Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. Ю. Панов, Об одном классе систем квазилинейных законов сохранения, *Матем. сб.*, 1997, том 188, номер 5, 85–112

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm231>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.209.158.208

26 апреля 2023 г., 10:20:35

УДК 517.95

Е. Ю. Панов

Об одном классе систем квазилинейных законов сохранения

На пространстве симметричных матриц второго порядка рассмотрены гиперболические системы законов сохранения, содержащие в правой части оператор функционального исчисления. Описаны энтропии таких систем, введено понятие обобщенного энтропийного решения (о.э.р.) соответствующей задачи Коши, исследованы свойства о.э.р., показано, что в общем случае о.э.р. неединственно. Путем усиления определяющего энтропийного условия выделен класс сильных о.э.р. Установлено, что в этом классе рассматриваемая задача Коши однозначно разрешима.

Библиография: 11 названий.

Введение

Пусть L – алгебра вещественных матриц второго порядка; $X \subset L$ – подпространство симметричных матриц, $\dim X = 3$. Определим на X скалярное умножение $(A, B) = \text{Tr}(AB)$, Tr – функционал следа. Скалярное умножение задает на X *евклидову* норму: $\|A\|^2 = (A, A) = \lambda_1^2 + \lambda_2^2$, λ_1, λ_2 – собственные числа матрицы A (в силу симметричности – вещественные).

Ниже будут использоваться следующие стандартные обозначения:

$[A, B] = AB - BA$ – коммутатор матриц $A, B \in L$; $\text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2\}$ или $\text{diag}\{\lambda\}$ – диагональная матрица с элементами λ_1, λ_2 на диагонали, $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$; E – единичная матрица.

Рассмотрим следующую систему квазилинейных законов сохранения:

$$U_t + (\tilde{f}(U))_x = 0, \quad (1)$$

$U = U(t, x) \in X$; $(t, x) \in \Pi = (0, +\infty) \times \mathbb{R}$; $\tilde{f}: X \mapsto X$, $U \mapsto \tilde{f}(U)$ – функция от матрицы U , определенная в соответствии с функциональным исчислением для симметричных матриц по некоторой скалярной вещественной функции $f(u) \in C^1(\mathbb{R})$.

Оператор функционального исчисления $\tilde{f}: X \mapsto X$ определен для любой функции $f(u)$ из алгебры $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ всех вещественнозначных функций на $\mathbb{R}$ (можно взять приводимое ниже свойство F1) в качестве определения оператора $\tilde{f}$ и хорошо известны следующие свойства (см., например, [1, с. 175–176]):

Работа выполнена при финансовой поддержке INTAS (грант № 94-2187) и Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 97-01-00671).

F1) если $U = Q\Lambda Q^{-1}$, где $\Lambda = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2\}$, Q – ортогональная матрица, то $\tilde{f}(U) = Q\tilde{f}(\Lambda)Q^{-1}$, $\tilde{f}(\Lambda) = \text{diag}\{f(\lambda_1), f(\lambda_2)\}$. Иначе,

$$\tilde{f}(U) = \sum_{k=1}^2 f(\lambda_k)P_k,$$

где $P_k = P_k(U)$ – ортопроектор на одномерное собственное подпространство, порожденное собственным вектором v_k матрицы U (мы будем часто отождествлять матрицу с соответствующим оператором на $\mathbb{R}^2$); здесь v_k , $k = 1, 2$, – ортонормированный собственный базис: $Uv_k = \lambda_k v_k$;

F2) при $U \in X$ соответствие $f \mapsto \tilde{f}(U)$ является гомоморфизмом алгебры $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ в L ;

F3) если матрицы $U \in X$, $V \in L$ коммутируют: $[U, V] = 0$, то и $[\tilde{f}(U), V] = 0$, в частности, всегда $[\tilde{f}(U), U] = 0$;

F4) $\|\tilde{f}(U)\| \leq \sqrt{2} \max_{\lambda \in \sigma(U)} |f(\lambda)|$, $\sigma(U) = \{\lambda_1, \lambda_2\}$ – спектр матрицы U .

ПРИМЕР 1. Рассмотрим систему (1) в простейшем случае $f(u) = u^2$.

Пространство X состоит из симметричных матриц $U = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, и система $U_t + (U^2)_x = 0$ может быть переписана в координатах a, b, c в форме

$$\begin{cases} a_t + (a^2 + c^2)_x = 0, \\ b_t + (b^2 + c^2)_x = 0, \\ c_t + (ac + bc)_x = 0. \end{cases}$$

§ 1. Гиперболичность системы (1)

Как показано в [1, с. 290–291], при сделанном предположении $f(u) \in C^1(\mathbb{R})$ отображение $\tilde{f}$ дифференцируемо на X . Пусть $A(U) = d\tilde{f}(U)$ – дифференциал отображения $\tilde{f}$. Тогда для $U \in X$ $A(U) \in L(X)$, где $L(X)$ – пространство линейных операторов на X , и система (1) переписывается в эквивалентной форме

$$U_t + A(U) \cdot U_x = 0. \quad (2)$$

Пусть λ_1, λ_2 – собственные числа матрицы $U \in X$, выписанные с учетом кратности; v_1, v_2 – соответствующий ортонормированный базис собственных векторов; $P_k = P_k(U)$ – ортопроектор на одномерное собственное подпространство, порожденное v_k , $k = 1, 2$. Тогда (см. [1, с. 290–291]) справедлива формула

$$A(U)dU = \sum_{k,l=1}^2 \mu_{kl} P_k dU P_l, \quad (3)$$

где

$$\mu_{kl} = \mu_{kl}(U) = \begin{cases} \frac{f(\lambda_k) - f(\lambda_l)}{\lambda_k - \lambda_l}, & \lambda_k \neq \lambda_l, \\ f'(\lambda_k), & \lambda_k = \lambda_l. \end{cases} \quad (4)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Соответствие $U \mapsto A(U)$ является непрерывным отображением из X в $L(X)$, т.е. оператор $\tilde{f} \in C^1$ -гладкий на X . Это очевидно, если $f(u)$ – многочлен с вещественными коэффициентами. В общем случае рассмотрим последовательность $p_k(u)$, $k \in \mathbb{N}$, многочленов такую, что при $k \rightarrow \infty$ $p_k(u) \rightarrow f(u)$, $p'_k(u) \rightarrow f'(u)$ равномерно на любом компакте. Из свойства F1) и формул (3), (4) тогда следует, что $\tilde{p}_k(U) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \tilde{f}(U)$ в X , $d\tilde{p}_k(U) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} A(U)$ в $L(X)$ равномерно на любом шаре $\|U\| \leq R$, $R > 0$. Так как дифференциалы $d\tilde{p}_k(U)$ непрерывны по U , то и предельное отображение $A(U)$ непрерывно по U , что и нужно было установить.

Если $[U, dU] = 0$, то из формулы (3) и свойства F1) нетрудно получить равенство (см. [1, с. 293, упр. 146])

$$A(U) dU = \sum_{k=1}^2 f'(\lambda_k) P_k dU = \tilde{f}'(U) dU. \quad (5)$$

Покажем, что при любом фиксированном $U \in X$ оператор $A(U) \in L(X)$ симметричен. Действительно, используя известное свойство следа $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$, $A, B \in L$, и формулу (3), получим, что для $V_1, V_2 \in X$

$$\begin{aligned} (A(U)V_1, V_2) &= \text{Tr}(A(U)V_1 \cdot V_2) = \sum_{k,l=1}^2 \mu_{kl} \text{Tr}(P_k V_1 P_l V_2) \\ &= \sum_{k,l=1}^2 \mu_{kl} \text{Tr}(V_1 P_l V_2 P_k) = \left(V_1, \sum_{k,l=1}^2 \mu_{kl} P_l V_2 P_k \right) = (V_1, A(U)V_2). \end{aligned}$$

Мы также учли симметричность величин μ_{kl} : $\mu_{kl} = \mu_{lk}$.

Таким образом, система (1)–(2) симметрична и, следовательно, является гиперболической в широком смысле, т.е. (см. [2, с. 23]) все собственные числа оператора $A(U) \in L(X)$ вещественны и им соответствует полный набор собственных векторов. Эти собственные числа и векторы можно указать явно, исходя из представления (3).

Пусть при $1 \leq k \leq l \leq 2$ $P_{kl} \in X$ – матрица, определенная на собственном базисе v_r , $r = 1, 2$, матрицы U соотношениями:

$$P_{kl}v_k = v_l, \quad P_{kl}v_l = v_k, \quad P_{kl}v_r = 0 \quad \text{при } r \neq k, l.$$

Указанное семейство матриц P_{11}, P_{22}, P_{12} является полным и ортогональным в X . Из (3) непосредственно следуют равенства:

$$A(U)P_{kl} = \mu_{kl}P_{kl}, \quad 1 \leq k \leq l \leq 2.$$

Итак, собственные числа $A(U)$ определяются формулой (4) и им соответствует приведенное выше семейство собственных векторов. Следует также отметить, что при $k = l$ матрица P_{kl} совпадает с проектором P_k .

Во избежание недоразумений отметим, что несимметричность системы примера 1 в координатах (a, b, c) не противоречит утверждению о симметричности общей системы (1)–(2). Дело в том, что координаты (a, b, c) соответствуют разложению матрицы U по ортогональному базису $U_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $U_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $U_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, который не нормирован: $\|U_1\| = \|U_2\| = 1$, $\|U_3\| = \sqrt{2}$. Рассматриваемая система становится симметричной после нормирования базиса $U_3 \mapsto U_3/\sqrt{2}$, что соответствует замене $c \mapsto \sqrt{2}c$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Если $f(u)$ не является линейной функцией ни на каком невырожденном интервале, то собственные числа $\mu_{kl} = \mu_{kl}(U)$ попарно различны на некотором открытом плотном множестве матриц $U \in X$, которое, таким образом, является областью строгой гиперболичности (см. [2, с. 24–25]) системы (1)–(2).

ЗАМЕЧАНИЕ 3. В случае $f(u) \in C^2(\mathbb{R})$ характеристики системы (1)–(2), соответствующие собственному значению μ_{12} , являются линейно вырожденными, т.е. $(\nabla \mu_{12}(U), P_{12}(U)) \equiv 0$.

Действительно, пусть λ_1, λ_2 – собственные числа матрицы U . Тогда

$$\mu_{12}(U + tP_{kl}) = \mu_{12}(t) = \frac{f(\lambda_1(t)) - f(\lambda_2(t))}{\lambda_1(t) - \lambda_2(t)},$$

где $\lambda_1(t), \lambda_2(t)$ – собственные числа матрицы $\begin{pmatrix} \lambda_1 & t \\ t & \lambda_2 \end{pmatrix}$:

$$\lambda_1(t) = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} + \sqrt{\left(\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2}\right)^2 + t^2}, \quad \lambda_2(t) = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} - \sqrt{\left(\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2}\right)^2 + t^2}.$$

Непосредственные вычисления показывают, что $\lambda'_1(0) = \lambda'_2(0) = 0$ при $\lambda_1 \neq \lambda_2$, откуда легко следует равенство $\mu'_{12}(0) = 0$; если же $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, то $\mu_{12}(t) = \frac{f(\lambda + t) - f(\lambda - t)}{2t}$ и $\mu'_{12}(0) = 0$ при $f(u) \in C^2(\mathbb{R})$. Итак, $(\nabla \mu_{12}(U), P_{12}(U)) = \mu'_{12}(0) = 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. В случае, когда функция $f(u)$ допускает аналитическое продолжение до целой функции на $\mathbb{C}$, функциональное исчисление $U \mapsto \tilde{f}(U)$ корректно определено для всех $U \in L$ (см. [1, с. 115]) и можно определить системы вида (1) на произвольной вещественной подалгебре $X \subset L$. Однако, в этой общей ситуации может нарушаться свойство гиперболичности.

Действительно, рассмотрим систему (при $f(u) = u^2$)

$$U_t + (U^2)_x = 0, \tag{6}$$

$U = U(t, x) \in X$, где X – алгебра матриц $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, $a, b \in \mathbb{R}$, изоморфная $\mathbb{C}$ в силу изоморфизма $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \mapsto a + bi$. Система (6) принимает в координатах a, b вид:

$$\begin{cases} a_t + (a^2 - b^2)_x = 0, \\ b_t + (2ab)_x = 0, \end{cases} \quad \text{или} \quad \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0.$$

Так как собственные числа $a \pm bi$ матрицы $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ не лежат в $\mathbb{R}$ при $b \neq 0$, то система (6) – не гиперболическая. Тем более не является гиперболической система (6), определенная на полной матричной алгебре L .

Нам будут полезны некоторые свойства оператора $A(U)$. Пусть $X_U^0 = \{V \in X \mid [U, V] = 0\}$, $X_U^1 = (X_U^0)^\perp$ – ортогональное дополнение к X_U^0 .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. 1) *Подпространства X_U^0 , X_U^1 являются инвариантными для $A(U)$.*

2) *Если $V \in X_U^1$, то $\text{Tr}(V) = 0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Инвариантность подпространства X_U^0 следует из равенства (5) и свойства F3): при $V \in X_U^0$ $[V, U] = 0$ и

$$[A(U)V, U] = [\tilde{f}'(U)V, U] = 0.$$

Поскольку оператор $A(U)$ симметричен на X , то ортогональное дополнение X_U^1 инвариантного подпространства X_U^0 также инвариантно.

2) Единичная матрица $E \in X_U^0$. Поэтому $\forall V \in X_U^1$ $\text{Tr}(V) = (V, E) = 0$. Предложение доказано.

§ 2. Энтропии

Напомним (см. [3], [4]), что энтропией системы (1)–(2) называется функция $p(U) \in C^1(X)$, для которой существует функция $q(U) \in C^1(X)$, называемая потоком энтропии, такая, что для всех $U \in X$

$$\nabla q(U) = A(U)\nabla p(U). \quad (7)$$

Здесь градиент $\nabla p(U) \in X$, как обычно, определяется равенством $(\nabla p(U), H) = dp(U)H$, $H \in X$. Ясно, что (7) определяет поток $q(U)$ с точностью до аддитивной константы.

Умножая систему (2) скалярно на $\nabla p(U)$, получим, учитывая симметричность оператора $A(U)$ и равенство (7), что

$$\begin{aligned} 0 &= (\nabla p(U), U_t) + (\nabla p(U), A(U)U_x) = (\nabla p(U), U_t) + (A(U)\nabla p(U), U_x) \\ &= (\nabla p(U), U_t) + (\nabla q(U), U_x) = (p(U))_t + (q(U))_x. \end{aligned}$$

В частности, если $U = U(t, x) - C^1$ -гладкое решение системы (1), то

$$\frac{\partial}{\partial t}p(U) + \frac{\partial}{\partial x}q(U) = 0 \quad (8)$$

для любой энтропии $p(U)$ и соответствующего потока $q(U)$.

В силу консервативности системы (1) любая линейная функция $p(U) = (C, U)$, $C \in X$, является энтропией, и ей соответствует поток $q(U) = (C, \tilde{f}(U))$.

Для построения теории обобщенных решений системы (1) полезно иметь нелинейные энтропии. Равенство (7) приводит к условию замкнутости дифференциальной формы $(\nabla p(U), A(U)dU)$, которое сводится, в общем случае, к переопределенной системе дифференциальных уравнений. Поэтому для общих систем квазилинейных законов сохранения нелинейные энтропии могут вообще отсутствовать. В этом смысле системы вида (1) являются исключением: для них всегда существует достаточно “богатый” набор нелинейных энтропий. Точнее, верна

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\varphi(u) \in C^1(\mathbb{R})$. Тогда функция $p(U) = \text{Tr } \tilde{\varphi}(U)$ является энтропией системы (1), и ей соответствует поток $q(U) = \text{Tr } \tilde{\psi}(U)$, где скалярная функция $\psi(u) \in C^1(\mathbb{R})$ с точностью до аддитивной константы определена равенством $\psi'(u) = \varphi'(u)f'(u)$ (т.е. $\psi(u)$ является потоком, соответствующим энтропии $\varphi(u)$ для скалярного уравнения $u_t + f(u)_x = 0$).

При этом, если $\varphi(u)$ – выпуклая (строго выпуклая) функция, то и энтропия $p(U)$ является выпуклой (строго выпуклой) на X .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим прежде всего, что, как следует из результатов § 1, отображения $\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}$ C^1 -гладкие на X , откуда вытекает гладкость функций $p(U), q(U)$. В соответствии с (7) мы должны доказать, что для $U, V \in X$

$$(\nabla q(U), V) = (\nabla p(U), A(U)V),$$

что эквивалентно равенству

$$\text{Tr}(d\tilde{\psi}(U)V) = \text{Tr}(d\tilde{\varphi}(U)A(U)V). \quad (9)$$

Если $V \in X_U^0$, то из (5) с учетом предложения 1 вытекают равенства

$$\begin{aligned} A(U)V &= \tilde{f}'(U)V \in X_U^0, \\ d\tilde{\psi}(U)V &= \tilde{\psi}'(U)V = \tilde{\varphi}'(U) \cdot \tilde{f}'(U)V = d\tilde{\varphi}(U)A(U)V \end{aligned}$$

(мы используем свойство F2) и условие теоремы: $\psi'(u) = \varphi'(u)f'(u)$), и в этом случае равенство (9) выполнено.

Если $V \in X_U^1$, то по предложению 1

$$A(U)V \in X_U^1, \quad d\tilde{\psi}(U)V \in X_U^1, \quad d\tilde{\varphi}(U)A(U)V \in X_U^1,$$

и в силу второго утверждения из предложения 1 обе части равенства (9) нулевые.

Так как $X = X_U^0 \oplus X_U^1$, то (9) верно для всех $V \in X$ и $p(U)$ – энтропия системы (1) с потоком $q(U)$.

Переходя к доказательству последнего утверждения теоремы, предположим, что $\varphi(u)$ – выпуклая функция. Покажем, что выполнено равенство:

$$p(U) = \sup_{r_1, r_2} \left\{ \sum_{k=1}^2 \varphi((Ur_k, r_k)) \mid r_1, r_2 - \text{ортонормированный базис в } \mathbb{R}^2 \right\}$$

(здесь $(\cdot, \cdot)$ – скалярное умножение на $\mathbb{R}^2$).

Пусть $s(U)$ обозначает правую часть этого равенства. Если $r_k = v_k$, $k = 1, 2$, – ортонормированный базис, состоящий из собственных векторов матрицы U , то $(Ur_k, r_k) = \lambda_k$, λ_k – соответствующее вектору v_k собственное число матрицы U , и

$$\sum_{k=1}^2 \varphi((Ur_k, r_k)) = \sum_{k=1}^2 \varphi(\lambda_k) = \text{Tr } \tilde{\varphi}(U) = p(U),$$

откуда следует, что $p(U) \leq s(U)$.

Для доказательства обратного неравенства возьмем произвольный ортонормированный базис r_k , $k = 1, 2$. Разлагая векторы r_k по собственному базису v_l , $l = 1, 2$, получим равенства

$$r_k = \sum_{l=1}^2 q_{kl} v_l, \quad k = 1, 2,$$

где $\{q_{kl} = (r_k, v_l)\}_{k,l=1}^2$ – ортогональная матрица. Тогда

$$(Ur_k, r_k) = \sum_{l=1}^2 |q_{kl}|^2 \lambda_l, \quad \sum_{l=1}^2 |q_{kl}|^2 = (r_k, r_k) = 1,$$

и вследствие выпуклости $\varphi(u)$ имеем

$$\varphi((Ur_k, r_k)) \leq \sum_{l=1}^2 |q_{kl}|^2 \varphi(\lambda_l),$$

откуда

$$\sum_{k=1}^2 \varphi((Ur_k, r_k)) \leq \sum_{l=1}^2 \left(\sum_{k=1}^2 |q_{kl}|^2 \right) \varphi(\lambda_l) = \sum_{l=1}^2 \varphi(\lambda_l) = p(U) \quad (10)$$

(так как $\sum_{k=1}^2 |q_{kl}|^2 = (v_l, v_l) = 1$).

Из произвольности базиса r_1, r_2 тогда следует обратное неравенство $s(U) \leq p(U)$. Итак, $p(U) = s(U)$. В частности, функция $p(U)$ выпукла как наименьшая верхняя грань множества выпуклых функций $U \mapsto \sum_{k=1}^2 \varphi((Ur_k, r_k))$.

Осталось доказать утверждение, касающееся строгой выпуклости. Итак, пусть $\varphi(u)$ – строго выпуклая функция. Как показано выше, соответствующая энтропия $p(U)$ выпукла на X . Предположим, что для $U_1, U_2 \in X$ выполнено равенство

$$p\left(\frac{U_1 + U_2}{2}\right) = \frac{p(U_1) + p(U_2)}{2}, \quad (11)$$

и пусть v_1, v_2 – ортонормированный собственный базис матрицы $(U_1 + U_2)/2$. Рассмотрим функцию

$$h(U) = \sum_{k=1}^2 \varphi((Uv_k, v_k)).$$

Тогда $h(U)$ – выпуклая функция, $h(U) \leq s(U) = P(U)$ и, как следует из доказательства неравенства $P(U) \leq s(U)$ выше, $h((U_1 + U_2)/2) = p((U_1 + U_2)/2)$. Далее, $h(U_1) \leq P(U_1)$, $h(U_2) \leq P(U_2)$ и, по выпуклости, $h((U_1 + U_2)/2) \leq (h(U_1) + h(U_2))/2$. Отсюда и из (11) следуют равенства

$$h(U_1) = P(U_1), \quad h(U_2) = P(U_2), \quad (12)$$

$$h\left(\frac{U_1 + U_2}{2}\right) = \frac{h(U_1) + h(U_2)}{2}. \quad (13)$$

Поскольку $\varphi(u)$ – строго выпуклая функция, то, как легко проверить, равенство в (10) (при $r_k = v_k$) возможно лишь в случае, когда v_1, v_2 – собственный базис матрицы U . Поэтому из (12) следует, что v_1, v_2 – общий собственный базис матриц U_1 и U_2 . Пусть

$$U_1 v_k = \lambda_{1k} v_k, \quad U_2 v_k = \lambda_{2k} v_k,$$

где $\lambda_{1k}, \lambda_{2k}, k = 1, 2$, – собственные числа матриц U_1, U_2 , соответственно. Тогда

$$\begin{aligned} h(U_1) &= \sum_{k=1}^2 \varphi(\lambda_{1k}), & h(U_2) &= \sum_{k=1}^2 \varphi(\lambda_{2k}), \\ h\left(\frac{U_1 + U_2}{2}\right) &= \sum_{k=1}^2 \varphi\left(\frac{\lambda_{1k} + \lambda_{2k}}{2}\right). \end{aligned}$$

Отсюда из строгой выпуклости функции $\varphi(u)$ и из (13) следует, что $\lambda_{1k} = \lambda_{2k}$ для $k = 1, 2$, откуда $U_1 = U_2$.

Итак, равенство (11) влечет равенство матриц $U_1 = U_2$, что по определению и означает строгую выпуклость функции $p(U)$. Теорема полностью доказана.

В дополнение к теореме 1 заметим, что, обратно, из выпуклости (строгой выпуклости) энтропии $p(U) = \text{Tr } \tilde{\varphi}(U)$ следует выпуклость (строгая выпуклость) порождающей функции $\varphi(u)$. Также отметим, что при $\varphi(u) = u^2$ соответствующая энтропия $p(U) = \text{Tr}(U^2) = \|U\|^2$.

Оказывается, в достаточно общей ситуации множество C^2 -гладких энтропий системы (1)–(2) с точностью до линейного слагаемого исчерпывается энтропиями, указанными в теореме 1. А именно, справедлива

ТЕОРЕМА 2. *Предположим, что функция $f(u)$ не линейна ни на каком невырожденном интервале. Пусть $p(U) \in C^2(X)$ – энтропия системы (1)–(2). Тогда существует функция $\varphi(u) \in C^2(\mathbb{R})$ такая, что с точностью до линейного слагаемого $p(U) = \text{Tr } \tilde{\varphi}(U)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $q(U)$ – поток, соответствующий энтропии $p(U)$. Вычитая из $p(U)$ линейную функцию $p(0) + (\nabla p(0), U)$, а из $q(U)$ – соответствующий поток $(\nabla p(0), \tilde{f}(U))$, можем считать, что

$$p(0) = 0, \quad \nabla p(0) = 0. \quad (14)$$

Кроме того, заменив $f(u)$ на $f(u) - f(0)$ (что приводит к вычитанию от $\tilde{f}(U)$ постоянной матрицы $f(0)E$ и не меняет систему), будем предполагать, что $f(0) = 0$.

Пусть $T(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ — ортогональная матрица (оператор поворота на угол θ). Положим при $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned}\bar{p}(\lambda, \theta) &= \bar{p}(\lambda_1, \lambda_2, \theta) = p(T(\theta)\Lambda T(-\theta)), \\ \bar{q}(\lambda, \theta) &= \bar{q}(\lambda_1, \lambda_2, \theta) = q(T(\theta)\Lambda T(-\theta)),\end{aligned}$$

где $\Lambda = \text{diag}\{\lambda\}$. Пусть v_k , $k = 1, 2$, — ортонормированный собственный базис матрицы $U = T(\theta)\Lambda T(-\theta)$ такой, что $Uv_k = \lambda_k v_k$; P_k — ортопроектор на одномерное подпространство, порожденное вектором v_k . Нетрудно видеть, что $P_k = T(\theta) \cdot \text{diag}\{e_k\} \cdot T(-\theta)$, где e_1, e_2 — стандартный базис в $\mathbb{R}^2$. Отсюда легко вытекают равенства

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial \lambda_k} = (\nabla p(U), P_k), \quad \frac{\partial \bar{q}}{\partial \lambda_k} = (\nabla q(U), P_k), \quad k = 1, 2,$$

и из (7)

$$\frac{\partial \bar{q}}{\partial \lambda_k} = (\nabla p(U), A(U)P_k) = f'(\lambda_k)(\nabla p(U), P_k) = f'(\lambda_k) \frac{\partial \bar{p}}{\partial \lambda_k}. \quad (15)$$

Мы использовали тот факт, что $P_k \in X$ является собственным вектором оператора $A(U)$, соответствующим собственному числу $\mu_{kk} = f'(\lambda_k)$ (см. §1).

Из (15) следует, что при любом фиксированном θ дифференциальная форма

$$\omega = \sum_{k=1}^2 f'(\lambda_k) \frac{\partial \bar{p}}{\partial \lambda_k} d\lambda_k$$

замкнута на $\mathbb{R}^2$: $d\omega = 0$, т.е.

$$\frac{\partial}{\partial \lambda_2} \left(f'(\lambda_1) \frac{\partial \bar{p}}{\partial \lambda_1} \right) = \frac{\partial}{\partial \lambda_1} \left(f'(\lambda_2) \frac{\partial \bar{p}}{\partial \lambda_2} \right)$$

и

$$(f'(\lambda_1) - f'(\lambda_2)) \frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial \lambda_1 \partial \lambda_2}(\lambda, \theta) = 0. \quad (16)$$

Из условия нелинейности функции $f(u)$ на невырожденных интервалах следует, что $f'(\lambda_1) \neq f'(\lambda_2)$ на открытом плотном множестве значений $\lambda \in \mathbb{R}^2$; тогда из (16) с учетом непрерывности $\frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial \lambda_1 \partial \lambda_2}$ (из условия $p(U) \in C^2(X)$) очевидно следует, что $\bar{p}(\lambda, \theta) \in C^2(\mathbb{R}^3)$ вытекает тождество

$$\frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial \lambda_1 \partial \lambda_2}(\lambda, \theta) = 0.$$

Это тождество означает, что $\bar{p}(\lambda, \theta)$ есть сумма:

$$\bar{p}(\lambda, \theta) = \bar{p}_1(\lambda_1, \theta) + \bar{p}_2(\lambda_2, \theta), \quad (17)$$

где $\bar{p}_k(u, \theta) \in C^2(\mathbb{R}^2)$ и можно считать, что $\bar{p}_k(0, \theta) = 0$ (так как в соответствии с (14) после замены $\bar{p}_k(u, \theta) \mapsto \bar{p}_k(u, \theta) - \bar{p}_k(0, \theta)$ равенство (17) останется верным).

Далее, непосредственно проверяется, что

$$\frac{\partial U}{\partial \theta} = (\lambda_1 - \lambda_2)P_{12},$$

и, так как матрица $P_{12} \in X$ является собственным вектором оператора $A(U)$, соответствующим собственному числу

$$\mu_{12} = \begin{cases} \frac{f(\lambda_1) - f(\lambda_2)}{\lambda_1 - \lambda_2}, & \lambda_1 \neq \lambda_2, \\ f'(\lambda_1), & \lambda_1 = \lambda_2, \end{cases}$$

получаем соотношение

$$\frac{\partial \bar{q}}{\partial \theta} = \left(\nabla q(U), \frac{\partial U}{\partial \theta} \right) = \left(\nabla p(U), A(U) \frac{\partial U}{\partial \theta} \right) = \mu_{12} \left(\nabla p(U), \frac{\partial U}{\partial \theta} \right) = \mu_{12} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \theta}. \quad (18)$$

Из (17), (18) следует, что при $\sigma \neq 0$

$$\frac{\partial \bar{q}(\sigma, 0, \theta)}{\partial \theta} = \frac{f(\sigma)}{\sigma} \frac{\partial \bar{p}_1(\sigma, \theta)}{\partial \theta} \quad (19)$$

(с учетом условия $f(0) = 0$ имеем $\mu_{12} = f(\sigma)/\sigma$). Далее, из (15) и (17)

$$\frac{\partial \bar{q}}{\partial \sigma}(\sigma, 0, \theta) = f'(\sigma) \frac{\partial \bar{p}_1}{\partial \sigma}(\sigma, \theta). \quad (20)$$

Из (19), (20) вытекает соотношение замкнутости

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial \theta} \left(f'(\sigma) \frac{\partial \bar{p}_1}{\partial \sigma} \right) - \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\frac{f(\sigma)}{\sigma} \frac{\partial \bar{p}_1}{\partial \theta} \right) \\ &= \left(f'(\sigma) - \frac{f(\sigma)}{\sigma} \right) \frac{\partial^2 \bar{p}_1}{\partial \theta \partial \sigma} - \left(\frac{f(\sigma)}{\sigma} \right)' \frac{\partial \bar{p}_1}{\partial \theta} \\ &= \left(f'(\sigma) - \frac{f(\sigma)}{\sigma} \right) \left(\frac{\partial}{\partial \sigma} \frac{\partial \bar{p}_1}{\partial \theta} - \frac{1}{\sigma} \frac{\partial \bar{p}_1}{\partial \theta} \right). \end{aligned} \quad (21)$$

Ввиду условия нелинейности функции f на невырожденных интервалах

$$f'(\sigma) - \frac{f(\sigma)}{\sigma} \neq 0$$

на всюду плотном множестве значений σ и из (21) с учетом непрерывности функции $\frac{\partial}{\partial \sigma} \frac{\partial \bar{p}_1}{\partial \theta} - \frac{1}{\sigma} \frac{\partial \bar{p}_1}{\partial \theta}$ вытекает равенство

$$\frac{\partial}{\partial \sigma} \frac{\partial \bar{p}_1}{\partial \theta} = \frac{1}{\sigma} \frac{\partial \bar{p}_1}{\partial \theta},$$

т.е. при фиксированном $\theta \in \mathbb{R}$ функция $g(\sigma) = \frac{\partial \bar{p}_1}{\partial \theta}$ удовлетворяет при $\sigma \neq 0$ дифференциальному уравнению $g'(\sigma) = g(\sigma)/\sigma$, откуда $g(\sigma) = c\sigma$, $c = c(\theta) = g'(0)$. Имеем

$$c = \frac{\partial^2 \bar{p}_1}{\partial \sigma \partial \theta}(0, \theta) = \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial \bar{p}_1}{\partial \sigma}(0, \theta) \right) = 0,$$

так как

$$\frac{\partial \bar{p}_1}{\partial \sigma}(0, \theta) = (\nabla p(0), P_1) = 0$$

по условию (14). Таким образом, $g(\sigma) = \frac{\partial \bar{p}_1}{\partial \theta} = 0$ для любого $\theta \in \mathbb{R}$, т.е. функция $\bar{p}_1(\sigma, \theta)$ не зависит от θ . Аналогично доказывается, что функция $\bar{p}_2(\sigma, \theta)$ также не зависит от θ . Итак,

$$p(U) = \bar{p}(\lambda_1, \lambda_2, \theta) = \varphi_1(\lambda_1) + \varphi_2(\lambda_2), \quad (22)$$

где $\varphi_k(\sigma) = \bar{p}_k(\sigma, 0)$, $k = 1, 2$. Покажем, что $\varphi_1 \equiv \varphi_2$. Матрицы $\Lambda_1 = \text{diag}\{\lambda, 0\}$ и $\Lambda_2 = \text{diag}\{0, \lambda\}$ подобны: $\Lambda_2 = Q \Lambda_1 Q^{-1}$, $Q = T(\pi/2)$ и из (22) при $\theta = 0, \pi/2$ $p(\Lambda_2) = \varphi_2(\lambda) = \varphi_1(\lambda)$. Тогда из (22) при $\varphi(\lambda) = \varphi_1(\lambda) \in C^2(\mathbb{R})$

$$p(U) = \varphi(\lambda_1) + \varphi(\lambda_2) = \text{Tr } \tilde{\varphi}(U)$$

для множества матриц вида $U = T(\theta) \text{diag}\{\lambda\} T(-\theta)$, очевидно, совпадающего со всем пространством X . Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. При $f(u) \in C^2(\mathbb{R})$ утверждение теоремы 2 верно для энтропий $p(U) \in C^1(X)$. Нужно лишь в доказательстве теоремы 2 соотношения замкнутости (16), (21) понимать в смысле распределений.

В случае, когда функция f нелинейна на невырожденных интервалах, теоремы 1, 2 позволяют дать полное решение переопределенной системы дифференциальных уравнений, получающейся из условия замкнутости дифференциальной формы $\omega = (\nabla p(U), A(U)dU)$. При $f(u) = u^2$ форма ω выписывается в координатах (a, b, c) (см. пример 1) в виде

$$\omega = (2ap_a + cp_c)da + (2bp_b + cp_c)db + (2c(p_a + p_b) + (a + b)p_c)dc$$

(здесь $p = p(U) = p(a, b, c)$), и условие $d\omega = 0$ эквивалентно системе

$$\begin{aligned} (2ap_a + cp_c)_b &= (2bp_b + cp_c)_a, \\ (2ap_a + cp_c)_c &= (2c(p_a + p_b) + (a + b)p_c)_a, \\ (2bp_b + cp_c)_c &= (2c(p_a + p_b) + (a + b)p_c)_b, \end{aligned}$$

которая после элементарных преобразований переписывается в виде

$$\begin{cases} 2(a-b)p_{ab} + c(p_{bc} - p_{ac}) = 0, \\ (a-b)p_{ac} - 2c(p_{aa} + p_{ab}) + cp_{cc} = 0, \\ (b-a)p_{bc} - 2c(p_{ab} + p_{bb}) + cp_{cc} = 0. \end{cases} \quad (\text{E})$$

В соответствии с теоремами 1, 2 приведем общее решение этой системы:

$$p(a, b, c) = \text{Tr } \tilde{\varphi}(U) + k_1 a + k_2 b + k_3 c + k_4, \\ U = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}, \quad \varphi(u) \in C^2(\mathbb{R}), \quad k_i = \text{const}, \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

Так как $\text{Tr } \tilde{\varphi}(U) = \varphi(\lambda_1) + \varphi(\lambda_2)$, где

$$\lambda_{1,2} = \frac{a+b}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{a-b}{2}\right)^2 + c^2}$$

— собственные числа матрицы U , то общее решение системы (E) можно выписать явно в координатах (a, b, c) :

$$p(a, b, c) = \varphi\left(\frac{a+b}{2} - \sqrt{\left(\frac{a-b}{2}\right)^2 + c^2}\right) \\ + \varphi\left(\frac{a+b}{2} + \sqrt{\left(\frac{a-b}{2}\right)^2 + c^2}\right) + k_1 a + k_2 b + k_3 c + k_4.$$

§ 3. Постановка задачи Коши. Понятие обобщенного энтропийного решения

Пусть $U_0(x)$ — ограниченная измеримая функция на $\mathbb{R}$ со значениями в X : $U_0 \in L^\infty(\mathbb{R}, X)$. Рассмотрим задачу Коши для системы (1) с начальным условием

$$U(0, x) = U_0(x). \quad (23)$$

Хорошо известно (см., например, [2, гл. 1]), что в случае достаточно гладких начальных данных в некоторой окрестности прямой $t = 0$ существует единственное C^1 -гладкое (классическое) решение задачи Коши для системы квазилинейных законов сохранения с достаточно гладкими функциями потока. Однако, с ростом t , как правило, появляются разрывы решения (что связано с пересечением характеристик) и глобального классического решения в общем случае не существует. Поэтому для построения нелокальной теории задачи Коши вводятся в рассмотрение обобщенные решения. Класс обобщенных решений, связанный с пониманием системы в смысле теории распределений, оказывается слишком широким — в этом классе нет единственности даже для скалярного случая (см., например, [3]). Необходимы дополнительные условия. Хорошо известно определение обобщенного энтропийного решения (коротко — о.э.р.), опирающееся на энтропийные неравенства

(см. [3], [4]). Эти неравенства тесно связаны с идеей метода “исчезающей вязкости” (см. [3], [4]) и для систем газовой динамики соответствуют имеющему физический смысл условию возрастания энтропии на ударных волнах. Для скалярного уравнения в общем случае многих пространственных переменных С. Н. Кружковым [3] доказана однозначная разрешимость задачи Коши в классе о.э.р. То обстоятельство, что система (1) в определенном смысле аналогична скалярному уравнению $u_t + (f(u))_x = 0$ и, в частности, обладает “столь же широким” набором энтропий, позволяет надеяться на построение удовлетворительной (со свойством однозначной разрешимости) теории обобщенных решений задачи (1), (23), что и будет сделано в § 4 с привлечением дополнительного условия “неэнтропийной природы”. Ниже будет показано, что в классе о.э.р. построение такой теории невозможно: о.э.р. задачи (1), (23) в общем случае неединственно.

Приведем определение о.э.р. применительно к задаче (1), (23).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Ограниченная измеримая X -значная функция $U = U(t, x) \in L^\infty(\Pi, X)$ называется *о.э.р. задачи Коши* (1), (23), если

- а) для любой выпуклой энтропии $p(U) \in C^1(X)$ и соответствующего потока $q(U)$

$$p(U)_t + q(U)_x \leq 0 \quad (24)$$

в смысле распределений на Π (в $\mathcal{D}'(\Pi)$);

- б)

$$\operatorname{ess\,lim}_{t \rightarrow 0+} U(t, \cdot) = U_0 \quad \text{в } L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}, X), \quad (25)$$

т.е. существует множество нулевой меры Лебега $\mathcal{E} \subset (0, +\infty)$ такое, что при $t \notin \mathcal{E}$ $U(t, \cdot) \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}, X)$ и при $t \rightarrow 0+$, $t \notin \mathcal{E}$, $\|U(t, \cdot) - U_0\| \rightarrow 0$ в $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$.

Энтропийное неравенство (24) означает, что для любой неотрицательной пробной функции $h(t, x) \in C_0^\infty(\Pi)$

$$\int_{\Pi} [p(U(t, x))h_t(t, x) + q(U(t, x))h_x(t, x)] dt dx \geq 0.$$

Заметим, что для классического решения $U(t, x) \in C^1(\Pi, X)$ условие (24) выполнено со знаком равенства (см. (8)).

Подставляя в (24) линейные энтропии $p(U) = \pm(C, U)$, $C \in X$, получим, что о.э.р. $U(t, x)$ удовлетворяет системе (1) в смысле распределений, т.е. действительно является обобщенным решением.

Из теоремы 1, условия (24) и линейности функционала следа непосредственно вытекает следующий результат.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть $U(t, x)$ — о.э.р. задачи (1), (23). Тогда для любой выпуклой функции $\varphi(u) \in C^1(\mathbb{R})$

$$\operatorname{Tr}((\tilde{\varphi}(U))_t + (\tilde{\psi}(U))_x) \leq 0 \quad (26)$$

в смысле распределений на Π , где функция $\psi(u) \in C^1(\mathbb{R})$ определена с точностью до аддитивной константы равенством $\psi'(u) = \varphi'(u) \cdot f'(u)$.

Неравенство (26) означает, что $\forall h(t, x) \in C_0^\infty(\Pi)$, $h(t, x) \geq 0$,

$$\text{Tr} \left(\int_{\Pi} [\tilde{\varphi}(U(t, x))h_t(t, x) + \tilde{\psi}(U(t, x))h_x(t, x)] dt dx \right) \geq 0.$$

Аппроксимируя произвольную выпуклую функцию $\varphi(u)$ C^1 -гладкими выпуклыми функциями, нетрудно убедиться, что (26) выполнено для всех выпуклых $\varphi(u)$, при этом функция $\psi(u)$ с точностью до аддитивной константы определена равенством $\psi(u) = \int_{u_0}^u \varphi'(\sigma) \cdot f'(\sigma) d\sigma$, $u_0 \in \mathbb{R}$. Последний интеграл корректно определен, так как ввиду выпуклости $\varphi(u)$ производная $\varphi'(\sigma)$ существует всюду, за исключением не более чем счетного множества точек.

В частности, условие (26) верно при

$$\varphi_k(u) = |u - k|, \quad \psi_k(u) = \int_k^u \varphi'_k(\sigma) \cdot f'(\sigma) d\sigma = (f(u) - f(k)) \text{sign}(u - k), \quad k \in \mathbb{R}$$

$(\varphi_k(u), \psi_k(u))$ – энтропийная пара Кружкова (см. [3]) для скалярного уравнения $u_t + f(u)_x = 0$.

Произвольная выпуклая функция $\varphi(u)$ представима на любом отрезке $I \subset \mathbb{R}$ с точностью до линейного слагаемого в виде $\varphi(u) = \int_I |u - k| d\mu(k)$, где $\mu(k) = \varphi''(k)/2$ – неотрицательная локально конечная борелевская мера, и, как нетрудно видеть, из выполнения условия (26) для функций $\varphi(u) = \varphi_k(u)$, $\psi(u) = \psi_k(u)$ следует его справедливость и в общем случае.

Мы показали, что условие (26) эквивалентно условию

$$\forall k \in \mathbb{R} \quad \text{Tr}((\tilde{\varphi}_k(U))_t + (\tilde{\psi}_k(U))_x) \leq 0 \quad (27)$$

в смысле распределений.

Заметим, что функция $\psi_k(u)$ корректно определена и непрерывна, если $f(u) \in C(\mathbb{R})$. Это обстоятельство позволяет определить понятие о.э.р. задачи Коши (1), (23) в общей ситуации, когда $f(u)$ – лишь непрерывная функция.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. X -значная функция $U = U(t, x) \in L^\infty(\Pi, X)$ называется *о.э.р. задачи Коши* (1), (23), если она удовлетворяет системе (1) в смысле распределений, выполнено условие (27) и начальное условие (25).

Заметим, что в соответствии с теоремой 2 и замечанием 5 определения 1 и 2 эквивалентны, если функция $f(u) \in C^2(\mathbb{R})$ нелинейна на невырожденных интервалах.

Понятие о.э.р. задачи (1), (23) тесно связано с соответствующим понятием в случае скалярной задачи Коши для уравнения

$$u_t + f(u)_x = 0, \quad (28)$$

$u = u(t, x)$, $(t, x) \in \Pi$, $f(u) \in C(\mathbb{R})$ с начальным условием

$$u(0, x) = u_0(x) \in L^\infty(\mathbb{R}). \quad (29)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3 (см. [3]). Функция $u = u(t, x) \in L^\infty(\Pi)$ называется *о.э.р. задачи Коши* (28), (29), если

- а) $\forall k \in \mathbb{R} \quad |u - k|_t + ((f(u) - f(k)) \operatorname{sign}(u - k))_x \leq 0$ в $\mathcal{D}'(\Pi)$;
- б) $\operatorname{ess} \lim_{t \rightarrow 0+} u(t, \cdot) = u_0$ в $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$.

Полагая в условии а) $k = \pm \|u\|_\infty$, получим, что о.э.р. $u(t, x)$ удовлетворяет (28) в $\mathcal{D}'(\Pi)$.

Известно (см. [3], [5]–[7]), что всегда существует единственное о.э.р. задачи Коши (28), (29) (в более общем случае нескольких пространственных переменных для единственности необходимы ограничения на модули непрерывности функций потока [5]–[7]; впрочем, единственность о.э.р. всегда есть при гладких функциях потока [3]).

Заметим также (см. [3], [6], [7]), что условие а) определения 3 эквивалентно условию:

$$\begin{aligned} \text{а')} \quad & \varphi(u)_t + \psi(u)_x \leq 0 \text{ в } \mathcal{D}'(\Pi) \text{ для любой выпуклой функции } \varphi(u) \in C^1(\mathbb{R}), \\ & \text{здесь } \psi(u) = \varphi'(u)f(u) - \int_0^u f(s) d\varphi'(s) \end{aligned}$$

(так что в гладком случае $f(u) \in C^1(\mathbb{R})$ функция $\psi(u)$ с точностью до аддитивной константы определена равенством $\psi'(u) = \varphi'(u)f'(u)$).

Имеется интересная связь о.э.р. задачи (1), (23) с так называемыми мерозначными решениями задачи Коши для скалярного уравнения (28). Напомним (см. [8], [9]), что *мерозначной функцией* на измеримом множестве $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ называется слабо измеримое отображение $x \mapsto \nu_x$ множества Ω в пространство $\operatorname{Prob}_0(\mathbb{R})$ вероятностных борелевских мер с компактным носителем на прямой $\mathbb{R}$.

Слабая измеримость ν_x означает, что для любой непрерывной функции $\varphi(\lambda)$ функция $x \mapsto \int \varphi(\lambda) d\nu_x(\lambda)$ измерима на Ω .

Мерозначная функция ν_x называется ограниченной, если существует $M > 0$ такое, что для п.в. $x \in \Omega$ $\operatorname{supp} \nu_x \subset [-M, M]$. Минимальное из таких M будем обозначать $\|\nu_x\|_\infty$.

Наконец, мерозначные функции вида: $\nu_x(\lambda) = \delta(\lambda - u(x))$, $u(x) \in L^\infty(\Omega)$ ($\delta(\lambda - u)$ – мера Дирака в точке $u \in \mathbb{R}$), называются регулярными и будут нами отождествляться с соответствующими функциями $u(x)$. Таким образом, имеется естественное вложение $L^\infty(\Omega) \subset MV(\Omega)$, где обозначено: $MV(\Omega)$ – множество ограниченных мерозначных функций на Ω .

Рассмотрим мерозначные решения (коротко – м.р.) $\nu_{t,x} \in MV(\Pi)$ задачи Коши для уравнения (28) с начальным условием

$$\nu_{0,x} = \nu_x^0 \in MV(\mathbb{R}). \quad (30)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4 (см. [9]–[11], [6]). Ограниченная мерозначная функция $\nu_{t,x}$ называется *м.р. задачи* (28), (30), если:

- а) $\forall k \in \mathbb{R}$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathbb{R}} |\lambda - k| d\nu_{t,x}(\lambda) + \frac{\partial}{\partial x} \int_{\mathbb{R}} (f(\lambda) - f(k)) \operatorname{sign}(\lambda - k) d\nu_{t,x}(\lambda) \leq 0 \text{ в } \mathcal{D}'(\Pi);$$

b) $\forall \varphi(\lambda) \in C(\mathbb{R})$

$$\operatorname{ess\,lim}_{t \rightarrow 0+} \int_{\mathbb{R}} \varphi(\lambda) d\nu_{t,x}(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(\lambda) d\nu_x^0(\lambda) \quad \text{в } L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}).$$

Определение 4 согласуется с определением 3, т.е. функция $u(t, x)$ является о.э.р. задачи (28), (29) тогда и только тогда, когда она как регулярная мерозначная функция $\nu_{t,x}(\lambda) = \delta(\lambda - u(t, x))$ является м.р. задачи (28), (30) с регулярной начальной функцией $\nu_x^0(\lambda) = \delta(\lambda - u_0(x))$.

Пусть, далее, $U(t, x)$ — о.э.р. задачи (1), (23); $\lambda_1(t, x), \lambda_2(t, x), \lambda_1^0(x), \lambda_2^0(x)$ — собственные числа матриц $U(t, x), U_0(x)$, соответственно, выписанные с учетом кратности. Тогда условие (27) означает, что $\forall k \in \mathbb{R}$

$$\frac{\partial}{\partial t} \sum_{i=1}^2 |\lambda_i(t, x) - k| + \frac{\partial}{\partial x} \sum_{i=1}^2 (f(\lambda_i(t, x)) - f(k)) \operatorname{sign}(\lambda_i(t, x) - k) \leq 0 \quad \text{в } \mathcal{D}'(\Pi). \quad (31)$$

Определим вероятностные меры

$$\nu_x^0(\lambda) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \delta(\lambda - \lambda_i^0(x)), \quad \nu_{t,x}(\lambda) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \delta(\lambda - \lambda_i(t, x)). \quad (32)$$

Тогда отображения $x \mapsto \nu_x^0, (t, x) \mapsto \nu_{t,x}$ являются мерозначными функциями на $\mathbb{R}$ и Π , соответственно. Действительно, если $\varphi(\lambda) \in C(\mathbb{R})$, то функции

$$\begin{aligned} x \mapsto \int \varphi(\lambda) d\nu_x^0(\lambda) &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \varphi(\lambda_i^0(x)) = \frac{1}{2} \operatorname{Tr} \tilde{\varphi}(U_0(x)), \\ (t, x) \mapsto \int \varphi(\lambda) d\nu_{t,x}(\lambda) &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \varphi(\lambda_i(t, x)) = \frac{1}{2} \operatorname{Tr} \tilde{\varphi}(U(t, x)) \end{aligned}$$

измеримы, что следует из измеримости X -значных функций $U_0(x), U(t, x)$ и непрерывности отображения $\tilde{\varphi}: X \mapsto X$ (непрерывность $\tilde{\varphi}$ очевидна, когда $\varphi(u)$ — многочлен, общий случай $\varphi(u) \in C(\mathbb{R})$ разбирается при помощи аппроксимации с учетом свойства F4) функционального исчисления).

Итак, отображения $x \mapsto \nu_x^0, (t, x) \mapsto \nu_{t,x}$ слабо измеримы и, значит, являются мерозначными функциями. Ограниченность этих мерозначных функций следует из условий $U_0 \in L^\infty(\mathbb{R}, X), U \in L^\infty(\Pi, X)$.

Заметим, что условие (31) совпадает с условием а) определения 4. Далее, если $\varphi(\lambda) \in C(\mathbb{R})$, то

$$\begin{aligned} \operatorname{ess\,lim}_{t \rightarrow 0+} \int \varphi(\lambda) d\nu_{t,x}(\lambda) &= \operatorname{ess\,lim}_{t \rightarrow 0+} \operatorname{Tr} \tilde{\varphi}(U(t, x)) \\ &= \operatorname{Tr} \tilde{\varphi}(U_0(x)) = \int \varphi(\lambda) d\nu_x^0(\lambda) \quad \text{в } L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}) \end{aligned}$$

по условию (25) с учетом непрерывности функции $U \mapsto \operatorname{Tr} \tilde{\varphi}(U)$.

Итак, выполнено также условие б) определения 4. Мы доказали

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть мерозначные функции $\nu_{t,x}$, ν_x^0 определены равенствами (32). Тогда $\nu_{t,x}$ – м.р. задачи Коши (28), (30) с мерозначной начальной функцией ν_x^0 .

Предложение 3 позволяет применить известные результаты теории мерозначных решений, сформулированные ниже в предложении 4, к исследованию свойств о.э.р. задачи (1), (23).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4 (см. [6], [11]). Пусть $\nu_{t,x}$ – м.р. задачи Коши (28), (30). Тогда

- 1) если $\nu_x^0(\lambda) = \delta(\lambda - u_0(x))$ – регулярная начальная функция, $u_0(x) \in L^\infty(\mathbb{R})$, то м.р. $\nu_{t,x}$ также регулярно: $\nu_{t,x}(\lambda) = \delta(\lambda - u(t, x))$ и $u(t, x) \in L^\infty(\Pi)$ – единственное о.э.р. задачи (28), (29) с начальной функцией $u_0(x)$;
- 2) если для п.в. $x \in \mathbb{R}$ $\text{supp } \nu_x^0 \subset [a, b]$; $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$, то $\text{supp } \nu_{t,x} \subset [a, b]$ п.в. в Π (принцип максимума). В частности, $\|\nu_{t,x}\|_\infty \leq \|\nu_x^0\|_\infty$;
- 3) если $1 \leq p < \infty$, то для п.в. $t \in (0, +\infty)$

$$\int \left(\int |\lambda|^p d\nu_{t,x}(\lambda) \right) dx \leq \int \left(\int |\lambda|^p d\nu_x^0(\lambda) \right) dx.$$

Из предложений 3, 4 непосредственно вытекает следующая

ТЕОРЕМА 3. Пусть $U(t, x)$ – о.э.р. задачи Коши (1), (23).

- 1) Если $U_0(x) = u_0(x) \cdot E$, $u_0(x) \in L^\infty(\mathbb{R})$, то $U(t, x) = u(t, x) \cdot E$, где $u(t, x)$ – единственное о.э.р. задачи (28), (29) с начальной функцией $u_0(x)$.
- 2) Пусть $|\cdot|$ – операторная норма на X :

$$|U| = \sup \{ \|Ux\| \mid x \in \mathbb{R}^2, \|x\| = 1 \};$$

$M > 0$ таково, что $|U_0(x)| \leq M$ п.в. на $\mathbb{R}$. Тогда $|U(t, x)| \leq M$ п.в. на Π (принцип максимума).

3) Определим при $1 \leq p < \infty$ норму $\|\cdot\|_p$ на X равенством: $\|U\|_p^p = \sum_{i=1}^2 |\lambda_i|^p$; λ^1, λ^2 – собственные числа матрицы $U \in X$, выписанные с учетом кратности (заметим, что $\|\cdot\|_2$ совпадает с евклидовой нормой). Тогда для п.в. $t \in (0, +\infty)$

$$\int_{\mathbb{R}} \|U(t, x)\|_p^p dx \leq \int_{\mathbb{R}} \|U_0(x)\|_p^p dx.$$

Для доказательства утверждения 2) следует учесть известное свойство операторной нормы $|U| = \max\{|\lambda| \mid \lambda \in \sigma(U)\}$.

Введем на X отношение порядка: $U_1 \leq U_2$, если матрица $U_2 - U_1$ положительно определена. Тогда принцип максимума можно усилить в следующем направлении: если при $a \leq b$ $aE \leq U_0(x) \leq bE$ п.в. на $\mathbb{R}$, то и $aE \leq U(t, x) \leq bE$ п.в. на Π .

Это утверждение – прямое следствие принципа максимума из предложения 4.

Несмотря на континуум энтропийных условий, о.э.р. $U(t, x)$ задачи (1), (23) может оказаться неединственным. Рассмотрим следующий

ПРИМЕР 2. Пусть $f(u) = u^2$, тогда система (1) имеет в обозначениях примера 1 вид

$$\begin{cases} a_t + (a^2 + c^2)_x = 0, \\ b_t + (b^2 + c^2)_x = 0, \\ c_t + (ac + bc)_x = 0, \end{cases} \quad (33)$$

$$U = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим для этой системы задачу о распаде разрыва:

$$U_0(x) = \begin{cases} U_+, & x \geq 0, \\ U_-, & x < 0, \end{cases} \quad (34)$$

где $U_+ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $U_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, т.е.

$$a_0(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases} \quad b_0(x) = \begin{cases} 0, & x \geq 0, \\ 1, & x < 0, \end{cases} \quad c_0(x) \equiv 0.$$

Пусть $a(t, x)$, $b(t, x)$ – о.э.р. задачи Коши для скалярного уравнения $u_t + (u^2)_x = 0$ с начальными функциями $a_0(x)$, $b_0(x)$, соответственно. Нетрудно показать, что

$$a(t, x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ x/(2t), & 0 \leq x < 2t, \\ 1, & x \geq 2t, \end{cases} \quad b(t, x) = \begin{cases} 1, & x < t, \\ 0, & x \geq t, \end{cases}$$

и, очевидно, X -значная функция $U_1(t, x) = \begin{pmatrix} a(t, x) & 0 \\ 0 & b(t, x) \end{pmatrix}$ является о.э.р. задачи (33), (34).

Покажем, что X -значная функция $U_2(t, x) = \begin{cases} U_+, & x \geq t, \\ U_-, & x < t, \end{cases}$ также является о.э.р. задачи (33), (34).

Действительно, непосредственно проверяется, что на линии разрыва $x = t$

$$(U_+ - U_-)n_t + (U_+^2 - U_-^2)n_x = 0,$$

где $\bar{n} = (n_t, n_x) = (-1, 1)$ – вектор нормали к линии разрыва; таким образом, выполнено условие Ранкина–Гюгоньо (см. [2, с. 507]) и $U_2(t, x)$ удовлетворяет системе (33) в смысле распределений.

Далее, для любой энтропии $p(U) = \text{Tr } \tilde{\varphi}(U)$ и соответствующего потока $q(U) = \text{Tr } \tilde{\psi}(U)$ имеем равенства

$$p(U_+) = p(U_-) = \varphi(0) + \varphi(1), \quad q(U_+) = q(U_-) = \psi(0) + \psi(1)$$

и функции $p(U_2(t, x))$, $q(U_2(t, x))$ постоянны на Π . Отсюда следует, что энтропийное условие (27) выполнено для $U = U_2(t, x)$ со знаком равенства. Очевидно также, что $U_2(t, x)$ удовлетворяет начальному условию (25).

Итак, $U_1(t, x)$, $U_2(t, x)$ – два различных о.э.р. задачи (33), (34).

§4. Понятие сильного о.э.р. Существование и единственность сильного о.э.р.

Неединственность о.э.р., установленная примером 2, побуждает к усилению определяющего условия (27), что приводит к понятию сильного о.э.р.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. X -значная функция $U = U(t, x) \in L^\infty(\Pi, X)$ называется *сильным о.э.р. (с.о.э.р.)* задачи Коши (1), (23), если

- C1) $U_t + \tilde{f}(U)_x = 0$ в $\mathcal{D}'(\Pi, X)$;
C2) если $\lambda_1(t, x) \leq \lambda_2(t, x)$ – собственные числа матрицы $U(t, x)$, то для всех выпуклых $\varphi_1(u), \varphi_2(u) \in C^1(\mathbb{R})$

$$(\varphi_1(\lambda_1) + \varphi_2(\lambda_2))_t + (\psi_1(\lambda_1) + \psi_2(\lambda_2))_x \leq 0 \quad \text{в } \mathcal{D}'(\Pi),$$

здесь функции $\psi_i(u) \in C^1(\mathbb{R})$ с точностью до аддитивной константы определены равенствами: $\psi'_i(u) = \varphi'_i(u)f'(u)$, $i = 1, 2$ (в случае лишь непрерывной функции $f(u)$ следует определить $\psi_i(u)$ так, как это сделано в условии а') определения 3);

- C3) выполнено начальное условие (25).

Заметим, что условие C2) при $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$ совпадает с (26) и, в частности, любое с.о.э.р. задачи (1), (23) является о.э.р. этой задачи. Взяв в C2) нулевую функцию φ_2 (соответственно, φ_1), получим, что функции $\lambda_1(t, x), \lambda_2(t, x)$ удовлетворяют условию а') определения 3. Далее, если $\lambda_1^0(x) \leq \lambda_2^0(x)$ – собственные числа матрицы $U_0(x)$, то справедливость начального условия б) определения 3 для $u = \lambda_1, \lambda_2$ с начальными данными λ_1^0, λ_2^0 непосредственно следует из (25) и непрерывной зависимости λ_1, λ_2 от матрицы U . Таким образом, из условия C2) вытекает, что

- C2') функции λ_1, λ_2 являются о.э.р. скалярной задачи (28), (29) с начальными данными λ_1^0, λ_2^0 , соответственно.

Поскольку обратная импликация C2') $\Rightarrow$ C2) очевидна, то условия C2) и C2') эквивалентны.

Легко проверяется, что среди решений U_1, U_2 рассматриваемой в примере 2 задачи (33), (34) лишь U_2 является с.о.э.р.

Докажем существование и единственность с.о.э.р. задачи (1), (23) в случае, когда функция $f(u) \in C^1(\mathbb{R})$ (более обще – локально непрерывна по Липшицу).

Представим начальные данные $U_0(x)$ в форме

$$U_0(x) = T(\theta_0(x)) \operatorname{diag}\{\lambda_1^0(x), \lambda_2^0(x)\} T(-\theta_0(x)),$$

где $\lambda_1^0(x) \leq \lambda_2^0(x)$ – собственные числа матрицы $U_0(x)$, $T(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ – ортогональная матрица оператора поворота на угол $\theta \in [0, \pi)$, функция $\theta_0(x)$ может быть выбрана измеримой, что и будем предполагать (заметим, что при $\lambda_1^0 = \lambda_2^0$ имеется неоднозначность в выборе θ_0).

Условие C2') означает, что с.о.э.р. $U(t, x)$ должно иметь вид:

$$U(t, x) = T(\theta(t, x)) \operatorname{diag}\{\lambda_1(t, x), \lambda_2(t, x)\} T(-\theta(t, x)), \quad (35)$$

где $\lambda_1(t, x), \lambda_2(t, x)$ — однозначно определенные о.э.р. скалярной задачи (28), (29) с начальными функциями $\lambda_1^0(x), \lambda_2^0(x)$, соответственно. Заметим, что требование $\lambda_1(t, x) \leq \lambda_2(t, x)$ выполнено автоматически вследствие монотонной зависимости о.э.р. задачи (28), (29) от начальных данных (см. [3]).

Неизвестная функция $\theta = \theta(t, x)$ определяется из условий C1), C3). Как будет установлено ниже, для выполнения этих условий необходимо и достаточно, чтобы функция θ являлась обобщенным решением задачи Коши для линейного уравнения

$$(a\theta)_t + (b\theta)_x = 0, \quad (36)$$

$a = a(t, x) = \lambda_2(t, x) - \lambda_1(t, x)$, $b = b(t, x) = f(\lambda_2(t, x)) - f(\lambda_1(t, x))$ с начальным условием

$$\theta(0, x) = \theta_0(x) \quad (37)$$

в смысле следующего определения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Функция $\theta = \theta(t, x) \in L^\infty(\Pi)$ называется *обобщенным решением (о.р.)* задачи Коши (36), (37), если для любой пробной функции $h = h(t, x)$ из пространства $C_0^\infty(\overline{\Pi})$ бесконечно дифференцируемых функций с компактным носителем в $\overline{\Pi} = [0, +\infty) \times \mathbb{R}$

$$\int_{\Pi} [a\theta h_t + b\theta h_x] dt dx + \int_{\mathbb{R}} a(0, x) \theta_0(x) h(0, x) dx = 0, \quad (38)$$

здесь $a(0, x) = \lambda_2^0(x) - \lambda_1^0(x)$.

Наша ближайшая задача — доказать разрешимость задачи (36), (37) в смысле определения 6 и исследовать свойства о.р. Прежде всего, установим ряд соотношений между коэффициентами a, b . По построению $a(0, x) \geq 0, a(t, x) \geq 0$. Ввиду (29) имеем также

$$\operatorname{ess\,lim}_{t \rightarrow 0+} a(t, x) = a(0, x) \quad \text{в } L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}). \quad (39)$$

Далее, из ограниченности λ_1, λ_2 и гладкости f вытекает оценка: для некоторой константы $N > 0$

$$|b| = |f(\lambda_2) - f(\lambda_1)| \leq N(\lambda_2 - \lambda_1) = N \cdot a \quad \text{п.в. на } \Pi. \quad (40)$$

Наконец, в $\mathcal{D}'(\Pi)$

$$a_t + b_x = (\lambda_2)_t + (f(\lambda_2))_x - ((\lambda_1)_t + (f(\lambda_1))_x) = 0. \quad (41)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.

1) *Существует о.р. $\theta(t, x)$ задачи (36), (37).*

2) *Если $\theta_0(x)a(0, x) = 0$ п.в. на $\mathbb{R}$, то $\theta(t, x)a(t, x) = 0$ п.в. на Π .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\gamma(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $\gamma(x) \geq 0$, $\text{supp } \gamma \subset [-1, 0]$, $\int \gamma(x) dx = 1$. Положим при $\nu \in \mathbb{N}$, $(\tau, \xi) \in \mathbb{R}^2$ $\delta_\nu(\tau, \xi) = \nu^2 \gamma(\nu\tau) \cdot \gamma(\nu\xi)$. Ясно, что $\delta_\nu \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$, $\delta_\nu \geq 0$, $\text{supp } \delta_\nu \subset [-1/\nu, 0] \times [-1/\nu, 0]$, $\int \delta_\nu(\tau, \xi) d\tau d\xi = 1$ (так что при $\nu \rightarrow \infty$ последовательность δ_ν сходится в $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ к δ -функции Дирака). Аппроксимируем функции $a(t, x)$, $b(t, x)$, положив

$$a_\nu(t, x) = (a * \delta_\nu)(t, x) + \frac{1}{\nu} = \int a(t - \tau, x - \xi) \delta_\nu(\tau, \xi) d\tau d\xi + \frac{1}{\nu},$$

$$b_\nu(t, x) = (b * \delta_\nu)(t, x) = \int b(t - \tau, x - \xi) \delta_\nu(\tau, \xi) d\tau d\xi.$$

Заметим, что свертки $a * \delta_\nu$, $b * \delta_\nu$ корректно определены при $(t, x) \in \Pi$, так как $t - \tau \geq 0$ при $(\tau, \xi) \in \text{supp } \delta_\nu$. По построению $a_\nu, b_\nu \in C^\infty(\Pi)$, $a_\nu \geq 1/\nu$ и при $\nu \rightarrow \infty$ $a_\nu \rightarrow a$, $b_\nu \rightarrow b$ в $L_{\text{loc}}^1(\Pi)$. Из (40), (41) следуют соотношения

$$\begin{aligned} |b_\nu(t, x)| &\leq \int |b(t - \tau, x - \xi)| \delta_\nu(\tau, \xi) d\tau d\xi \\ &\leq N \int a(t - \tau, x - \xi) \delta_\nu(\tau, \xi) d\tau d\xi \leq N a_\nu(t, x), \end{aligned} \quad (42)$$

$$(a_\nu)_t + (b_\nu)_x = (a_t + b_x) * \delta_\nu = 0. \quad (43)$$

Пусть $c_\nu(t, x) = b_\nu(t, x)/a_\nu(t, x) \in C^\infty(\Pi)$ (напомним, что $a_\nu \geq 1/\nu$). Из (42) следует, что $|c_\nu| \leq N$. Рассмотрим о.р. $\theta_\nu(t, x)$ задачи Коши

$$\theta_t + c_\nu \theta_x = 0, \quad \theta(0, x) = \theta_0(x), \quad (44)$$

которое может быть найдено методом характеристик (см., например, [2, с. 55]). Характеристики, являющиеся интегральными кривыми обыкновенного дифференциального уравнения $\dot{x} = c_\nu(t, x)$, ввиду ограниченности c_ν определены при всех $t \geq 0$. Поэтому решение $\theta_\nu(t, x)$ задачи (44), задаваемое условием постоянства на характеристиках, корректно определено во всей области Π и, очевидно, выполнен принцип максимума:

$$\forall (t, x) \in \Pi \quad |\theta_\nu(t, x)| \leq M = \|\theta_0\|_\infty. \quad (45)$$

Умножая равенство $(\theta_\nu)_t + c_\nu(\theta_\nu)_x = 0$ на a_ν , получим, что $a_\nu(\theta_\nu)_t + b_\nu(\theta_\nu)_x = 0$ в $\mathcal{D}'(\Pi)$, что с учетом (43) можно записать в дивергентной форме:

$$(a_\nu \theta_\nu)_t + (b_\nu \theta_\nu)_x = 0 \quad \text{в } \mathcal{D}'(\Pi). \quad (46)$$

Из (46) следует интегральное тождество: $\forall h = h(t, x) \in C_0^\infty(\bar{\Pi})$

$$\int_{\Pi} [a_\nu \theta_\nu h_t + b_\nu \theta_\nu h_x] dt dx + \int_{\mathbb{R}} a_\nu(0, x) \theta_0(x) h(0, x) dx = 0. \quad (47)$$

В силу оценки (45) последовательность θ_ν ограничена в $L^\infty(\Pi)$ и, следовательно, после возможного выделения подпоследовательности $\theta_\nu \xrightarrow{\nu \rightarrow \infty} \theta$ *-слабо в $L^\infty(\Pi)$, где $\theta = \theta(t, x) \in L^\infty(\Pi)$, $\|\theta\|_\infty \leq M$. Переходя в (47) к пределу при $\nu \rightarrow \infty$ с учетом соотношений $a_\nu \rightarrow a$, $b_\nu \rightarrow b$ в $L_{\text{loc}}^1(\Pi)$, $a_\nu(0, x) \rightarrow a(0, x)$ в $L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R})$ (что следует из (39)), получим тогда, что предельная функция $\theta(t, x)$ удовлетворяет (38), т.е. является о.р. задачи (36), (37).

Приступая к доказательству второго утверждения, предположим, что $a(0, x) \theta_0(x) = 0$ п.в. на $\mathbb{R}$. Из равенства $(a\theta)_t + (b\theta)_x = 0$ в $\mathcal{D}'(\Pi)$ следует существование непрерывного по Лишницю потенциала $Q(t, x)$, однозначно определенного условиями

$$Q_t = -b\theta, \quad Q_x = a\theta \quad \text{в } \mathcal{D}'(\Pi), \quad Q(0, 0) = 0. \quad (48)$$

Имеем с учетом (41) равенство (в $\mathcal{D}'(\Pi)$)

$$(aQ^2)_t + (bQ^2)_x = a(Q^2)_t + b(Q^2)_x = 2Q \cdot (-ab\theta + ab\theta) = 0. \quad (49)$$

Установим, что $Q \equiv 0$, откуда ввиду (48) будет следовать требуемое тождество $a\theta \equiv 0$. Покажем сначала, что $Q(0, x) \equiv 0$. Для этого выберем функции $p(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $q(t) \in C^\infty([0, +\infty))$, $q(0) = 1$, $q(t) = 0$ при $t \geq 1$, и положим в (38) $h(t, x) = q(\nu t)p(x)$, $\nu \in \mathbb{N}$. Получим равенство (учитывая, что $a(0, x)\theta_0(x) = 0$ п.в. на $\mathbb{R}$)

$$\nu \int_{\Pi} a(t, x) \theta(t, x) p(x) q'(\nu t) dt dx = - \int_{\Pi} b(t, x) \theta(t, x) p'(x) q(\nu t) dt dx.$$

Заметим далее, что $a\theta = Q_x$ в $\mathcal{D}'(\Pi)$, что позволяет преобразовать интеграл в левой части этого равенства с помощью формулы интегрирования по частям:

$$\nu \int_{\Pi} Q(t, x) p'(x) q'(\nu t) dt dx = \int_{\Pi} b(t, x) \theta(t, x) p'(x) q(\nu t) dt dx.$$

Учитывая непрерывность Q и свойства функции q , легко видеть, что левая часть последнего равенства сходится при $\nu \rightarrow \infty$ к $-\int_{\mathbb{R}} Q(0, x) p'(x) dx$, а правая часть оценивается по модулю величиной const/ν и стремится к нулю. Итак, $\int_{\mathbb{R}} Q(0, x) p'(x) dx = 0$ и, вследствие произвольности $p(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $Q(0, x) \equiv Q(0, 0) = 0$.

Для доказательства тождества $Q \equiv 0$ умножим равенство (49) на функцию $\rho(x) = e^{-|x|}$ и проинтегрируем по $x \in \mathbb{R}$. Получим, что в $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$

$$\frac{d}{dt} \int a(t, x) Q^2(t, x) \rho(x) dx = \int b(t, x) Q^2(t, x) \rho'(x) dx,$$

откуда следует оценка (с учетом тождества $|\rho'(x)| \equiv \rho(x)$ и (40))

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int a(t, x) Q^2(t, x) \rho(x) dx &\leq \int |b(t, x)| Q^2(t, x) \rho'(x) dx \\ &\leq N \int a(t, x) Q^2(t, x) \rho(x) dx \end{aligned}$$

или $F'(t) \leq N \cdot F(t)$ в $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, где $F(t) = \int a(t, x) Q^2(t, x) \rho(x) dx$. По лемме Гронуолла из равенства $F(0) = \int a(0, x) Q^2(0, x) \rho(x) dx = 0$ вытекает тогда, что $F(t) = 0$ для п.в. $t > 0$ и, следовательно,

$$a(t, x) Q(t, x) = 0 \text{ п.в. на } \Pi. \quad (50)$$

Пусть $E = \{(t, x) \in \Pi \mid Q(t, x) \neq 0\}$. Ввиду непрерывности Q множество E открыто в Π и из (50) следует, что $a(t, x) = 0$ п.в. на E . Из оценки (40) следует также, что $b(t, x) = 0$ п.в. на E . Согласно (48) тогда $Q_t(t, x) = Q_x(t, x) = 0$ п.в. на E и поэтому функция $Q(t, x)$ постоянна в каждой компоненте связности множества E . Так как множество таких компонент не более чем счетно и $Q \equiv 0$ на $\Pi \setminus E$, то непрерывная функция Q принимает не более чем счетное множество значений, что с учетом связности области определения Π возможно лишь в случае, когда $Q \equiv \text{const}$. Таким образом, $Q \equiv Q(0, 0) = 0$ и $Q_x(t, x) = a(t, x) \theta(t, x) = 0$ п.в. на Π . Предложение доказано.

Пусть, как и выше, $\rho(x) = e^{-|x|}$. Введем меры $\mu = a(0, x) \rho(x) dx$, $m = a(t, x) \rho(x) dt dx$ на $\mathbb{R}$ и Π , соответственно. Согласно определению 6 в постановке задачи (36), (37) существенно поведение начальной функции $\theta_0(x)$ и решения $\theta(t, x)$ лишь на множествах, где, соответственно, $a(0, x) \neq 0$ и $a(t, x) \neq 0$. Таким образом, можно считать, что $\theta_0 \in L^\infty(\mathbb{R}, d\mu)$, $\theta \in L^\infty(\Pi, dm)$. Заметим, что предложение 5 можно переформулировать как результат о существовании и единственности о.р. задачи (36), (37) в классе $L^\infty(\Pi, dm)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Легко проследить, что в ходе доказательства предложения 5 получен также следующий принцип максимума: $\|\theta\|_{L^\infty(\Pi, dm)} \leq \|\theta_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}, d\mu)}$.

Ниже нам понадобится следующая

ЛЕММА 1. *Множество D , состоящее из абсолютно непрерывных функций $u(x)$ на $\mathbb{R}$ таких, что $u'(x) = a(0, x)v(x)$, $v(x) \in L^\infty(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$, плотно в пространстве $L^2(\mathbb{R}, d\mu)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно установить, что любой линейный непрерывный функционал $l = l(u)$, $u \in L^2(\mathbb{R}, d\mu)$, обращающийся в нуль на D , является нулевым. В соответствии с теоремой Рисса функционал l допускает представление:

$$l(u) = l_h(u) = \int u(x) h(x) d\mu(x), \quad (51)$$

где $h(x) \in L^2(\mathbb{R}, d\mu)$.

Пусть $H(x) = \int_{-\infty}^x h(y) d\mu(y) = \int_{-\infty}^x h(y)a(0, y)\rho(y) dy$. Заметим, что $h(y) \in L^2(\mathbb{R}, d\mu) \subset L^1(\mathbb{R}, d\mu)$ в силу конечности меры μ и функция $H(x)$ корректно определена. Равенство (51) можно переписать в виде $l(u) = \int u(x) dH(x)$. Если $u = u(x) \in D$, $u'(x) = a(0, x)v(x)$, где $v(x) \in L^\infty(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$, то, используя формулу интегрирования по частям, получим, что

$$0 = l(u) = \int u(x) dH(x) = - \int H(x)a(0, x)v(x) dx. \quad (52)$$

Отсутствие внеинтегрального члена в (52) обусловлено равенствами

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} H(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} H(x) = \int dH(x) = l(1) = 0$$

(так как постоянные функции лежат в D) и ограниченностью функции $u(x)$, вытекающей из суммируемости ее производной.

В силу произвольности $v(x) \in L^\infty(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ в (52) имеем $H(x)a(0, x) = 0$ п.в. на $\mathbb{R}$. Тогда, с учетом непрерывности H , $H(x) \equiv 0$ на замыкании $\overline{E}$ множества $E = \{x \in \mathbb{R} \mid a(0, x) > 0\}$. Далее, $H'(x) = h(x)a(0, x)\rho(x) = 0$ при п.в. $x \in \mathbb{R} \setminus \overline{E}$, откуда следует постоянство H на компонентах связности открытого множества $\mathbb{R} \setminus \overline{E}$. Поскольку множество таких компонент не более чем счетно и $H \equiv 0$ на $\overline{E}$, то непрерывная на $\mathbb{R}$ функция H принимает не более чем счетное множество значений, откуда следует, что $H \equiv \text{const}$ и $dH(x) = h(x) d\mu(x) = 0$. Ввиду (51) это означает, что функционал l нулевой. Лемма доказана.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. Пусть $\theta(t, x)$ — о.р. задачи (36), (37). Тогда

- 1) $\text{ess} \lim_{t \rightarrow 0+} a(t, x)\theta(t, x) = a(0, x)\theta_0(x)$ в $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$;
- 2) $\forall p(u) \in C^1(\mathbb{R})$ функция $p(\theta(t, x))$ является о.р. задачи (36), (37) с начальными данными $p(\theta_0(x))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как начальная функция $\theta_0(x) \in L^\infty(\mathbb{R}, d\mu) \subset L^2(\mathbb{R}, d\mu)$, то по лемме 1 $\forall k \in \mathbb{N}$ существует абсолютно непрерывная функция $\theta_0^k(x) \in D$, $(\theta_0^k)'(x) = a(0, x)v_0^k(x)$, $v_0^k(x) \in L^\infty(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$, такая, что $\|\theta_0 - \theta_0^k\|_2 \leq 1/k$ (норма $\|\cdot\|_2$ здесь и ниже рассматривается в пространстве $L^2(\mathbb{R}, d\mu)$). Будем также предполагать, что $\|\theta_0^k\|_\infty \leq M = \|\theta_0\|_\infty$, этой оценки можно добиться, заменив функции θ_0^k на $p(\theta_0^k)$, где $p(u) = \max(-M, \min(M, u))$ — срезающая функция (легко проверить, что вышеперечисленные свойства функций θ_0^k при такой замене сохраняются). По предложению 5 существует о.р. $v^k(t, x)$ задачи (36), (37) с начальной функцией v_0^k . Из равенства $(av^k)_t + (bv^k)_x = 0$ в $\mathcal{D}'(\Pi)$ следует существование непрерывного по Липшицу потенциала $\theta^k(t, x)$, определяемого соотношениями:

$$(\theta^k)_t = -bv^k, \quad (\theta^k)_x = av^k \quad \text{в } \mathcal{D}'(\Pi), \quad \theta^k(0, 0) = \theta_0^k(0). \quad (53)$$

Ясно, что $\theta^k(t, x)$ является о.р. задачи (36), (37) с начальной функцией, совпадающей ввиду соотношений $\theta^k(0, 0) = \theta_0^k(0)$, $(\theta^k)_x(0, x) = a(0, x)v^k(0, x) = (\theta_0^k)'(x)$ (см. (53)) с функцией θ_0^k .

Используя непрерывность по Липшицу функции θ^k и соотношение (39), получаем, что

- 1^k) $\text{ess} \lim_{t \rightarrow 0+} a(t, x)\theta^k(t, x) = a(0, x)\theta_0^k(x)$ в $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$;
- 2^k) $\forall p(u) \in C^1(\mathbb{R})$ функция $p(\theta^k(t, x))$ является о.р. задачи (36), (37) с начальными данными $p(\theta_0^k(x))$.

Последнее условие выполнено ввиду соотношений

$$(ap(\theta^k))_t + (bp(\theta^k))_x = a(p(\theta^k))_t + b(p(\theta^k))_x = p'(\theta^k)(a\theta_t^k + b\theta_x^k) = 0,$$

в которых используется существование обобщенных производных θ_t^k , θ_x^k (в соболевском смысле) и равенство (41).

Умножив при $k, r \in \mathbb{N}$ равенство $a(\theta^k - \theta^r)_t + b(\theta^k - \theta^r)_x = 0$ на $2(\theta^k - \theta^r)$, получим, что в $\mathcal{D}'(\Pi)$

$$(a(\theta^k - \theta^r)^2)_t + (b(\theta^k - \theta^r)^2)_x = a(\theta^k - \theta^r)_t^2 + b(\theta^k - \theta^r)_x^2 = 0 \quad (54)$$

(здесь существенно используется то, что функция $\theta^k - \theta^r$ имеет обобщенные производные в соболевском смысле).

Умножая (54) на функцию $\rho(x)$ и интегрируя по $x \in \mathbb{R}$, получаем, что в $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int a(t, x)(\theta^k(t, x) - \theta^r(t, x))^2 \rho(x) dx \\ = \int b(t, x)(\theta^k(t, x) - \theta^r(t, x))^2 \rho'(x) dx, \end{aligned} \quad (55)$$

откуда с учетом тождества $|\rho'| \equiv \rho$ и оценки (40)

$$0 \leq F'(t) \leq N \cdot F(t) \quad \text{в } \mathcal{D}'(\mathbb{R}),$$

где

$$F(t) = \int a(t, x)(\theta^k(t, x) - \theta^r(t, x))^2 \rho(x) dx$$

(заметим, что ввиду (55) можно считать функцию $F(t)$ абсолютно непрерывной). По лемме Гронолла для $t \geq 0$ имеем оценку $F(t) \leq e^{Nt} F(0)$ или

$$\int a(t, x)(\theta^k(t, x) - \theta^r(t, x))^2 \rho(x) dx \leq e^{Nt} \|\theta_0^k - \theta_0^r\|_2. \quad (56)$$

По построению при $k \rightarrow \infty$ последовательность θ_0^k сходится в $L^2(\mathbb{R}, d\mu)$ к функции θ_0 и из (56) следует, что соответствующая последовательность $\theta_k(t, x)$ является фундаментальной в пространствах $L^2([0, T] \times \mathbb{R}, dm)$, $T > 0$. По критерию Коши эта последовательность сходится в указанных пространствах к некоторой

функции $\theta(t, x)$. Так как в силу принципа максимума (см. замечание 6) последовательность $\theta_k(t, x)$ ограничена в $L^\infty(\Pi, dm)$, то $\theta(t, x) \in L^\infty(\Pi, dm)$ и можно считать, что $\theta(t, x) \in L^\infty(\Pi)$ (“исправив” при необходимости θ на множестве нулевой m -меры). В силу (56) $\forall t > 0$

$$a(t, \cdot)(\theta^k(t, \cdot) - \theta(t, \cdot)) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0 \quad \text{в } L^2(\mathbb{R}, \rho(x) dx),$$

причем сходимость равномерная на любом отрезке $t \in [0, T]$. Поэтому в пределе при $k \rightarrow \infty$ из свойства 1^k) вытекает 1). Далее, $\forall p(u) \in C^1(\mathbb{R})$ при $k \rightarrow \infty$ $a(p(\theta^k) - p(\theta)) \rightarrow 0$, $b(p(\theta^k) - p(\theta)) \rightarrow 0$ в $L^1_{\text{loc}}(\Pi)$ (ввиду (40) второе предельное соотношение следует из первого). Это позволяет перейти к пределу в интегральном тождестве, соответствующем 2^k), и получить утверждение 2). Предложение полностью доказано.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $\theta = \theta(t, x)$ – о.р. задачи (36), (37) (существующее по предложению 5). Тогда X -значная функция $U(t, x)$, определенная равенством (35), является единственным с.о.э.р. задачи (1), (23).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как отмечено в начале параграфа, для выполнения требования С2) определения 5 необходимо и достаточно, чтобы матрица $U = U(t, x)$ имела вид (35). Далее, пусть $U = \begin{pmatrix} p & r \\ r & q \end{pmatrix}$, $U_0 = \begin{pmatrix} p_0 & r_0 \\ r_0 & q_0 \end{pmatrix}$. Путем непосредственных вычислений коэффициентов матриц $U = T(\theta) \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2\}T(-\theta)$, $U_0 = T(\theta_0) \text{diag}\{\lambda_1^0, \lambda_2^0\}T(-\theta_0)$ получаем, что

$$p, q = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} \pm \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2} \cos 2\theta, \quad r = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2} \sin 2\theta; \quad (57)$$

$$p_0, q_0 = \frac{\lambda_1^0 + \lambda_2^0}{2} \pm \frac{\lambda_1^0 - \lambda_2^0}{2} \cos 2\theta_0, \quad r_0 = \frac{\lambda_1^0 - \lambda_2^0}{2} \sin 2\theta_0. \quad (58)$$

Компоненты матрицы $\tilde{f}(U)$ выписываются аналогично (57) с заменой λ_1, λ_2 на $f(\lambda_1), f(\lambda_2)$, и требование С1) определения 5 эквивалентно трем скалярным равенствам

$$\begin{aligned} \left(\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} \pm \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2} \cos 2\theta \right)_t + \left(\frac{f(\lambda_1) + f(\lambda_2)}{2} \pm \frac{f(\lambda_1) - f(\lambda_2)}{2} \cos 2\theta \right)_x &= 0, \\ \left(\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2} \sin 2\theta \right)_t + \left(\frac{f(\lambda_1) - f(\lambda_2)}{2} \sin 2\theta \right)_x &= 0. \end{aligned} \quad (59)$$

Поскольку λ_1, λ_2 – о.р. задачи (28), (29), то

$$\left(\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} \right)_t + \left(\frac{f(\lambda_1) + f(\lambda_2)}{2} \right)_x = 0 \quad \text{в } \mathcal{D}'(\Pi)$$

и (59) сводятся к двум равенствам (в $\mathcal{D}'(\Pi)$)

$$(a \cos 2\theta)_t + (b \cos 2\theta)_x = 0, \quad (a \sin 2\theta)_t + (b \sin 2\theta)_x = 0. \quad (60)$$

Если $\theta = \theta(t, x)$ – о.р. задачи (36), (37), то согласно утверждению 2) предложения 6 с $p(u) = \cos 2u, \sin 2u$ равенства (60) действительно верны и, значит, $U(t, x)$ удовлетворяет системе (1) в смысле распределений. Далее, из представлений (57), (58) в силу первого утверждения предложения 6 и начального условия (29) для $u = \lambda_1, \lambda_2$ вытекает, что X -значная функция $U(t, x)$ удовлетворяет предельному соотношению (25). Итак, $U(t, x)$ – с.о.э.р. задачи (1), (23). Обратно, если $U(t, x)$ – с.о.э.р. задачи (1), (23), то верны равенства (60). Далее, как следует из (25), представлений (57), (58) и начального условия (29) для $u = \lambda_1, \lambda_2$, справедливы предельные соотношения

$$\begin{aligned} \operatorname{ess\,lim}_{t \rightarrow 0+} a(t, x) \cos 2\theta(t, x) &= a(0, x) \cos 2\theta_0(x), \\ \operatorname{ess\,lim}_{t \rightarrow 0+} a(t, x) \sin 2\theta(t, x) &= a(0, x) \sin 2\theta_0(x) \quad \text{в } L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

Из (60) с учетом этих соотношений следует, что функции $\cos 2\theta, \sin 2\theta$ являются о.р. задачи (36), (37) с начальными данными $\cos 2\theta_0, \sin 2\theta_0$, соответственно. Согласно второму утверждению предложения 5 функции $a \cos 2\theta, a \sin 2\theta$ определены однозначно (заметим, что ввиду (58) величины $a(0, x) \cos 2\theta_0(x), a(0, x) \sin 2\theta_0(x)$ однозначно определяются по $U_0(x)$), откуда с учетом (57) вытекает единственность с.о.э.р. $U(t, x)$. Теорема доказана.

В заключение работы отметим, что результаты §§ 1–3 обобщаются на случай, когда X является пространством симметричных матриц или комплексных эрмитовых матриц произвольного порядка, а система (1) зависит от многих пространственных переменных $x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$ и имеет вид

$$U_t + \sum_{r=1}^m (\tilde{f}_r(U))_{x_r} = 0.$$

Автор благодарит С.Н. Кружкова за обсуждение работы.

Список литературы

1. Глазман И. М., Любич Ю. И. Конечномерный линейный анализ. М.: Наука, 1969.
2. Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. М.: Наука, 1978.
3. Кружков С. Н. Квазилинейные уравнения первого порядка со многими независимыми переменными // Матем. сб. 1970. Т. 81. № 2. С. 228–255.
4. Lax P. D. Shock waves and entropy // Shock waves and entropy, contributions to Nonlinear Functional Analysis / ed. E. A. Zarantonello. New York: Academic Press, 1971. P. 603–634.
5. Кружков С. Н., Панов Е. Ю. Консервативные квазилинейные законы первого порядка с бесконечной областью зависимости от начальных данных // Докл. АН СССР. 1990. Т. 314. № 1. С. 79–84.
6. Панов Е. Ю. Обобщенные решения задачи Коши для квазилинейных законов сохранения // Дисс. . . . канд. физ.-матем. наук. М.: МГУ, 1991.
7. Бенилан Ф., Кружков С. Н. Квазилинейные уравнения первого порядка с непрерывными нелинейностями // Докл. АН. 1994. Т. 339. № 2. С. 151–154.

8. *Tartar L.* Compensated compactness and applications to partial differential equations // Research notes in mathematics, nonlinear analysis, and mechanics: Heriot-Watt Symposium. V. 4, 1979. P. 136–212.
9. *DiPerna R. J.* Generalized solutions to conservation laws, in system of nonlinear partial differential equations // NATO ASI Series / ed. J. M. Ball, D. Reidel Pub. Co., 1983.
10. *Панов Е. Ю.* Сильные мерозначные решения задачи Коши для квазилинейного уравнения первого порядка с ограниченной мерозначной начальной функцией // Вестн. МГУ. Сер. 1, матем., мех. 1993. № 1. С. 20–23.
11. *Панов Е. Ю.* О мерозначных решениях задачи Коши для квазилинейного уравнения первого порядка // Изв. РАН. Сер. матем. 1996. Т. 60. № 2. С. 107–148.

Новгородский государственный университет

Поступила в редакцию
10.09.1996