Общероссийский математический портал

В. М. Петроградский, Рост полинильпотентных многообразий алгебр Ли и быстро растущие целые функции, *Матем. сб.*, 1997, том 188, номер 6, 119–138

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm232>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.64.247

26 апреля 2023 г., 05:02:18

УДК 512.55

В. М. Петроградский

Рост полинильпотентных многообразий алгебр Ли и быстро растущие целые функции

Изучается функция роста $c_n(\mathbf{V})$ для многообразий алгебр Ли, где $c_n(\mathbf{V})$ есть размерность линейной оболочки полилинейных слов от n различных букв в свободной алгебре $F(\mathbf{V}, X)$ многообразия $\mathbf{V}$. Каждому нетривиальному многообразию $\mathbf{V}$ алгебр Ли ставится в соответствие функция сложности $\mathcal{C}(\mathbf{V}, z)$, являющаяся целой функцией комплексного переменного. В случае полинильпотентных многообразий $\mathbf{V}$ алгебр Ли получены оценки на функцию сложности, она в большинстве случаев имеет бесконечный порядок. Изучается связь между ростом быстро растущей целой функции и асимптотикой ее коэффициентов ряда Тейлора. Основной результат – асимптотика для функции $c_n(\mathbf{V})$ в случае полинильпотентного многообразия $\mathbf{V}$. Доказан также аналог теоремы Регева для алгебр Ли о верхней оценке на рост в случае произвольного многообразия. В результате уточнена шкала сверхэкспоненциального роста многообразий алгебр Ли, предложенная автором ранее.

Библиография: 16 названий.

§1. Введение: рост многообразий алгебр Ли

Пусть H – алгебра Ли над полем K . Пусть $F = F(X)$ – свободная алгебра Ли от счетного набора свободных образующих $X = \{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}$. Тогда $0 \neq f \in F$ называется *тождеством в H* , если для любых $a_i \in H$, $i \in \mathbb{N}$, и гомоморфизма $\varphi: F \rightarrow H$, $\varphi(x_i) = a_i$, $i \in \mathbb{N}$, выполнено $\varphi(f) = 0$. Пусть $I \subset F$, тогда класс всех алгебр Ли $\mathbf{V}$, удовлетворяющих всем тождествам из I , называется *многообразием*. Множество всех тождеств $\mathbf{V}(X)$, выполненных в данном многообразии $\mathbf{V}$, является идеалом в $F(X)$, и можно рассмотреть $F(\mathbf{V}, X) = F(X)/\mathbf{V}(X)$ – свободную алгебру счетного ранга для многообразия $\mathbf{V}$. Она обладает тем свойством, что $\forall H \in \mathbf{V}, \forall a_i \in H, i \in \mathbb{N}, \exists! \varphi: F(\mathbf{V}, X) \rightarrow H: \varphi(x_i) = a_i, i \in \mathbb{N}$. Многообразие называется *нетривиальным*, если в нем выполнено хотя бы одно ненулевое тождество. Более подробно с теорией многообразий алгебр Ли можно ознакомиться по монографии [1].

Пусть $P_n(\mathbf{V}) \subset F(\mathbf{V}, X)$ – множество полилинейных элементов от $x_1, \dots, x_n$. А именно, $P_n(\mathbf{V})$ есть линейная оболочка мономов от $x_1, \dots, x_n$ (точнее, их образов в $F(\mathbf{V}, X)$) таких, что каждая буква x_i , $i = 1, \dots, n$, входит в моном ровно один раз. Для данного многообразия $\mathbf{V}$ возникает функция роста тождеств

$$c_n(\mathbf{V}) = c_n(F(\mathbf{V}, X), X) = \dim_K P_n(\mathbf{V}), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-01-00146).

Нетрудно видеть, что для другого набора различных элементов $x_{i_1}, \dots, x_{i_n} \in X$ мы получаем то же самое число. Поведение последовательности $c_n(\mathbf{V})$ есть важная характеристика многообразия $\mathbf{V}$.

Аналогичные определения имеют место для ассоциативных алгебр и их тождеств. О росте тождеств ассоциативных алгебр известно следующее.

ТЕОРЕМА 1.1 (Регев [2], см. также [1]). *Пусть $\mathbf{V}$ – многообразие ассоциативных алгебр, в котором выполнено нетривиальное тождество степени d . Тогда*

$$c_n(\mathbf{V}) \leq C^n, \quad n \in \mathbb{N}, \quad C = (d-1)^2.$$

Напомним определение полинильпотентного многообразия алгебр Ли $\mathbf{N}_{s_q} \cdots \cdots \mathbf{N}_{s_2} \mathbf{N}_{s_1}$, соответствующего набору натуральных чисел $(s_q, \dots, s_2, s_1)$. Если $q = 1$, то получаем многообразие нильпотентных алгебр Ли $\mathbf{N}_{s_1}$, задаваемое тождеством

$$T_1(x_1, \dots, x_{s_1}) = [x_1, \dots, x_{s_1}] \equiv 0.$$

Лиевы скобки считаем левонормированными, т.е.

$$[a_1, \dots, a_n] = [\dots [a_1, a_2], \dots, a_n].$$

Если построено тождество полинильпотентности $T_{q-1}(x_1, \dots, x_t)$, задающее многообразие $\mathbf{N}_{s_{q-1}} \cdots \mathbf{N}_{s_1}$, то многообразие $\mathbf{N}_{s_q} \cdots \mathbf{N}_{s_1}$ задается тождеством

$$\begin{aligned} T_q(x_{11}, \dots, x_{ts_q}) \\ = [T_{q-1}(x_{11}, \dots, x_{t1}), T_{q-1}(x_{12}, \dots, x_{t2}), \dots, T_{q-1}(x_{1s_q}, \dots, x_{ts_q})] \equiv 0, \end{aligned}$$

где x_{ij} , $1 \leq i \leq t$, $1 \leq j \leq s_q$, – различные элементы из X . Как легко видеть, $\mathbf{N}_{s_q} \cdots \mathbf{N}_{s_1}$ состоит из всех таких алгебр Ли H , что существует цепочка идеалов $0 = H_{q+1} \subset H_q \subset \cdots \subset H_1 = H$, $H_i/H_{i+1} \in \mathbf{N}_{s_i}$. В случае $s_q = \cdots = s_2 = s_1$ получаем многообразие разрешимых алгебр Ли $\mathbf{A}^q$.

Рост многообразий алгебр Ли не выше экспоненциального достаточно хорошо изучен (см. обзор [3]). Однако, в отличие от ассоциативных алгебр (см. теорему 1.1) уже для многообразия $\mathbf{AN}_2$ рост *сверхэкспоненциален* [4] (т.е. сверхэкспоненциального роста, в некотором смысле такой рост наиболее типичен для алгебр Ли).

В [5] была предложена шкала типов сверхэкспоненциального роста, в терминах которой был описан рост полинильпотентных многообразий (см. теорему 2.1). Цель настоящей статьи – более точное описание роста полинильпотентных многообразий (теорема 2.2, см. также лемму 3.3). В результате возникает более точная шкала типов сверхэкспоненциального роста (§2). Основным инструментом является функция сложности многообразия, изучаются оценки на ее рост (§3). Самостоятельный интерес представляет асимптотика функции сложности для полинильпотентного многообразия, полученная в теореме 3.2. В §4 изучается асимптотика роста коэффициентов быстро растущих целых функций, с помощью которой и доказываются верхние оценки в теореме 2.2. В §5 непосредственными вычислениями получены нижние оценки. В §6 мы доказываем аналог теоремы 1.1 для алгебр Ли (теорема 2.3).

§ 2. Уточнение шкалы роста для PI-алгебр Ли и рост полинильпотентных многообразий

В работе [5] возникли следующие типы сверхэкспоненциального роста. Введем обозначения

$$\begin{aligned} \ln^{(1)} x &= \ln x, \quad \ln^{(s+1)} x = \ln(\ln^{(s)} x), \\ \exp^{(1)} x &= \exp x, \quad \exp^{(s+1)} x = \exp(\exp^{(s)} x), \quad s \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Рассмотрим серию функций натурального аргумента $\Psi_\alpha^q(n)$, $q = 2, 3, \dots$, с вещественным параметром α :

$$\Psi_\alpha^q(n) = \begin{cases} (n!)^{(\alpha-1)/\alpha}, & \alpha > 1, q = 2, \\ \frac{n!}{(\ln^{(q-2)} n)^{n/\alpha}}, & \alpha > 0, q = 3, 4, \dots \end{cases}$$

Пусть $f(n)$ — функция натурального аргумента, мы будем сравнивать ее с нашими эталонными функциями следующим образом. Пусть $\tau_\gamma(n)$ — функция натурального аргумента, возрастающая и непрерывная относительно вещественного параметра γ . Пусть число $c \in \mathbb{R}$ фиксировано. Введем обозначения:

$$\begin{aligned} f(n) \sim^c \tau_c(n) &\iff \inf\{\gamma > 0 \mid f(n) \stackrel{a}{\leq} \tau_\gamma(n)\} = c, \\ f(n) \approx^c \tau_c(n) &\iff \inf\{\gamma > 0 \mid f(n) \stackrel{a}{\leq} \tau_\gamma(n)\} = \sup\{\gamma > 0 \mid \tau_\gamma(n) \stackrel{a}{\leq} f(n)\} = c, \end{aligned}$$

где $f(n) \stackrel{a}{\leq} g(n)$ для двух функций натурального аргумента обозначает, что $\exists N \forall n \geq N, f(n) \leq g(n)$. Аналогично вводится это обозначение и для функций вещественного аргумента. Разница между $\sim^c$ и $\approx^c$ состоит в том, что во втором случае получаем аппроксимацию функции $f(n)$ эталонными функциями $\tau_\gamma(n)$ с обеих сторон:

$$\begin{aligned} f(n) \approx^c \tau_c(n) &\iff \forall \varepsilon > 0 \exists N: \tau_{c-\varepsilon}(n) \leq f(n) \leq \tau_{c+\varepsilon}(n), \quad n \geq N \\ &\iff \exists \varepsilon(n): \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}; f(n) = \tau_{c+\varepsilon(n)}(n); \lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon(n) = 0. \end{aligned}$$

(Эквивалентность этих условий легко проверяется.) В первом же случае функция $f(n)$ аппроксимируется эталонными функциями только сверху. Основной результат [5] состоит в следующем.

ТЕОРЕМА 2.1 [5]. Пусть $\mathbf{V} = \mathbf{N}_{s_q} \cdots \mathbf{N}_{s_1}$, $q \geq 2$, — полинильпотентное многообразие. Тогда существует такая бесконечно малая, что

$$c_n(\mathbf{V}) = \Psi_{s_1+o(1)}^q(n) = \begin{cases} (n!)^{(s_1+o(1)-1)/s_1}, & q = 2, \\ \frac{n!}{(\ln^{(q-2)} n)^{n/(s_1+o(1))}}, & q = 3, 4, \dots \end{cases}$$

Здесь и далее, если в соотношение входит кратный логарифм, то имеется в виду, что оно верно с момента, когда этот логарифм определен и положителен. В [5] утверждение этой теоремы было записано в иной форме: $c_n(\mathbf{V}) \approx^{s_1} \Psi_{s_1}^q(n)$. Для более точного описания роста рассмотрим функции с двумя параметрами α, β :

$$\Psi_{\alpha,\beta}^q(n) = \begin{cases} (n!)^{(\alpha-1)/\alpha} \beta^{n/\alpha}, & \alpha \geq 1, \beta > 0, q = 2, \\ \frac{n! \cdot (\beta/\alpha)^{n/\alpha}}{(\ln^{(q-2)} n)^{n/\alpha}}, & \alpha > 0, \beta > 0, q = 3, 4, \dots \end{cases}$$

Сформулируем основной результат настоящей статьи.

ТЕОРЕМА 2.2. Пусть $\mathbf{V} = \mathbf{N}_{s_q} \cdots \mathbf{N}_{s_1}$, $q \geq 2$, — полинильпотентное многообразие. Тогда существует такая бесконечно малая, что

$$c_n(\mathbf{V}) = \Psi_{s_1, s_2 + o(1)}^q(n) = \begin{cases} (n!)^{(s_1-1)/s_1} (s_2 + o(1))^{n/s_1}, & q = 2, \\ \frac{n!}{(\ln^{(q-2)} n)^{n/s_1}} \left(\frac{s_2 + o(1)}{s_1} \right)^{n/s_1}, & q = 3, 4, \dots \end{cases}$$

В результате мы получаем более точную асимптотику по сравнению с предыдущей теоремой. В [5] для доказательства теоремы 2.1 были использованы непосредственные оценки на коэффициенты. В настоящей же статье кроме прямых вычислений мы существенно используем целые функции и теорию их роста. Для $q = 2$ верхняя оценка $c_n(\mathbf{V}) \sim^{s_2} \Psi_{s_1, s_2}^q(n)$ была получена также в [5].

О том, что наша шкала роста является достаточно полной, говорит следующий результат настоящей статьи (он является улучшением оценки из [5]).

ТЕОРЕМА 2.3. Пусть $\mathbf{V}$ — многообразие алгебр Ли, удовлетворяющее не тривиальному тождеству степени $m > 3$. Тогда существует такая бесконечно малая (зависящая только от m), что

$$c_n(\mathbf{V}) \leq \frac{n!}{(\ln^{(m-3)} n)^n} (1 + o(1))^n.$$

Для изучения роста не выше экспоненциального типично использование диаграмм Юнга [3]. Согласно теореме 2.2 уже для многообразия $\mathbf{V} = \mathbf{AN}_2$ имеем $c_n(\mathbf{V}) = \sqrt{n!} (1 + o(1))^n$. Как легко видеть, для неприводимого представления π симметрической группы S_n имеем $\dim_K \pi < \sqrt{n!}$; число неприводимых представлений мало:

$$\rho(n) \approx \frac{1}{4n\sqrt{3}} \exp\left(\pi\sqrt{\frac{2n}{3}}\right).$$

Значит, с точки зрения размерности, S_n -модуль $P_n(\mathbf{V})$ может содержать любой неприводимый S_n -модуль, может быть, даже почти все неприводимые модули. Это говорит об ограниченности техники диаграмм Юнга для большинства многообразий алгебр Ли.

Отметим, что интересным объектом является также *рост конечно-порожденных алгебр*. Оказалось, что для PI-алгебр Ли возникает целая серия типов роста, промежуточных между полиномиальным и экспоненциальным ростами [6]. Также в [7] для произвольного полинильпотентного многообразия $\mathbf{V}$ найдена асимптотика роста его свободной алгебры $L = F_k(\mathbf{V})$ ранга k .

§ 3. Функции сложности для некоторых многообразий и их рост

Напомним, что для свободной алгебры Ли $F = F(X)$ мы имеем $c_n(F) = (n-1)!$. Для данного многообразия $\mathbf{V}$ определяется *функция сложности*

$$\mathcal{C}(\mathbf{V}, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n(\mathbf{V})}{n!} z^n, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Тогда верхнюю оценку на рост многообразия алгебр Ли [8] можно переформулировать другим образом.

ТЕОРЕМА 3.1 [9]. *Если $\mathbf{V}$ – нетривиальное многообразие алгебр Ли, то $\mathcal{C}(\mathbf{V}, z)$ – целая функция комплексного аргумента.*

Для некоторых многообразий можно в явном виде вычислить функцию сложности.

ЛЕММА 3.1 [5]. *Разрешимое многообразие $\mathbf{A}^q$ имеет следующую функцию сложности:*

$$\mathcal{C}(\mathbf{A}^q, z) = \sigma_0(z) + \cdots + \sigma_{q-1}(z),$$

где

$$\sigma_0(z) = z, \quad \sigma_{i+1} = 1 + (\sigma_i(z) - 1) \exp(\sigma_i(z)), \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

ЛЕММА 3.2 [5]. *Для многообразия $\mathbf{N}_c \mathbf{A}$ имеем*

$$\mathcal{C}(\mathbf{N}_c \mathbf{A}, z) = z + \sum_{i=1}^c \frac{1}{i} (1 + \exp(z)(z-1))^i. \quad (1)$$

Функции сложности оказываются полезными для вычисления асимптотики роста многообразий. Проиллюстрируем это на следующем примере. Пишем $f(n) \approx g(n)$ при $n \rightarrow \infty$ в том и только том случае, если $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n)/g(n) = 1$.

ЛЕММА 3.3. *Для многообразия $\mathbf{N}_c \mathbf{A}$ имеем $c_n(\mathbf{N}_c \mathbf{A}) \approx c^{n-c-1} n^c$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что для разложения целой функции $f(z) = z^k \exp(\mu z)$, $k \in \mathbb{N}$, вида

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} z^n$$

имеем соотношение $a_n \approx \mu^{n-k} n^k$. Действительно, вычисления показывают, что для $n \geq k$

$$a_n = \mu^{n-k} \frac{n!}{(n-k)!} \approx \mu^{n-k} n^k.$$

Поэтому наибольший рост в (1) после раскрытия скобок даст слагаемое $\frac{1}{c} z^c \exp(cz)$, что и дает требуемое соотношение.

Рассмотрим функцию сложности в более общем случае. Пусть имеется алгебра (группоид), порожденная множеством $X = \{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}$, и предположим что A – подпространство в алгебре (множество элементов в группоиде).

Для любого набора $Y = \{x_{i_1}, \dots, x_{i_n}\} \subset X$ различных элементов через $P_n(A, Y)$ мы обозначим линейную оболочку (множество) всех полилинейных элементов степени n от Y в A . Допустим, что размерность этой линейной оболочки (число элементов) $c_n(A, Y)$ не зависит от выбора Y , а зависит только от n . Тогда обозначим $c_n = c_n(A, Y)$; в этом случае будем говорить, что для

A определена *функция сложности* относительно множества X , которую мы зададим следующим образом:

$$\mathcal{C}(A, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n!} z^n$$

(сумма берется от $n = 0$, $c_0 = 1$ для ассоциативных алгебр и группоидов с единицей). Отметим, что A не обязательно состоит из полилинейных элементов. Функция сложности — это один из примеров *экспоненциальной производящей функции* [10].

ЛЕММА 3.4. Пусть Γ — группоид (алгебра), порожденный множеством $X = \{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}$. Допустим, что для подмножеств (подпространств) $A \subset \Gamma$, $B \subset \Gamma$ определены функции сложности. Пусть также все элементы $a * b$, $a \in A$, $b \in B$, множества $A * B \subset \Gamma$ различны (линейно независимы), где “ $*$ ” обозначает произведение в группоиде (алгебре). Тогда $A * B$ обладает функцией сложности, причем $\mathcal{C}(A * B, z) = \mathcal{C}(A, z)\mathcal{C}(B, z)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО основано на соотношении

$$c_n(A * B) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} c_i(A) c_{n-i}(B),$$

где биномиальные коэффициенты соответствуют всевозможным разбиениям множества $\{x_1, \dots, x_n\}$ на два подмножества. Отсюда и вытекает соотношение для рядов.

ЛЕММА 3.5 [9]. Пусть $L = F(\mathbf{V}, X)$ — свободная алгебра Ли некоторого многообразия (или алгебра Ли, для которой определена функция сложности), порожденная множеством $X = \{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}$. Тогда для универсальной обертывающей алгебры $U(L)$ также определена функция сложности, причем $\mathcal{C}(U(L), z) = \exp(\mathcal{C}(L, z))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО в [9] основано на прямых вычислениях; мы приведем наглядное доказательство. Воспользуемся стандартной конструкцией универсальной обертывающей алгебры:

$$U(L) \cong T(L) / \text{Id}\{x \otimes y - y \otimes x - [x, y] \mid x, y \in L\},$$

$$T(L) = \bigoplus_{m=0}^{\infty} T^m, \quad T^m = \underbrace{L \otimes \dots \otimes L}_m.$$

По лемме 3.4 получаем $\mathcal{C}(T^m, z) = \mathcal{C}(L, z)^m$. Так как мы учитываем только полилинейные элементы, элементов $y_{j_1} \otimes \dots \otimes y_{j_m} \in T^m$, $y_{j_i} \in L$, в $m!$ раз больше, чем соответствующих упорядоченных элементов в $U(L)$. В результате получаем

$$\mathcal{C}(U(L), z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\mathcal{C}(T^m, z)}{m!} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\mathcal{C}(L, z)^m}{m!} = \exp(\mathcal{C}(L, z)).$$

Наши дальнейшие построения будем производить внутри свободной алгебры Ли $F(X)$ со свободным порождающим множеством $X = \{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}$. Допустим, что в ней содержится подалгебра Ли $\tilde{F} = \tilde{F}(\tilde{X})$ со свободным порождающим множеством $\tilde{X} = \{\tilde{x}_i \mid i \in \mathbb{N}\}$. Предположим, что для $\tilde{X}$ определена функция сложности $\mathcal{C}(\tilde{X}, z) = \varphi(z)$ (далее все функции сложности рассматриваются относительно X).

ЛЕММА 3.6. Пусть $\tilde{F} = \bigoplus_{i=1}^{\infty} \tilde{F}_i$ – естественная градуировка, заданная множеством $\tilde{X}$. Тогда $\mathcal{C}(\tilde{F}_i, z) = \varphi^i(z)/i$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 3.4 множество всех ассоциативных $\tilde{X}$ -слов длины i имеет функцию сложности $\varphi^i(z)$. Напомним, что ассоциативное слово называется *регулярным*, если из $x = ab$ вытекает $x > ba$ (в смысле лексикографического порядка слева направо). Регулярные слова взаимно однозначно соответствуют базисным элементам в алгебре Ли [11]. Из каждого полилинейного $\tilde{X}$ -слова регулярное получается циклическими сдвигами букв так, чтобы максимальная буква была первой. Отсюда и следует результат.

Введем обозначение $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \prec \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \iff a_n \leq b_n, n \geq 0$. Обозначим также

$$A_d(z) = \frac{z^d}{d}, \quad B_d(z) = \sum_{i=1}^d \frac{z^i}{i}, \quad d \geq 1,$$

$$G(z) = \exp(z) - z - 1, \quad H(z) = z \exp(z).$$

По теореме Шишова (см. [1]) $(\tilde{F})^{d+1}$ – свободная алгебра Ли.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. Для $(\tilde{F})^{d+1}$, $d \geq 1$, существует множество свободных порождающих Y такое, что верны оценки

$$G(A_d(\varphi(z))) \prec \mathcal{C}(Y, z) \prec H(B_d(\varphi(z))). \quad (2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\Gamma = \Gamma(\overline{X})$ – свободный группоид неассоциативных мономов на множестве $\overline{X} = \{\overline{x}_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ и “*” – операция в нем. Для удобства отождествим элементы из Γ с их каноническими образами в $\tilde{F}$ при отображении $\overline{x}_i \rightarrow \tilde{x}_i, i \in \mathbb{N}$. Степень $\deg \overline{x}$ элемента $\overline{x} \in \Gamma$ относительно $\overline{X}$ определим естественным образом.

Заметим, что $S = \Gamma \cap (\tilde{F})^{d+1}$ – двусторонний идеал в Γ . Пусть R – базис Холла в $\tilde{F}$, т.е. $u < v$, если степень u меньше степени v ; кроме того, пусть $\tilde{x}_i < \tilde{x}_j$ для $i < j$. Тогда из $u \in R \setminus S, v \in R \cap S$ следует, что $u < v$. Элемент $w \in S$ называется *S-приводимым* тогда и только тогда, когда $w = u * v, u, v \in S$; иначе он называется *S-неприводимым*.

Множество Y всех S -неприводимых элементов в $R \cap S$ есть свободное порождающее множество для $(\tilde{F})^{d+1}$ [1, 2.4.2]. Обозначим $Z = R \setminus S = \{w \in R \mid \deg w \leq d\}$. Если $w \in Y, w = u * v, u, v \in R$, то по определению базиса Холла $u > v$, а значит, $v \in Z$. Возможны два случая: $u \in Z$ либо $u \notin Z$; в последнем случае $u = u_1 * u_2$,

$u_1 > u_2$, $u_2 \leq v$, значит, $u_2 \in Z$; далее мы продолжаем процесс разложения u_1 . Таким образом, $w \in Y$ можно единственным образом представить в виде

$$w = [z_{i_1}, z_{i_2}, \dots, z_{i_n}], \quad z_{i_j} \in Z, \quad n \geq 2; \quad (3)$$

$$z_{i_1} > z_{i_2} \leq \dots \leq z_{i_n}, \quad [z_{i_1}, z_{i_2}] \notin Z, \quad [z_{i_1}, z_{i_2}] \in R. \quad (4)$$

Легко также видеть, что все элементы данного вида принадлежат Y . Оценим $\mathcal{C}(Y, z)$. По лемме 3.6

$$\mathcal{C}(Z, z) = \sum_{i=1}^d \frac{\varphi^i(z)}{i} = B_d(\varphi(z)).$$

Пусть Y_1 — множество полилинейных элементов вида (3), где последние два условия в (4) опущены. Тогда

$$Y_1 \subset Y_2 = \{[z_{i_1}, z_{i_2}, \dots, z_{i_n}] \mid \forall z_{i_1}, z_{i_2} \leq z_{i_2} \leq \dots \leq z_{i_n}, z_{i_j} \in Z, n \geq 1\}.$$

Упорядоченная цепочка из z_{i_j} соответствует базису $U(\tilde{L})$. Применяя леммы 3.4, 3.5, получаем

$$\mathcal{C}(Y, z) \prec \mathcal{C}(Y_2, z) = \mathcal{C}(Z, z) (\exp(\mathcal{C}(Z, z))) = H(B_d(\varphi(z))). \quad (5)$$

Для оценки функции $\mathcal{C}(Y, z)$ снизу рассмотрим множество $\overline{Z} = \{x \in Z \mid \deg x = d\}$, тогда $\mathcal{C}(\overline{Z}, z) = \varphi^d(z)/d = A_d(\varphi(z))$. Заметим, что для $z_{i_j} \in \overline{Z}$ два последних условия в (4) выполнены. Тогда

$$\overline{Y} = \{[z_{i_1}, z_{i_2}, \dots, z_{i_n}] \mid z_{i_j} \in \overline{Z}, n \geq 2, z_{i_1} > z_{i_2} \leq \dots \leq z_{i_n}\} \subset Y.$$

Заметим, что неравенства на самом деле строгие, меняя элементы z_{i_1}, z_{i_2} , получаем множество с меньшей функцией сложности, для которого, как и выше,

$$\begin{aligned} \overline{\overline{Y}} &= \{[z_{i_1}, z_{i_2}, \dots, z_{i_n}] \mid z_{i_j} \in \overline{Z}, n \geq 2, z_{i_1} \leq z_{i_2} \leq \dots \leq z_{i_n}\}; \\ \mathcal{C}(Y, z) &\succ \mathcal{C}(\overline{\overline{Y}}, z) = \exp(\mathcal{C}(\overline{Z}, z)) - \mathcal{C}(\overline{Z}, z) - 1 = G(A_d(\varphi(z))). \end{aligned} \quad (6)$$

Оценки (5), (6) являются искомыми.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2. Пусть $\mathbf{V} = \mathbf{N}_{s_q} \cdots \mathbf{N}_{s_1}$, $q \geq 2$, — полилиньпотентное многообразие. Тогда для его функции сложности имеют место оценки

$$\sum_{i=1}^q A_{s_i}(\alpha_i(z)) \prec \mathcal{C}(\mathbf{V}, z) \prec \sum_{i=1}^q B_{s_i}(\beta_i(z)),$$

где $\alpha_1(z) = \beta_1(z) = z$, $\alpha_{i+1}(z) = G(A_{s_i}(\alpha_i(z)))$, $\beta_{i+1}(z) = H(B_{s_i}(\beta_i(z)))$, $i = 1, \dots, q$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что согласно комбинаторной интерпретации функций $G(z), H(z)$ в предыдущем предложении из соотношения для двух функций сложности $f(z) \prec g(z)$ всегда следует $H(f(z)) \prec H(g(z)), G(f(z)) \prec G(g(z))$.

Пусть $F = F(X)$ – свободная алгебра Ли, рассмотрим ряд идеалов $F = F_1 \supset F_2 \supset \dots \supset F_{q+1}$, $F_{i+1} = (F_i)^{s_i}$, $i = 1, \dots, q$. Докажем по индукции, что для F_i существует множество свободных порождающих X_i такое, что

$$\alpha_i(z) \prec \mathcal{C}(X_i, z) \prec \beta_i(z). \quad (7)$$

Для $i = 1$ положим $X_1 = X$, тогда $\mathcal{C}(X_1, z) = \alpha_1(z) = \beta_1(z) = z$. Для $i = k > 1$ по предположению индукции имеем свободное порождающее множество X_k для F_k , причем $\alpha_k(z) \prec \mathcal{C}(X_k, z) \prec \beta_k(z)$. Применяем предложение 3.1 в случае $\tilde{F} = F_k$, $d = s_k$, $\varphi(z) = \mathcal{C}(X_k, z)$, получаем свободное порождающее множество $Y = X_{k+1}$ для F_{k+1} , причем

$$\mathcal{C}(X_{k+1}, z) \prec H(B_{s_k}(\mathcal{C}(X_k, z))) \prec H(B_{s_k}(\beta_k(z))) = \beta_{k+1}(z)$$

согласно упомянутой выше монотонности функции $H(z)$. Аналогично получаем нижнюю оценку.

Заметим, что F_i/F_{i+1} – свободная нильпотентная алгебра Ли степени s_i со свободным порождающим множеством X_i [1], $F(\mathbf{V}) \cong F/F_{q+1}$; по лемме 3.6 и (7) получаем

$$\mathcal{C}(\mathbf{V}, z) = \sum_{i=1}^q \mathcal{C}(F_i/F_{i+1}, z) = \sum_{i=1}^q B_{s_i}(\mathcal{C}(X_i, z)) \prec \sum_{i=1}^q B_{s_i}(\beta_i(z)).$$

Аналогично получаем нижнюю оценку.

ТЕОРЕМА 3.2. Пусть $\mathbf{V} = \mathbf{N}_{s_q} \cdots \mathbf{N}_{s_1}$, $q \geq 2$, – полинильпотентное многообразие, $f(z) = \mathcal{C}(\mathbf{V}, z)$ – его функция сложности. Тогда

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln^{(q-1)} M_f(r)}{r^{s_1}} = \frac{s_2}{s_1}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как коэффициенты функций сложности вещественны и неотрицательны, при подстановке $z = r \in \mathbb{R}$, $r > 0$, неравенство $\prec$ превращается в обычное неравенство. Если мы для простоты будем считать, что $G(z) = \exp(z)$, то предыдущее предложение даст оценку

$$M_f(r) = \mathcal{C}(\mathbf{V}, r) \geq A_{s_q}(\alpha_q(r)) = \frac{1}{s_q} \exp \left(\underbrace{\frac{s_q}{s_{q-1}} \exp \left(\dots \left(\frac{s_3}{s_2} \exp \left(\frac{s_2}{s_1} r^{s_1} \right) \right) \dots \right)}_{q-1 \text{ раз exp}} \right).$$

Нужная нам оценка получается так же, как и верхняя оценка с использованием функции $H(z)$, но выкладки более громоздки. Тем не менее, они, легко видеть, дают требуемый результат

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln^{(q-1)} M_f(r)}{r^{s_1}} = \frac{s_2}{s_1}.$$

Отметим, что было бы интересно получить для функции сложности произвольного полинильпотентного многообразия явные формулы, аналогичные формулам лемм 3.1, 3.2.

§4. Быстро растущие целые функции

Пусть $f(z)$ – целая функция комплексного аргумента. Обозначим $M_f(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|$. Тогда порядок определяется следующим образом [12], [13]:

$$\text{ord } f = \inf \{ \rho \mid M_f(r) \stackrel{a}{\leq} \exp(r^\rho) \} = \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln \ln M_f(r)}{\ln r}.$$

Для уже известного порядка $\rho = \text{ord } f$ определяется тип [12], [13]:

$$\text{typ } f = \inf \{ \sigma \mid M_f(r) \stackrel{a}{\leq} \exp(\sigma r^\rho) \} = \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln M_f(r)}{r^\rho}.$$

Хорошо известна формула Адамара, связывающая рост целой функции и поведение коэффициентов ее ряда Тейлора.

ТЕОРЕМА 4.1 [13, 3.2.3]. *Для целой функции $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ порядка ρ и типа σ имеет место соотношение*

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} n^{1/\rho} \sqrt[n]{|a_n|} = (\sigma e \rho)^{1/\rho}.$$

По аналогии можно определить порядок уровня q и тип уровня q (для уже известного $\text{ord}_q f = \rho$):

$$\begin{aligned} \text{ord}_q f &= \inf \{ \rho \mid M_f(r) \stackrel{a}{\leq} \exp^{(q)}(r^\rho) \} = \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln^{(q+1)} M_f(r)}{\ln r}, \\ \text{typ}_q f &= \inf \{ \sigma \mid M_f(r) \stackrel{a}{\leq} \exp^{(q)}(\sigma r^\rho) \} = \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln^{(q)} M_f(r)}{r^\rho}. \end{aligned}$$

В этих обозначениях из теоремы 3.2 вытекает

СЛЕДСТВИЕ 4.1. *Пусть $\mathbf{V} = \mathbf{N}_{s_q} \cdots \mathbf{N}_{s_1}$, $q \geq 2$, – полинильпотентное многообразие, $f(z) = \mathcal{C}(\mathbf{V}, z)$ – его функция сложности. Тогда*

$$\text{ord}_{q-1} f(z) = s_1, \quad \text{typ}_{q-1} f(z) = \frac{s_2}{s_1}.$$

Имеют место формулы, аналогичные формуле Адамара, для более быстро растущих функций (см. обзоры [14], [15]). В ряде цитируемых статей сравнивается рост $\ln^{(s)} M_f(r)$ с ростом $\ln^{(t)} r$, $t > 1$. Более общий характер имеет теорема 2 в [16], но наш случай под ее условия также не подходит (обратим внимание на то, что в ее формулировке допущена неточность: классу L^0 должна принадлежать сама функция $\beta(x)$, а не обратная к ней). Приведем доказательство необходимого нам утверждения.

ТЕОРЕМА 4.2. *Пусть $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ – целая функция. Тогда для любых фиксированных $q \in \mathbb{N}$, $q \geq 3$; $\lambda > 0$ имеет место равенство*

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln^{(q-1)} M_f(r)}{r^\lambda} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \ln^{(q-2)} n |a_n|^{\lambda/n}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \ln^{(q-1)} M_f(r) r^{-\lambda} = \sigma < \infty$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует r_0 такое, что

$$M_f(r) \leq \exp^{(q-1)}(\bar{\sigma} r^\lambda), \quad r \geq r_0, \quad \bar{\sigma} = \sigma + \varepsilon.$$

По формулам Коши [12] получаем оценку

$$|a_n| \leq \frac{\exp^{(q-1)}(\bar{\sigma} r^\lambda)}{r^n}.$$

Подставляем $r_0 = (1/\bar{\sigma} \ln^{(q-2)}(n/\ln n))^{1/\lambda}$, тогда

$$|a_n| \leq \frac{\exp(n/\ln n) \bar{\sigma}^{n/\lambda}}{(\ln^{(q-2)}(n/\ln n))^{n/\lambda}} = \frac{(1+o(1))^n \bar{\sigma}^{n/\lambda}}{((1+o(1)) \ln^{(q-2)} n)^{n/\lambda}} = \frac{(\bar{\sigma} + o(1))^{n/\lambda}}{(\ln^{(q-2)} n)^{n/\lambda}}.$$

В силу произвольности выбранного $\varepsilon > 0$ получаем

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \ln^{(q-2)} n |a_n|^{\lambda/n} \leq \sigma = \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln^{(q-1)} M_f(r)}{r^\lambda}. \quad (8)$$

В случае $\sigma = \infty$ неравенство (8) очевидно.

Для получения обратной оценки предположим, что $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \ln^{(q-2)} n |a_n|^{\lambda/n} = \sigma < \infty$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ с некоторого n_0 имеем

$$|a_n| \leq \frac{\bar{\sigma}^{n/\lambda}}{(\ln^{(q-2)} n)^{n/\lambda}}, \quad n \geq n_0, \quad \bar{\sigma} = \sigma + \varepsilon.$$

Оцениваем модуль n -го члена ряда Тейлора

$$|a_n r^n| \leq \frac{\bar{\sigma}^{n/\lambda} r^n}{(\ln^{(q-2)} n)^{n/\lambda}} = \psi_r(n), \quad n \geq n_0, \quad (9)$$

$$\ln \psi_r(n) = n \ln(\bar{\sigma}^{1/\lambda} r) - \frac{n}{\lambda} \ln^{(q-1)} n.$$

Для нахождения $\max_{n > n_0} \psi_r(n)$ получаем уравнение

$$(\ln \psi_r(x))' = \ln(\bar{\sigma}^{1/\lambda} r) - \frac{1}{\lambda} \ln^{(q-1)} x - \frac{1}{\lambda \ln^{(q-2)} x \dots \ln^{(1)} x} = 0. \quad (10)$$

Без ограничения общности мы можем считать n_0 достаточно большим, чтобы знаменатель последней дроби был больше единицы. Выбираем $r_1 = r_1(n_0)$ так, чтобы $(\ln \psi_{r_1}(n_0))' > 0$ при $r > r_1(n_0)$. Как легко видеть, для точки $n_* = n_*(r) = [\exp^{(q-2)}(\bar{\sigma} r^\lambda)] + 1$ при подстановке в (10) получаем $(\ln \psi_r(n_*))' < 0$. Таким образом, для решения $\xi = \xi(r)$ уравнения (10) получаем оценки $n_0 < \xi(r) < n_*(r)$. Для оценки величины максимума из (9), (10) получаем

$$\ln \psi_r(\xi) = \frac{\xi}{\lambda \ln^{(q-2)} \xi \dots \ln^{(1)} \xi} < \xi < n_* = [\exp^{(q-2)}(\bar{\sigma} r^\lambda)] + 1,$$

$$\psi_r(\xi) \leq \exp^{(q-1)}(\bar{\sigma} r^\lambda) e.$$

Для оценки “хвоста” рассмотрим неравенство

$$\sqrt[n]{|a_n| r^n} \leq \frac{\bar{\sigma}^{1/\lambda} r}{(\ln^{(q-2)} n)^{1/\lambda}} < \frac{1}{2},$$

оно выполнено, как только $n > n_1(r) = [\exp^{(q-2)}(\bar{\sigma}(2r)^\lambda)] + 1$. Тогда

$$\sum_{n=n_1+1}^{\infty} |a_n r^n| < \sum_{n=n_1+1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n < 1.$$

В результате получаем

$$\begin{aligned} M_f(r) &\leq \sum_{n=1}^{n_0} |a_n r^n| + \sum_{n=n_0+1}^{n_1} |a_n r^n| + \sum_{n=n_1+1}^{\infty} |a_n r^n| \\ &\leq C + 1 + n_1(r) \max_{n_0 < n \leq n_1} |a_n r^n| \leq C + 1 + n_1(r) \psi_r(\xi(r)) \\ &\leq C + 1 + ([\exp^{(q-2)}(\bar{\sigma}(2r)^\lambda)] + 1) \cdot \exp^{(q-1)}(\bar{\sigma} r^\lambda) e \\ &= \exp^{(q-1)}((\bar{\sigma} + o(1)) r^\lambda). \end{aligned}$$

В силу произвольности выбранного $\varepsilon > 0$

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln^{(q-1)} M_f(r)}{r^\lambda} \leq \sigma = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \ln^{(q-2)} n |a_n|^{\lambda/n}. \quad (11)$$

В случае $\sigma = \infty$ соотношение (11) очевидно. Оценки (8), (11) дают требуемый результат.

Следующая лемма нам понадобится ниже.

ЛЕММА 4.1. Пусть $f(z)$ – целая функция. Тогда $g(z) = \int_0^z f(z) dz$ имеет те же порядок и тип того же уровня, что и $f(z)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В случае $q = 1$ этот факт хорошо известен. Пусть $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ и $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$. Тогда $b_n = a_{n-1}/n$, $n > 0$. Воспользуемся теоремой 4.2

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \ln^{(q-1)} n |b_n|^{\lambda/n} &= \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \ln^{(q-1)}(n+1) \left| \frac{a_n}{n+1} \right|^{\lambda/(n+1)} \\ &= \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \exp \left(\ln^{(q)}(n+1) + \frac{\lambda \ln |a_n|}{n+1} - \frac{\lambda \ln(n+1)}{n+1} \right) \\ &= \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \exp \left(\ln^{(q)} n + \frac{\lambda \ln |a_n|}{n+1} + o(1) \right) \\ &= \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \exp \left(\frac{n}{n+1} \left(\ln^{(q)} n + \frac{\lambda}{n} \ln |a_n| \right) + \frac{\ln^{(q)} n}{n+1} + o(1) \right) \\ &= \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \ln^{(q-1)} n |a_n|^{\lambda/n}. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ВЕРХНИХ ОЦЕНОК ТЕОРЕМЫ 2.2. Напомним, что в нашем случае $\mathcal{C}(L, z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$, $a_n = c_n(\mathbf{V})/n!$. Если $q \geq 3$, то по теоремам 3.2, 4.2 имеем

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \ln^{(q-2)} n |a_n|^{s_1/n} = \frac{s_2}{s_1},$$

что можно записать в наших обозначениях иначе

$$\begin{aligned} \ln^{(q-2)} n |a_n|^{s_1/n} &\sim_{s_2} \frac{s_2}{s_1}, \quad a_n \sim_{s_2} \frac{(s_2/s_1)^{n/s_1}}{(\ln^{(q-2)} n)^{n/s_1}}, \\ c_n(\mathbf{V}) &= a_n n! \sim_{s_2} \frac{n! \cdot (s_2/s_1)^{n/s_1}}{(\ln^{(q-2)} n)^{n/s_1}}. \end{aligned}$$

Если $q = 2$, то применяем теорему 4.1

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} n^{1/s_1} |a_n|^{1/n} = (s_2 e)^{1/s_1}, \quad c_n(\mathbf{V}) = a_n n! \sim_{s_2} n^{-n/s_1} (s_2 e)^{n/s_1} n!.$$

Подставляем по формуле Стирлинга $n^n \approx n! e^n / \sqrt{2\pi n}$ и получаем требуемый результат $c_n(\mathbf{V}) \sim_{s_2} (n!)^{1-1/s_1} (s_2)^{n/s_1}$.

§ 5. Непосредственные оценки на рост тождеств

Теорема 3.2 дает оценку на функцию сложности произвольного полинильпотентного многообразия $\mathbf{V}$ с обеих сторон, однако теорема 4.2 позволяет получить лишь верхнюю оценку на функцию $c_n(\mathbf{V})$. Нижнюю оценку также вряд ли возможно получить, если дополнительно использовать монотонность функции $c_n(\mathbf{V})$. Поэтому мы будем использовать непосредственные оценки. На языке коэффициентов утверждение леммы 3.5 выглядит следующим образом [9]:

$$c_n(U(L)) = \sum_{\substack{k_1 n_1 + \dots + k_t n_t = n \\ n_1 > n_2 > \dots > n_t}} \frac{n!}{k_1! (n_1!)^{k_1} \dots k_t! (n_t!)^{k_t}} c_{n_1}^{k_1}(L) \dots c_{n_t}^{k_t}(L). \quad (12)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.1. Пусть $\mathbf{V} = \mathbf{N}_c \mathbf{N}_d$. Тогда существует такая бесконечно малая, что

$$c_n(\mathbf{V}) = \Psi_{d, c+o(1)}^2(n) = (n!)^{(d-1)/d} (c + o(1))^{n/d}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Верхняя оценка была получена ранее.

Пусть $L = F(\mathbf{N}_c \mathbf{N}_d, X)$, $X = \{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ и $H = F(\mathbf{N}_d, Y)$, $Y = \{y_i \mid i \in \mathbb{N}\}$. Для оценки снизу роста $c_n(U(H))$ рассмотрим в (12) слагаемое, соответствующее набору $t = 2$, $n_1 = d$, $k_1 = \lfloor n/d \rfloor$; $n_2 = 1$, k_2 — такое, чтобы выполнялось равенство под знаком суммы (12). Напомним, что $c_m(H) = (m-1)!$, $1 \leq m \leq d$; $c_m(H) = 0$,

$m > d$. Данное слагаемое дает оценку, к которой далее применяем формулу Стирлинга

$$\begin{aligned}
c_n(U(H)) &\geq \frac{n!}{d^{n/d}(n/d)!d!} \\
&= \exp\left(n(\ln n - 1) + o(n) - \frac{n}{d} \ln d - \frac{n}{d}(\ln n - \ln d - 1) + o(n)\right) \\
&= \exp\left(\left(1 - \frac{1}{d}\right)\left(n(\ln n - 1) + \frac{1}{2} \ln(2\pi n)\right) + o(n)\right) \\
&= (n!)^{1-1/d}(1 + o(1))^n.
\end{aligned} \tag{13}$$

Найдем нижнюю оценку на рост многообразия $\mathbf{N}_c \mathbf{N}_d$. Строим $\mathbf{N}_c$ -сплетение $W = Z \operatorname{wr}_{\mathbf{N}_c} H$, где $Z = F(\mathbf{N}_c, Z)$, $Z = \{z_i \mid i \in \mathbb{N}\}$, $H = F(\mathbf{N}_d, Y)$, $Y = \{y_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ (см. [1]). Имеем изоморфизм векторных пространств $W \cong \bar{Z} \oplus H$, где $\bar{Z}$ — идеал в W , являющийся свободной алгеброй многообразия $\mathbf{N}_c$ со следующим множеством свободных порождающих: $z_j \circ h_i$, $\{h_i\}$ — упорядоченный базис для $U(H)$, $w \circ u$, $w \in \bar{Z}$, $u \in U(H)$, означает естественное продолжение действия H на $\bar{Z}$. Отображение $\varphi: x_i \mapsto y_i + z_i$, $i \in \mathbb{N}$, продолжается до вложения $\varphi: L \rightarrow W$ [1, 4.4.7].

Разложим $\varphi P_n(L, \{x_1, \dots, x_n\})$ через Y, Z . Мономы, не содержащие z_i , лежат в $P_n(H, \{y_1, \dots, y_n\})$. Остальные мономы, используя тождество Якоби и антикоммутативность, мы представляем в виде линейной комбинации следующих:

$$\begin{aligned}
w &= [w_1, \dots, w_s], \quad w_k = [z_{i_k}, y_{a(k,1)}, \dots, y_{a(k,l_k)}], \quad 1 \leq s \leq c, \quad l_k \geq 0, \\
s + l_1 + \dots + l_s &= n, \quad \{i_1, \dots, i_s\} \cup \{a(k, j) \mid 1 \leq k \leq s, 1 \leq j \leq l_k\} = \{1, \dots, n\}.
\end{aligned}$$

Те же рассуждения, что и в теореме Пуанкаре–Биркгофа–Витта показывают, что эти мономы, в свою очередь, выражаются через следующие:

$$\begin{aligned}
w &= [w_1, \dots, w_s], \quad w_k = z_{i_k} \circ u_k, \\
u_k &\in P_{l_k}(U(H), \{y_{a(k,1)}, \dots, y_{a(k,l_k)}\}), \quad 1 \leq s \leq c, \quad l_k \geq 0, \\
s + l_1 + \dots + l_s &= n, \quad \{i_1, \dots, i_s\} \cup \{a(k, j) \mid 1 \leq k \leq s, 1 \leq j \leq l_k\} = \{1, \dots, n\}.
\end{aligned} \tag{14}$$

Причем если u_k пробегает базис $P_{l_k}(\dots)$ и $i_1 = \max\{i_1, \dots, i_s\}$, то мономы (14) линейно независимы. Зафиксируем $z_1, \dots, z_c \in Z$. Пусть $\tilde{Z}$ — подпространство в $\bar{Z}$, натянутое на мономы, содержащие $z_1, \dots, z_c$; пусть также $\pi: \bar{Z} \rightarrow \tilde{Z}$ — проекция параллельно подпространству мономов вида (14) с иным составом z_{i_j} . Тогда из (14) вытекает

$$\begin{aligned}
&\pi\varphi(P_n(L, \{x_1, \dots, x_n\})) \\
&= \bigoplus_{\substack{c+l_1+\dots+l_c=n; \\ \bigcup_{i=1}^c Y_i = \{y_{c+1}, \dots, y_n\}, |Y_i|=l_i, \\ \{j_1, \dots, j_c\} = \{1, \dots, c\}, j_1=c}} [z_{j_1} \circ P_{l_1}(U(H), Y_1), \dots, z_{j_c} \circ P_{l_c}(U(H), Y_c)]. \tag{15}
\end{aligned}$$

Действительно, при вычислении $\pi\varphi([x_{i_1}, \dots, x_{i_n}])$ мы заменяем x_{i_j} на z_{i_j} , если $i_j \leq c$, и на y_{i_j} в противном случае. Поэтому для любого монома из правой части (15) нетрудно подобрать прообраз относительно $\pi\varphi$. Зафиксируем $l_i = [n/c] - 1$

или $l_i = [n/c]$ так, чтобы $c + l_1 + \dots + l_c = n$. Число способов распределения $y_{c+1}, \dots, y_n$ по $Y_i, i = 1, \dots, c$, оцениваем, используя формулу Стирлинга

$$\frac{(n-c)!}{l_1! \dots l_c!} \geq \frac{(n-c)!}{((n/c)!)^c} = (c + o(1))^n.$$

Используя (13) и (15), получаем

$$\begin{aligned} c_n(L) &\geq (c + o(1))^n c_{l_1}(U(H)) \dots c_{l_c}(U(H)) \\ &\geq (c + o(1))^n \left(\left(\left(\frac{n}{c} - 2 \right)! \right)^{1-1/d} (1 + o(1))^n \right)^c \\ &= (c + o(1))^n \exp \left(c \left(1 - \frac{1}{d} \right) \left(\left(\frac{n}{c} - 2 \right) (\ln n - \ln c - 1 + o(1)) + o(n) \right) \right) \\ &= (c + o(1))^n \exp \left(\left(1 - \frac{1}{d} \right) n (\ln n - 1) - \left(1 - \frac{1}{d} \right) n \ln c + o(n) \right) \\ &= (n!)^{(d-1)/d} (c + o(1))^{n/d}. \end{aligned}$$

Следующие оценки мы докажем для произведения многообразий алгебр Ли (см. [1]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.2. Пусть $\mathbf{V}, \mathbf{M} = \mathbf{N}_s \mathbf{V}$ — многообразия алгебр Ли. Допустим, что существует бесконечно малая такая, что

$$c_n(\mathbf{V}) \geq \Psi_{\alpha, \beta + o(1)}^2(n) = (n!)^{(\alpha-1)/\alpha} (\beta + o(1))^n, \quad \alpha \geq 1, \quad \beta > 0.$$

Тогда

$$c_n(\mathbf{M}) \geq \Psi_{\alpha, \beta + o(1)}^3(n) = \frac{n!}{(\ln n)^{n/\alpha}} \left(\frac{\beta}{\alpha} + o(1) \right)^n.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $L = F(\mathbf{M}), H = F(\mathbf{V})$ — свободные алгебры счетного ранга. По условию для любого $0 < \beta' < \beta$ имеем $c_n(H) \geq \Psi_{\alpha, \beta'}^2(n)$, начиная с некоторого $n > N$. Если мы докажем, что $c_n(L) \geq \Psi_{\alpha, \beta' + o(1)}^3(n)$, начиная с некоторого момента, то будет доказана нижняя оценка. Для удобства опускаем штрих, тогда имеем

$$c_m(H) \geq \Psi_{\alpha, \beta}^2(m) = (m!)^{1-1/\alpha} \beta^{m/\alpha}, \quad m > N.$$

Получим нижнюю оценку для $c_n(U(H))$. Рассмотрим в (12) слагаемое вида $t = 2$, $n_1 = m \geq N, k_1 = [n/m]; n_2 = 1, k_2$ — такое, чтобы выполнялось равенство под знаком суммы. Тогда, используя оценку $a! < (a/e)^a a$, получаем

$$c_n(U(H)) \geq \frac{n! \cdot \beta^{n/\alpha}}{(m!)^{n/(\alpha m)} (n/m)! m!} \geq \frac{n! \cdot \beta^{n/\alpha}}{f(n, m) h(n, m)}, \quad (16)$$

$$\begin{aligned} h(n, m) &= m^{n/(\alpha m)} \frac{n}{m} m!, \quad f(n, m) = \left(\frac{m}{e} \right)^{n/\alpha} \left(\frac{n}{em} \right)^{n/m}, \\ \ln f(n, m) &= n \left(\frac{\ln m}{\alpha} - \frac{1}{m} + \left(\frac{\ln(n/m)}{m} - \frac{1}{\alpha} \right) \right). \end{aligned} \quad (17)$$

Вычисление производной показывает, что минимум (17) при фиксированном n достигается в точке

$$m_* = \varphi(m_*), \quad \varphi(x) = \alpha \ln\left(\frac{n}{x}\right). \quad (18)$$

Заметим, что отображение $\varphi(x)$ является сжимающим и решение (18) находится методом итераций, из которых нам достаточно для оценок взять лишь первые две точки

$$\begin{aligned} m_0 &= \alpha \ln n, \quad m_{i+1} = \varphi(m_i), \quad i \in \mathbb{N}, \quad \lim_{i \rightarrow \infty} m_i = m_*, \\ m_0 &= \alpha \ln n > m_* > m_1 = \alpha(\ln n - \ln \ln n - \ln \alpha), \\ m_* &= \alpha \ln n + o(1). \end{aligned} \quad (19)$$

При подстановке m_* в (17) слагаемое в скобках пропадает в силу (18). Используя (19), получаем

$$\ln f(n, m) \geq \ln f(n, m_*) = n \left(\frac{\ln m_*}{\alpha} - \frac{1}{m_*} \right) = \frac{n(\ln \ln n + \ln \alpha + o(1))}{\alpha}, \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \ln(f(n, m_*)h(n, m_*)) &= n \left(\frac{\ln m_*}{\alpha} - \frac{1}{m_*} \right) + \ln h(n, m_*) \\ &= \frac{n(\ln \ln n + \ln(\alpha + o(1)))}{\alpha}, \end{aligned}$$

$$c_n(U(H)) \geq \frac{n! \cdot \beta^{n/\alpha}}{(\ln n(\alpha + o(1)))^{n/\alpha}} = \frac{n! \cdot (\beta/\alpha + o(1))^{n/\alpha}}{(\ln n)^{n/\alpha}} = \Psi_{\alpha, \beta+o(1)}^3(n). \quad (21)$$

Пусть $L = F(\mathbf{N}_s \mathbf{V})$, $\tilde{L} = \tilde{F}(\mathbf{A} \mathbf{V})$ – свободные алгебры счетного ранга. Рассмотрим вербальный идеал $I = \mathbf{V}(L)$, тогда $\tilde{L} \cong L/I^2$ и $c_n(L) \geq c_n(\tilde{L})$. Значит, достаточно доказать нижнюю оценку для свободной алгебры $\tilde{L} = F(\mathbf{A} \mathbf{V}, X)$, $X = \{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}$. Пусть $H = F(\mathbf{V}, Y)$, $Y = \{y_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ и $\langle Z \rangle = \langle z_i \mid z_i \in Z \rangle$ – абелева алгебра с базисом $Z = \{z_i \mid i \in \mathbb{N}\}$. Рассмотрим абелево сплетение $L_1 = Z \wr H = \overline{Z} \oplus H$, $\overline{Z} = Z \otimes U(H)$ [1]. Существует вложение $\varphi: \tilde{L} \rightarrow L_1$, продолжающее отображение $\varphi: x_i \mapsto z_i + y_i, i \in \mathbb{N}$. Пусть $\pi_i: \overline{Z} \rightarrow z_i U(H)$ – проекция параллельно $\bigoplus_{j \neq i} z_j U(H)$, тогда легко видеть, что

$$\begin{aligned} \pi_n \varphi(P_n(\tilde{L}, \{x_1, \dots, x_n\})) &= z_n P_{n-1}(U(H), \{y_1, \dots, y_{n-1}\}), \\ c_n(L) &\geq c_n(\tilde{L}) \geq c_{n-1}(U(H)). \end{aligned} \quad (22)$$

Вычисления показывают, что подстановка $n-1$ в (21) только меняет бесконечно малую. Таким образом, мы получаем искомую нижнюю оценку.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.3. Пусть $\mathbf{V}, \mathbf{M} = \mathbf{N}_s \mathbf{V}$ – многообразия алгебр Ли. Пусть

$$c_n(\mathbf{V}) \geq \Psi_{\alpha, \beta+o(1)}^q(n) = \frac{n!}{(\ln^{(q-2)} n)^{n/\alpha}} \left(\frac{\beta}{\alpha} + o(1) \right)^{n/\alpha}, \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0.$$

Тогда

$$c_n(\mathbf{M}) \geq \Psi_{\alpha, \beta+o(1)}^{q+1}(n) = \frac{n!}{(\ln^{(q-1)} n)^{n/\alpha}} \left(\frac{\beta}{\alpha} + o(1) \right)^{n/\alpha}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $L = F(\mathbf{M})$, $H = F(\mathbf{V})$ – свободные алгебры счетного ранга. По условию для любого $\beta' < \beta$ имеем $c_n(H) \geq \Psi_{\alpha, \beta'}^q(n)$, начиная с некоторого $n > N$. Если мы докажем, что $c_n(L) \geq \Psi_{\alpha, \beta' + o(1)}^{q+1}(n)$, то будет доказана нижняя оценка. Для удобства опускаем штрих, тогда

$$c_m(H) \geq \Psi_{\alpha, \beta}^q(m) = \frac{m! \beta^{m/\alpha}}{(\ln^{(q-2)} m)^{m/\alpha}}, \quad m \geq N.$$

Получим нижнюю оценку для $c_n(U(H))$. Рассмотрим в (12) слагаемое вида $t = 2$, $n_1 = m \geq N$, $k_1 = [n/m]$; $n_2 = 1$, k_2 – такое, чтобы выполнялось равенство под знаком суммы. Тогда, используя оценку $a! < (a/e)^a a$, получаем

$$c_n(U(H)) \geq \frac{n! \cdot (\beta/\alpha)^{n/\alpha}}{(\ln^{(q-2)} m)^{n/\alpha} (n/m)! m!} \geq \frac{n! \cdot (\beta/\alpha)^{n/\alpha}}{f(n, m) h(n, m)}, \quad (23)$$

$$h(n, m) = \frac{n}{m} m!, \quad f(n, m) = (\ln^{(q-2)} m)^{n/\alpha} \left(\frac{n}{em} \right)^{n/m},$$

$$\ln f(n, m) = \frac{n}{\alpha} \ln^{(q-1)} m + \frac{n}{m} \left(\ln \left(\frac{n}{m} \right) - 1 \right). \quad (24)$$

Вычисление производной показывает, что минимум (24) при фиксированном n достигается в точке

$$m_* = \varphi(m_*), \quad \varphi(x) = \alpha (\ln^{(q-2)} x \cdots \ln^{(1)} x) \ln(n/x). \quad (25)$$

Отображение $\varphi(x)$ является сжимающим, и решение (25) находится методом итераций, из которых для оценок мы берем первые две точки

$$m_0 = \alpha \ln n, \quad m_{i+1} = \varphi(m_i), \quad i \in \mathbb{N}, \quad \lim_{i \rightarrow \infty} m_i = m_*,$$

$$m_0 = \alpha \ln n < m_* < m_1 = \varphi(m_0),$$

$$\ln m_* = \ln \ln n (1 + o(1)). \quad (26)$$

Выражаем из (25) $\ln(n/m_*)$, подставляем в (24) и, используя (26), получаем

$$\ln f(n, m) \geq \ln f(n, m_*) = \frac{n}{\alpha} (\ln^{(q-1)} m_* + o(1)) = \frac{n}{\alpha} (\ln^{(q)} n + o(1)), \quad (27)$$

$$\ln(f(n, m_*) h(n, m_*)) = \frac{n}{\alpha} (\ln^{(q)} n + o(1)) + \ln h(n, m_*) = \frac{n}{\alpha} (\ln^{(q)} n + o(1)),$$

$$c_n(U(H)) \geq \frac{n!}{(\ln^{(q-1)} n)^{n/\alpha} \left(\frac{\beta}{\alpha} + o(1) \right)^{n/\alpha}} = \Psi_{\alpha, \beta + o(1)}^{q+1}(n). \quad (28)$$

Как и выше, рассматривая $\mathbf{N}_s = \mathbf{A}$, получаем $c_n(L) \geq c_{n-1}(U(H))$. Подстановка $n - 1$ в (28) только меняет бесконечно малую, и мы получаем искомую нижнюю оценку.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.1. Пусть $\mathbf{V} = \mathbf{N}_{s_q} \dots \mathbf{N}_{s_1}$, $q \geq 2$. Верхние оценки получены выше. А именно, по доказанному в конце предыдущего параграфа существует такая бесконечно малая, что $c_n(\mathbf{V}) \leq \Psi_{s_1, s_2 + o(1)}^q(n)$. Нижние оценки следуют по индукции из предложений 5.1, 5.2, 5.3: $c_n(\mathbf{V}) \geq \Psi_{s_1, s_2 + o(1)}^q(n)$ для некоторой бесконечно малой. Из непрерывности функции по второму параметру следует существование такой бесконечно малой, что $c_n(\mathbf{V}) = \Psi_{s_1, s_2 + o(1)}^q(n)$.

§ 6. Об аналоге теоремы Реева для алгебр Ли

Основная цель параграфа – доказательство теоремы 2.3. В этом параграфе мы рассматриваем только полилинейные слова. Будем использовать определения и обозначения § 3; по возможности мы также сохраняем обозначения [9]. Пусть A – свободная ассоциативная алгебра со свободным порождающим множеством $X = \{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}$. Слова считаем упорядоченными лексикографически слева направо. Полилинейное слово $w \in P_n(A, \{x_1, \dots, x_n\})$ называется *лиевом m -разбиваемым*, если и только если его можно представить в следующем виде [9]:

$$w = aw_m w_{m-1} \cdots w_1 b; \quad w_t = y_t x_{t1} \cdots x_{ts_t}, \quad s_t \geq 0, \quad y_i, x_{tj} \in X, \\ y_t > x_{tj}, \quad 1 \leq t \leq m, \quad 1 \leq j \leq s_t, \quad y_m > y_{m-1} > \cdots > y_1.$$

Если слово нельзя представить в таком виде, то оно называется *лиевом m -неразбиваемым*. Множество таких слов обозначим через Q_m . По определению считаем, что $1 \in Q_m$. Обозначим через R_m подмножество всех правильных в смысле Ширшова слов (см. [1], [9], [11]) в Q_m ; по определению считаем $1 \notin R_m$.

ЛЕММА 6.1 [9, 1.2.1]. Пусть $w = w' x_n w'' \in P_n(A, \{x_1, \dots, x_n\})$. Тогда $w \in Q_m \iff w' \in Q_m$ и $w'' \in Q_{m-1}$.

ЛЕММА 6.2. Пусть $w \in P_n(A, \{x_1, \dots, x_n\})$. Тогда

- 1) $w \in R_m \iff w = x_n u, u \in Q_{m-1}$;
- 2) $w \in Q_m \iff$ имеет место разложение

$$w = v_s \cdots v_1, \quad v_i \in R_m, \quad i = 1, \dots, s, \quad v_s < \cdots < v_1, \quad s \geq 1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Заметим, что слово $w \in P_n(A, \{x_1, \dots, x_n\})$ будет правильным тогда и только тогда, когда оно начинается с максимальной буквы x_n .

2) Пусть $1 \neq w \in Q_m$. По лемме 6.1 имеем $w = w' x_n w'', w' \in Q_m$ и $w'' \in Q_{m-1}$. Если w' не пусто, то применяем лемму 6.1 к w' и т. д. Получаем разложение

$$w = x_{i_s} u_s \cdots x_{i_2} u_2 x_{i_1} u_1, \quad u_j \in Q_{m-1}, \quad j = 1, \dots, s, \quad s \geq 1, \\ i_s < \cdots < i_2 < i_1 = n, \quad x_{i_t} - \text{максимальная буква в } x_{i_s} u_s \cdots x_{i_t} u_t. \quad (29)$$

По доказанному $v_t = x_{i_t} u_t \in R_m$ и $w = v_s \cdots v_1, v_s < \cdots < v_1$. Обратно, легко видеть, что любое слово такого вида преобразуется в (29) и по лемме 6.1 оно лежит в Q_m .

Рассмотрим функции сложности (первая из них была введена в [9])

$$q_m(z) = \mathcal{C}(Q_m, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_m(n)}{n!} z^n, \quad r_m(z) = \mathcal{C}(R_m, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_m(n)}{n!} z^n, \quad m \in \mathbb{N}.$$

ЛЕММА 6.3. *Имеют место начальные условия и рекуррентные соотношения:*

- 1) $r_1(z) = 0, q_1(z) = 1;$
- 2) $r_m(z) = \int_0^z q_{m-1}(z) dz, \quad m > 1;$
- 3) $q_m(z) = \exp(r_m(z)) = \exp\left(\int_0^z q_{m-1}(z) dz\right), \quad m > 1.$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) По определению всякое непустое слово 1-разбиваемо, значит, $a_1(n) = 0, n > 0;$ по определению $a_1(0) = 1$. Получаем $r_1(z) = 0, q_1(z) = 1$.

2) По лемме 6.2 слову $w \in R_m \cap P_n(A, \{x_1, \dots, x_n\})$ взаимно однозначно соответствует разложение $w = x_n u, u \in Q_{m-1} \cap P_{n-1}(A, \{x_1, \dots, x_{n-1}\})$, что означает $c_n(R_m) = c_{n-1}(Q_{m-1})$. Учитывая, что $r_m(0) = b_m(0) = 0$, для функций получаем $r_m(z) = \int_0^z q_{m-1}(z) dz$.

3) По лемме 6.2 возникает упорядоченность, как в универсальной обертывающей алгебре, и легко проверить, что сохраняют свою силу рассуждения леммы 3.5 $\mathcal{C}(Q_m, z) = \exp(\mathcal{C}(R_m, z)) = \exp(r_m(z))$.

ЛЕММА 6.4. *Справедливы следующие равенства:*

- 1) $\text{ord}_{m-2} r_m(z) = \text{typ}_{m-2} r_m(z) = 1;$
- 2) $\text{ord}_{m-1} q_m(z) = \text{typ}_{m-1} q_m(z) = 1.$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем $q_2(z) = \exp(z), r_3(z) = \exp(z) - 1$. Эти функции имеют обычные порядок и тип, равные 1. По лемме 4.1 интеграл в лемме 6.3 не меняет порядок и тип, в то время как экспонента увеличивает уровень на единицу.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.3. Рассуждения, аналогичные [9], показывают, что $P_n(\mathbf{V})$ является линейной оболочкой правильных лиево m -неразбиваемых слов. Следовательно, $c_n(\mathbf{V}) \leq b_m(n)$, т.е. $\mathcal{C}(\mathbf{V}, z) \prec r_m(z)$. Согласно лемме 6.4

$$\text{ord}_{m-2} r_m(z) = \text{typ}_{m-2} r_m(z) = 1.$$

Применяя теорему 4.2 при $q = m - 1$, получаем

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \ln^{(m-3)} n \left| \frac{c_n(\mathbf{V})}{n!} \right|^{1/n} = 1,$$

$$c_n(\mathbf{V}) \leq \frac{n!}{(\ln^{(m-3)} n)^n} (1 + o(1))^n.$$

Оценка $\mathcal{C}(\mathbf{V}, z) \prec q_m(z)$ для многообразий лиевых пар была получена в [9] как обобщение результата [8]. В [5] автором она была интерпретирована на языке коэффициентов. В настоящей работе дано наглядное доказательство рекуррентной формулы для $q_m(z)$ (лемма 6.3). Кроме того, введение функции $r_m(z)$ и использование теоремы 4.2 позволило улучшить оценку из [5] на рост произвольного многообразия.

Список литературы

1. Бахтурин Ю. А. Тожества в алгебрах Ли. М.: Наука, 1985.
2. Regev A. Existence of polynomial identities in $A \otimes B$ // Bull. Amer. Math. Soc. 1971. V. 77. № 6. P. 1067–1069.
3. Мищенко С. П. Рост многообразий алгебр Ли // УМН. 1990. Т. 45. № 6. С. 25–45.
4. Воличенко И. Б. О многообразии алгебр Ли $\mathbf{AN}_2$ над полем характеристики нуль // Докл. АН БССР. 1981. Т. XXV. № 12. С. 1063–1066.
5. Петроградский В. М. О типах сверхэкспоненциального роста тождеств в PI-алгебрах Ли // Фунд. прикл. матем. 1995. Т. 1. № 4. С. 989–1007.
6. Петроградский В. М. О некоторых типах промежуточного роста в алгебрах Ли // УМН. 1993. Т. 48. № 5. С. 181–182.
7. Petrogradsky V. M. Intermediate Growth in Lie Algebras and Their Enveloping Algebras // J. Algebra. 1996. V. 179. P. 459–482.
8. Гришков А. Н. О росте многообразий алгебр Ли // Матем. заметки. 1988. Т. 44. № 1. С. 51–54.
9. Размыслов Ю. П. Тожества алгебр и их представлений. М.: Наука, 1989.
10. Гульден Я., Джексон Д. Перечислительная комбинаторика. М.: Наука, 1990.
11. Bahturin Yu. A., Mikhalev A. A., Petrogradsky V. M., Zaicev M. V. Infinite Dimensional Lie Superalgebras // In de Gruyter Expositions in Mathematics. V. 7. Berlin: Walter de Gruyter, 1992.
12. Шабат Б. В. Введение в комплексный анализ. Т. 1. М.: Наука, 1985.
13. Евграфов М. А. Асимптотические оценки и целые функции. М.: Наука 1979.
14. Гольдберг А. А., Левин Б. Я., Островский И. В. Целые и мероморфные функции // Комплексный анализ, одна переменная-1. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 85. М.: ВИНТИ. С. 5–185.
15. Фридман Г. А. Медленно возрастающие функции и их приложение // Сиб. матем. журн. 1966. Т. 7. № 5. С. 1139–1160.
16. Шеремета М. Н. О связи между ростом максимума модуля целой функции и модулями коэффициентов ее степенного разложения // Изв. вузов. Сер. матем. 1967. Т. 57. № 2. С. 100–108.

Ульяновский государственный университет

Поступила в редакцию
20.06.1996