Общероссийский математический портал

С. С. Платонов, Приближения на компактных симметрических пространствах ранга 1, *Матем. сб.*, 1997, том 188, номер 5, 113–130

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm233>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.90.164.192

26 апреля 2023 г., 14:03:39

УДК 517.518

С. С. Платонов

Приближения на компактных симметрических пространствах ранга 1

На произвольном компактном римановом симметрическом пространстве M ранга 1 вводятся классы Никольского $H_p^r(M)$, определяемые с помощью разностей вдоль геодезических, и дается описание этих пространств в терминах наилучших приближений полиномами по сферическим гармоникам на M , т.е. линейными комбинациями собственных функций оператора Лапласа–Бельтрами на M . Результаты статьи обобщают результаты С.М. Никольского и П.И. Лизоркина о приближении функций на сфере S^n .

Библиография: 16 названий.

§ 1. Введение и формулировка результатов

В последние годы выходит много работ, посвященных изучению различных задач теории приближений на n -мерной сфере S^n (см. [1]–[5] и цитированную там литературу). Естественным более широким классом пространств, на которых можно ставить аналогичные задачи, является множество всех компактных симметрических пространств ранга 1 (КРОСП-ов, по терминологии книги [8]). Для этих пространств уже получены некоторые результаты (см. [6], [7]), но остается еще много задач. Настоящая работа посвящена перенесению результатов С.М. Никольского и П.И. Лизоркина [1]–[3] на произвольный КРОСП.

Пусть M – КРОСП. Хорошо известна полная классификация всех КРОСП-ов. Их всего четыре серии (индекс n всюду означает размерность пространства): сферы S^n ($n = 1, 2, \dots$), вещественное, комплексное и кватернионное проективные пространства ($P^n(\mathbb{R})$ ($n = 2, 3, \dots$), $P^n(\mathbb{C})$ ($n = 4, 6, \dots$), $P^n(\mathbb{H})$ ($n = 8, 12, 16, \dots$)) и одно особое пространство – эллиптическая плоскость Кэли $P^{16}(Cay)$. Так как задачи гармонического анализа на $P^n(\mathbb{R})$ легко сводятся к соответствующим задачам на S^n , то будем считать, что $M \neq P^n(\mathbb{R})$.

M является римановым многообразием, пусть dx – элемент объема на M . Как обычно, через $L_p(M)$ обозначим банахово пространство, состоящее из измеримых комплекснозначных функций $f(x)$ на M с конечной нормой

$$\|f\|_p = \left(\int_M |f(x)|^p dx \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty.$$

Пусть $L_\infty(M) = C(M)$ – пространство непрерывных на M функций f с нормой

$$\|f\|_\infty = \|f\|_C = \max_{x \in M} |f(x)|.$$

Пусть O – фиксированная точка пространства M . Пространство M можно реализовать как факторпространство U/K , где U – связная компактная группа Ли (связная компонента единицы в группе изометрий пространства M), K – стационарная подгруппа точки O . При этом функции $f(x)$ на M отождествляются с функциями $f(u)$ на U , удовлетворяющими дополнительному условию

$$f(uk) = f(u) \quad \forall k \in K. \quad (1.1)$$

Пусть $T: U \rightarrow GL(E)$ – неприводимое представление группы U в конечномерном векторном пространстве E , $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – инвариантная эрмитова форма в пространстве E . Представление называется *сферическим* [9, гл. 4, § 1], если в пространстве E существует ненулевой K -инвариантный вектор e_0 (т.е. $T(k)e_0 = e_0 \quad \forall k \in K$). Такой вектор единственный с точностью до умножения на число. Будем считать, что $|e_0| = \langle e_0, e_0 \rangle^{1/2} = 1$. Функция $\varphi(u) = \langle T(u)e_0, e_0 \rangle$ называется *сферической функцией*, соответствующей представлению T .

Приведем некоторые сведения из теории симметрических пространств по книге [9]. Обозначим через $\mathfrak{u}$ и $\mathfrak{k}$ алгебры Ли групп U и K , соответственно. Пусть $\mathfrak{u} = \mathfrak{p} \oplus \mathfrak{k}$ – разложение Картана алгебры $\mathfrak{u}$ (т.е. $\mathfrak{p}$ – ортогональное дополнение к $\mathfrak{k}$ относительно формы Киллинга на алгебре Ли $\mathfrak{u}$). Выберем в $\mathfrak{p}$ максимальную абелеву подалгебру $\mathfrak{a}$ и расширим $\mathfrak{a}$ до максимальной абелевой подалгебры $\mathfrak{h}$ в $\mathfrak{u}$. Тогда $\mathfrak{h} = \mathfrak{a} + \mathfrak{h} \cap \mathfrak{k}$ (см. [9, с. 593]). Если M – симметрическое пространство ранга 1, то $\dim \mathfrak{a} = 1$.

Для $H \in \mathfrak{a}$ обозначим через τ_H линейное преобразование $Y \rightarrow [H, [H, Y]]$ пространства $\mathfrak{p}$. Собственные значения оператора τ_H таковы: 0 , $\alpha(H)^2$ и, возможно, $(\alpha(H)/2)^2$, где $\alpha(H)$ – некоторая линейная функция на $\mathfrak{a}$. Все пространство $\mathfrak{p}$ раскладывается в прямую сумму собственных подпространств оператора τ_H , соответствующих собственным значениям 0 , $\alpha(H)^2$ и $(\alpha(H)/2)^2$:

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{a} + \mathfrak{p}_\alpha + \mathfrak{p}_{\alpha/2}.$$

Пусть $a = \dim \mathfrak{p}_{\alpha/2}$, $b = \dim \mathfrak{p}_\alpha$. Числа a и b часто встречаются в различных формулах, связанных с симметрическими пространствами. Приведем их значения для конкретных пространств [9, гл. 1, § 4, п. 2].

$$\begin{aligned} M = \mathbb{S}^n: & \quad a = 0, \quad b = n - 1; \\ M = P^n(\mathbb{C}): & \quad a = n - 2, \quad b = 1; \\ M = P^n(\mathbb{H}): & \quad a = n - 4, \quad b = 3; \\ M = P^{16}(Cay): & \quad a = 8, \quad b = 7. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Каждое неприводимое представление группы U однозначно задается своим старшим весом λ , который является линейным функционалом на $\mathfrak{h}$. Пусть Λ_0 – множество всех старших весов сферических представлений группы U . Если $M = U/K$ – КРОСП, то известно [9, гл. V, § 4, п. 1], что существует старший вес $\mu \in \Lambda_0$ такой, что

$$\Lambda_0 = \{ \lambda = l\mu, \quad l = 0, 1, 2, \dots \}$$

(т.е. Λ_0 состоит из старших весов, кратных μ). Обозначим через T^l сферическое представление со старшим весом $l\mu$ ($l \in \mathbb{Z}_+, \mathbb{Z}_+$ – множество неотрицательных целых чисел), E^l – пространство этого представления, $d_l = \dim E^l$, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – инвариантная эрмитова форма в E^l . Выберем в E^l ортонормированный базис $e_0^l, e_1^l, \dots$, причем пусть e_0 – K -инвариантный вектор в E^l . Функции

$$\tau_{ij}^l(u) = \langle T^l(u)e_i^l, e_j^l \rangle, \quad i, j = 0, 1, \dots, d_l - 1,$$

называются *матричными элементами представления* T^l , в частности, $\varphi^l(u) = \tau_{00}^l(u)$ – сферическая функция представления T^l . Функции $\tau_{i0}^l(u)$ ($l \in \mathbb{Z}_+$, $i = 0, 1, \dots, l-1$) образуют полную ортогональную (но не ортонормированную) систему в гильбертовом пространстве $L_2(M)$ и обычно используются для изучения различных вопросов гармонического анализа на M . Отметим еще, что линейная оболочка функций $\tau_{i0}^l(u)$ при фиксированном l и $0 \leq i \leq d_l - 1$ совпадает с собственным подпространством для оператора Лапласа–Бельтрамина многообразия M , отвечающим некоторому собственному значению λ_l . При этом $\lambda_l \leq 0$, $|\lambda_{l+1}| > |\lambda_l|$ и числа λ_l образуют спектр оператора Лапласа–Бельтрами. Можно выписать и явные формулы для чисел λ_l [8, гл. 8], если риманова метрика на M нормирована так, что длина максимальной геодезической равна 2π (см. ниже):

$$\text{для } S^n : \quad \lambda_l = l(l+n-1);$$

$$\text{для } P^n(\mathbb{C}) : \quad \lambda_l = l(l+n);$$

$$\text{для } P^n(\mathbb{H}) : \quad \lambda_l = l(l+2n+1);$$

$$\text{для } P^{16}(Cay) : \quad \lambda_l = l(l+11).$$

Будем называть *сферическим полиномом* на M степени t любую линейную комбинацию функций τ_{i0}^l при $l \leq t$. Обозначим через $\mathcal{P}_m(M)$ множество сферических полиномов степени t . В частности, при $M = S^n$ получаем обычные сферические полиномы. Естественно возникает задача о приближении функций на КРОСП-е M сферическими функциями. Здесь удастся получить результаты, аналогичные результатам С. М. Никольского и П. И. Лизоркина [1]–[3] о приближениях на S^n .

Для $x, y \in M$ пусть $|xy|$ – расстояние между точками x и y . Через L обозначим наибольшее расстояние между точками пространства M (т.е. L – диаметр пространства M). Известно (см. [10, гл. IX, §5]), что если $|xy| < L$, то через точки x и y можно провести единственную геодезическую. Кроме того, все геодезические на M замкнуты и имеют одинаковую длину $2L$. Риманова метрика на M определена с точностью до умножения на положительное число. Для удобства нормируем риманову метрику так, чтобы $L = \pi$.

Для $x \in M$ через $T_x M$ будем обозначать множество касательных векторов к многообразию M в точке x . Пусть $x \in M$ и ξ – единичный касательный вектор в точке x . Обозначим через $\gamma(x, \xi; s)$ натурально параметризованную геодезическую, выходящую из точки x в направлении вектора ξ , т.е. $\gamma(x, \xi; 0) = x$ и $\left. \frac{d}{ds} \gamma(x, \xi; s) \right|_{s=0} = \xi$, где $\frac{d}{ds} \gamma(s)$ – касательный вектор к кривой $\gamma(s)$.

k -я разность функции $f(x)$ в точке x в направлении ξ с шагом t определяется равенством

$${}_{\xi}\Delta_t^k f(x) = \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} C_k^j f(\gamma(x, \xi; jt)). \quad (1.3)$$

Пусть

$$S(x) = \{\xi \in T_x M : |\xi| = 1\}$$

— единичная сфера в касательном пространстве $T_x M$. Будем обозначать через $d\mu(\xi)$ элемент объема сферы $S(x)$, а через σ — полный объем сферы $S(x)$.

Определим новую разность

$${}^*\Delta_t^k f(x) = \frac{1}{\sigma} \int_{S(x)} {}_{\xi}\Delta_t^k f(x) d\mu(\xi). \quad (1.4)$$

По определению функция f принадлежит пространству $H_p^r(M)$, если $f \in L_p(M)$ и

$$\|{}^*\Delta_t^k f(xO)\|_p \leq ct^r \quad \forall t > 0, \quad (1.5)$$

где c не зависит от t и $k > r > 0$. Норма в пространстве $H_p^r(M)$ определяется так:

$$\|f\|_{H_p^r(M)} = \|f\|_p + c_f, \quad (1.6)$$

где c_f — наименьшая константа в неравенстве (1.5).

Наилучшим приближением функции f в метрике L_p ($1 \leq p \leq \infty$) при помощи сферических полиномов степени m называется число

$$E_m(f)_p = \min_{\Phi \in \mathcal{P}_m} \|f - \Phi\|_p. \quad (1.7)$$

ТЕОРЕМА 1. а) Если $f \in H_p^r(M)$, то

$$E_m(f)_p \leq \frac{c\|f\|_{H_p^r(M)}}{m^r}, \quad m = 1, 2, 3, \dots, \quad (1.8)$$

где постоянная c не зависит от f и m .

б) Обратно, если

$$E_m(f)_p \leq \frac{c_1}{m^r}, \quad m = 1, 2, \quad (1.9)$$

то $f \in H_p^r(M)$ и

$$\|f\|_{H_p^r(M)} \leq c_2(\|f\|_p + c_1), \quad (1.10)$$

где постоянная c_2 не зависит от f .

Для сферы S^n теорема 1 доказана в [3], поэтому будем считать, что M — одно из пространств $P^n(\mathbb{C})$, $P^n(\mathbb{H})$, $P^{16}(CaY)$.

Доказательство теоремы 1 является основной целью настоящей работы. В §2 для функции $f \in H_p^r(M)$ строится последовательность приближающих ее сферических полиномов и доказывается прямая часть теоремы 1. В §3 доказываются необходимые неравенства типа Бернштейна (см. леммы 3.4 и 3.5) и обратная часть теоремы 1.

§ 2. Построение сферических полиномов

Пусть $S_M(x; t) = \{x' \in M : |xx'| = t\}$ – сфера радиуса t с центром в точке x в пространстве M . Пусть $d\sigma(x')$ – элемент объема сферы $S_M(x; t)$, $\sigma(t)$ – полный объем всей сферы $S_M(x; t)$. Аналогично [3] определим оператор сдвига $S_t f(x)$ функции $f \in L_p(M)$ с шагом t

$$S_t f(x) = \frac{1}{\sigma(t)} \int_{S_M(x; t)} f(x') d\sigma(x'), \quad 0 < t < \pi. \quad (2.1)$$

При этом, как и для случая $M = S^n$, справедливо неравенство

$$\|S_t f\|_p \leq \|f\|_p. \quad (2.2)$$

Если воспользоваться реализацией $M = U/K$, то касательное пространство к M в точке O естественным образом отождествляется с векторным пространством $\mathfrak{p}$ ($\mathfrak{u} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$ – разложение Картана, все обозначения взяты из § 1). В частности, для $X \in \mathfrak{p}$ пусть $|X|$ – длина этого вектора как касательного вектора к M . В одномерном пространстве $\mathfrak{a}$ выберем базисный вектор H такой, что $|H| = 1$. Отображение $t \mapsto R(t) = \exp(tH)$ задает однопараметрическую подгруппу в U . Кривая $\gamma(t) = R(t)O$ будет натурально параметризованной геодезической в M [10, гл. IV, теорема 3.3]. Так как все геодезические на M замкнуты и имеют длину 2π , то $R(t + 2\pi)O = R(t)O$, в частности, $R(2\pi)O = O$, следовательно, $R(2\pi) \in K$.

Пусть du и dk – элементы нормированных единиц мер Хаара на компактных группах U и K , соответственно.

ЛЕММА 2.1. Если $x = vO$, $v \in U$, то

$$S_t f(x) = \int_K f(vkR(t)O) dk. \quad (2.3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Временно обозначим

$$\tilde{S}_t f(x) = \int_K f(vkR(t)O) dk, \quad x = vO.$$

Для любой функции $f(x)$ на M и $u \in U$ пусть

$$f^u(x) = f(ux).$$

Очевидно, что $(S_t f)^u = S_t(f^u)$ и $(\tilde{S}_t f)^u = \tilde{S}_t(f^u)$, поэтому для доказательства того, что

$$S_t f(x) = \tilde{S}_t f(x) \quad \forall f \in L_p(M)$$

достаточно показать, что $S_t f(O) = \tilde{S}_t f(O)$ для любой непрерывной функции $f(x)$ на M (так как непрерывные функции образуют плотное подмножество в $L_p(M)$).

Для любой непрерывной функции $h(x)$ на сфере $S_M(O; t)$ определим функционалы

$$I_1(h) = (S_t h)(O) \quad \text{и} \quad I_2(h) = (\tilde{S}_t h)(O).$$

Очевидно, что I_1 и I_2 линейные положительные функционалы, инвариантные относительно действия группы K , т.е.

$$I_1(h^k) = I_1(h), \quad I_2(h^k) = I_2(h) \quad \forall k \in K.$$

Следовательно, функционалы I_1 и I_2 определяют K -инвариантные меры на сфере $S_M(O; t)$. Так как $S_M(O; t)$ – однородное пространство для группы K , то инвариантная мера единственна с точностью до множителя [11], а так как для функции $h_0(x) \equiv 1$ будет

$$I_1(h_0) = I_2(h_0) = 1,$$

то функционалы I_1 и I_2 совпадают.

ЗАМЕЧАНИЕ. Оператор сдвига $S_t f$ можно также записать в виде

$$S_t f(x) = \frac{1}{\sigma} \int_{S(x)} f(\gamma(x, \xi; t)) d\mu(\xi), \quad (2.4)$$

где σ , $\gamma(x, \xi; t)$, $S(x)$ определены в §1. Доказательство того, что формулы (2.4) и (2.3) задают один и тот же оператор проводится, как в лемме 2.1. Формула (2.4) позволяет распространить функцию $S_t f(x)$ на все значения $t \in \mathbb{R}$, причем эта функция будет четной. Отметим также, что разность ${}^*\Delta_t^k f(x)$ можно записать в виде

$${}^*\Delta_t^k f(x) = \Delta_t^k S_\tau f(x) \big|_{\tau=0}, \quad (2.5)$$

где

$$\Delta_t^k S_\tau f(x) = \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} S_{\tau+jt} f(x) \quad (2.6)$$

– обычная k -я разность с шагом t по переменной τ .

Определим функцию

$$\alpha(t) = \left(\sin \frac{t}{2} \right)^a (\sin t)^b, \quad (2.7)$$

где числа a и b берутся из (1.2).

Пусть $F(u)$ – интегрируемая по мере Хаара функция на группе U . Любой элемент $u \in U$ можно представить в виде $u = k_1 R(t) k_2$, где $k_1, k_2 \in K$, $0 \leq t \leq \pi$. Тогда справедлива следующая формула [10, гл. X, §1], которая неоднократно будет использоваться в дальнейшем

$$\int_U f(u) du = A \int_0^\pi \int_{K \times K} F(k_1 R(t) k_2) \alpha(t) dk_1 dk_2, \quad (2.8)$$

где

$$A = \left(\int_0^\pi \alpha(t) dt \right)^{-1}.$$

Из единственности (с точностью до множителя) инвариантной меры на M следует, что существует постоянная $C > 0$, для которой

$$\int_M f(x) dx = C \int_U f(uO) du \quad (2.9)$$

для любой интегрируемой функции $f(x)$ на M . Из (2.8) и (2.9) следует, что

$$\int_M f(x) dx = A_1 \int_0^\pi \int_K f(kR(t)O) \alpha(t) dt dk, \quad (2.10)$$

где $A_1 = AC$. В частности, если f зависит только от расстояния от некоторой фиксированной точки $x_0 \in M$ до точки x (т.е. $f(x) = \tilde{f}(|x_0, x|)$), без ограничения общности можно считать, что $x_0 = O$), то

$$\int_M f(x) dx = A_1 \int_0^\pi \tilde{f}(t) \alpha(t) dt. \quad (2.11)$$

ЛЕММА 2.2. Пусть $T(u)$ – сферическое представление группы U , $\varphi(u)$ – соответствующая ему сферическая функция, $f(x) \in L_p(M)$. Тогда функция

$$\Phi(x) = \int_0^\pi \varphi(R(t)) S_t f(t) \alpha(t) dt$$

будет сферическим полиномом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть V – пространство представления T , $d = \dim V$, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – инвариантная эрмитова форма, e_i ($0 \leq i \leq d-1$) – ортонормированный базис в V , причем вектор e_0 – K -инвариантный, $\tau_{ij}(u)$ – матричные элементы представления $T(u)$. Тогда $\varphi(u) = \tau_{00}(u)$.

Рассмотрим сферический полином на M

$$\Phi(x) = \Phi(vO) = \sum_{i=0}^{d-1} c_i \tau_{i0}(v), \quad v \in U, \quad x = vO \in M, \quad (2.12)$$

где

$$c_i = A^{-1} \int_U f(uO) \overline{\tau}_{i0}(u) du,$$

A – коэффициент из (2.8). Пользуясь унитарностью представления T и инвариантностью меры Хаара получим, что

$$\begin{aligned} \Phi(vO) &= \sum_i A^{-1} \int_U f(uO) \tau_{0i}(u^{-1}) \tau_{i0}(v) du \\ &= A^{-1} \int_U f(uO) \tau_{00}(u^{-1}v) du = A^{-1} \int_U f(vuO) \tau_{00}(u^{-1}) du. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Так как $\tau_{00}(k_1 u k_2) = \tau_{00}(u) \forall k_1, k_2 \in K$ и $\tau_{00}(u^{-1}) = \tau_{00}(u)$, то из (2.13), используя (2.8) и лемму 2.1, получим

$$\begin{aligned} \Phi(vO) &= A^{-1} \int_U f(vuO) \tau_{00}(u) du \\ &= \int_0^\pi \int_K f(vkR(t)O) \tau_{00}(R(t)) \alpha(t) dk dt = \int_0^\pi \varphi(R(t)) S_t f(x) \alpha(t) dt. \end{aligned}$$

ЛЕММА 2.3. Пусть $J(t)$ – произвольный четный тригонометрический полином степени m . Тогда функция

$$\Phi(x) = \int_0^\pi J(t) S_t f(x) \alpha(t) dt$$

есть сферический полином степени m .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Известна явная формула для сферической функции $\varphi^l(u)$ представления T^l . Из [9, гл. V, § 4, п. 3] получаем, что

$$\varphi^l(R(t)) = F\left(\frac{1}{2}a + b + l, -l; \frac{1}{2}(a + b + 1); \sin^2 \frac{t}{2}\right),$$

где $F(a, b, c; z)$ – гипергеометрическая функция, причем при наших значениях параметров она сводится к полиному Якоби (см. [12, т. 2, формула (10.8.16)]):

$$\varphi^l(R(t)) = \frac{l! \Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(l + \alpha + 1)} P_l^{(\alpha, \beta)}(\cos t),$$

где $P_l^{(\alpha, \beta)}(x)$ – полином Якоби степени l , $\alpha = \frac{1}{2}(a + b - 1)$, $\beta = \frac{1}{2}(b - 1)$. В частности, $\varphi^l(R(t))$ – четный тригонометрический полином степени l .

Любой четный тригонометрический полином $J(t)$ будет линейной комбинацией полиномов $\varphi^l(R(t))$, $l = 0, 1, \dots, m$, и далее лемма 2.3 следует из леммы 2.2.

Мы считаем, что $M \neq S^n$, поэтому из (1.2) следует, что a – четное, а b – нечетное натуральные числа. Как и в [3], определим функцию $S_t^- f(x)$ как нечетное 2π -периодическое продолжение функции $S_t f(x)$ с промежутка $0 \leq t \leq \pi$ (f и x фиксированы) на все значения $t \in \mathbb{R}$, т.е.

$$S_t^- f(x) = (-1)^{[t/\pi]} S_t f(x),$$

где $[a]$ – целая часть числа a . Отметим, что из (2.2) следует, что

$$\|S_t^- f(x)\|_p \leq \|f\|_p. \quad (2.14)$$

ЛЕММА 2.4. Пусть $J(t)$ – четный тригонометрический полином степени m , j – натуральное число. Тогда функция

$$\Phi_j(x) = \int_0^\pi J(t) S_{jt}^- f(x) \alpha(jt) dt$$

есть сферический полином степени m .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) Пусть $\varphi(t) = (S_t^- f(x))\alpha(t)$. Тогда $\varphi(t)$ – четная 2π -периодическая функция. Пусть ν – натуральное число. Проверим, что

$$\int_0^\pi \varphi(jt) \cos \nu t dt = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^\pi \varphi(jt) \cos \nu t dt = 0,$$

если число ν/j не целое.

Пусть

$$I = \int_{-\pi}^\pi \varphi(jt) \cos \nu t dt.$$

Сделаем замену переменной $t = s + \frac{2\pi}{j}$ и воспользуемся тем, что функция $\varphi(jt) \cos \nu t$ – 2π -периодическая. Тогда

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\pi}^\pi \varphi(js) \cos \left(\nu s + \frac{2\pi\nu}{j} \right) ds \\ &= \cos \frac{2\pi\nu}{j} \int_{-\pi}^\pi \varphi(js) \cos \nu s ds - \sin \frac{2\pi\nu}{j} \int_{-\pi}^\pi \varphi(js) \sin \nu s ds = I \cos 2\pi \frac{\nu}{j}. \end{aligned}$$

Следовательно, $I(1 - \cos 2\pi \frac{\nu}{j}) = 0$ и $I = 0$, если ν/j не целое.

б) Пусть

$$J(t) = \sum_{0 \leq \nu \leq m} c_\nu \cos \nu t. \quad (2.15)$$

Обозначим через $\tilde{J}(jt)$ тригонометрический полином, который получится, если в (2.15) оставить только слагаемые, у которых ν кратно j . Из а) следует, что

$$\Phi_j(x) = \int_0^\pi \tilde{J}(jt) \varphi(jt) dt.$$

Если сделать замену переменной $s = jt$ и воспользоваться тем, что $\tilde{J}(s)$ и $\varphi(s)$ – четные 2π -периодические функции, то легко получить, что

$$\Phi_j(x) = \int_0^\pi \tilde{J}(s) \varphi(s) ds,$$

но последнее выражение является сферическим полиномом по лемме 3.

Пусть

$$\mathcal{D}_m(u) = \left(\frac{\sin \frac{mu}{2}}{\sin \frac{u}{2}} \right)^{2s}, \quad m, s = 1, 2, \dots,$$

– ядро Джексона, являющееся четным тригонометрическим полиномом степени $s(m-1)$. Положим (с учетом (2.11))

$$\begin{aligned} \Omega_m &= \int_M \mathcal{D}_m(|x_0, x|) dx = A_1 \int_0^\pi \mathcal{D}_m(t) \alpha(t) dt; \\ \mathcal{I}_m(u) &= \frac{A_1}{\Omega_m} \mathcal{D}_m(u). \end{aligned}$$

Отметим, что

$$\int_0^\pi \mathcal{I}_m(u) \alpha(u) du = 1. \quad (2.16)$$

ЛЕММА 2.5. При фиксированном s и $m \rightarrow \infty$ справедливы следующие асимптотические равенства

$$\Omega_m \sim m^{2s-a-b-1}, \quad 2s-a-b-1 > 0; \quad (2.17)$$

$$\int_0^\pi t^r \mathcal{J}_m(t) \alpha(t) dt \sim m^{-r}, \quad 2s-a-b-1 > r > 0, \quad (2.18)$$

где, как обычно, $A_m \sim B_m$, если $A_m, B_m > 0$, и $c_1 B_m \leq A_m \leq c_2 B_m$ для некоторых констант $c_1, c_2 > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользовавшись неравенствами

$$\left| \frac{\sin x}{x} \right| \leq 1 \quad (x \in \mathbb{R}), \quad (\sin x)^{-1} \leq \frac{\pi}{2} x^{-1} \quad \left(0 < x < \frac{\pi}{2} \right),$$

получаем следующую оценку сверху

$$\begin{aligned} \Omega_m &= A_1 \int_0^\pi \left(\sin \frac{mt}{2} \right)^{2s} 2^b \left(\sin \frac{t}{2} \right)^{a+b-2s} \left(\cos \frac{t}{2} \right)^b dt \\ &\leq c_1 \int_0^\pi \left(\sin \frac{mt}{2} \right)^{2s} t^{a+b-2s} dt = c_1 m^{2s-a-b-1} \int_0^{m\pi} \left(\sin \frac{u}{2} \right)^{2s} u^{a+b-2s} du \\ &\leq m^{2s-a-b-1} c_1 \int_0^\infty \left(\sin \frac{u}{2} \right)^{2s} u^{a+b-2s} du = c_2 m^{2s-a-b-1}. \end{aligned}$$

При этом сделана замена $u = mt$; c_1, c_2 (и далее c_3, c_4) — не зависящие от m постоянные.

В другую сторону,

$$\begin{aligned} \Omega_m &\geq A_1 \int_0^{\pi/2} \left(\sin \frac{mt}{2} \right)^{2s} 2^b \left(\sin \frac{t}{2} \right)^{a+b-2s} \left(\cos \frac{t}{2} \right)^b dt \\ &\geq c_3 \int_0^{\pi/2} \left(\sin \frac{mt}{2} \right)^{2s} t^{a+b-2s} dt \\ &= c_3 m^{2s-a-b-1} \int_0^{m\pi/2} \left(\sin \frac{u}{2} \right)^{2s} u^{a+b-2s} du \geq c_4 m^{2s-a-b-1}, \end{aligned}$$

что доказывает (2.17).

Таковыми же оценками показываем, что

$$p_m = \int_0^\pi t^r \left(\frac{\sin \frac{mt}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \right)^{2s} \alpha(t) dt \sim m^{2s-a-b-r-1}.$$

Тогда

$$\int_0^\pi t^r \mathcal{J}_m(t) \alpha(t) dt \sim \frac{p_m}{\Omega_m} \sim m^{-r}.$$

ЛЕММА 2.6. Если число m делится на $2j$, то функция

$$\Phi_{m,j}(x) = \int_0^\pi \mathcal{J}_m(t) S_{jt}^- f(x) \alpha(t) dt \quad (2.19)$$

будет сферическим полиномом степени $m(s-1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся тождеством

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_m(t) \alpha(t) &= \frac{A_1}{\Omega_m} 2^{a+b} \left(\frac{\sin \frac{mt}{2}}{\sin jt} \right)^{2s} \left(\frac{\sin jt}{\sin \frac{t}{2}} \right)^{2s-a-b-1} \\ &\quad \times \left(\cos \frac{jt}{2} \right)^a \left(\cos \frac{t}{2} \right)^{b-1} \left(\frac{\sin jt \cos \frac{t}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \right) \alpha(jt). \end{aligned}$$

Легко видеть, что каждый из множителей, кроме $\alpha(jt)$, является четным тригонометрическим полиномом (так как m делится на $2j$, число a – четное, число b – нечетное). Остается воспользоваться леммой 2.4 и тем, что

$$\deg \frac{\mathcal{J}_m(t) \alpha(t)}{\alpha(jt)} = (m-1)s + \left(\frac{a}{2} + b \right) (1-s) \leq (m-1)s.$$

Доказательство следующей леммы и прямой части теоремы 1 проводится аналогично доказательству леммы 2.2 и прямой части теоремы 1.2 в [3].

ЛЕММА 2.7. Если $f \in L^p(M)$, $1 \leq p \leq \infty$, и m делится на $2(k!)$, то существует сферический полином $\Phi_N(x)$ степени $N = s(m-1)$, для которого

$$f(x) - \Phi_N(x) = (-1)^k \int_0^\pi \Delta_t^k S_\tau^- f(x) \big|_{\tau=0} \mathcal{J}_m(t) \alpha(t) dt, \quad (2.20)$$

где

$$\Delta_t^k S_\tau^- f(x) = \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} C_k^j S_{\tau+jt}^- f(x).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Правую часть в (2.20) можно записать в виде (см. (2.16), (2.19))

$$\begin{aligned} f(x) + \sum_{j=1}^k (-1)^j C_k^j \int_0^\pi S_{jt}^- f(x) \mathcal{J}_m(t) \alpha(t) dt \\ = f(x) + \sum_{j=1}^k (-1)^j C_k^j \Phi_{N,j}(x) = f(x) - \Phi_N(x), \end{aligned}$$

где $\Phi_{N,j}(x)$, а, следовательно, и $\Phi_N(x)$ – сферические полиномы по лемме 2.7.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЯМОЙ ЧАСТИ ТЕОРЕМЫ 1. Пусть $f \in L_p(M)$ и выполняется условие

$$\|*\Delta_t^k f(x)\|_p \leq c_f t^r, \quad k > r > 0. \quad (2.21)$$

Пусть N – целое число вида $N = s(m-1)$ и m делится на $2(k!)$. Из леммы 2.7 следует, что

$$\begin{aligned} |f(x) - \Phi_N(x)| &\leq \left| \int_0^{\pi/k} \Delta_t^k S_\tau f(x) \Big|_{\tau=0} \mathcal{J}_m(t) \alpha(t) dt \right| \\ &\quad + \left| \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} C_k^j \int_{\pi/k}^\pi S_{jt}^- f(x) \mathcal{J}_m(t) \alpha(t) dt \right|. \end{aligned}$$

В первом слагаемом вместо S_τ^- стоит S_τ , так как при $t \in [0, \pi/k]$ будет $jt \in [0, \pi]$ и $S_{jt}^- = S_{jt}$.

Далее получаем, что

$$\begin{aligned} \|f(x) - \Phi_N(x)\|_p &\leq \int_0^{\pi/k} \|*\Delta_t^k f(x)\|_p \mathcal{J}_m(t) \alpha(t) dt + \sum_{j=0}^k C_k^j \int_{\pi/k}^\pi \|S_{jt}^- f(x)\|_p \mathcal{J}_m(t) \alpha(t) dt \\ &\leq C_f \int_0^{\pi/k} t^r \mathcal{J}_m(t) \alpha(t) dt + 2^k \|f\|_p \frac{A_1}{\Omega_m} \int_{\pi/k}^\pi \mathcal{D}_m(t) \alpha(t) dt \\ &\leq c_1 \left(\frac{c_f}{N^r} + \frac{\|f\|_p}{N^{2s-a-b-1}} \right) \leq c_2 \frac{(c_f + \|f\|_p)}{N^r} = c_2 \frac{\|f\|_{H_p^r(M)}}{N^r}, \end{aligned}$$

если $2s-a-b-1 > r$. При этом использовано условие (2.21), оценки (2.17), (2.18) и то, что функция $\mathcal{D}_m(t)$ на отрезке $[\pi/k, \pi]$ ограничена.

Получена оценка

$$\|f - \Phi_N\|_p \leq c_2 \frac{\|f\|_{H_p^r(M)}}{N^r}.$$

Если $N \geq s(2(k!)-1)$ – произвольное натуральное число, то подбираем m такое, что m делится на $2(k!)$ и $s(m-1) \leq N < sm$. Пусть $\Phi_N = \Phi_{s(m-1)}$ – полином степени N , определяемый из (2.20). Мы получили последовательность сферических полиномов Φ_N , для которых

$$E_N(f)_p \leq \|f - \Phi_N\|_p \leq c_2 \frac{\|f\|_{H_p^r(M)}}{(s(m-1))^r} \leq c_3 \frac{\|f\|_{H_p^r(M)}}{N^r}.$$

§ 3. Неравенства типа Бернштейна

ЛЕММА 3.1. Пусть $\Phi(x)$ – сферический полином степени m . Тогда функция $\rho(t) = \Phi(R(t)O)$ является тригонометрическим полиномом степени m .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Любой сферический полином есть линейная комбинация матричных элементов $\tau_{j0}^l(u)$ сферических представлений T^l с $l \leq m$, поэтому достаточно показать, что $\tau_{j0}^l(R(t))$ – тригонометрический полином степени l .

Воспользуемся обозначениями из § 1. Пусть $T^l(u)$ – сферическое представление группы U со старшим весом $\lambda = l\mu$, E^l – пространство этого представления, e_j^l ($0 \leq j \leq d_l - 1$) – ортонормированный базис пространства E^l , причем вектор e_0^l – K -инвариантный.

Векторные пространства $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{h}$ определены в § 1. Пусть $\mathfrak{u}_{\mathbb{C}}$, $\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}$, $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}$, и $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$ – комплексификации этих пространств. Тогда $\mathfrak{u}_{\mathbb{C}}$ будет полупростой алгеброй Ли, $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$ – подалгебра Картана и можно пользоваться методами теории полупростых алгебр Ли (см., например, [13], [14]). Веса и корни алгебры $\mathfrak{u}_{\mathbb{C}}$ являются линейными функционалами на $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$ и принимают вещественные значения на вещественном векторном пространстве $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}} = i\mathfrak{h}$, $i = \sqrt{-1}$. Выберем какой-нибудь базис $h_1, h_2, \dots$ в $i\mathfrak{h}$, причем пусть $h_1 \in \mathfrak{a}$. Обычным образом по этому базису строится упорядочение на сопряженном пространстве $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$. Пусть Σ^+ – множество положительных корней алгебры $\mathfrak{u}_{\mathbb{C}}$.

Напомним, что $H \in \mathfrak{a}$, $|H| = 1$ и $R(t) = \exp(tH)$. Пусть δ – какой-нибудь вес представления T^l . Любой вес имеет вид

$$\delta = \lambda - \sum_{\alpha \in \Sigma^+} n_{\alpha} \cdot \alpha,$$

где n_{α} – неотрицательные целые числа, $\lambda = l\mu$ – старший вес. Известно (см. [9, гл. V, § 4, п. 3]), что для симметрического пространства ранга 1 ограничение любого положительного корня α на $\mathfrak{a}$ равно

$$\alpha|_{\mathfrak{a}} = k\mu|_{\mathfrak{a}},$$

где число k может быть равно 0, $\frac{1}{2}$ или 1. Тогда

$$\delta(H) = q \cdot \mu(H),$$

где q – целое или полуцелое неотрицательное число и $q \leq l$. При выбранной нормировке $\mu(H) = 2i$, следовательно,

$$\delta(H) = 2qi, \quad q \leq l.$$

Так как сферическое представление эквивалентно своему дуальному представлению, то вместе с весом δ весом будет также и $(-\delta)$ (см. [14, гл. VII, § 7, п. 5]), тогда

$$(-\delta)(H) = 2(-q)i \quad \text{и} \quad (-q) \leq l.$$

Следовательно, $|q| \leq l$.

В пространстве E^l можно выбрать базис из весовых векторов. В этом базисе матрица оператора $T^l(R(t))$ будет диагональной, с диагональными элементами вида e^{iqt} , где q – неотрицательные целые или полуцелые числа и $|q| \leq l$. В любом другом базисе матричные элементы $\tau_{j0}^l(R(t))$ будут иметь вид

$$\tau_{j0}^l(R(t)) = \sum_q c_q e^{iqt}, \quad (3.1)$$

где c_q – числовые коэффициенты. Так как $R(2\pi) \in K$ (см. §2), то

$$\tau_{j0}^l(R(t+2\pi)) = \tau_{j0}^l(R(t)R(2\pi)) = \tau_{j0}^l(R(t)),$$

следовательно, в сумме (3.1) коэффициенты при полуцелых q равны 0, и значит, $\tau_{j0}^l(R(t))$ – тригонометрический полином степени l .

Пусть $x, x' \in M$ и ξ, ξ' – произвольные единичные касательные векторы в точках x и x' , соответственно. Так как M – КРОСП, то известно [15, §8.12], что существует изометрия $g \in U$, которая переводит точку x в x' и вектор ξ в ξ' (точнее говоря, $g_*(\xi) = \xi'$, где g_* – индуцированное отображение касательных векторов). В частности, если $\xi, \xi' \in T_0M$, то существует изометрия $k \in K$, для которой $k_*(\xi) = \xi'$.

Пусть $x \in M$, ξ – единичный касательный вектор в точке x , $\gamma(x, \xi; s)$ – геодезическая, выходящая из точки x в направлении вектора ξ . Для $t \in \mathbb{R}$ и натурального k положим

$${}_t\partial_\xi^k f(x) = \frac{d^k}{ds^k} f(\gamma(x, \xi; s)) \Big|_{s=t}. \quad (3.2)$$

ЛЕММА 3.2. Пусть $\Phi(x)$ – сферический полином степени m . Тогда выполняется неравенство

$$|{}_t\partial_\xi^k \Phi(x)| \leq m^k \|\Phi\|_\infty. \quad (3.3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть g – изометрия, переводящая точку O в точку x и вектор $H \in \mathfrak{p}$ (напомним, что касательное пространство T_OM отождествляется с $\mathfrak{p}$) в вектор ξ . Заменив полином $\Phi(x)$ на полином $\tilde{\Phi}(x) = \Phi(gx)$, мы получим, что неравенство (3.3) достаточно доказать для случая, когда $x = O$ и $\xi = H$. Тогда $\gamma(O, H; s) = R(s)O$ и

$${}_t\partial_H^k \Phi(O) = \frac{d^k}{dt^k} \Phi(R(t)).$$

Но по лемме 3.1 $\Phi(R(t))$ – тригонометрический полином степени m и остается воспользоваться классическим неравенством Бернштейна для тригонометрических полиномов:

$$\left| \frac{d^k}{dt^k} \Phi(R(t)) \right| \leq m^k \max_{0 \leq t \leq 2\pi} |\Phi(R(t))| \leq m^k \max_{x \in M} |\Phi(x)|.$$

Пусть B – многообразие единичных касательных векторов к многообразию M . Точки многообразия B имеют вид (x, ξ) , где $x \in M$, $\xi \in S(x)$. Для любой непрерывной функции $F(x, \xi)$ на B можно определить инвариантный (относительно группы U) интеграл формулой

$$I(F) = \int_M dx \int_{S(x)} F(x, \xi) d\mu(\xi), \quad (3.4)$$

где $d\mu(\xi)$ – элемент римановой меры на сфере $S(x)$. Из единственности (с точностью до множителя) инвариантного интеграла следует, что его можно также записать в виде

$$I(F) = A_3 \int_U F(ux_0, u_*(\xi_0)) du, \quad (3.5)$$

где du – элемент меры Хаара на группе U , (x_0, ξ_0) – любая фиксированная точка из B , A_3 – не зависящая от F константа.

Для любой функции $F(x, \xi)$ на B определим “усредненную” функцию $F_0(x, \xi)$ формулой

$$F_0(x, \xi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F\left(\gamma(x, \xi; s), \frac{d}{ds}\gamma(x, \xi; s)\right) ds. \quad (3.6)$$

ЛЕММА 3.3. Если $F(x, \xi)$ – непрерывная функция на B , то

$$I(F) = I(F_0). \quad (3.7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть v – изометрия из группы U , которая переводит точку O в точку x и вектор $H \in T_O = \mathfrak{p}$ в вектор ξ . Тогда $\gamma(x, \xi; s) = vR(s)O$ и $\frac{d}{ds}\gamma(x, \xi; s) = (vR(s))_*H$. Следовательно,

$$F_0(x, \xi) = F_0(vO, v_*H) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(vR(s)O, (vR(s))_*H) ds.$$

Пользуясь (3.5), получим, что

$$\begin{aligned} I_0(F) &= A_3 \int_U F_0(uO, u_*H) du = \frac{A_3}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_U F(uR(s)O, (uR(s))_*H) du ds \\ &= \frac{A_3}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_U F(\tilde{u}O, \tilde{u}_*H) d\tilde{u} ds = A_3 \int_U F(\tilde{u}O, \tilde{u}_*H) d\tilde{u} = I(F). \end{aligned}$$

При этом была сделана замена $\tilde{u} = uR(s)$ и использована инвариантность меры Хаара относительно правых сдвигов.

Исходя из оператора ${}_t\partial_\xi^k f(x)$ (см. (3.2)), определим усредненный оператор ${}_t\partial^k f(x)$ как

$${}_t\partial^k f(x) = \frac{1}{\sigma} \int_{S(x)} {}_t\partial_\xi^k f(x) d\mu(\xi). \quad (3.8)$$

ЛЕММА 3.4. Пусть $\Phi(x)$ – сферический полином порядка m . Тогда справедливо неравенство

$$\|_t \partial^k \Phi(x)\|_p \leqslant c m^k \|\Phi\|_p, \quad 1 \leqslant p \leqslant \infty, \quad (3.9)$$

где c – не зависящая от m , Φ , k постоянная.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $p = \infty$ неравенство сразу следует из леммы 3.2. Пусть $p < \infty$. Пользуясь неравенством Гёльдера, получим, что

$$\begin{aligned} \|_t \partial^k \Phi(x)\|_p^p &= \int_M \left| \int_{S(x)} {}_t \partial_\xi^k \Phi(x) d\left(\frac{\mu(\xi)}{\sigma}\right) \right|^p dx \\ &\leqslant \int_M \int_{S(x)} |{}_t \partial_\xi^k \Phi(x)|^p d\left(\frac{\mu(\xi)}{\sigma}\right) dx = \frac{1}{\sigma} I(|{}_t \partial_\xi^k \Phi(x)|^p). \end{aligned}$$

Пусть $F(x, \xi) = |{}_t \partial_\xi^k \Phi(x)|^p = \left| \frac{d^k}{dt^k} \Phi(\gamma(x, \xi; t)) \right|^p$, t – фиксированное число. Тогда очевидно, что

$$F\left(\gamma(x, \xi; s), \frac{d}{ds} \gamma(x, \xi; s)\right) = \left| \frac{d^k}{dt^k} \Phi(\gamma(x, \xi; t+s)) \right|^p.$$

В обозначениях леммы 3.3

$$\begin{aligned} F(x, \xi) &= \left| \frac{d^k}{dt^k} \Phi(vR(t)O) \right|^p, \\ F_0(x, \xi) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{d^k}{dt^k} \Phi(vR(t+s)O) \right|^p dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{d^k}{dt^k} \Phi(vR(t)O) \right|^p dt. \end{aligned}$$

Так как $\Phi(vR(t)O)$ – тригонометрический полином порядка m , то из обычного неравенства Бернштейна в метрике L_p^* (см. [16, § 2.5]) следует, что

$$F_0(x, \xi) \leqslant \frac{1}{2\pi} m^{pk} \int_0^{2\pi} |\Phi(vR(t)O)|^p dt.$$

Применяя лемму 3.3, получим

$$\begin{aligned} I(F) &= I(F_0) \leqslant m^{pk} \frac{1}{2\pi} I\left(\int_0^{2\pi} |\Phi(vR(t)O)|^p dt\right) \\ &= \frac{m^{pk}}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_U |\Phi(uR(t)O)|^p du dt = m^{pk} \int_U |\Phi(\tilde{u}O)|^p d\tilde{u} = \frac{m^{pk}}{A_3} \|\Phi\|_p^p. \end{aligned}$$

Окончательно получаем, что

$$\|_t \partial^k \Phi\|_p \leqslant c m^k \|\Phi\|_p,$$

где $c = (\sigma A_3)^{-1/p}$.

ЛЕММА 3.5. Если $\Phi(x)$ – сферический полином порядка m , то

$$\|*\Delta_t^k \Phi(x)\|_p \leq c(mt)^k \|\Phi\|_p, \quad 1 \leq p \leq \infty, \quad (3.10)$$

где постоянная c не зависит от Φ , m , t ($t > 0$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Разность

$$\Delta_t^k \Phi(\gamma(x, \xi; s)) \Big|_{s=0}$$

допускает представление в виде

$$\int_0^t \cdots \int_0^t \frac{d^k}{d\tau^k} \Phi(\gamma(x, \xi; \tau)) \Big|_{\tau=t_1+\cdots+t_k} dt_1 \dots dt_k. \quad (3.11)$$

Тогда

$$*\Delta_t^k \Phi(x) = \int_0^t \cdots \int_0^t (t_1+\cdots+t_k) \partial^k \Phi(x) dt_1 \dots dt_k.$$

Пользуясь леммой 3.4, получаем, что

$$\|*\Delta_t^k \Phi(x)\|_p \leq \int_0^t \cdots \int_0^t \|(t_1+\cdots+t_k) \partial^k \Phi(x)\|_p dt_1 \dots dt_k \leq ct^k m^k \|\Phi\|_p.$$

С использованием леммы 3.5 доказательство обратной части теоремы 1 получается дословным повторением рассуждения из § 4 в [3] и поэтому здесь не приводится.

Список литературы

1. Никольский С. М., Лизоркин П. И. Приближение сферическими полиномами // Труды МИАН. 1984. Т. 166. С. 186–200.
2. Никольский С. М., Лизоркин П. И. Функциональные пространства на сфере, связанные с теорией приближений // Матем. заметки. 1987. Т. 41. № 4. С. 509–516.
3. Никольский С. М., Лизоркин П. И. Аппроксимация функций на сфере // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1987. Т. 51. № 3. С. 635–651.
4. Федоров В. М. Приближение функций на сфере // Вестник МГУ. Сер. матем., мех. 1990. № 1. С. 15–23.
5. Рустамов Х. П. О приближении функций на сфере // Докл. АН СССР. 1991. Т. 320. № 6. С. 1319–1325.
6. Тихомиров В. М. Теория приближений. Гл. 4, § 2 // Итоги науки и техники. Соврем. пробл. матем. Фунд. направления. Т. 14, 1987.
7. Камзолов А. И. Об интерполяционной формуле Рисса и неравенстве Бернштейна для функций на однородных пространствах // Матем. заметки. 1974. Т. 15. № 6. С. 967–978.
8. Бессе А. Многообразия с замкнутыми геодезическими. М.: Мир, 1981.
9. Хелгасон С. Группы и геометрический анализ. М.: Мир, 1987.
10. Хелгасон С. Дифференциальная геометрия и симметрические пространства. М.: Мир, 1964.
11. Вейль А. Интегрирование в топологических группах и его применения. М.: ИЛ, 1950.

12. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Т. 2. М.: Наука, 1974.
13. *Гото М., Гроссманс Ф.* Полупростые алгебры Ли. М.: Мир, 1981.
14. *Бурбаки Н.* Группы и алгебры Ли. Гл. VII-VIII. М.: Мир, 1978.
15. *Вольф Дж.* Пространства постоянной кривизны. М.: Наука, 1982.
16. *Никольский С. М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М.: Наука, 1977.

Петрозаводск

Поступила в редакцию
26.11.1993