того, чтобы доказать, что $f_*(,)_{x,F}(K_2(\mathcal{O}_{x,F})) \subset \prod_{s \in S} \widehat{\mathcal{O}}_s^*$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 16. *Отображение $f_*: H^2(X, \mathcal{K}_2(X)) \rightarrow H^1(S, \mathcal{K}_1(S))$ является отображением Гизина из $CH^2(X)$ в $CH^1(S)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Напомним, что $CH^2(X)$ – набор точек с кратностями на поверхности по модулю рациональной эквивалентности, $CH^1(S)$ – набор точек с кратностями на кривой по модулю рациональной эквивалентности. Отображение Гизина: $CH^2(X) \rightarrow CH^1(S)$ переводит точку на поверхности X в ее образ на кривой S с кратностью, равной степени расширения поля вычетов точки над полем вычетов ее образа. Учитывая, что изоморфизм между группой $H^2(X, \mathcal{K}_2(X))$, представленной посредством K_2 -аделей, и группой $CH^2(X)$ можно указать явно, так же как и изоморфизм между группами $H^1(S, \mathcal{K}_1(S))$ (в ее идеальном варианте)

и $CH^1(S)$, мы все это можем представить в виде следующей диаграммы:

$$\begin{array}{ccc}
 H^2(X, \mathcal{K}_2(X)) \cong K'_2(\mathbb{A}_X) / (K'_2(\mathbb{A}_2) \times K'_2(\mathbb{A}_1) \times K'_2(\mathbb{A}_X(0))) & \xrightarrow{\bigoplus_{x \in X} \left(\sum_{C \ni x} \nu_x(\cdot, \cdot)_C \right)} & CH^2(X) \\
 f_* \downarrow & & \downarrow \text{морфизм Гизина} \\
 H^1(S, \mathcal{K}_1(S)) \cong \mathbb{A}_S^* / \left(k(S)^* \times \prod_{s \in S} \widehat{\theta}_s^* \right) & \xrightarrow{\bigoplus_{s \in S} \nu_s} & CH^1(S).
 \end{array}$$

Из явной конструкции отображения $f_*(\cdot, \cdot)_{x,C}$ (см. теорему 2) немедленно проверяется, что эта диаграмма коммутативна, поэтому f_* – отображение Гизина. Предложение доказано.

Список литературы

1. *Kato K.* Residue homomorphism in Milnor K -theory // Adv. Stud. Pure Math. 1983. V. 2. P. 153–172.
2. *Серр Ж.-П.* Алгебраические группы и поля классов. М.: Мир, 1968.
3. *Yekutieli A.* An explicit construction of the Grothendieck residue complex // Astérisque. 1992. V. 208.
4. *Parshin A. N., Fimmel T.* An introduction to the higher adelic theory // Preprint.
5. *Milnor J.* Algebraic K -theory and quadratic forms // Invent. Math. 1969/70. V. 9. P. 318–344.
6. *Боревич З. И., Шафаревич И. Р.* Теория чисел. М.: Наука, 1985.
7. *Милнор Дж.* Введение в алгебраическую K -теорию. М.: Мир, 1974.
8. *Quillen D.* Higher algebraic K -theory 1 // Lecture Notes in Math. Algebraic K -theory 1. V. 341, 1973. P. 85–147.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Поступила в редакцию
17.07.1996