Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Устинов, Вычисление дисперсии в одной задаче из теории цепных дробей, *Матем. сб.*, 2007, том 198, номер 6, 139–158

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm2345>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.59.107

26 апреля 2023 г., 13:39:01

УДК 511.336

А. В. Устинов

Вычисление дисперсии в одной задаче из теории цепных дробей

В работе исследуется случайная величина $N(\alpha, R) = \#\{j \geq 1 : Q_j(\alpha) \leq R\}$, где $\alpha \in [0; 1)$ и $P_j(\alpha)/Q_j(\alpha)$ – подходящая дробь к числу $\alpha = [0; t_1, t_2, \dots]$ с номером j . Для математического ожидания

$$N(R) = \int_0^1 N(\alpha, R) d\alpha$$

и дисперсии

$$D(R) = \int_0^1 (N(\alpha, R) - N(R))^2 d\alpha$$

величины $N(\alpha, R)$ доказываются асимптотические формулы с двумя значащими членами

$$N(R) = N_1 \log R + N_0 + O(R^{-1+\varepsilon}), \quad D(R) = D_1 \log R + D_0 + O(R^{-1/3+\varepsilon}).$$

Библиография: 13 названий.

§ 1. Обозначения

1. Запись $[x_0; x_1, \dots, x_s]$ означает цепную дробь

$$x_0 + \frac{1}{x_1 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{x_s}}}$$

длины s с формальными переменными $x_0, x_1, \dots, x_s$.

2. Для рационального числа r представление $r = [t_0; t_1, \dots, t_s]$ есть каноническое (если не сделано дополнительных оговорок) разложение r в цепную дробь, где $t_0 = [r]$ (целая часть r), $t_1, \dots, t_s$ – натуральные и $t_s \geq 2$ при $s \geq 1$. В некоторых случаях то же число r будет записываться в виде $r = [t_0; t_1, \dots, t_s - 1, 1]$.

3. Обозначение $K_n(x_1, \dots, x_n)$ (см. [1]) используется для континуантов, которые определяются начальными условиями

$$K_0() = 1, \quad K_1(x_1) = x_1$$

и рекуррентным соотношением

$$K_n(x_1, \dots, x_n) = x_n K_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1}) + K_{n-2}(x_1, \dots, x_{n-2}), \quad n \geq 2.$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 07-01-00306), фонда INTAS (грант № 03-51-5070) и проекта ДВО РАН (№ 06-III-A-01-017).

При этом всегда выполняется равенство

$$[x_0; x_1, \dots, x_s] = \frac{K_{s+1}(x_0, x_1, \dots, x_s)}{K_s(x_1, \dots, x_s)}.$$

Нижний индекс, равный числу аргументов континуанта, в дальнейшем будет опускаться.

4. Знак “*” в двойных суммах вида

$$\sum_n \sum_m^* \dots$$

означает, что переменные, по которым проводится суммирование, связаны дополнительным условием $(m, n) = 1$.

5. Если A – некоторое утверждение, то $[A]$ означает 1, если A истинно, и 0 в противном случае.

6. Для натурального q через $\delta_q(a)$ будем обозначать характеристическую функцию делимости на q :

$$\delta_q(a) = [a \equiv 0 \pmod{q}] = \begin{cases} 1, & \text{если } a \equiv 0 \pmod{q}, \\ 0, & \text{если } a \not\equiv 0 \pmod{q}. \end{cases}$$

7. Штрих в суммах вида

$$\sum'_{b, m=1}^n \delta_n(bm \pm 1) \cdot \dots$$

означает, что при $n = 1$ из двух знаков в символе $\pm$ выбирается знак “минус”, а при $n > 1$ оба знака берутся независимо.

8. Конечные разности функций одной и двух переменных:

$$\begin{aligned} \Delta a(u) &= a(u+1) - a(u), \\ \Delta_{1,0}a(u, v) &= a(u+1, v) - a(u, v), \quad \Delta_{0,1}a(u, v) = a(u, v+1) - a(u, v), \\ \Delta_{1,1}a(u, v) &= \Delta_{0,1}(\Delta_{1,0}a(u, v)) = \Delta_{1,0}(\Delta_{0,1}a(u, v)). \end{aligned}$$

9. Сумма степеней делителей

$$\sigma_\alpha(q) = \sum_{d|q} d^\alpha.$$

§ 2. Введение

Обозначим через $s(a/b)$ длину цепной дроби для рационального числа $a/b = [t_0; t_1, \dots, t_s]$.

В 1968 г. Хейльбронн [2] доказал асимптотическую формулу для среднего значения величины $s(a/b)$

$$\frac{1}{\varphi(b)} \sum_{\substack{1 \leq a \leq b \\ (a,b)=1}} s\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{2 \log 2}{\zeta(2)} \log b + O(\log^4 \log b).$$

Позднее Портер (см. [3]) для той же суммы получил асимптотическую формулу с двумя значащими членами

$$\frac{1}{\varphi(b)} \sum_{\substack{1 \leq a \leq b \\ (a,b)=1}} s\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{2 \log 2}{\zeta(2)} \log b + C_P - 1 + O(b^{-1/6+\varepsilon}),$$

где

$$C_P = \frac{\log 2}{\zeta(2)} \left(3 \log 2 + 4\gamma - 4 \frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)} - 2 \right) - \frac{1}{2}$$

– константа, получившая название константы Портера (ее окончательный вид был найден Ренчем, см. [4]).

Для дисперсии величины $s(a/b)$ (при фиксированном значении b) известна лишь правильная по порядку оценка, принадлежащая Быковскому [5]:

$$\frac{1}{b} \sum_{a=1}^b \left(s\left(\frac{a}{b}\right) - \frac{2 \log 2}{\zeta(2)} \log b \right)^2 \ll \log b.$$

При усреднении по обоим параметрам a и b получаются более точные результаты. Так, для среднего значения величины $s(a/b)$ методами из работ [6], [7] получается асимптотическая формула

$$\frac{2}{R^2} \sum_{b \leq R} \sum_{a \leq b} s\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{2 \log 2}{\zeta(2)} \log b + B + O(b^{-1/2+\varepsilon}),$$

где

$$B = \frac{2 \log 2}{\zeta(2)} \left(-\frac{1}{2} + \frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)} \right) + C_P - \frac{3}{2}.$$

Для дисперсии также известна асимптотическая формула с двумя значащими членами (см. [8]):

$$\frac{2}{R^2} \sum_{b \leq R} \sum_{a \leq b} \left(s\left(\frac{a}{b}\right) - \frac{2 \log 2}{\zeta(2)} \log b - B \right)^2 = \delta_1 \log R + \delta_0 + O(R^{-\gamma}) \quad (1)$$

с абсолютными константами δ_1 , δ_0 и $\gamma > 0$.

В случае иррационального числа α аналогом величины $s(\alpha)$ можно считать

$$N(\alpha, R) = \#\{j \geq 1 : Q_j(\alpha) \leq R\},$$

где $Q_j(\alpha)$ – знаменатель j -й подходящей дроби к числу α . В настоящей работе для среднего значения $N(\alpha, R)$

$$N(R) = \int_0^1 N(\alpha, R) d\alpha$$

проверяется асимптотическая формула с двумя значащими членами и для дисперсии

$$D(R) = \int_0^1 (N(\alpha, R) - N(R))^2 d\alpha = \int_0^1 N^2(\alpha, R) d\alpha - N^2(R)$$

доказывается асимптотическая формула

$$D(R) = D_1 \log R + D_0 + O(R^{-1/3} \log^5 R)$$

с абсолютными константами D_1, D_0 .

Методы настоящей работы также позволяют доказать формулу (1) с любым $\gamma > -1/4$. Автор планирует изложить этот результат в следующей статье.

Автор выражает благодарность В. А. Быковскому за поставленную задачу и полезные советы.

§ 3. О цепных дробях

Следующее утверждение является видоизменением одной известной теоремы (см. [9; § 50, теорема 1]). Оно будет служить основой для всех дальнейших рассуждений.

ЛЕММА 1. Пусть P – целое неотрицательное число, P', Q, Q' – натуральные числа и $Q \leq Q'$. Предположим также, что α – действительное число из интервала $(0, 1)$. Тогда следующие два условия эквивалентны:

- (I) P/Q и P'/Q' – последовательные подходящие дроби к числу α , отличные от α , причем дробь P'/Q' имеет больший номер;
(II)

$$PQ' - P'Q = \pm 1 \quad \text{и} \quad 0 < \frac{Q'\alpha - P'}{-Q\alpha + P} < 1.$$

Доказательство см. в [6; лемма 1].

Следуя работе [5], обозначим через $\mathcal{M}$ множество всех целочисленных матриц

$$S = \begin{pmatrix} P & P' \\ Q & Q' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(S) & P'(S) \\ Q(S) & Q'(S) \end{pmatrix}$$

с определителем $\det S = \pm 1$, у которых

$$1 \leq Q \leq Q', \quad 0 \leq P \leq Q, \quad 1 \leq P' \leq Q'.$$

Для вещественного $R > 0$ через $\mathcal{M}(R)$ будем обозначать конечное подмножество в $\mathcal{M}$, состоящее из всех матриц S с дополнительным условием $Q' \leq R$.

Из леммы 1, как это было отмечено в работе [5], вытекают следующие свойства множества $\mathcal{M}$.

1°. Соответствие

$$(q_1, \dots, q_l) \rightarrow S = S(q_1, \dots, q_l) = \begin{pmatrix} P & P' \\ Q & Q' \end{pmatrix}, \quad (2)$$

где

$$\frac{P}{Q} = [0; q_1, \dots, q_{l-1}], \quad \frac{P'}{Q'} = [0; q_1, \dots, q_l],$$

определяет биекцию множества всех конечных наборов натуральных чисел на множество $\mathcal{M}$. В частности, отсюда следует, что множество $\mathcal{M}$ является полугруппой по умножению.

2°. Для вещественного $\alpha \in (0, 1)$ неравенство

$$0 < \frac{Q'\alpha - P'}{-Q\alpha + P} = S^{-1}(\alpha) < 1, \quad S \in \mathcal{M},$$

имеет место тогда и только тогда, когда для некоторого $j \geq 1$

$$S = \begin{pmatrix} P_j(\alpha) & P_{j+1}(\alpha) \\ Q_j(\alpha) & Q_{j+1}(\alpha) \end{pmatrix}$$

и $j \leq s(r) - 2$ для рационального $\alpha = r$.

3°. Для всякой матрицы $S \in \mathcal{M}$ неравенство $0 < S^{-1}(\alpha) < 1$ задает интервал

$$I(S) = \begin{cases} \left(\frac{P'}{Q'}, \frac{P + P'}{Q + Q'} \right), & \text{если } \det S = 1, \\ \left(\frac{P + P'}{Q + Q'}, \frac{P'}{Q'} \right), & \text{если } \det S = -1, \end{cases}$$

длины

$$|I(S)| = \frac{1}{Q'(Q + Q')}.$$

4°. Пусть $q_1, \dots, q_l$ – натуральные числа и в соответствии с (2) выполняется $S = S(q_1, \dots, q_l)$. Тогда число α будет лежать в интервале $I(S)$ в том и только том случае, когда $s(\alpha) > l$ и в каноническом разложении $\alpha = [t_0; t_1, \dots, t_l, \dots]$

$$t_0 = 0, \quad t_1 = q_1, \dots, t_l = q_l.$$

5°. Пересечение $I(S) \cap I(S')$ непусто тогда и только тогда, когда один из интервалов содержится в другом. При этом если $I(S) \subsetneq I(S')$ и $S' = S'(q_1, \dots, q_{l'})$, то для некоторого $l > l'$ и натуральных $q_{l'+1}, \dots, q_l$ будет выполняться равенство

$$S = S' S'',$$

где $S'' = S''(q_{l'+1}, \dots, q_l)$ и $S = S(q_1, \dots, q_l)$.

6°. Если $Q' \geq 2$, $1 \leq Q \leq Q'$ и $(Q, Q') = 1$, то имеются ровно две пары

$$(P, P') \quad \text{и} \quad (Q - P, Q' - P'),$$

которые в качестве первой строки могут дополнить вторую строку (Q, Q') до матрицы из $\mathcal{M}$. Кроме того, если

$$\frac{Q}{Q'} = [0; q_s, \dots, q_1] = [0; q_s, \dots, q_1 - 1, 1], \quad q_1 \geq 2,$$

то соответствующие матрицы имеют вид

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & q_1 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & q_s \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} K(q_2, \dots, q_{s-1}) & K(q_2, \dots, q_s) \\ K(q_1, \dots, q_{s-1}) & K(q_1, \dots, q_s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P & P' \\ Q & Q' \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & q_1 - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & q_2 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & q_s \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} K(q_1 - 1, q_2, \dots, q_{s-1}) & K(q_1 - 1, q_2, \dots, q_s) \\ K(1, q_1 - 1, q_2, \dots, q_{s-1}) & K(1, q_1 - 1, q_2, \dots, q_s) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} Q - P & Q' - P' \\ Q & Q' \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

При $Q = Q' = 1$ существует только одна матрица $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, лежащая в множестве $\mathcal{M}$.

§ 4. Вспомогательные утверждения

ЛЕММА 2. Пусть $R \geq 2$. Тогда

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq R} \frac{\varphi(n)}{n^2} &= \frac{1}{\zeta(2)} \left(\log R + \gamma - \frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)} \right) + O\left(\frac{\log R}{R}\right), \\ \sum_{n \leq R} \frac{\varphi(n)}{n^2} \log n &= \frac{1}{2\zeta(2)} \log^2 R + C_0 + O\left(\frac{\log^2 R}{R}\right), \end{aligned} \quad (3)$$

где

$$C_0 = \gamma \frac{\zeta'(2)}{\zeta^2(2)} + \gamma_1 \frac{1}{\zeta(2)} - \frac{2(\zeta'(2))^2 - \zeta''(2)\zeta(2)}{2\zeta^3(2)}$$

и γ_1 – константа Стилтеса (см. [10; раздел 2.21]), определяемая равенством

$$\sum_{n \leq T} \frac{\log n}{n} = \frac{\log^2 T}{2} + \gamma_1 + O\left(\frac{\log T}{T}\right), \quad T \geq 2. \quad (4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства равенства (3) запишем $\varphi(q)$, используя функцию Мёбиуса:

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq R} \frac{\varphi(n)}{n^2} &= \sum_{n \leq R} \frac{1}{n} \sum_{d|n} \frac{\mu(d)}{d} = \sum_{d \leq R} \frac{\mu(d)}{d^2} \sum_{n \leq R/d} \frac{1}{n} \\ &= \sum_{d \leq R} \frac{\mu(d)}{d^2} \left(\log R - \log d + \gamma + O\left(\frac{d}{R}\right) \right). \end{aligned}$$

Поскольку

$$\sum_{d \leq R} \frac{\mu(d)}{d^2} = \frac{1}{\zeta(2)} + O\left(\frac{1}{R}\right), \quad \sum_{d \leq R} \frac{\mu(d)}{d^2} \log d = \frac{\zeta'(2)}{\zeta^2(2)} + O\left(\frac{\log R}{R}\right), \quad (5)$$

то

$$\sum_{n \leq R} \frac{\varphi(n)}{n^2} = \frac{1}{\zeta(2)} \left(\log R + \gamma - \frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)} \right) + O\left(\frac{\log R}{R}\right).$$

Вторую сумму преобразуем тем же способом:

$$\sum_{n \leq R} \frac{\varphi(n)}{n^2} \log n = \sum_{n \leq R} \frac{\log n}{n} \sum_{d|n} \frac{\mu(d)}{d} = \sum_{d \leq R} \frac{\mu(d)}{d^2} \sum_{n \leq R/d} \frac{1}{n} (\log n + \log d).$$

Пользуясь равенством (4), находим

$$\sum_{n \leq R} \frac{\varphi(n)}{n^2} \log n = \sum_{d \leq R} \frac{\mu(d)}{d^2} \left(\frac{\log^2 R}{2} - \frac{\log^2 d}{2} + \gamma_1 + \gamma \log d \right) + O\left(\frac{\log^2 R}{R}\right).$$

Вторая формула леммы теперь следует из (5) и равенства

$$\sum_{d \leq R} \frac{\mu(d)}{d^2} \log^2 d = \frac{2(\zeta'(2))^2 - \zeta''(2)\zeta(2)}{\zeta^3(2)} + O\left(\frac{\log^2 R}{R}\right).$$

ЛЕММА 3. При $R \geq 2$ для суммы

$$\Phi^*(R) = \sum_{Q' \leq R} \sum_{Q \leq Q'}^* \frac{1}{Q'(Q + Q')} \quad (6)$$

справедлива асимптотическая формула

$$\Phi^*(R) = \frac{\log 2}{\zeta(2)} \left(\log R + \log 2 + \gamma - \frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)} \right) - \frac{1}{2} + O\left(\frac{\log R}{R}\right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Найдем сначала асимптотическую формулу для суммы

$$\Phi(R) = \sum_{Q' \leq R} \sum_{Q \leq Q'} \frac{1}{Q'(Q + Q')},$$

в которой переменные суммирования Q и Q' не связаны условием взаимной простоты. Запишем $\Phi(R)$ в виде

$$\Phi(R) = \log 2 \sum_{Q' \leq R} \frac{1}{Q'} + \sigma_0 + O\left(\frac{1}{R}\right),$$

где

$$\sigma_0 = \sum_{Q'=1}^{\infty} \frac{1}{Q'} \left(\sum_{Q=1}^{Q'} \frac{1}{Q + Q'} - \log 2 \right). \quad (7)$$

Для суммы σ_0 известно точное значение (см. [4])

$$\sigma_0 = \log^2 2 - \frac{\zeta(2)}{2}, \quad (8)$$

значит,

$$\Phi(R) = \log 2 (\log R + \log 2 + \gamma) - \frac{\zeta(2)}{2} + O\left(\frac{1}{R}\right).$$

Далее, применяя формулы

$$\Phi^*(R) = \sum_{\delta \leq R} \frac{\mu(\delta)}{\delta^2} \Phi\left(\frac{R}{\delta}\right), \quad \sum_{\delta=1}^{\infty} \frac{\mu(\delta)}{\delta^2} \log \delta = \frac{\zeta'(2)}{\zeta^2(2)},$$

приходим к утверждению леммы.

ЛЕММА 4. Пусть q – натуральное число и функция $a(n)$ задана для целых n , лежащих в пределах $1 \leq n \leq q$. Предположим также, что эта функция удовлетворяет неравенствам

$$a(n) \geq 0, \quad 1 \leq n \leq q, \quad \Delta a(n) \leq 0, \quad 1 \leq n \leq q-1.$$

Тогда

$$\sum_{\substack{n=1 \\ (n,q)=1}}^q a(n) = \frac{\varphi(q)}{q} \sum_{n=1}^q a(n) + O(A\sigma_0(q)),$$

где $A = a(1)$ – наибольшее значение функции $a(n)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применим к данной сумме преобразование Абеля:

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{n=1 \\ (n,q)=1}}^q a(n) &= \sum_{n=1}^q a(n)[(n,q)=1] \\ &= \varphi(q)a(q) - \sum_{k=1}^{q-1} (a(k+1) - a(k)) \sum_{n=1}^k [(n,q)=1]. \end{aligned}$$

Далее, пользуясь равенством

$$\sum_{n=1}^k [(n,q)=1] = \frac{\varphi(q)}{q}k + O(\sigma_0(q))$$

(см. [11; гл. II, задача 19]), находим

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{n=1 \\ (n,q)=1}}^q a(n) &= \varphi(q)a(q) - \frac{\varphi(q)}{q} \sum_{k=1}^{q-1} (a(k+1) - a(k))k + O(A\sigma_0(q)) \\ &= \frac{\varphi(q)}{q} \sum_{n=1}^q a(n) + O(A\sigma_0(q)). \end{aligned}$$

В основе следующего утверждения, в частных случаях доказанного в работе [12], лежат оценки сумм Клоостермана, принадлежащие Эстерману [13].

ЛЕММА 5. Пусть $q \geq 1$ – натуральное число и функция $a(u, v)$ задана в целых точках (u, v) , где $1 \leq u, v \leq q$. Предположим также, что эта функция удовлетворяет неравенствам

$$a(u, v) \geq 0, \quad \Delta_{1,0}a(u, v) \leq 0, \quad \Delta_{0,1}a(u, v) \leq 0, \quad \Delta_{1,1}a(u, v) \geq 0$$

во всех точках, где эти условия определены. Тогда для суммы

$$W = \sum_{u,v=1}^q \delta_q(uv \pm 1)a(u, v)$$

(при любом выборе знака в символе $\pm$) справедлива асимптотическая формула

$$W = \frac{\varphi(q)}{q^2} \sum_{u,v=1}^q a(u, v) + O(A\psi(q)\sqrt{q}),$$

где $\psi(q) = \sigma_0(q)\sigma_{-1/2}(q)\log^2(q+1)$, $A = a(1, 1)$ – наибольшее значение функции $a(u, v)$.

Доказательство см. в [6; лемма 5].

§ 5. О величинах $N(R)$ и $D(R)$

ЛЕММА 6. При $R \geq 1$ величина

$$N(R) = \int_0^1 N(\alpha, R) d\alpha$$

может быть представлена в виде

$$N(R) = 2\Phi^*(R) - \frac{1}{2}, \quad (9)$$

где функция $\Phi^*(R)$ задается рядом (6).

Кроме того, для $N(R)$ справедлива асимптотическая формула

$$N(R) = \frac{2 \log 2}{\zeta(2)} \log R + \frac{2 \log 2}{\zeta(2)} \left(\log 2 + \gamma - \frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)} \right) - \frac{3}{2} + O\left(\frac{\log(R+1)}{R}\right). \quad (10)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 1 для иррационального $\alpha \in (0, 1)$ величина $N(\alpha, R)$ совпадает с числом решений системы

$$\begin{cases} PQ' - P'Q = \pm 1, \\ 0 < S^{-1}(\alpha) < 1 \end{cases}$$

относительно неизвестных P, P', Q и Q' , связанных неравенствами

$$1 \leq Q \leq Q' \leq R, \quad 0 \leq P \leq Q, \quad 1 \leq P' \leq Q'.$$

Отсюда получаем

$$N(\alpha, R) = \sum_{S \in \mathcal{M}(R)} [0 < S^{-1}(\alpha) < 1] = \sum_{S \in \mathcal{M}(R)} \chi_{I(S)}(\alpha), \quad (11)$$

$$N(R) = \sum_{S \in \mathcal{M}(R)} \int_0^1 \chi_{I(S)}(\alpha) d\alpha = \sum_{S \in \mathcal{M}(R)} \frac{1}{Q'(Q+Q')}, \quad (12)$$

где $\chi_{I(S)}(\alpha)$ – характеристическая функция интервала $I(S)$.

Пусть $Q' \geq 2$, $1 \leq Q < Q'$ и $(Q, Q') = 1$. Тогда согласно свойству 6° множества $\mathcal{M}$ дробь $1/(Q'(Q+Q'))$ в сумме (12) появится ровно два раза. Для пары $(Q', Q) = (1, 1)$ соответствующая дробь появится один раз. Следовательно, выполнено равенство (9). Применяя к нему лемму 3, приходим к асимптотической формуле для $N(R)$.

ЛЕММА 7. При $R \geq 1$ для величины

$$D(R) = \int_0^1 (N(\alpha, R) - N(R))^2 d\alpha = \int_0^1 N^2(\alpha, R) d\alpha - N^2(R)$$

справедливо представление

$$D(R) = 4\sigma(R) - N^2(R) + \frac{1}{2}, \quad (13)$$

где

$$\sigma(R) = \sum_{Q' \leq R} \sum_{Q \leq Q'}^* \sum_{\left(\begin{smallmatrix} a & m \\ b & n \end{smallmatrix}\right) \in \mathcal{M}} \frac{[mQ + nQ' \leq R]}{(mQ + nQ')((a+m)Q + (b+n)Q')}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По формулам (11) и (12)

$$\begin{aligned} \int_0^1 N^2(\alpha, R) d\alpha &= \int_0^1 \left(\sum_{S \in \mathcal{M}(R)} \chi_{I(S)}(\alpha) \right)^2 d\alpha \\ &= \sum_{S \in \mathcal{M}(R)} |I(S)| + 2 \sum_{\substack{S, S' \in \mathcal{M}(R) \\ I(S) \subsetneq I(S')}} |I(S)| = N(R) + 2 \sum_{\substack{S, S' \in \mathcal{M}(R) \\ I(S) \subsetneq I(S')}} |I(S)|. \end{aligned}$$

Пользуясь свойством 5°, запишем матрицы S и S' в виде

$$S' = \begin{pmatrix} P & P' \\ Q & Q' \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} P & P' \\ Q & Q' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & m \\ b & n \end{pmatrix},$$

где матрица $\begin{pmatrix} a & m \\ b & n \end{pmatrix}$ также лежит в множестве $\mathcal{M}$. Значит,

$$\begin{aligned} \int_0^1 N^2(\alpha, R) d\alpha &= N(R) \\ &+ 2 \sum_{\begin{pmatrix} P & P' \\ Q & Q' \end{pmatrix} \in \mathcal{M}} \sum_{\begin{pmatrix} a & m \\ b & n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}} \frac{[mQ + nQ' \leq R]}{(mQ + nQ')((a+m)Q + (b+n)Q')}. \end{aligned}$$

Рассматривая отдельно случай $Q = Q' = 1$ и пользуясь свойством 6°, находим

$$\int_0^1 N^2(\alpha, R) d\alpha = N(R) + 4\sigma(R) - 2 \sum_{\begin{pmatrix} a & m \\ b & n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}} \frac{[m+n \leq R]}{(m+n)(a+b+m+n)}.$$

Из равенства

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & m \\ b & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & n \\ a+b & m+n \end{pmatrix}$$

и свойства 6° следует, что каждая пара чисел (q, q') такая, что $1 \leq q < q'$ и $(q, q') = 1$, будет второй строкой матрицы $\begin{pmatrix} b & n \\ a+b & m+n \end{pmatrix}$ ровно для одной матрицы $\begin{pmatrix} a & m \\ b & n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}$.

Поэтому с учетом равенства (9)

$$\begin{aligned} 2 \sum_{\begin{pmatrix} a & m \\ b & n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}} \frac{[m+n \leq R]}{(m+n)(a+b+m+n)} &= 2 \left(\Phi^*(R) - \frac{1}{2} \right) = N(R) - \frac{1}{2}, \\ \int_0^1 N^2(\alpha, R) d\alpha &= 4\sigma(R) + \frac{1}{2}, \end{aligned} \tag{14}$$

что доказывает утверждение леммы 7.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Для суммы $\sigma(R)$ можно записать еще одно представление:

$$\sigma(R) = \sum_{2 \leq Q' \leq R} \sum_{Q \leq Q'}^* \frac{s(Q/Q')}{Q'(Q+Q')}. \tag{15}$$

Действительно, если $S = S(q_1, \dots, q_n)$, то матрицу $S' \in \mathcal{M}$, для которой $I(S) \subsetneq I(S')$, можно выбрать $n - 1$ способом. Поэтому

$$\int_0^1 N^2(\alpha, R) d\alpha = N(R) + 2 \sum_{\substack{S \in \mathcal{M} \\ Q' \geq 2}} \frac{n-1}{Q'(Q+Q')}.$$

По свойству 5° множества $\mathcal{M}$ для фиксированных Q и Q' , $1 \leq Q < Q'$, $(Q, Q') = 1$, параметр n может принимать два значения: $s(Q/Q')$ и $s(Q/Q') + 1$. Таким образом,

$$\begin{aligned} \int_0^1 N^2(\alpha, R) d\alpha &= N(R) + 2 \sum_{2 \leq Q' \leq R} \sum_{Q \leq Q'}^* \frac{2s(Q/Q') - 1}{Q'(Q+Q')} \\ &= 4 \sum_{2 \leq Q' \leq R} \sum_{Q \leq Q'}^* \frac{s(Q/Q')}{Q'(Q+Q')} + \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

что с учетом равенства (14) доказывает формулу (15).

Для нахождения $D(R)$ введем параметр U , лежащий в пределах $2 \leq U \leq R$. Сумму $\sigma(R)$ представим в виде

$$\sigma(R) = \sigma_1 - \sigma_2 + \sigma_3,$$

где

$$\sigma_1 = \sum_{Q' \leq R} \sum_{\left(\begin{smallmatrix} a & m \\ b & n \end{smallmatrix}\right) \in \mathcal{M}(U)} \sum_{Q \leq Q'}^* \frac{1}{(mQ + nQ')((a+m)Q + (b+n)Q')}, \quad (16)$$

$$\sigma_2 = \sum_{\left(\begin{smallmatrix} a & m \\ b & n \end{smallmatrix}\right) \in \mathcal{M}(U)} \sum_{Q' \leq R} \sum_{Q \leq Q'}^* \frac{[mQ + nQ' > R]}{(mQ + nQ')((a+m)Q + (b+n)Q')}, \quad (17)$$

$$\sigma_3 = \sum_{Q' \leq R} \sum_{Q \leq Q'}^* \sum_{\substack{\left(\begin{smallmatrix} a & m \\ b & n \end{smallmatrix}\right) \in \mathcal{M}, \\ n > U}} \frac{[mQ + nQ' \leq R]}{(mQ + nQ')((a+m)Q + (b+n)Q')}. \quad (18)$$

Каждую из величин σ_1 , σ_2 и σ_3 исследуем отдельно.

§ 6. Вычисление суммы σ_1

Для матрицы $S = \begin{pmatrix} a & m \\ b & n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}$ через $f_S(\xi)$ будем обозначать функцию

$$f_S(\xi) = \frac{1}{(m\xi + n)((a+m)\xi + (b+n))},$$

а через $J_1(a, b, m, n)$ – интеграл

$$J_1(a, b, m, n) = \int_0^1 f_S(\xi) d\xi.$$

ЛЕММА 8. Пусть n – натуральное число. Тогда для суммы

$$w_1(n) = \sum'_{b,m=1}^n \delta_n(bm \pm 1) J_1(a, b, m, n)$$

(под a здесь и далее подразумевается дробь $(bm \pm 1)/n$) справедлива асимптотическая формула

$$w_1(n) = 2 \log^2 2 \frac{\varphi(n)}{n^2} + O\left(\frac{\psi(n)}{n^{3/2}}\right),$$

где $\psi(n)$ – функция, определенная в условии леммы 5.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $n = 1$ утверждение леммы очевидно. Поэтому будем считать, что $n \geq 2$. Так как

$$\frac{1}{\xi((bm \pm 1)/n + m) + (b + n)} - \frac{1}{\xi(bm/n + m) + (b + n)} = O\left(\frac{1}{n^3}\right), \quad (19)$$

то для суммы $w_1(n)$ можно выписать более простое представление:

$$w_1(n) = \sum_{b,m=1}^n \delta_n(bm \pm 1) \int_0^1 \frac{d\xi}{(b/n + 1)(m\xi + n)^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

По лемме 5

$$w_1(n) = 2 \frac{\varphi(n)}{n^2} \sum_{b,m=1}^n \frac{1}{b + n} \int_0^1 \frac{n d\xi}{(m\xi + n)^2} + O\left(\frac{\psi(n)}{n^{3/2}}\right).$$

Подставляя в последнее равенство асимптотические формулы

$$\begin{aligned} \sum_{b=1}^n \frac{1}{b + n} &= \log 2 + O\left(\frac{1}{n}\right), \\ \sum_{m=1}^n \int_0^1 \frac{n d\xi}{(m\xi + n)^2} &= \log 2 + O\left(\frac{1}{n}\right), \end{aligned} \quad (20)$$

приходим к утверждению леммы.

СЛЕДСТВИЕ 1. При любом действительном $U \geq 2$ для суммы

$$W_1(U) = \sum_{\left(\begin{smallmatrix} a & m \\ b & n \end{smallmatrix}\right) \in \mathcal{M}(U)} J_1(a, b, m, n) \quad (21)$$

справедлива асимптотическая формула

$$W_1(U) = \frac{2 \log^2 2}{\zeta(2)} \left(\log U + \gamma - \frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)} \right) + C_1 + O\left(\frac{\log^5 U}{U^{1/2}}\right), \quad (22)$$

где

$$C_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum'_{b,m=1}^n \delta_n(bm \pm 1) J_1(a, b, m, n) - 2 \log^2 2 \frac{\varphi(n)}{n^2} \right). \quad (23)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Запишем сумму $W_1(U)$ в виде

$$W_1(U) = \sum_{n \leq U} \sum'_{b, m=1}^n \delta_n(bm \pm 1) J_1(a, b, m, n).$$

По лемме 8

$$\begin{aligned} W_1(U) &= \sum_{n \leq U} \left(\sum'_{b, m=1}^n \delta_n(bm \pm 1) J_1(a, b, m, n) - 2 \log^2 2 \frac{\varphi(n)}{n^2} \right) + 2 \log^2 2 \sum_{n \leq U} \frac{\varphi(n)}{n^2} \\ &= 2 \log^2 2 \sum_{n \leq U} \frac{\varphi(n)}{n^2} + C_1 + O\left(\frac{\log^5 U}{U^{1/2}}\right). \end{aligned}$$

Подставляя в последнее равенство формулу (3), приходим к утверждению следствия.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Аналогично проверяются равенства

$$\begin{aligned} \sum'_{b, m=1}^n \delta_n(bm \pm 1) \frac{1}{(m+n)(a+b+m+n)} &= \log 2 \frac{\varphi(n)}{n^2} + O\left(\frac{\psi(n)}{n^{3/2}}\right), \\ \sum'_{b, m=1}^n \delta_n(bm \pm 1) f'_S(\xi) &= -\frac{2 \log 2}{(\xi+1)^2} \frac{\varphi(n)}{n^2} + O\left(\frac{\psi(n)}{n^{3/2}}\right), \end{aligned}$$

и для сумм

$$A(U) = \sum_{\left(\begin{smallmatrix} a & m \\ b & n \end{smallmatrix}\right) \in \mathcal{M}(U)} \frac{1}{(m+n)(a+b+m+n)}, \quad B(U, \xi) = \sum_{\left(\begin{smallmatrix} a & m \\ b & n \end{smallmatrix}\right) \in \mathcal{M}(U)} f'_S(\xi)$$

получаются асимптотические формулы

$$A(U) = \frac{\log 2}{\zeta(2)} \left(\log U + \gamma - \frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)} \right) + C_2 + O\left(\frac{\log^5 R}{U^{1/2}}\right), \quad (24)$$

$$B(U, \xi) = -\frac{2 \log 2}{\zeta(2)(\xi+1)^2} \left(\log U + \gamma - \frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)} \right) + C_3(\xi) + O\left(\frac{\log^5 R}{U^{1/2}}\right), \quad (25)$$

где

$$\begin{aligned} C_2 &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum'_{b, m=1}^n \frac{\delta_n(bm \pm 1)}{(m+n)(a+b+m+n)} - \log 2 \frac{\varphi(n)}{n^2} \right), \\ C_3(\xi) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum'_{b, m=1}^n \delta_n(bm \pm 1) f'_S(\xi) + \frac{2 \log 2}{(\xi+1)^2} \frac{\varphi(n)}{n^2} \right). \end{aligned} \quad (26)$$

ЛЕММА 9. Пусть $\rho(x) = 1/2 - \{x\}$ и

$$h(x) = \sum_{q=1}^{\infty} \frac{\rho(qx)}{q^2}. \quad (27)$$

Тогда

$$\int_0^1 \frac{h(x)}{(x+1)^2} dx = \log^2 2 - \frac{\zeta(2)}{4}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение леммы следует из определения функции $\rho(x)$ и формулы (8):

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{h(x)}{(x+1)^2} dx &= \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{q^2} \sum_{a=0}^{q-1} \int_{a/q}^{(a+1)/q} \left(\frac{1}{2} + a - qx \right) \frac{dx}{(x+1)^2} \\ &= \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{q} \left(\frac{1}{q+1} + \cdots + \frac{1}{2q} - \log 2 + \frac{1}{4q} \right) \\ &= \sigma_0 + \frac{\zeta(2)}{4} = \log^2 2 - \frac{\zeta(2)}{4}. \end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 1. Пусть $2 \leq U \leq R$. Тогда для суммы

$$\sigma_1 = \sum_{Q' \leq R} \sum_{\left(\begin{smallmatrix} a & m \\ b & n \end{smallmatrix} \right) \in \mathcal{M}(U)} \sum_{Q \leq Q'}^* \frac{1}{(mQ + nQ')((a+m)Q + (b+n)Q')}$$

справедлива асимптотическая формула

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{2 \log^2 2}{\zeta^2(2)} \log R \log U + \frac{1}{\zeta(2)} \left(\frac{2 \log^2 2}{\zeta(2)} \left(\gamma - \frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)} \right) + C_1 \right) \log R \\ &\quad + \frac{2 \log^2 2}{\zeta^2(2)} \left(\gamma - \frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)} + \log 2 - \frac{\zeta(2)}{2 \log 2} \right) \log U + C'_1 + O\left(\frac{\log^6 R}{U^{1/2}} \right), \end{aligned}$$

где константа C_1 определена рядом (23) и

$$\begin{aligned} C'_1 &= \left(\gamma - \frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)} \right) \left(\frac{2 \log^2 2}{\zeta^2(2)} \left(\gamma - \frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)} + \log 2 - \frac{\zeta(2)}{2 \log 2} \right) + \frac{C_1}{\zeta(2)} \right) \\ &\quad - \frac{1}{\zeta^2(2)} \int_0^1 h(\xi) C_3(\xi) d\xi + \frac{C_2}{2} + \frac{3}{4} - \frac{\log^2 2}{\zeta(2)}. \end{aligned} \quad (28)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Формула суммирования

$$\sum_{0 < x \leq q} g(x) = \int_0^q g(x) dx + \frac{1}{2} (g(q) - g(0)) - \int_0^q \rho(x) g'(x) dx,$$

примененная к функции

$$g(x) = \frac{1}{(mx + nq)((a+m)x + (b+n)q)} = \frac{1}{q^2} f_s\left(\frac{x}{q}\right),$$

приводит к равенству

$$\begin{aligned} \sum_{x=1}^q g(x) &= \frac{1}{q} J_1(a, b, m, n) + \frac{1}{2q^2} \left(\frac{1}{(m+n)(a+b+m+n)} - \frac{1}{n(m+n)} \right) \\ &\quad - \frac{1}{q^2} \int_0^1 \rho(q\xi) f'_s(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Отсюда имеем

$$\begin{aligned} \sum_{\left(\begin{smallmatrix} a & m \\ b & n \end{smallmatrix} \right) \in \mathcal{M}(U)} \sum_{x=1}^q \frac{1}{(mx + nq)((a+m)x + (b+n)q)} \\ = \frac{1}{q} W_1(U) + \frac{1}{2q^2} (A(U) - N(U)) - \frac{1}{q^2} \int_0^1 \rho(q\xi) B(U, \xi) d\xi. \end{aligned} \quad (29)$$

Применим полученную формулу для вычисления σ_1 . Для этого предварительно преобразуем сумму σ_1 :

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \sum_{Q' \leq R} \sum_{\left(\begin{smallmatrix} a & m \\ b & n \end{smallmatrix}\right) \in \mathcal{M}(U)} \sum_{Q'=1}^{Q'} \frac{1}{(mQ + nQ')((a+m)Q + (b+n)Q')} \sum_{\delta | (Q, Q')} \mu(\delta) \\ &= \sum_{Q' \leq R} \sum_{\delta | Q'} \frac{\mu(\delta)}{\delta^2} \sum_{\left(\begin{smallmatrix} a & m \\ b & n \end{smallmatrix}\right) \in \mathcal{M}(U)} \sum_{x=1}^{Q'/\delta} \frac{1}{(mx + nQ'/\delta)((a+m)x + (b+n)Q'/\delta)}.\end{aligned}$$

По формуле (29)

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \sum_{Q' \leq R} \sum_{\delta | Q'} \frac{\mu(\delta)}{\delta^2} \left(\frac{\delta}{Q'} W_1(U) + \frac{\delta^2}{2(Q')^2} (A(U) - N(U)) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\delta^2}{(Q')^2} \int_0^1 \rho\left(\frac{Q'\xi}{\delta}\right) B(U, \xi) d\xi \right) \\ &= W_1(U) \sum_{Q' \leq R} \frac{\varphi(Q')}{(Q')^2} + \frac{1}{2} (A(U) - N(U)) \\ &\quad - \frac{1}{\zeta(2)} \int_0^1 h(\xi) B(U, \xi) d\xi + O\left(\frac{\log^2 R}{R}\right),\end{aligned}$$

где функция $h(x)$ определена равенством (27).

Подставляя в последнее равенство асимптотические формулы для входящих в нее величин (формулы (22), (24), (10), (25)) и применяя лемму 9, получаем утверждение теоремы 1.

§ 7. Вычисление суммы σ_2

Для матрицы $S = \left(\begin{smallmatrix} a & m \\ b & n \end{smallmatrix}\right) \in \mathcal{M}$ через $J_2(a, b, m, n)$ будем обозначать интеграл

$$J_2(a, b, m, n) = \int_0^1 \frac{\log(m\xi + n) d\xi}{(m\xi + n)((a+m)\xi + (b+n))}.$$

ЛЕММА 10. Пусть n – натуральное число. Тогда для суммы

$$w_2(n) = \sum_{b, m=1}^n \delta_n(bm \pm 1) J_2\left(\frac{bm \pm 1}{n}, b, m, n\right)$$

справедлива асимптотическая формула

$$w_2(n) = 2 \log^2 2 \frac{\varphi(n) \log n}{n^2} + \log^2 2 \left(2 + \log 2 - \frac{\zeta(2)}{\log 2}\right) \frac{\varphi(n)}{n^2} + O\left(\frac{\psi(n) \log(n+1)}{n^{3/2}}\right),$$

где $\psi(n)$ – функция, определенная в условии леммы 5.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $n = 1$ утверждение леммы очевидно. Поэтому будем считать, что $n \geq 2$. Из равенства (19) следует, что

$$w_2(n) = \int_0^1 d\xi \sum_{b, m=1}^n \delta_n(bm \pm 1) \frac{\log(m\xi + n)}{(1 + b/n)(m\xi + n)^2} + O\left(\frac{\log(n+1)}{n^3}\right).$$

Применяя лемму 5, находим

$$\begin{aligned} w_2(n) &= 2 \frac{\varphi(n)}{n^2} \int_0^1 d\xi \sum_{b=1}^n \frac{1}{1+b/n} \sum_{m=1}^n \frac{\log(m\xi+n)}{(m\xi+n)^2} + O\left(\frac{\psi(n) \log(n+1)}{n^{3/2}}\right) \\ &= 2 \log 2 \frac{\varphi(n)}{n} \int_0^1 d\xi \int_0^n dm \frac{\log(m\xi+n)}{(m\xi+n)^2} + O\left(\frac{\psi(n) \log(n+1)}{n^{3/2}}\right) \\ &= 2 \log 2 \frac{\varphi(n)}{n^2} \int_0^1 d\xi \int_0^1 dz \frac{\log n + \log(z\xi+1)}{(z\xi+1)^2} + O\left(\frac{\psi(n) \log(n+1)}{n^{3/2}}\right). \end{aligned}$$

Для завершения доказательства остается воспользоваться равенствами

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{d\xi dz}{(z\xi+1)^2} = \log 2, \quad \int_0^1 \int_0^1 \frac{\log(z\xi+1) d\xi dz}{(z\xi+1)^2} = \frac{\log 2}{2} \left(2 + \log 2 - \frac{\zeta(2)}{\log 2}\right).$$

Аналогично следствию 1 из лемм 2 и 10 вытекает следующее утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 2. При любом действительном $U \geq 2$ для суммы

$$W_2(U) = \sum_{\left(\begin{smallmatrix} a & m \\ b & n \end{smallmatrix}\right) \in \mathcal{M}(U)} J_2(a, b, m, n)$$

справедлива асимптотическая формула

$$W_2(U) = \frac{\log^2 2}{\zeta(2)} \log^2 U + \frac{\log^2 2}{\zeta(2)} \left(2 + \log 2 - \frac{\zeta(2)}{\log 2}\right) \log U + C_4 + O\left(\frac{\log^6 U}{U^{1/2}}\right),$$

где

$$C_4 = \frac{\log^2 2}{\zeta(2)} \left(2 + \log 2 - \frac{\zeta(2)}{\log 2}\right) \left(\gamma - \frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)}\right) + 2 \log^2 2 C_0 + C'_4, \quad (30)$$

C_0 – константа из леммы 2 и C'_4 – сумма ряда

$$C'_4 = \sum_{n=1}^{\infty} \left(w_2(n) - 2 \log^2 2 \frac{\varphi(n)}{n^2} \left(\log n + 2 + \log 2 - \frac{\zeta(2)}{\log 2} \right) \right).$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть $2 \leq U \leq R$. Тогда для суммы σ_2 , заданной равенством (17), справедлива асимптотическая формула

$$\begin{aligned} \sigma_2 &= \frac{\log^2 2}{\zeta^2(2)} \log^2 U + \frac{\log^2 2}{\zeta^2(2)} \left(2 + \log 2 - \frac{\zeta(2)}{\log 2}\right) \log U + \frac{C_4}{\zeta(2)} \\ &\quad + O\left(\frac{\log^6 R}{U^{1/2}}\right) + O\left(\frac{U \log R}{R}\right), \end{aligned}$$

где C_4 – константа из следствия 2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применяя к внутренней сумме по переменной Q лемму 4, находим

$$\begin{aligned} \sigma_2 &= \sum_{\left(\begin{smallmatrix} a & m \\ b & n \end{smallmatrix}\right) \in \mathcal{M}(U)} \sum_{Q' \leq R} \sum_{Q \leq Q'}^* \frac{[mQ + nQ' > R]}{(mQ + nQ')((a+m)Q + (b+n)Q')} \\ &= \sum_{\left(\begin{smallmatrix} a & m \\ b & n \end{smallmatrix}\right) \in \mathcal{M}(U)} \sum_{Q' \leq R} \frac{\varphi(Q')}{Q'} \sum_{Q \leq Q'} \frac{[mQ + nQ' > R]}{(mQ + nQ')((a+m)Q + (b+n)Q')} \\ &\quad + O\left(\frac{U \log R}{R}\right). \end{aligned}$$

Заменяя сумму по переменной Q на интеграл и делая замену переменной $Q = \xi Q'$, получаем

$$\sigma_2 = \sum_{\left(\begin{smallmatrix} a & m \\ b & n \end{smallmatrix}\right) \in \mathcal{M}(U)} \sum_{Q' \leq R} \frac{\varphi(Q')}{(Q')^2} \int_0^1 \frac{[m\xi + n > R/Q'] d\xi}{(m\xi + n)((a + m)\xi + b + n)} + O\left(\frac{U \log R}{R}\right).$$

Далее, так как

$$\begin{aligned} \sum_{Q' \leq R} \frac{\varphi(Q')}{(Q')^2} \left[m\xi + n > \frac{R'}{Q} \right] &= \sum_{\delta \leq R} \frac{\mu(\delta)}{\delta^2} \sum_{Q' \leq R/\delta} \frac{[m\xi + n > R/(\delta Q')]}{Q'} \\ &= \sum_{\delta \leq R} \frac{\mu(\delta)}{\delta^2} \left(\log(m\xi + n) + O\left(\frac{n\delta}{R}\right) \right) = \frac{\log(m\xi + n)}{\zeta(2)} + O\left(\frac{n \log R}{R}\right), \end{aligned}$$

то

$$\sigma_2 = \frac{1}{\zeta(2)} \sum_{\left(\begin{smallmatrix} a & m \\ b & n \end{smallmatrix}\right) \in \mathcal{M}(U)} \int_0^1 \frac{\log(m\xi + n) d\xi}{(m\xi + n)((a + m)\xi + (b + n))} + O\left(\frac{U \log R}{R}\right).$$

Применяя следствие 2, приходим к утверждению теоремы 2.

§ 8. Вычисление суммы σ_3

ЛЕММА 11. При $N \geq 2$ для суммы

$$F^*(N) = \sum_{n < N} \sum_{m \leq n}^* \frac{1}{m} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{m + n} \right) - \sum_{n < N} \sum_{\substack{m \leq n \\ m + n > N}}^* \frac{1}{m} \left(\frac{1}{N} - \frac{1}{m + n} \right)$$

справедлива асимптотическая формула

$$F^*(N) = \frac{\log 2}{\zeta(2)} (\log N + H) + O\left(\frac{\log^2 N}{N}\right), \quad (31)$$

где

$$H = \gamma - \frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)} + \frac{\log 2}{2} - 1. \quad (32)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Подстановка $x = 1$ в лемму 10 из работы [6] приводит к равенству (31) с константой

$$H = \gamma - \frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)} - \frac{\log 2}{2} - 1 + \frac{1}{\log 2} \left(\sigma_0 + \frac{\zeta(2)}{2} \right),$$

где σ_0 задается рядом (7). Подставляя в последнюю формулу значение σ_0 из (8), приходим к утверждению леммы 11.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $2 \leq U \leq R$. Тогда для суммы σ_3 , заданной равенством (18), справедлива асимптотическая формула

$$\sigma_3 = \frac{\log^2 2}{\zeta^2(2)} \log \frac{R}{U} \left(\log \frac{R}{U} + 2H \right) + O\left(\frac{\log^6 R}{U^{1/2}}\right),$$

где константа H задана равенством (32).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как для любой матрицы $\begin{pmatrix} a & m \\ b & n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}$

$$\frac{1}{(a+m)Q + (b+n)Q'} - \frac{1}{(bm/n + m)Q + (b+n)Q'} \ll \frac{1}{n^3 Q'}$$

и

$$\sum_{Q' \leq R} \sum_{Q \leq Q'}^* \sum_{\substack{\begin{pmatrix} a & m \\ b & n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}, \\ n > U}} \frac{1}{n^4 (Q')^2} \ll \frac{\log R}{U^2},$$

то сумму σ_3 можно переписать в виде

$$\sigma_3 = \sum_{Q' \leq R} \sum_{Q \leq Q'}^* \sum_{n > U} \sum_{b, m=1}^n \delta_n(bm \pm 1) \frac{[mQ + nQ' \leq R]}{(b/n + 1)(mQ + nQ')^2} + O\left(\frac{\log R}{U^2}\right).$$

Применяя лемму 5, находим

$$\sigma_3 = 2 \sum_{Q' \leq R} \sum_{Q \leq Q'}^* \sum_{n > U} \frac{\varphi(n)}{n} \sum_{b=1}^n \frac{1}{b+n} \sum_{m=1}^n \frac{[mQ + nQ' \leq R]}{(mQ + nQ')^2} + O\left(\frac{\log^6 R}{U^{1/2}}\right).$$

Далее, по формуле (20)

$$\sigma_3 = 2 \log 2 \sigma_4 + O\left(\frac{\log^6 R}{U^{1/2}}\right), \quad (33)$$

где

$$\begin{aligned} \sigma_4 &= \sum_{Q' \leq R} \sum_{Q \leq Q'}^* \sum_{n > U} \frac{\varphi(n)}{n} \sum_{m=1}^n \frac{[mQ + nQ' \leq R]}{(mQ + nQ')^2} \\ &= \sum_{Q' \leq R} \sum_{Q \leq Q'}^* \sum_{U < n \leq R/(Q+Q')} \frac{\varphi(n)}{n} \sum_{m=1}^n \frac{1}{(mQ + nQ')^2} \\ &\quad + \sum_{Q' \leq R} \sum_{Q \leq Q'}^* \sum_{\max\{U, R/(Q+Q')\} < n \leq R/Q'} \frac{\varphi(n)}{n} \sum_{m \leq (R-nQ')/Q} \frac{1}{(mQ + nQ')^2}. \end{aligned}$$

Заменяя внутренние суммы по переменной m на соответствующие интегралы, получаем

$$\begin{aligned} \sigma_4 &= \sum_{Q' \leq R} \sum_{Q \leq Q'}^* \sum_{U < n \leq R/(Q+Q')} \frac{\varphi(n)}{n} \frac{1}{Q} \left(\frac{1}{nQ} - \frac{1}{nQ + nQ'} \right) \\ &\quad + \sum_{Q' \leq R} \sum_{Q \leq Q'}^* \sum_{\max\{U, R/(Q+Q')\} < n \leq \frac{R}{Q'}} \frac{\varphi(n)}{n} \frac{1}{Q} \left(\frac{1}{nQ} - \frac{1}{R} \right). \end{aligned}$$

Делая суммирование по n внешним, приходим к равенству

$$\sigma_4 = \sum_{U < n \leq R} \frac{\varphi(n)}{n^2} F^*\left(\frac{R}{n}\right) + O\left(\frac{\log R}{U}\right) + O\left(\frac{\log R}{U}\right),$$

где

$$\begin{aligned} F^*(\xi) &= \sum_{Q' < \xi} \sum_{Q \leq Q'}^* \frac{1}{Q} \left(\frac{1}{Q'} - \frac{1}{Q + Q'} \right) [\xi \geq Q + Q'] \\ &\quad + \sum_{Q' < \xi} \sum_{Q \leq Q'}^* \frac{1}{Q} \left(\frac{1}{Q'} - \frac{1}{\xi} \right) [\xi < Q + Q']. \end{aligned}$$

По лемме 11

$$\sigma_4 = \frac{\log 2}{\zeta(2)} \sum_{U < n \leq R} \frac{\varphi(n)}{n^2} \left(\log \frac{R}{n} + H \right) + O\left(\frac{\log^3 R}{U}\right).$$

Далее, пользуясь формулами леммы 2, получаем следующую асимптотическую формулу для суммы σ_4 :

$$\sigma_4 = \frac{\log 2}{2\zeta^2(2)} \log \frac{R}{U} \left(\log \frac{R}{U} + 2H \right) + O\left(\frac{\log^3 R}{U}\right).$$

Подставляя ее в равенство (33), приходим к утверждению теоремы 3.

§ 9. Основной результат

ТЕОРЕМА 4. При $R \geq 2$

$$D(R) = D_1 \log R + D_0 + O(R^{-1/3} \log^5 R),$$

где

$$D_1 = \frac{8 \log^2 2}{\zeta^2(2)} \left(\gamma - \frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)} - \frac{\log 2}{2} - 1 \right) + \frac{4}{\zeta(2)} \left(C_1 + \frac{3 \log 2}{2} \right),$$

$$D_0 = 4 \left(C'_1 - \frac{C_4}{\zeta(2)} \right) - \left(\frac{2 \log 2}{\zeta(2)} \left(\gamma - \frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)} + \log 2 \right) - \frac{3}{2} \right)^2 + \frac{1}{2},$$

а константы C_1 , C'_1 и C_4 определены соответственно равенствами (23), (28) и (30).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Объединяя результаты теорем 1–3, для суммы $\sigma(R) = \sigma_1 - \sigma_2 + \sigma_3$ получаем асимптотическую формулу

$$\begin{aligned} \sigma(R) = & \frac{\log^2 2}{\zeta^2(2)} \log^2 R + \frac{\log R}{\zeta(2)} \left(\frac{2 \log^2 2}{\zeta(2)} \left(2\gamma - 2 \frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)} + \frac{\log 2}{2} - 1 \right) + C_1 \right) \\ & + C'_1 - \frac{C_4}{\zeta(2)} + O\left(\frac{U \log R}{R}\right) + O\left(\frac{\log^6 R}{U^{1/2}}\right). \end{aligned} \quad (34)$$

Выбирая $U = R^{2/3} \log^4 R$ и применяя леммы 6, 7, приходим к утверждению теоремы 4.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Компьютерные вычисления дают следующее приближенное значение константы D_1 :

$$D_1 = 0.51606 \dots$$

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Равенство (34) из доказательства теоремы 4 дает асимптотическую формулу с тремя значащими членами для суммы из (15).

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Константа C_1 , определенная равенством (23), возникает также при усреднении $N(\alpha, R)$ по мере Гаусса

$$d\mu(\alpha) = \frac{1}{\log 2} \frac{d\alpha}{1 + \alpha}.$$

Действительно, непосредственные вычисления, основанные на представлении (11), приводят к равенству

$$\frac{1}{\log 2} \int_0^1 N(\alpha, R) \frac{d\alpha}{1+\alpha} = \frac{1}{\log 2} W_1(R),$$

где $W_1(R)$ – сумма, определенная формулой (21). Значит, согласно следствию из леммы 8

$$\frac{1}{\log 2} \int_0^1 N(\alpha, R) \frac{d\alpha}{1+\alpha} = \frac{2 \log 2}{\zeta(2)} \left(\log R + \gamma - \frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)} \right) + \frac{C_1}{\log 2} + O\left(R^{-1/2+\varepsilon}\right).$$

Список литературы

- [1] Р. Грэхем, Д. Кнут, О. Паташник, *Конкретная математика. Основание информатики*, Мир, М., 1998; пер. с англ.: R. L. Graham, D. E. Knuth, O. Patashnik, *Concrete mathematics: a foundation for computer science*, Addison-Wesley Publ., Amsterdam, 1994.
- [2] H. Heilbronn, “On the average length of a class of finite continued fractions”, *Number theory and analysis (Papers in honor of Edmund Landau)*, Plenum, New York, 1969, 87–96.
- [3] J. W. Porter, “On a theorem of Heilbronn”, *Mathematika*, **22**:1 (1975), 20–28.
- [4] D. E. Knuth, “Evaluation of Porter’s constant”, *Comput. Math. Appl.*, **2**:2 (1976), 137–139.
- [5] В. А. Быковский, “Оценка дисперсии длин конечных непрерывных дробей”, *Фундамент. и прикл. матем.*, **11**:6 (2005), 15–26.
- [6] А. В. Устинов, “О статистических свойствах конечных цепных дробей”, *Записки науч. сем. ПОМИ*, **322** (2005), 186–211; англ. пер.: A. V. Ustinov, “On statistical properties of finite continued fractions”, *J. Math. Sci. (N.Y.)*, **137**:2 (2006), 4722–4738.
- [7] А. В. Устинов, “О статистиках Гаусса–Кузьмина для конечных цепных дробей”, *Фундамент. и прикл. матем.*, **11**:6 (2005), 195–208.
- [8] V. Baladi, B. Vallée, “Euclidean algorithms are Gaussian”, *J. Number Theory*, **110**:2 (2005), 331–386.
- [9] И. В. Арнольд, *Теория чисел*, Госуд. учебно-педагогическое изд-во Наркомпроса РСФСР, М., 1939.
- [10] S. R. Finch, *Mathematical constants*, Encyclopedia Math. Appl., **94**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2003.
- [11] И. М. Виноградов, *Основы теории чисел*, 8-е изд., Наука, М., 1972; англ. пер. 5-го изд.: I. M. Vinogradov, *Elements of number theory*, Dover Publ., New York, 1954.
- [12] М. О. Авдеева, “О статистиках неполных частных конечных цепных дробей”, *Функц. анализ и его прил.*, **38**:2 (2004), 1–11; англ. пер.: M. O. Avdeeva, “On the statistics of partial quotients of finite continued fractions”, *Funct. Anal. Appl.*, **38**:2 (2004), 79–87.
- [13] T. Estermann, “On Kloosterman’s sum”, *Mathematika*, **8** (1961), 83–86.

А. В. Устинов (A. V. Ustinov)

Хабаровское отделение Института прикладной математики
ДВО РАН

E-mail: ustinov@iam.khv.ru

Поступила в редакцию

01.08.2006