Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. В. Туницкий, Эквивалентность и характеристические связности уравнений Монжа–Ампера, *Матем. сб.*, 1997, том 188, номер 5, 131–157

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm235>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.135.184

26 апреля 2023 г., 12:30:52

УДК 517.95

Д. В. Туницкий

Эквивалентность и характеристические связности уравнений Монжа–Ампера

Статья посвящена проблеме контактной эквивалентности уравнений Монжа–Ампера с двумя независимыми переменными. В случае, когда рассматриваемое уравнение Монжа–Ампера находится в общем положении, ему можно естественным образом сопоставить аффинную связность. Указанное сопоставление позволяет сформулировать и доказать ряд признаков контактной эквивалентности уравнений Монжа–Ампера общего положения, используя соответствующие свойства аффинных связностей.

Библиография: 13 названий.

Если не оговорено противное, то все встречающиеся ниже объекты считаются гладкими, т.е. бесконечно дифференцируемыми, а все многообразия – связными хаусдорфовыми паракомпактными пятимерными и вещественными. Для любого расслоения $\mathcal{P}$ через $\Gamma(\mathcal{P})$ обозначается множество всех сечений этого расслоения.

1. Уравнения Монжа–Ампера. Предположим, что на M определена контактная структура, т.е. невырожденное векторное подрасслоение

$$L \subset TM \quad (1.1)$$

касательного расслоения TM коразмерности 1. Положим для $m \in M$

$$L^*(m) = \{\omega \in T_m^*M \mid \xi \lrcorner \omega = 0 \text{ при всех } \xi \in L(m)\}.$$

Двойственным по отношению к подрасслоению (1.1) служит

$$L^* = \bigcup_{m \in M} L^*(m) \quad (1.2)$$

– одномерное подрасслоение кокасательного расслоения T^*M . Линейная дифференциальная форма ω_0 , являющаяся сечением расслоения (1.2), называется *контактной*. Идеал кольца дифференциальных форм на M

$$I_0 = (\omega_0, d\omega_0 \mid \omega_0 \in \Gamma(L^*)), \quad (1.3)$$

порожденный контактными формами и их внешними дифференциалами, называется *контактным*. Невырожденность подрасслоения (1.1) означает, что для контактной формы ω_0 такой, что $\omega_0(m) \neq 0$, $d\omega_0 \wedge d\omega_0 \wedge \omega_0|_m \neq 0$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Международного научного фонда и Российского правительства (грант № RO 4300) и Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 93-01-00454).

Слой идеала (1.3) над точкой m

$$I_0(m) = \{\omega(m) \in \Lambda_m^*(M) \mid \omega \in I_0\}$$

состоит из значений дифференциальных форм идеала (1.3) в точке m . Можно показать, что линейное пространство 2-форм из этого слоя

$$I_0^2(m) = I_0(m) \cap \Lambda_m^2(M)$$

пятимерно, и объединение

$$J = \bigcup_{m \in M} I_0^2(m)$$

— это пятимерное подрасслоение в расслоении 2-форм $\Lambda^2(M)$. Следуя [1], определим *расслоение эффективных форм*

$$\Lambda^\varepsilon(M) = \Lambda^2(M)/J, \quad (1.4)$$

слой $\Lambda_m^\varepsilon(M)$ которого над точкой m есть пятимерное факторпространство $\Lambda_m^2(M)/I_0^2(m)$. Через

$$\pi: \Lambda^2(M) \rightarrow \Lambda^\varepsilon(M) \quad (1.5)$$

обозначим естественную проекцию, отвечающую факторизации (1.4).

Дифференциальная 2-форма ω называется *эффективной в точке $m \in M$* относительно данной контактной структуры (1.1), если

$$\omega(m) \wedge d\omega_0(m) \wedge \omega_0(m) = 0 \quad (1.6)$$

для некоторой контактной формы ω_0 такой, что $\omega_0(m) \neq 0$. Дифференциальная 2-форма ω называется *эффективной на многообразии M* , если она удовлетворяет условию (1.6) в каждой точке этого многообразия.

Сформулированное определение не зависит от выбора контактной формы ω_0 . Действительно, если $\tilde{\omega}_0 \in I_0$, $\tilde{\omega}_0(m) \neq 0$, — другая контактная форма, то в некоторой окрестности точки m имеет место равенство $\tilde{\omega}_0 = b\omega_0$. Следовательно, $\omega(m) \wedge d\tilde{\omega}_0(m) \wedge \tilde{\omega}_0(m) = b^2(m)\omega(m) \wedge d\omega_0(m) \wedge \omega_0(m) = 0$ в силу (1.6).

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1. Для любого локального сечения ν расслоения (1.4) и всякой точки $m \in M$ найдутся такая окрестность U точки m и эффективная на U форма ω , что образ ω относительно проекции (1.5) равен $\nu \mid U$. Действительно, по определению (1.4) существует дифференциальная 2-форма β , для которой $\nu(u) = \beta(u) + I_0^2(u)$ при $u \in U$. Поэтому в качестве ω можно взять $\beta - b d\omega_0$, где ω_0 — некоторая контактная форма такая, что $\omega_0(m) \neq 0$ и $\beta \wedge d\omega_0 \wedge \omega_0 = b d\omega_0 \wedge d\omega_0 \wedge \omega_0$. Указанным образом форма ω определяется однозначно с точностью до слагаемого, пропорционального контактной форме ω_0 .

Рассмотрим идеал кольца дифференциальных форм многообразия M

$$I = (I_0, \{\omega\}), \quad (1.7)$$

порожденный контактным идеалом (1.3) и некоторым множеством $\{\omega\}$ эффективных 2-форм. Идеал (1.7) называется *идеалом Монжа–Ампера*, если объединение

$$\mu = \bigcup_{m \in M} I^2(m)/I_0^2(m) \quad (1.8)$$

является одномерным подрасслоением расслоение (1.4). Уравнением Монжа–Ампера на контактном многообразии M называется система внешних дифференциальных уравнений

$$I = 0. \quad (1.9)$$

Уравнение Монжа–Ампера однозначно определено соответствующим ему подрасслоением (1.8). Именно, идеал (1.7) порожден контактными идеалами и всеми дифференциальными 2-формами, образы которых относительно проекции (1.5) являются сечениями расслоения (1.8), т.е.

$$I = (I_0, \{\omega \in \Gamma(\Lambda^2(M)) \mid \pi(\omega) \in \Gamma(\mu)\}).$$

Предположим, что контактная форма ω_0 отлична от нуля во всех точках подмножества $U \subseteq M$. Пфаффианом эффективной формы ω относительно контактной формы ω_0 называется функция $Pf(\omega, \omega_0): U \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющая равенству

$$\omega \wedge \omega \wedge \omega_0 = Pf(\omega, \omega_0) d\omega_0 \wedge d\omega_0 \wedge \omega_0. \quad (1.10)$$

Пусть ω – произвольная эффективная форма из идеала (1.7), отличная от нуля в точке m . Выберем какую-либо контактную форму ω_0 , также отличную от нуля в точке m . Уравнение Монжа–Ампера принадлежит *эллиптическому* (соответственно, *параболическому* либо *гиперболическому*) *типу в точке m* , если $Pf(\omega, \omega_0) > 0$ (соответственно, $Pf(\omega, \omega_0) = 0$ либо $Pf(\omega, \omega_0) < 0$). Уравнение Монжа–Ампера принадлежит *эллиптическому* (соответственно, *параболическому* либо *гиперболическому*) *типу на многообразии M* , если оно принадлежит эллиптическому (соответственно, параболическому либо гиперболическому) типу во всех точках многообразия M .

Это определение не зависит от выбора эффективной формы ω из идеала (1.7) и контактной формы ω_0 . Действительно, если $\tilde{\omega} \in I$, $\tilde{\omega}(m) \neq 0$, и $\tilde{\omega}_0 \in I_0$, $\tilde{\omega}_0(m) \neq 0$, – другие эффективная и контактная формы, то в некоторой окрестности точки m имеют место равенства $\tilde{\omega} = a_2\omega + a_1\omega_0$ и $\tilde{\omega}_0 = b\omega_0$. Отсюда, с одной стороны, по определению (1.10)

$$\tilde{\omega} \wedge \tilde{\omega} \wedge \tilde{\omega}_0 = Pf(\tilde{\omega}, \tilde{\omega}_0) d\tilde{\omega}_0 \wedge d\tilde{\omega}_0 \wedge \tilde{\omega}_0 = b^3 Pf(\tilde{\omega}, \tilde{\omega}_0) d\omega_0 \wedge d\omega_0 \wedge \omega_0,$$

а, с другой стороны, $\tilde{\omega} \wedge \tilde{\omega} \wedge \tilde{\omega}_0 = a_2^2 b \omega \wedge \omega \wedge \omega_0 = a_2^2 b Pf(\omega, \omega_0) d\omega_0 \wedge d\omega_0 \wedge \omega_0$. Поэтому $b^3 Pf(\tilde{\omega}, \tilde{\omega}_0) = a_2^2 Pf(\omega, \omega_0)$ и знаки $Pf(\tilde{\omega}, \tilde{\omega}_0)$ и $Pf(\omega, \omega_0)$ совпадают.

ПРИМЕР 1.2. Традиционно уравнением Монжа–Ампера называют соотношение вида

$$A + Bz_{xx} + 2Cz_{xy} + Dz_{yy} + E(z_{xx}z_{yy} - z_{xy}^2) = 0 \quad (1.11)$$

[2, с. 491]. Здесь коэффициенты A, B, C, D и E – заданные функции от x, y, p, q и z , где x и y – независимые переменные, $z = z(x, y)$ – неизвестная функция, и использованы обозначения Монжа $p = z_x, q = z_y$.левой части уравнения (1.11) соответствует дифференциальная 2-форма [1]

$$\omega = Adx \wedge dy + Bdp \wedge dy + C(dx \wedge dp + dq \wedge dy) + Ddx \wedge dq + Edp \wedge dq. \quad (1.12)$$

В данном случае $M = \mathbb{R}^5$ и контактный идеал порожден формами

$$\omega_0 = dz - pdx - qdy \quad (1.13)$$

и $d\omega_0$. Поскольку

$$\omega \wedge d\omega_0 = 0, \quad (1.14)$$

то условие (1.6) выполнено и дифференциальная форма (1.12) эффективна. Кроме того, для этой формы выполнено условие $\frac{\partial}{\partial z} \lrcorner \omega = 0$, ликвидирующее произвол в выборе слагаемого, пропорционального контактной форме (1.13) (см. замечание 1.1). Соответствующий уравнению (1.11) идеал Монжа–Ампера (1.7) порожден формами ω_0 , $d\omega_0$ и ω :

$$I = (\omega_0, d\omega_0, \omega). \quad (1.15)$$

Отвечающее уравнению (1.9), (1.15) одномерное подрасслоение (1.8) расслоения эффективных форм (1.4) порождается композицией формы (1.12) и проекции (1.5), т.е. сечением $\pi \circ \omega$ расслоения (1.4).

Пфаффиан формы (1.12) относительно формы (1.13) в соответствии с определением (1.10) вычисляется по формуле

$$Pf(\omega, \omega_0) = -AE + BD - C^2. \quad (1.16)$$

Заметим, что правая часть выражения (1.16) совпадает по абсолютной величине и обратна по знаку дискриминанту характеристической формы уравнения Монжа–Ампера (1.11) [2, прил. 1 к гл. 5, §2]. Иными словами, сформулированное выше определение типа уравнения Монжа–Ампера (1.9) в рассматриваемом случае совпадает с традиционным.

ПРИМЕР 1.3. Рассмотрим общий случай уравнения Монжа–Ампера (1.9) в окрестности фиксированной точки $m \in M$. Поскольку контактное подрасслоение (1.1) невырождено, то найдется такая локальная система координат (U, φ) , $m \in U$,

$$\varphi: U \rightarrow \varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^5, \quad (1.17)$$

что $L \mid U = \ker(\varphi^*\omega_0)$, где ω_0 – форма (1.13) [3, с. 194]. Следовательно, аналогично примеру 1.2 ограничение контактного идеала $I_0 \mid U$ на окрестность U порождено формами $\varphi^*\omega_0$ и $\varphi^*d\omega_0$:

$$I_0 \mid U = (\varphi^*\omega_0, \varphi^*d\omega_0). \quad (1.18)$$

Не ограничивая общности, можно считать, что отвечающее уравнению (1.9) расслоение (1.8) тривиализуется над окрестностью U . Пусть ν – сечение расслоения $\mu \mid U$, отличное от нуля во всех точках U . Согласно замечанию 1.1 для всех $u \in U$ справедливо представление $\nu(u) = \varphi^*\omega(u) + I_0^2(u)$, где ω – эффективная дифференциальная форма вида (1.12), определенная на множестве $\varphi(U)$. Поэтому аналогично примеру 1.2 ограничение $I \mid U$ идеала Монжа–Ампера (1.7) на окрестность U порождено формами $\varphi^*\omega_0$, $\varphi^*d\omega_0$ и $\varphi^*\omega$:

$$I \mid U = (\varphi^*\omega_0, \varphi^*d\omega_0, \varphi^*\omega). \quad (1.19)$$

Как и в примере 1.2, тип уравнения (1.9) в окрестности U вычисляется в соответствии со знаком функции (1.16).

Выражения (1.18) и (1.19) показывают, что в общем случае уравнений Монжа–Ампера (1.9) локально ситуация полностью исчерпывается уравнениями вида (1.9), (1.12)–(1.15). Иными словами, произвольное уравнение Монжа–Ампера (1.9) на контактном многообразии M локально сводится к соответствующему традиционному уравнению Монжа–Ампера (1.11). Более точно, справедлива

ЛЕММА 1.4. *Рассмотрим уравнение Монжа–Ампера (1.9) на контактном многообразии M . Для любой точки $m \in M$ найдутся окрестность этой точки U и координатный диффеоморфизм (1.17) такие, что выполняются представления (1.18) и (1.19), где ω и ω_0 – это формы вида (1.12) и (1.13) соответственно.*

2. Характеристические расслоения. Рассмотрим комплексное касательное расслоение $T^{\mathbb{C}}M = \mathbb{C} \otimes_R TM$ многообразия M . Комплексификация $L^{\mathbb{C}}$ контактного расслоения (1.1) является комплексным векторным подрасслоением расслоения $T^{\mathbb{C}}M$ комплексной коразмерности 1. Комплексный вектор $\xi \in L^{\mathbb{C}}(m)$ называется *характеристическим вектором* уравнения (1.9) в точке $m \in M$, если $\xi \lrcorner I(m) = \xi \lrcorner I_0(m)$. Положим

$$H = \bigcup_{m \in M} H(m), \quad (2.1)$$

где

$$H(m) = \{\xi \in L^{\mathbb{C}}(m) \mid \xi \lrcorner I(m) = \xi \lrcorner I_0(m)\}. \quad (2.2)$$

ПРИМЕР 2.1 (продолжение примера 1.2). Выясним, как устроено множество (2.1) в случае уравнения (1.11) или, что то же самое, в случае уравнения (1.9), (1.12)–(1.15). В силу представления (1.15) принадлежность вектора $\xi \in T_m^{\mathbb{C}}M$ множеству (2.2) равносильна тому, что

$$\xi \lrcorner \omega_0 = 0 \quad (2.3)$$

и коллинеарны ковекторы $\xi \lrcorner d\omega_0$ и $\xi \lrcorner \omega$. Последнее означает существование такого комплексного числа λ , для которого

$$\xi \lrcorner (\omega - \lambda d\omega_0) = 0. \quad (2.4)$$

Выполнение соотношений (2.3), (2.4) для $\xi \neq 0$ обеспечивает равенство

$$\omega_0 \wedge (\omega - \lambda d\omega_0) \wedge (\omega - \lambda d\omega_0) = 0,$$

из которого согласно (1.14) заключаем, что

$$\omega \wedge \omega \wedge \omega_0 + \lambda^2 d\omega_0 \wedge d\omega_0 \wedge \omega_0 = 0. \quad (2.5)$$

Сопоставляя (2.5) с (1.10), получаем относительно λ уравнение

$$\lambda^2 + Pf(\omega, \omega_0) = 0. \quad (2.6)$$

Положим

$$\Delta = \sqrt{|Pf(\omega, \omega_0)|}.$$

Тогда корни λ_1 и λ_2 уравнения (2.6) вычисляются следующим образом. В тех точках, где уравнение (1.9), (1.15) эллиптически

$$\lambda_j = i(-1)^{3-j} \Delta, \quad (2.7)$$

где i – мнимая единица, $j = 1, 2$, и

$$\lambda_j = (-1)^{3-j} \Delta \quad (2.8)$$

в тех точках, где это уравнение гиперболично либо параболично.

Определим для $j = 1, 2$ и $m \in \mathbb{R}^5$

$$H_j(m) = \{ \xi \in T_m^{\mathbb{C}} \mathbb{R}^5 = \mathbb{C}^5 \mid \xi \lrcorner \omega_0 = 0, \xi \lrcorner (\omega - \lambda_j d\omega_0) = 0 \}, \quad (2.9)$$

где параметр λ_j вычислен в соответствии с (2.7), (2.8). Можно показать, что линейное пространство $H_j(m)$ порождается векторами

$$\begin{aligned} e_{j1} &= E \left(\frac{\partial}{\partial x} + p \frac{\partial}{\partial z} \right) - D \frac{\partial}{\partial p} + (C - \lambda_j) \frac{\partial}{\partial q}, \\ e_{j2} &= E \left(\frac{\partial}{\partial y} + q \frac{\partial}{\partial z} \right) + (C + \lambda_j) \frac{\partial}{\partial p} - B \frac{\partial}{\partial q}, \\ e_{j3} &= B \left(\frac{\partial}{\partial x} + p \frac{\partial}{\partial z} \right) + (C - \lambda_j) \left(\frac{\partial}{\partial y} + q \frac{\partial}{\partial z} \right) - A \frac{\partial}{\partial p}, \\ e_{j4} &= (C + \lambda_j) \left(\frac{\partial}{\partial x} + p \frac{\partial}{\partial z} \right) + D \left(\frac{\partial}{\partial y} + q \frac{\partial}{\partial z} \right) - A \frac{\partial}{\partial q}, \end{aligned} \quad (2.10)$$

среди которых ровно два линейно независимых в каждой точке m пространства $\mathbb{R}^5$. Ясно, что если уравнение параболично в точке m , т.е. $Pf(\omega, \omega_0) = 0$, то $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ и

$$H_1(m) = H_2(m). \quad (2.11)$$

Кроме того, если $Pf(\omega, \omega_0) \neq 0$, то

$$H_1(m) \cap H_2(m) = 0, \quad (2.12)$$

потому что из принадлежности ξ к пересечению $H_1(m) \cap H_2(m)$ в силу (2.9) и (2.7), (2.8) вытекает (2.3) и $\xi \lrcorner d\omega_0 = 0$, т.е. $\xi = 0$.

Проведенные при рассмотрении примера 2.1 рассуждения доказывают, что для уравнения (1.9), (1.15) справедлива

ЛЕММА 2.2. *Множество (2.2) характеристических векторов уравнения (1.9), (1.15) в точке $m \in M$ представимо как объединение*

$$H(m) = H_1(m) \cup H_2(m), \quad (2.13)$$

где $H_1(m)$ и $H_2(m)$ вычислены в соответствии с (2.9). Если уравнение (1.9), (1.15) параболично в точке m , то выполнено равенство (2.11), а если оно в этой точке эллиплично либо гиперболично, то выполнено равенство (2.12). *Объединение*

$$H_j = \bigcup_{m \in M} H_j(m) \quad (2.14)$$

является двумерным комплексным подрасслоением в $T^{\mathbb{C}}M$ при $j = 1, 2$, которое порождается векторными полями (2.10), среди которых ровно два линейно независимых в каждой точке пространства $\mathbb{R}^5$.

Комбинируя леммы 2.2 и 1.4 заключаем, что имеет место

ЛЕММА 2.3. *Рассмотрим уравнение Монжа–Ампера (1.9) на контактном многообразии M . Для любой точки $m_0 \in M$ найдутся окрестность этой точки U и двумерные комплексные подрасслоения H_1 и H_2 ограничения $L^\mathbb{C} \mid U$ контактного расслоения на U , обладающие следующими свойствами. Расслоения H_1 , H_2 и $L^\mathbb{C} \mid U$ тривиальны, и множество (2.2) характеристических векторов уравнения (1.9) в точке $m \in U$ представимо как объединение (2.13). Если уравнение (1.9) параболично в точке $m \in U$, то выполнено равенство (2.11), а если оно в этой точке эллиплично либо гиперболично, то – равенство (2.12).*

Из леммы 2.3 вытекает, что справедливо

СЛЕДСТВИЕ 2.4. *Пусть уравнение (1.9) либо эллиплично, либо гиперболично на многообразии M . Тогда объединение (2.2) является локально-тривиальным расслоением над M , типичным слоем которого служит букет $\mathbb{C}^2 \vee \mathbb{C}^2$ комплексных плоскостей с отмеченными нулями. При этом для каждой точки $m \in M$ линейная оболочка слоя $H(m)$ совпадает с комплексификацией $L^\mathbb{C}$ контактного подрасслоения (1.1), т.е.*

$$\text{span}(H(m)) = L^\mathbb{C}.$$

Расслоение (2.2) называется *характеристическим расслоением* уравнения Монжа–Ампера (1.9).

Фиксируем произвольную точку $m \in M$ и выберем некоторую окрестность U этой точки в соответствии с леммой 2.3. Возьмем два произвольных линейно независимых в точке m сечения ξ_{j1} и ξ_{j2} расслоения H_j , $j = 1, 2$. H_j является подрасслоением $T^\mathbb{C}M$, поэтому для этих сечений определена скобка Ли $[\cdot, \cdot]$ (коммутатор векторных полей).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.5. Предположим, что уравнение Монжа–Ампера (1.9) либо эллиплично, либо гиперболично в точке $m \in M$. Будем говорить, что это уравнение *общего положения в точке m* , если векторы ξ_{j1} , ξ_{j2} , $[\xi_{j1}, \xi_{j2}]$, $[\xi_{j1}, [\xi_{j1}, \xi_{j2}]]$ и $[\xi_{j2}, [\xi_{j1}, \xi_{j2}]]$ линейно независимы в точке m для $j = 1, 2$. Если уравнение (1.9) находится в общем положении во всех точках многообразия M , то оно называется *уравнением общего положения на многообразии M* .

Это определение не зависит от выбора окрестности U точки m и сечений ξ_{j1} и ξ_{j2} расслоения H_j . Действительно, пусть $\tilde{U}$ – другая окрестность точки m , удовлетворяющая лемме 2.3, а $\tilde{\xi}_{j1}$ и $\tilde{\xi}_{j2}$ – другие линейно независимые в точке m сечения расслоения $\tilde{H}_j$. В силу следствия 2.4, не ограничивая общности, можно считать, что $H_j \mid U \cap \tilde{U} = \tilde{H}_j \mid U \cap \tilde{U}$ для $j = 1, 2$. Поэтому на множестве $U \cap \tilde{U}$ найдутся такие функции a_{lk} , $l, k = 1, 2$, что $\tilde{\xi}_{jl} = a_{l1}\xi_{j1} + a_{l2}\xi_{j2}$. Следовательно,

$$\begin{aligned} & \tilde{\xi}_{j1} \wedge \tilde{\xi}_{j2} \wedge [\tilde{\xi}_{j1}, \tilde{\xi}_{j2}] \wedge [\tilde{\xi}_{j1}, [\tilde{\xi}_{j1}, \tilde{\xi}_{j2}]] \wedge [\tilde{\xi}_{j2}, [\tilde{\xi}_{j1}, \tilde{\xi}_{j2}]] \\ &= (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})^5 \xi_{j1} \wedge \xi_{j2} \wedge [\xi_{j1}, \xi_{j2}] \wedge [\xi_{j1}, [\xi_{j1}, \xi_{j2}]] \wedge [\xi_{j2}, [\xi_{j1}, \xi_{j2}]]. \end{aligned}$$

Поскольку $(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})(m) \neq 0$, то тем самым выполнение определения 2.5 для ξ_{j1} и ξ_{j2} равносильно его выполнению для $\tilde{\xi}_{j1}$ и $\tilde{\xi}_{j2}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.6. Все рассматриваемые в данной статье многообразия предполагаются связными. Вследствие этого всякое уравнение Монжа–Ампера общего положения на контактном многообразии M либо эллиплично на этом многообразии, либо гиперболично.

3. Контактная эквивалентность уравнений Монжа–Ампера. Пусть наряду с контактным многообразием M дано другое многообразие $\widetilde{M}$ с контактной структурой, заданной невырожденным подрасслоением

$$\widetilde{L} \subset T\widetilde{M} \quad (3.1)$$

касательного расслоения $T\widetilde{M}$ коразмерности 1. По аналогии с (1.2) определены одномерное подрасслоение $\widetilde{L}^*$ кокасательного расслоения $T^*\widetilde{M}$ и контактный идеал $\widetilde{I}_0 = (\widetilde{\omega}_0, d\widetilde{\omega}_0 \mid \widetilde{\omega}_0 \in \Gamma(\widetilde{L}^*))$. Пусть, кроме того, на $\widetilde{M}$ задан идеал Монжа–Ампера

$$\widetilde{I} = (\widetilde{I}_0, \{\widetilde{\omega}\}), \quad (3.2)$$

порожденный контактным идеалом $\widetilde{I}_0$ и некоторым множеством $\{\widetilde{\omega}\}$ эффективных 2-форм. Рассмотрим на контактном многообразии $\widetilde{M}$ соответствующее этому идеалу уравнение Монжа–Ампера

$$\widetilde{I} = 0. \quad (3.3)$$

Уравнения Монжа–Ампера (1.9) и (3.3) называются *контактно эквивалентными*, если найдется диффеоморфизм

$$f: \widetilde{M} \rightarrow M, \quad (3.4)$$

переводящий идеал (1.7) в идеал (3.2):

$$f^*I = \widetilde{I}. \quad (3.5)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Отображение f^* переводит линейные формы в линейные. Следовательно, по определению (1.7)–(1.9) уравнений Монжа–Ампера диффеоморфизм (3.4), обладающий свойством (3.5), является *контактным диффеоморфизмом*, т.е. $f^*I_0 = \widetilde{I}_0$ и

$$f_*\widetilde{L} = L. \quad (3.6)$$

Рассмотрим задачу о контактной эквивалентности уравнений Монжа–Ампера. Эта задача заключается в нахождении содержательных признаков, выполнение которых приводит к выполнению равенства (3.5) для данных уравнений (1.9) и (3.3). Она восходит к исследованиям Софуса Ли семидесятых–восемидесятых годов прошлого века. Перечислим некоторые публикации, посвященные проблеме контактной эквивалентности уравнений Монжа–Ампера.

В работах [4]–[6] С. Ли сформулировал и доказал ряд результатов о локальной линеаризации параболических и гиперболических уравнений Монжа–Ампера посредством контактных диффеоморфизмов. Подробное доказательство части этих результатов можно найти в монографии Э. Гурса [7, гл. 2].

В статьях В. В. Лычагина и В. Н. Рубцова [8], [9] найден критерий локальной контактной эквивалентности уравнений Монжа–Ампера эллиптического и гиперболического типа, имеющих хотя бы одну инфинитезимальную контактную симметрию, уравнению второго порядка с постоянными коэффициентами.

Заметка Т. Моримото [10] посвящена контактной классификации комплексно аналитических уравнений Монжа–Ампера с транзитивной группой симметрий. В частности, здесь объявлено о возможности сопоставления всякому комплексно аналитическому уравнению Монжа–Ампера общего положения связности Картана типа $SL(3, \mathbb{C})/SL(2, \mathbb{C})$.

4. Формулировка основных результатов. Рассмотренная в предыдущем пункте задача исследуется ниже только применительно к уравнениям Монжа–Ампера общего положения. Основным инструментом, используемым для получения условий контактной эквивалентности уравнений Монжа–Ампера общего положения, выступает

ТЕОРЕМА 4.1. *Каждому уравнению Монжа–Ампера (1.9) общего положения на многообразии M можно сопоставить аффинную связность Σ , однозначно определенную на этом многообразии уравнением (1.9). Указанное сопоставление является естественным в следующем смысле. Предположим, что кроме уравнения (1.9) даны уравнение общего положения (3.3) на многообразии $\tilde{M}$ и некоторый диффеоморфизм (3.4) многообразий $\tilde{M}$ и M . Пусть $\tilde{\Sigma}$ – отвечающая уравнению (3.3) аффинная связность. Диффеоморфизм (3.4) тогда и только тогда удовлетворяет равенству (3.5), когда он является аффинным, т.е.*

$$f_*(\tilde{\Sigma}) = \Sigma, \quad (4.1)$$

и для некоторых точек $m \in M$ и $\tilde{m} \in \tilde{M}$, связанных соотношением

$$m = f(\tilde{m}), \quad (4.2)$$

он переводит характеристическое расслоение уравнения (3.3) в точке $\tilde{m}$ в характеристическое расслоение уравнения (1.9) в точке m :

$$f_*(\tilde{H}(\tilde{m})) = H(m). \quad (4.3)$$

Доказательство теоремы проведено в пункте 7. Конструкция аффинной связности, сопоставляемой каждому уравнению Монжа–Ампера общего положения, изложена в пункте 6.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.2. Следует отметить эффективность конструкции аффинных связностей, о которых идет речь в теореме 4.1. Точнее, пусть U – окрестность, выбранная в соответствии с леммой 1.4. Тогда для вычисления в этой окрестности коэффициентов аффинной связности уравнения (1.9) общего положения, требуется выполнение лишь конечного числа операций дифференцирования, сложения, вычитания, умножения и деления над координатами отвечающих этому уравнению векторных полей (2.10). Подробности см. в пункте 6.

В дальнейшем указанную аффинную связность, однозначно сопоставляемую каждому уравнению Монжа–Ампера общего положения, будем называть *характеристической аффинной связностью* (см. опр. 6.19).

Следующая теорема представляет собой критерий локальной контактной эквивалентности аналитических уравнений Монжа–Ампера общего положения.

ТЕОРЕМА 4.3. Рассмотрим аналитические уравнения Монжа–Ампера общего положения (1.9) и (3.3) на контактных аналитических многообразиях M и $\widetilde{M}$ соответственно. Обозначим через Σ и $\widetilde{\Sigma}$ отвечающие этим уравнениям характеристические аффинные связности и фиксируем точки m и $\widetilde{m}$, $m \in M$, $\widetilde{m} \in \widetilde{M}$. Следующие утверждения эквивалентны.

(а) Найдутся такие окрестность U точки m , окрестность $\widetilde{U}$ точки $\widetilde{m}$ и аналитический диффеоморфизм

$$f: \widetilde{U} \rightarrow U, \quad (4.4)$$

для которых справедливы равенства (4.2) и

$$f^*(I|U) = \widetilde{I}|\widetilde{U}. \quad (4.5)$$

Здесь $I|U$ и $\widetilde{I}|\widetilde{U}$ – ограничение идеалов (1.7) и (3.2) на окрестности U и $\widetilde{U}$ соответственно.

(б) Найдется линейный изоморфизм

$$F: T_{\widetilde{m}}\widetilde{M} \rightarrow T_m M, \quad (4.6)$$

обладающий двумя следующими свойствами. Во-первых, для него выполнено условие

$$F(\widetilde{H}(\widetilde{m})) = H(m). \quad (4.7)$$

Во-вторых, если T , R и ∇ (соответственно $\widetilde{T}$, $\widetilde{R}$ и $\widetilde{\nabla}$) – кручение, кривизна и оператор ковариантного дифференцирования связности Σ (соответственно $\widetilde{\Sigma}$), то изоморфизм (4.7) переводит тензоры $\widetilde{\nabla}^k \widetilde{T}(\widetilde{m})$ и $\widetilde{\nabla}^k \widetilde{R}(\widetilde{m})$ в тензоры $\nabla^k T(m)$ и $\nabla^k R(m)$ соответственно при $k = 0, 1, 2, \dots$.

Доказательство теоремы проведено в пункте 7.

Глобальным вариантом теоремы 4.3 служит

ТЕОРЕМА 4.4. Пусть выполнены все условия теоремы 4.3, и, сверх того, пусть многообразия M и $\widetilde{M}$ односвязны, а аффинные характеристические связности Σ и $\widetilde{\Sigma}$ полны. Тогда следующие утверждения эквивалентны.

(а) Найдется аналитический диффеоморфизм (3.4), для которого справедливы равенства (4.2) и (3.5).

(б) Утверждение (б) теоремы 4.3.

Доказательство теоремы проведено в пункте 7.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.5. Из доказательств теорем 4.3 и 4.4 вытекает, что выбор линейного изоморфизма (4.6) в случае теоремы 4.3 однозначно определяет диффеоморфизм (4.4), а в случае теоремы 4.4 – диффеоморфизм (3.4).

Теоремы 4.3 и 4.4 применимы лишь в случае аналитических уравнений Монжа–Ампера. Ниже сформулированы их гладкие аналоги.

Рассмотрим уравнения общего положения (1.9) и (3.3) на многообразиях M и $\widetilde{M}$. Через Σ и $\widetilde{\Sigma}$ обозначим характеристические аффинные связности этих уравнений,

а через $\exp_m(tX)$ и $\exp_{\tilde{m}}(t\tilde{X})$, $m \in M$, $\tilde{m} \in \tilde{M}$, $X \in T_m M$, $\tilde{X} \in T_{\tilde{m}} \tilde{M}$, $0 \leq t \leq 1$, – геодезические линии этих связностей:

$$\frac{d}{dt} \exp_m(tX)|_{t=0} = X(m), \quad \exp_m(tX)|_{t=0} = m.$$

Возьмем произвольный линейный изоморфизм (4.6) и некоторые выпуклые открытые подмножества

$$V \subseteq T_m M, \quad \tilde{V} \subseteq T_{\tilde{m}} \tilde{M} \quad (4.8)$$

соответствующих касательных расслоений, для которых

$$F(\tilde{V}) = V, \quad (4.9)$$

и которым отвечают нормальные координатные окрестности

$$U = \exp_m(V), \quad \tilde{U} = \exp_{\tilde{m}}(\tilde{V}), \quad (4.10)$$

где $\exp_m(X) = \exp_m(tX)|_{t=1}$. Определим диффеоморфизм (4.4) таким образом, чтобы

$$f \circ \exp_{\tilde{m}} = \exp_m \circ F. \quad (4.11)$$

Кроме того, для всякой точки $r \in \tilde{U}$ определим линейный изоморфизм

$$F_r: T_r \tilde{M} \rightarrow T_{f(r)} \quad (4.12)$$

таким образом, чтобы

$$F_r \circ \tilde{\tau} = \tau \circ F. \quad (4.13)$$

Здесь $\tilde{\tau}$ – параллельный перенос вдоль радиальной геодезической $\{\exp_{\tilde{m}}(tZ) \mid 0 \leq t \leq 1\}$ из $\tilde{m}$ в $r = \exp_{\tilde{m}}(Z)$, $Z \in \tilde{V}$, а τ – параллельный перенос вдоль радиальной геодезической $\{\exp_m(tFZ) \mid 0 \leq t \leq 1\}$ из m в $f(r) = \exp_m(FZ)$ (см. (4.11)). В силу (4.13) ясно, что $F_{\tilde{m}} = F$.

Гладким аналогом теоремы 4.3 является

ТЕОРЕМА 4.6. *Рассмотрим уравнения Монжа–Ампера общего положения (1.9) и (3.3) на многообразиях M и $\tilde{M}$. Фиксируем точки m и $\tilde{m}$, $m \in M$, $\tilde{m} \in \tilde{M}$. Следующие утверждения эквивалентны.*

(а) *Найдутся такие окрестности U точки m , $\tilde{U}$ точки $\tilde{m}$ и диффеоморфизм (4.4), которые удовлетворяют равенствам (4.2) и (4.5).*

(б) *Найдется линейный изоморфизм (4.6), удовлетворяющий условию (4.7), такой, что построенные для него в соответствии с (4.8)–(4.13) нормальные координатные окрестности U и $\tilde{U}$, диффеоморфизм f и линейные изоморфизмы F_r обладают следующим свойством. Для каждой точки $r \in \tilde{U}$ линейный изоморфизм F_r переводит тензоры кривизны $\tilde{R}_r$ и кручения $\tilde{T}_r$ характеристической аффинной связности $\tilde{\Sigma}$ уравнения (3.3) соответственно в тензоры кривизны $R_{f(r)}$ и кручения $T_{f(r)}$ характеристической аффинной связности Σ уравнения (1.9).*

(с) *Найдется линейный изоморфизм (4.6) такой, что построенные для него в соответствии с (4.8)–(4.10) нормальные координатные окрестности U и*

$\tilde{U}$ обладают следующим свойством. Если Ξ – произвольный фиксированный базис касательного пространства $T_{\tilde{m}}\tilde{M}$,

$$\Xi: \mathbb{R}^5 \rightarrow T_{\tilde{m}}\tilde{M} \quad (4.14)$$

– определенный этим базисом изоморфизм, $F(\Xi)$ – образ базиса Ξ и

$$F(\Xi): \mathbb{R}^5 \rightarrow T_m M \quad (4.15)$$

– изоморфизм, определенный базисом $F(\Xi)$, то справедливо равенство

$$(\exp_{\tilde{m}} \circ \Xi)^*(\tilde{I} \mid \tilde{U}) = (\exp_m \circ F(\Xi))^*(I \mid U). \quad (4.16)$$

Доказательство теоремы проведено в пункте 7.

Предположим, что $\tilde{M}$ – полнеемногообразие относительно характеристической аффинной связности $\tilde{\Sigma}$ уравнения (3.3). Выберем точку $\tilde{m} \in \tilde{M}$ и произвольный упорядоченный набор касательных векторов

$$G = \{g_1, \dots, g_k\} \in T_{\tilde{m}}\tilde{M}. \quad (4.17)$$

Набору (4.17) сопоставим геодезическую ломаную

$$\gamma_G: [0, k] \rightarrow \tilde{M}, \quad (4.18)$$

построенную следующим образом. При $0 \leq t \leq 1$ полагаем

$$\gamma_G(t) = \exp_{\tilde{m}}(tg_1). \quad (4.19)$$

Далее, по индукции, для $1 \leq l \leq k-1$ и $l \leq t \leq l+1$ полагаем

$$\gamma_G(t) = \exp_{\gamma_G(l)}((t-l)\tau_l g_{l+1}), \quad (4.20)$$

где τ_l – параллельный перенос вдоль ломаной (4.18) из $\tilde{m}$ в $\gamma_G(l)$. Иными словами, мы сначала идем вдоль геодезической $\exp_{\tilde{m}}(tg_1)$, $0 \leq t \leq 1$, а затем идем вдоль геодезической ломаной, соответствующей набору векторов $\{\tau_1 g_2, \dots, \tau_1 g_k\} \in T_{\gamma_G(1)}\tilde{M}$, полученному с помощью параллельного переноса τ_1 . Обозначим через τ_G параллельный перенос вдоль ломаной (4.18) из $\tilde{m}$ в $\gamma_G(k)$.

Далее, предположим, что M – также полное многообразие относительно характеристической аффинной связности Σ уравнения (1.9). Выберем точку $m \in M$ и линейный изоморфизм (4.6). Образом набора касательных векторов (4.17) при этом изоморфизме служит набор

$$F(G) = \{Fg_1, \dots, Fg_k\} \in T_m M. \quad (4.21)$$

По аналогии с (4.19), (4.20) сопоставим этому набору геодезическую ломаную

$$\gamma_{F(G)}: [0, k] \rightarrow M \quad (4.22)$$

и параллельный перенос $\tau_{F(G)}$.

Для всякого набора (4.17) построим линейный изоморфизм

$$F_G: \tilde{M}_{\tau_G(k)} \rightarrow M_{\tau_{F(G)}(k)}, \quad (4.23)$$

для которого

$$F_G \circ \tau_G = \tau_{F(G)} \circ F. \quad (4.24)$$

Гладким аналогом теоремы 4.4 и глобальным аналогом теоремы 4.6 является

ТЕОРЕМА 4.7. Пусть выполнены все условия теоремы 4.6 и, сверх того, пусть многообразия M и $\tilde{M}$ односвязны, а аффинные характеристические связности уравнений (1.9) и (3.3) Σ и $\tilde{\Sigma}$ полны. Тогда следующие утверждения эквивалентны.

(а) Найдется диффеоморфизм (3.4), для которого справедливы равенства (4.2) и (3.5).

(б) Найдется линейный изоморфизм (4.6), удовлетворяющий условию (4.7), такой, что построенные для него в соответствии с (4.17)–(4.24) ломанные геодезические γ_G , $\gamma_{F(G)}$ и линейные изоморфизмы F_G обладают следующим свойством. Для всякого набора (4.17) линейный изоморфизм F_G переводит тензоры кривизны $\tilde{R}_{\gamma_G(k)}$ и кручения $\tilde{T}_{\gamma_G(k)}$ характеристической аффинной связности $\tilde{\Sigma}$ уравнения (3.3) соответственно в тензоры кривизны $R_{\gamma_{F(G)}(k)}$ и кручения $T_{\gamma_{F(G)}(k)}$ характеристической аффинной связности Σ уравнения (1.9).

Доказательство теоремы проведено в пункте 7.

5. Свойства характеристических расслоений. Все встречающиеся в текущем пункте уравнения Монжа–Ампера предполагаются либо эллиптическими во всей своей области определения, либо гиперболическими.

ЛЕММА 5.1. Рассмотрим уравнение Монжа–Ампера (1.9) на многообразии M и его характеристическое расслоение (2.1). Фиксируем точку $m \in M$ и выберем произвольные комплексные касательные векторы ξ_1, ξ_2 из $T_m^{\mathbb{C}}M$ и контактную дифференциальную форму ω_0 такую, чтобы $\omega_0(m) \neq 0$. Справедливы следующие свойства.

(а) Если векторы ξ_1 и ξ_2 не лежат в одной и той же плоскости слоя $H(m)$, то и эти векторы, и ковекторы $\xi_1 \lrcorner d\omega_0$ и $\xi_2 \lrcorner d\omega_0$ косоортогональны относительно $d\omega_0$, т.е.

$$d\omega_0(\xi_1, \xi_2) = 0, \quad (\xi_1 \lrcorner d\omega_0) \wedge (\xi_2 \lrcorner d\omega_0) \wedge d\omega_0 = 0.$$

(б) Если векторы ξ_1 и ξ_2 лежат в одной и той же плоскости слоя $H(m)$, то слой $I(m)$ идеала (1.7) над точкой m порожден формами $\omega_0(m)$, $d\omega_0(m)$ и $(\xi_1 \lrcorner d\omega_0)(m) \wedge (\xi_2 \lrcorner d\omega_0)(m)$, т.е.

$$I_0(m) = (\omega_0(m), d\omega_0(m), (\xi_1 \lrcorner d\omega_0)(m) \wedge (\xi_2 \lrcorner d\omega_0)(m)).$$

(с) Слой $H(m) \subseteq T_m^{\mathbb{C}}M$ замкнут относительно операции комплексного сопряжения, т.е. $\overline{H}(m) = H(m)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что свойства (а), (б) и (с) носят локальный характер. По лемме 1.4 всякое уравнение (1.9) на многообразии M локально сводится к случаю уравнения (1.9), (1.15) на евклидовом пространстве $\mathbb{R}^5$. Поэтому доказываемые свойства достаточно установить лишь для случая (1.15), что осуществляется на основании формул (1.12), (1.13) и (2.7)–(2.10) путем непосредственной проверки. Лемма доказана.

Фиксируем произвольную точку m многообразия M . Напомним, что по определению для произвольного двумерного подрасслоения $Z \subseteq TM$ первая производная $Z^{(1)}(m)$ в точке m порождена векторами ξ_1, ξ_2 и $[\xi_1, \xi_2]$, где ξ_1 и ξ_2 – линейно

независимые в точке t сечения расслоения Z . Рассмотрим окрестность U точки t и двумерные комплексные подрасслоения H_1 и H_2 контактного расслоения $L^{\mathbb{C}} \mid U$, выбранные в соответствии с леммой 2.3. Для этих подрасслоений имеет место

ЛЕММА 5.2. (а) *Объединение пересечений первых производных подрасслоений H_1 и H_2*

$$h_U = \bigcup_{m \in M} (H_1^{(1)} \cap H_2^{(1)})(m) \quad (5.1)$$

является одномерным вещественным подрасслоением расслоения $T^{\mathbb{C}}M \mid U$, для которого справедливо разложение в прямую сумму

$$TM \mid U = h_U \oplus L \mid U. \quad (5.2)$$

(b) *Соотношение*

$$h \mid U = h_U \quad (5.3)$$

корректно определяет одномерное вещественное подрасслоение h расслоения $T^{\mathbb{C}}M$, для которого справедливо разложение в прямую сумму

$$TM = h \oplus L. \quad (5.4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (а) По лемме 1.4 для ограничения $I \mid U$ идеала (1.7) на окрестность U выполнено представление (1.19). Поэтому доказываемые утверждения достаточно установить лишь для случая уравнения (1.9), (1.15) на многообразии $\mathbb{R}^5$.

Пусть ξ_{j1}, ξ_{j2} – базисные сечения расслоения H_j . По определению (2.9), (2.14) этого расслоения $\omega_0 \mid H_j = 0$, откуда по свойству скобки Липолучаем $[\xi_{j1}, \xi_{j2}] \lrcorner \omega_0 = -(\xi_{j1} \wedge \xi_{j2}) \lrcorner d\omega_0$. По лемме 5.1 (b) отсюда заключаем, что $[\xi_{j1}, \xi_{j2}] \lrcorner \omega_0 \neq 0$. Следовательно, $\dim_{\mathbb{C}} H_j^{(1)} = 3$, и $h_U = H_1^{(1)} \cap H_2^{(1)}$ – одномерное подрасслоение, ограничение на которое контактной формы ω_0 отлично от нуля. Последний факт означает, что h_U пересекается с $\ker(\omega_0)$ только в нуле. Вещественность h_U следует из леммы 5.1 (c). Свойство (а) доказано.

(b) Пересечение $(H_1^{(1)} \cap H_2^{(1)})(m)$ не зависит от выбора удовлетворяющей лемме 1.4 окрестности U точки t и удовлетворяющих лемме 2.3 расслоений H_1 и H_2 , т.е. определение (5.3) корректно. Разложение (5.4) вытекает из (5.2). Лемма доказана.

ЛЕММА 5.3. *Рассмотрим два уравнения (1.9) и (3.3) на многообразии M и отвечающие этим уравнениям характеристические расслоения H и $\tilde{H}$. Равенство $I = \tilde{I}$ справедливо тогда и только тогда, когда*

$$\tilde{H} = H. \quad (5.5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $I = \tilde{I}$, то выполнение (5.5) очевидно. Пусть выполнено равенство (5.5). По следствию 2.4 отвечающие уравнениям (1.9) и (3.3) контактные идеалы совпадают: $I_0 = \tilde{I}_0$. Отсюда по лемме 5.1 (b) получаем, что $I = \tilde{I}$. Лемма доказана.

ЛЕММА 5.4. *Рассмотрим уравнения (1.9) и (3.3) на многообразиях M и $\widetilde{M}$ соответственно, отвечающие этим уравнениям характеристические расслоения H и $\widetilde{H}$ и некоторый диффеоморфизм (3.4). Равенство (3.5) выполняется тогда и только тогда, когда*

$$f_*(\widetilde{H}) = H. \quad (5.6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть выполнено равенство (3.5). Тогда для любой фиксированной точки $m \in M$ и вектора $\xi \in H(m)$

$$\begin{aligned} f^*(\xi \lrcorner I(m)) &= f_*^{-1}\xi \lrcorner f^*(I(m)) = f_*^{-1}\xi \lrcorner \widetilde{I}(\widetilde{m}), \\ f^*(\xi \lrcorner I_0(m)) &= f_*^{-1}\xi \lrcorner f^*(I_0(m)) = f_*^{-1}\xi \lrcorner \widetilde{I}_0(\widetilde{m}) \end{aligned}$$

в силу замечания 3.1. Отсюда по определению (2.2) $f_*^{-1}\xi \lrcorner \widetilde{I}(\widetilde{m}) = f_*^{-1}\xi \lrcorner \widetilde{I}_0(\widetilde{m})$, т.е. $f_*^{-1}\xi \in \widetilde{H}(\widetilde{m})$, и равенство (5.6) выполнено.

Пусть выполнено равенство (5.6). По доказанному характеристическим расслоением уравнения $f^*(I)$ служит $f_*^{-1}(H)$, а в силу (5.6) $f_*^{-1}(H) = \widetilde{H}$. Отсюда по лемме 5.3 получаем (3.5). Лемма доказана.

ЛЕММА 5.5. *Для любого подрасслоения Z касательного расслоения $T^{\mathbb{C}}M$ и любого диффеоморфизма (3.4)*

$$f_*(Z^{(1)}) = (f_*(Z))^{(1)}. \quad (5.7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу известных свойств скобки Ли для любых комплексных векторных полей ξ и η на многообразии M $f_*[\xi, \eta] = [f_*(\xi), f_*(\eta)]$, откуда получаем (5.7). Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ 5.6. *Предположим, что выполнены все условия леммы 5.4. Пусть h – одномерное расслоение, построенное для уравнения (1.9) согласно лемме 5.2, а $\widetilde{h}$ – аналогичное расслоение, построенное для уравнения (3.3). Если выполнено равенство (3.5), то*

$$f_*(\widetilde{h}) = h. \quad (5.8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выражение (5.8) вытекает из лемм 5.4, 5.5 и определений (5.1), (5.3). Следствие доказано.

6. Характеристические аффинные связности. Построение характеристической аффинной связности подчинено следующему плану. Сначала строятся линейные связности на расслоениях (1.1) и (5.3). Искомая аффинная связность конструируется исходя из разложения (5.4) – это прямая сумма построенных линейных связностей. Предполагается, что все встречающиеся в текущем пункте уравнения Монжа–Ампера являются уравнениями общего положения во всей своей области определения.

Рассмотрим уравнение (1.9) на многообразии M и выберем произвольное открытое множество $U \subseteq M$ в соответствии с леммой 2.3. Над U определены расслоения H_1 и H_2 . По леммам 5.2, 2.3 и следствию 2.4 для $T^{\mathbb{C}}M \mid U$ имеет место разложение

$$T^{\mathbb{C}}M \mid U = H_0 \oplus H_1 \oplus H_2, \quad (6.1)$$

где

$$H_0 = h \mid U. \quad (6.2)$$

Через χ_j , $j = 0, 1, 2$, обозначим оператор проектирования

$$\chi_j : T^{\mathbb{C}} M \mid U \rightarrow H_j, \quad (6.3)$$

определенный разложением (6.1). Справедлива

ЛЕММА 6.1. *На расслоении H_j , $j = 1, 2$, существует единственная линейная комплексная связность Σ такая, что отвечающие ей операторы ковариантного дифференцирования ∇ и кривизны R обладают следующими свойствами. Для любых сечений X_1 и X_2 расслоений H_1 и H_2 соответственно*

$$\nabla_{X_{3-j}} X_j = \chi_j([X_{3-j}, X_j]). \quad (6.4)$$

Для любых сечений X и Y первой производной $H_{3-j}^{(1)}$ расслоения H_{3-j}

$$R(X, Y) = 0. \quad (6.5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Единственность. Предположим, что на векторном расслоении H_j определены две характеристические связности Σ и $\tilde{\Sigma}$, удовлетворяющие свойствам (6.4) и (6.5). Отвечающие им операторы ковариантного дифференцирования обозначим через ∇ и $\tilde{\nabla}$ соответственно. По свойству (6.4)

$$\nabla_X = \tilde{\nabla}_X \quad (6.6)$$

для всех сечений X расслоения H_{3-j} . Отсюда согласно свойству (6.5) и определению оператора кривизны

$$R(X, Y) = [\nabla_X, \nabla_Y] - \nabla_{[X, Y]} \quad (6.7)$$

имеем

$$\nabla_{[X, Y]} = [\nabla_X, \nabla_Y] = [\tilde{\nabla}_X, \tilde{\nabla}_Y] = \tilde{\nabla}_{[X, Y]} \quad (6.8)$$

для любых сечений X и Y расслоения H_{3-j} . Аналогичным образом, по определению производной $H_{3-j}^{(1)}$ из свойства (6.5) вытекает, что

$$\nabla_{[X, [X, Y]]} = \tilde{\nabla}_{[X, [X, Y]]}. \quad (6.9)$$

По определению 2.5 уравнений общего положения для любых базисных сечений X и Y расслоения H_{3-j} векторные поля X , Y , $[X, Y]$, $[X, [X, Y]]$ и $[Y, [X, Y]]$ линейно независимы в каждой точке своего определения. Поэтому из справедливости (6.6), (6.8), (6.9) для сечений расслоения H_{3-j} вытекает справедливость (6.6) для всех касательных векторов X многообразия M . Тем самым, связности Σ и $\tilde{\Sigma}$ совпадают.

Существование. Расслоение H_{3-j} выбрано в соответствии с леммой 2.3, и поэтому тривиально. Пусть $X_{3-j,1}$ и $X_{3-j,2}$ – базисные сечения этого расслоения. Положим в соответствии с (6.4)

$$\nabla_{X_{3-j,l}} X = \chi_j([X_{3-j,l}, X]) \quad (6.10)$$

для $l = 1, 2$ и всякого сечения X расслоения H_j . Далее, в соответствии с (6.7) и (6.5) положим

$$\nabla_{[X_{j1}, X_{j2}]} X = [\nabla_{X_{j1}}, \nabla_{X_{j2}}] X, \quad \nabla_{[X_{jl}, [X_{j1}, X_{j2}]]} X = [\nabla_{X_{jl}}, \nabla_{[X_{j1}, X_{j2}]]} X. \quad (6.11)$$

Легко проверить, что определенные согласно (6.10), (6.11) операторы относительно аргумента X линейны и удовлетворяют условию Лейбница. По определению 2.5 уравнений общего положения комплексные векторные поля X_{jl} , $[X_{j1}, X_{j2}]$, $[X_{jl}, [X_{j1}, X_{j2}]]$, $l = 1, 2$, образуют базис расслоения $T^{\mathbb{C}}U$. Поэтому выражения (6.10), (6.11) определяют на расслоении H_j оператор ковариантного дифференцирования некоторой комплексной линейной связности Σ . В силу (6.10) ковариантная производная, отвечающая этой связности, удовлетворяет условию (6.4), а для ее кривизны R в силу (6.11) имеем

$$R(X_{j1}, X_{j2}) = 0, \quad R(X_{jl}, [X_{j1}, X_{j2}]) = 0$$

при $l = 1, 2$, т.е. выполнено условие (6.5). Лемма доказана.

ЛЕММА 6.2. *Рассмотрим уравнения (1.9) и (3.3) на многообразиях M и $\widetilde{M}$ соответственно и некоторый диффеоморфизм (3.4), удовлетворяющий равенству (3.5). Выберем для уравнения (3.3) согласно лемме 2.3 некоторое множество $\widetilde{U} \subseteq \widetilde{M}$ и расслоения $\widetilde{H}_1$ и $\widetilde{H}_2$ на нем. Тогда справедливы следующие утверждения.*

(а) Множество $U = f(\widetilde{U})$ и расслоения

$$H_1 = f_*(\widetilde{H}_1), \quad H_2 = f_*(\widetilde{H}_2) \quad (6.12)$$

удовлетворяют лемме 2.3 для уравнения (1.9).

(б) Операторы проектирования (6.3), отвечающие разложению (6.1) для уравнения (1.9), и операторы проектирования $\widetilde{\chi}_j$, отвечающие аналогичному разложению для уравнения (3.3), удовлетворяют коммутационному условию

$$f_*^{-1} \circ \chi_j(X) = \widetilde{\chi}_j \circ f_*^{-1}(X). \quad (6.13)$$

Здесь $j = 0, 1, 2$, а X – произвольное векторное поле на U .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение (а) очевидно. Докажем утверждение (б). Согласно разложению (6.1)

$$X = \sum_{l=0}^2 \chi_l(X).$$

Аналогичным образом,

$$f_*^{-1}(X) = \sum_{l=0}^2 \widetilde{\chi}_l(f_*^{-1}(X)).$$

Полученные равенства показывают, что

$$\sum_{l=0}^2 f_*^{-1} \circ \chi_l(X) = \sum_{l=0}^2 \widetilde{\chi}_l \circ f_*^{-1}(X). \quad (6.14)$$

Из (6.14) в силу (6.12) и следствия 5.6 получаем (6.13). Лемма доказана.

ЛЕММА 6.3. Пусть выполнены все условия леммы 6.2. При $j = 1, 2$ построим согласно лемме 6.1 линейные связности Σ^j и $\tilde{\Sigma}^j$ на удовлетворяющих соотношениям (6.12) расслоениях H_j и $\tilde{H}_j$. Тогда под действием диффеоморфизма (3.4) эти связности отображаются друг в друга: $f_*^{-1}(\Sigma^j) = \tilde{\Sigma}^j$. Иными словами, если ∇ и $\tilde{\nabla}$ – операторы ковариантного дифференцирования, отвечающие соответственно связностям Σ^j и $\tilde{\Sigma}^j$, то для любого векторного поля X на U и любого сечения Y расслоения H_j

$$f_*^{-1}(\nabla_X Y) = \tilde{\nabla}_{f_*^{-1}(X)} f_*^{-1}(Y).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть X_1 и X_2 – базисные сечения расслоения H_{3-j} . В силу (6.4) для любого сечения Y расслоения H_j

$$f_*^{-1}(\nabla_{X_k}^j Y) = f_*^{-1}(\chi_j([X_k, Y])), \quad (6.15)$$

$k = 1, 2$. По лемме 6.2 (b) имеем

$$f_*^{-1} \circ \chi_j([X_k, Y]) = \tilde{\chi}_j \circ f_*^{-1}([X_k, Y]).$$

Подставим полученное соотношение в правую часть равенства (6.15). В результате, учитывая свойство (6.4), выводим

$$f_*^{-1}(\nabla_{X_k}^j Y) = \tilde{\chi}_j([f_*^{-1}X_k, f_*^{-1}Y]) = \tilde{\nabla}_{f_*^{-1}(X_k)} f_*^{-1}(Y). \quad (6.16)$$

Согласно (6.5), (6.7) и (6.16) для любого сечения Y расслоения H_j

$$f_*^{-1}(\nabla_{[X_1, X_2]} Y) = f_*^{-1}([\nabla_{X_1}, \nabla_{X_2}]Y) = [\tilde{\nabla}_{f_*^{-1}(X_1)}, \tilde{\nabla}_{f_*^{-1}(X_2)}] f_*^{-1}(Y).$$

Отсюда в силу (6.5) и (6.7) для связности $\tilde{\Sigma}^j$ получаем

$$f_*^{-1}(\nabla_{[X_1, X_2]} Y) = \tilde{\nabla}_{f_*^{-1}([X_1, X_2])} f_*^{-1}(Y). \quad (6.17)$$

Аналогичным образом устанавливается, что

$$f_*^{-1}(\nabla_{[X_k, [X_1, X_2]]} Y) = \tilde{\nabla}_{f_*^{-1}([X_k, [X_1, X_2]])} f_*^{-1}(Y). \quad (6.18)$$

Векторы X_k , $[X_1, X_2]$ и $[X_k, [X_1, X_2]]$, $k = 1, 2$, линейно независимы по определению 2.5 уравнений общего положения, поэтому утверждение леммы вытекает из (6.16)–(6.18). Лемма доказана.

ЛЕММА 6.4. Для всякой точки $m \in U$, вектора $\xi \in T_m^{\mathbb{C}}M$ и оператора χ_0

$$\chi_0(\bar{\xi}) = \overline{\chi_0(\xi)}. \quad (6.19)$$

Для операторов χ_j при $j = 1, 2$ либо

$$\chi_j(\bar{\xi}) = \overline{\chi_{3-j}(\xi)}, \quad (6.20)$$

либо

$$\chi_j(\bar{\xi}) = \overline{\chi_j(\xi)}. \quad (6.21)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению операторов (6.3) $\xi = \sum_{\alpha=0}^2 \chi_{\alpha}(\xi)$, $\bar{\xi} = \sum_{\alpha=0}^2 \chi_{\alpha}(\bar{\xi})$, поэтому $\sum_{\alpha=0}^2 \chi_{\alpha}(\bar{\xi}) = \sum_{\alpha=0}^2 \overline{\chi_{\alpha}(\xi)}$. Отсюда в силу разложения (6.1) и леммы 5.2 вытекает равенство (6.19). Следовательно, по лемме 5.1 (с) имеют место либо равенства (6.20), либо (6.21). Лемма доказана.

ЛЕММА 6.5. Пусть Σ^j – линейная связность на расслоении H_j , построенная в соответствии с леммой 6.1, $j = 1, 2$, и ∇^j – отвечающий ей оператор ковариантного дифференцирования. Тогда для всякого векторного поля X на U и сечения Y расслоения H_j либо

$$\nabla_{\overline{X}}^j \overline{Y} = \overline{\nabla_X^{3-j} Y},$$

либо

$$\nabla_{\overline{X}}^j \overline{Y} = \overline{\nabla_X^j Y}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть X_1 и X_2 – базисные сечения расслоения H_j . По свойству (6.4)

$$\nabla_{\overline{X}_k}^j \overline{X} = \chi_j([\overline{X}_k, \overline{X}]) = \chi_j(\overline{[X_k, X]}).$$

Отсюда в силу леммы 6.4 либо

$$\nabla_{\overline{X}_k}^j \overline{X} = \overline{\chi_{3-j}([X_k, X])} = \overline{\nabla_{X_k}^{3-j} X}, \quad (6.22)$$

либо

$$\nabla_{\overline{X}_k}^j \overline{X} = \overline{\chi_j([X_k, X])} = \overline{\nabla_{X_k}^j X}. \quad (6.23)$$

Далее, по свойству (6.5)

$$\nabla_{[\overline{X}_1, \overline{X}_2]}^j \overline{X} = [\nabla_{\overline{X}_1}^j, \nabla_{\overline{X}_2}^j] \overline{X},$$

откуда либо согласно (6.22)

$$\nabla_{[\overline{X}_1, \overline{X}_2]}^j \overline{X} = \overline{[\nabla_{X_1}^{3-j}, \nabla_{X_2}^{3-j}] X} = \overline{\nabla_{[X_1, X_2]}^{3-j} X}, \quad (6.24)$$

либо согласно (6.23)

$$\nabla_{[\overline{X}_1, \overline{X}_2]}^j \overline{X} = \overline{[\nabla_{X_1}^j, \nabla_{X_2}^j] X} = \overline{\nabla_{[X_1, X_2]}^j X}. \quad (6.25)$$

Аналогичным образом устанавливается, что при $k = 1, 2$ либо

$$\nabla_{[\overline{X}_k, [\overline{X}_1, \overline{X}_2]]}^j \overline{X} = \overline{\nabla_{[X_k, [X_1, X_2]]}^{3-j} X}, \quad (6.26)$$

либо

$$\nabla_{[\overline{X}_k, [\overline{X}_1, \overline{X}_2]]}^j \overline{X} = \overline{\nabla_{[X_k, [X_1, X_2]]}^j X}. \quad (6.27)$$

Векторы X_k , $[X_1, X_2]$ и $[X_k, [X_1, X_2]]$, $k = 1, 2$, линейно независимы по определению 2.5 уравнений общего положения, поэтому из (6.22)–(6.27) вытекает утверждение леммы. Лемма доказана.

ЛЕММА 6.6. Пусть выполнены все условия леммы 6.5. Тогда для всякого вещественного векторного поля X на U и сечения Y расслоения $L \mid U$ выражение

$$\nabla_X Y = \nabla_X^1(\chi_1 Y) + \nabla_X^2(\chi_2 Y) \quad (6.28)$$

задает оператор ковариантного дифференцирования. Отвечающая ему линейная связность Σ_U на расслоении $L \mid U$ вещественна, т.е.

$$\overline{\nabla_X Y} = \nabla_X Y. \quad (6.29)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проверка линейности и выполнения для оператора (6.28) условия Лейбница относительно аргумента Y тривиальна. Свойство (6.29) вытекает из (6.28) и лемм 6.4 и 6.5. Лемма доказана.

ЛЕММА 6.7. Для уравнения (1.9) существует единственная линейная связность Σ на расслоении (1.1) такая, что выражение

$$\Sigma \mid U = \Sigma_U \quad (6.30)$$

справедливо для всякого множества U , выбранного в соответствии с леммой 2.3, и линейной связности Σ_U , построенной на расслоении $L \mid U$ согласно лемме 6.6.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как известно, любая линейная связность обладает свойством локальности [11, с. 196]. Поэтому единственность связности Σ , обладающей свойством (6.30), очевидна. Докажем ее существование. Для этого достаточно показать, что если выбранные в соответствии с леммой 2.3 множества U и W таковы, что $V = U \cap W \neq \emptyset$, то $\Sigma_U \mid V = \Sigma_V = \Sigma_W \mid V$. Последнее равенство является следствием определения (6.28) и доказанного в лемме 6.1 свойства единственности. Лемма доказана.

ЛЕММА 6.7. Рассмотрим уравнения (1.9) и (3.3) на многообразиях M и $\widetilde{M}$ соответственно и отвечающие этим уравнениям линейные связности Σ и $\widetilde{\Sigma}$, построенные согласно лемме 6.7 на контактных подрасслоениях (1.1) и (3.1). Если некоторый диффеоморфизм (3.4) удовлетворяет равенству (3.5), то для него выполняется условие (3.6), и он переводит указанные связности друг в друга, т.е.

$$f_*(\widetilde{\Sigma}) = \Sigma. \quad (6.31)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выполнение условия (3.6) гарантировано замечанием 3.1. Докажем равенство (6.31).

Выберем в соответствии с леммой 2.3 некоторое подмножество $\widetilde{U}$ многообразия $\widetilde{M}$, на котором определены отвечающие уравнению (3.3) расслоения $\widetilde{H}_1$ и $\widetilde{H}_2$. В силу леммы 6.2(а) их образы $U = f(\widetilde{U})$ и (6.12) также удовлетворяют лемме 2.3 применительно к уравнению (1.9). По лемме 6.6 на расслоениях $\widetilde{L} \mid \widetilde{U}$ и $L \mid U$ существуют линейные связности $\widetilde{\Sigma}_{\widetilde{U}}$ и Σ_U . Поскольку согласно лемме 6.7 связности $\widetilde{\Sigma}$ и Σ однозначно определяются свойством (6.30), то достаточно показать, что

$$f_*^{-1}(\Sigma_U) = \widetilde{\Sigma}_{\widetilde{U}}. \quad (6.32)$$

Обозначим через ∇ и $\tilde{\nabla}$ операторы ковариантного дифференцирования, отвечающие связностям Σ_U и $\tilde{\Sigma}_{\tilde{U}}$. Через ∇^1 и ∇^2 обозначим соответствующие ∇ операторы из определения (6.28), а через $\tilde{\nabla}^1$ и $\tilde{\nabla}^2$ – аналогичные операторы, соответствующие $\tilde{\nabla}$. Применим к левой и правой частям (6.28) отображение f_*^{-1} . В результате для любого векторного поля X на U и сечения Y расслоения $L \mid U$ имеем

$$f_*^{-1}(\nabla_X Y) = f_*^{-1}(\nabla_X^1(\chi_1 Y)) + f_*^{-1}(\nabla_X^2(\chi_2 Y)),$$

откуда по лемме 6.3 получаем

$$f_*^{-1}(\nabla_X Y) = \tilde{\nabla}_{f_*^{-1}(X)}^1 f_*^{-1}(\chi_1 Y) + \tilde{\nabla}_{f_*^{-1}(X)}^2 f_*^{-1}(\chi_2 Y).$$

Применяя к полученному выражению лемму 6.2 (b), выводим

$$f_*^{-1}(\nabla_X Y) = \tilde{\nabla}_{f_*^{-1}(X)}^1 \tilde{\chi}_1(f_*^{-1}(Y)) + \tilde{\nabla}_{f_*^{-1}(X)}^2 \tilde{\chi}_2(f_*^{-1}(Y)).$$

Таким образом, согласно определению (6.28) заключаем, что

$$f_*^{-1}(\nabla_X Y) = \tilde{\nabla}_{f_*^{-1}(X)}(f_*^{-1}(Y))$$

для любого векторного поля X на U и сечения Y расслоения $L \mid U$. Иными словами, справедливо равенство (6.32). Лемма доказана.

ЛЕММА 6.9. *Рассмотрим уравнение (1.9) на многообразии M и отвечающую этому уравнению линейную связность Σ , построенную согласно лемме 6.7 на контактном подрасслоении (1.1). Пусть $m \in M$ и ξ_0 – характеристический вектор уравнения (1.9) в точке m : $\xi_0 \in H(m)$, а*

$$l: [0, 1] \rightarrow M \tag{6.33}$$

– произвольная кусочно-гладкая кривая, $l(0) = m$. Тогда для всех $0 \leq t \leq 1$

$$\xi(l(t)) \in H(l(t)), \tag{6.34}$$

где $\xi(l(t))$ – вектор, параллельный ξ_0 относительно связности Σ вдоль кривой (6.33).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Кривая (6.33) компактна, поэтому ее можно покрыть конечным числом множеств, удовлетворяющих лемме 2.3. Следовательно, утверждение леммы достаточно доказать лишь в случае, когда кривая (6.33) целиком лежит внутри множества U , удовлетворяющего лемме 2.3. В этом случае по свойству (6.30) связности Σ и определению (6.28) связности Σ_U получаем следующее. Если $j = 1, 2$ и $\xi_0 \in H_j(m)$, то $\xi(l(t)) \in H(l(t))$ согласно единственности векторного поля $\xi(l(t))$, параллельного ξ_0 относительно линейной связности Σ^j на расслоении H_j вдоль кривой (6.34). Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 6.10. В соответствии с леммами 6.1–6.7 на контактном расслоении (1.1) построена линейная связность, которая в дальнейшем обозначается через Σ^L . По лемме 6.8 эта связность инвариантна относительно контактных диффеоморфизмов, а по лемме 6.9 характеристическое расслоение параллельно относительно Σ^L .

Приступим к конструированию линейной связности на расслоении h , построенном в соответствии с леммой 5.2. Это построение во многом сходно с построением связности Σ^L . Итак, рассмотрим уравнение (1.9) на многообразии M и выберем произвольное открытое множество $U \subseteq M$ в соответствии с леммой 2.3. Над U определены расслоения (6.2), H_1 и H_2 , и имеет место разложение (6.1). Справедлива

ЛЕММА 6.11. *На расслоении (6.2) при $j = 1, 2$ существует единственная линейная комплексная связность Σ такая, что отвечающие ей операторы ковариантного дифференцирования ∇ и кривизны R обладают следующими свойствами. Для любых сечений Z и Y расслоений H_0 и H_j соответственно*

$$\nabla_Y Z = \chi_0([Y, Z]).$$

Для любых сечений X и Y первой производной $H_j^{(1)}$ расслоения H_j

$$R(X, Y) = 0.$$

Доказательство аналогично доказательству леммы 6.1.

ЛЕММА 6.12. *Рассмотрим уравнения (1.9) и (3.3) на многообразиях M и $\widetilde{M}$ соответственно и некоторый диффеоморфизм (3.4), удовлетворяющий равенству (3.5). Выберем для уравнения (3.3) согласно лемме 2.3 произвольное множество $\widetilde{U} \subseteq \widetilde{M}$ и расслоения $\widetilde{H}_1$ и $\widetilde{H}_2$ на нем. Построим расслоения (6.12) над множеством $U = f(\widetilde{U})$ в соответствии с леммой 6.2 (а) и линейные связности Σ^j и $\widetilde{\Sigma}^j$, $j = 1, 2$, на удовлетворяющих соотношению (5.8) расслоениях $h|_U$ и $\widetilde{h}|_{\widetilde{U}}$ в соответствии с леммой 6.11. Тогда под действием диффеоморфизма (3.4) эти связности отображаются друг в друга: $f_*^{-1}(\Sigma^j) = \widetilde{\Sigma}^j$. Иными словами, если ∇ и $\widetilde{\nabla}$ – операторы ковариантного дифференцирования, отвечающие соответственно связностям Σ^j и $\widetilde{\Sigma}^j$, то для любого векторного поля X на U и любого сечения Y расслоения (6.2)*

$$f_*^{-1}(\nabla_X Y) = \widetilde{\nabla}_{f_*^{-1}(X)} f_*^{-1}(Y).$$

Доказательство аналогично доказательству леммы 6.3.

ЛЕММА 6.13. *Пусть Σ^j – линейная связность на расслоении (6.2), построенная в соответствии с леммой 6.11, $j = 1, 2$, и ∇^j – отвечающий ей оператор ковариантного дифференцирования. Тогда для всякого векторного поля X на U и сечения Y расслоения (6.2) либо $\nabla_X^j \overline{Y} = \overline{\nabla_X^{3-j} Y}$, либо $\nabla_X^j \overline{Y} = \overline{\nabla_X^j Y}$.*

Доказательство аналогично доказательству леммы 6.5.

ЛЕММА 6.14. Пусть выполнены все условия леммы 6.13. Тогда для всякого вещественного векторного поля X на U и сечения Y расслоения (6.2) выражение

$$\nabla_X Y = (\nabla_X^1(Y) + \nabla_X^2(Y))/2$$

задает оператор ковариантного дифференцирования. Отвечающая ему линейная связность Σ_U на расслоении (6.2) вещественна, т.е.

$$\overline{\nabla_X Y} = \nabla_X Y.$$

Доказательство аналогично доказательству леммы 6.6.

ЛЕММА 6.15. Для уравнения (1.9) существует единственная линейная связность Σ на построенном согласно лемме 5.2 расслоении h , для которой справедливо следующее свойство. Выражение (6.30) справедливо для всякого множества U , выбранного в соответствии с леммой 2.3, и линейной связности Σ_U , построенной на расслоении (6.2) согласно лемме 6.14.

Доказательство аналогично доказательству леммы 6.7.

ЛЕММА 6.16. Рассмотрим уравнения (1.9) и (3.3) на многообразиях M и $\widetilde{M}$ соответственно и отвечающие этим уравнениям линейные связности Σ и $\widetilde{\Sigma}$, построенные согласно лемме 6.15 на подрасслоениях h и $\widetilde{h}$. Если некоторый диффеоморфизм (3.4) удовлетворяет равенству (3.5), то для него выполняется условие (5.8), и он переводит указанные связности друг в друга: $f_*(\widetilde{\Sigma}) = \Sigma$.

Доказательство аналогично доказательству леммы 6.8.

ЗАМЕЧАНИЕ 6.17. В соответствии с леммами 6.11–6.15 на расслоении h (см. (5.1) и (5.3)) построена линейная связность, которая в дальнейшем обозначается через Σ^h . По лемме 6.16 эта связность инвариантна относительно контактных диффеоморфизмов.

По лемме 5.2 (b) для расслоений L и h справедливо разложение (5.4). Через χ_L и χ_h обозначим операторы проектирования

$$\chi_L: TM \rightarrow L, \quad \chi_h: TM \rightarrow h, \quad (6.35)$$

определенные этим разложением. Справедлива

ЛЕММА 6.18. Рассмотрим уравнение (1.9) на многообразии M и отвечающие этому уравнению линейные связности Σ^L и Σ^h , построенные согласно замечаниям 6.10 и 6.17 на подрасслоениях L и h . Пусть ∇^L и ∇^h – отвечающие указанным связностям операторы ковариантного дифференцирования. Тогда для всяких векторных полей X и Y на M выражение

$$\nabla_X Y = \nabla_X^L(\chi_L Y) + \nabla_X^h(\chi_h Y) \quad (6.36)$$

задает оператор ковариантного дифференцирования. Иными словами, оператор (6.36) определяет на M аффинную связность Σ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проверка линейности по X, Y и выполнения для оператора (6.36) условия Лейбница относительно аргумента Y тривиальна. Лемма доказана.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.19. Построенная в соответствии с леммой 6.18 связность Σ называется *характеристической аффинной связностью* уравнения (1.19).

ЛЕММА 6.20. Рассмотрим уравнения (1.9) и (3.3) на многообразиях M и $\widetilde{M}$ соответственно и отвечающие этим уравнениям характеристические аффинные связности Σ и $\widetilde{\Sigma}$, построенные согласно лемме 6.18. Если некоторый диффеоморфизм (3.4) удовлетворяет равенству (3.5), то он переводит указанные связности друг в друга: $f_*(\widetilde{\Sigma}) = \Sigma$.

Доказательство вытекает из определения (6.36) характеристической связности и лемм 6.8 и 6.16.

ЛЕММА 6.21. Рассмотрим уравнение (1.9) на многообразии M и отвечающую этому уравнению характеристическую аффинную связность Σ , построенную согласно лемме 6.19. Пусть $t \in M$ и ξ_0 – характеристический вектор уравнения (1.9) в точке t : $\xi_0 \in H(t)$, а (6.33) – произвольная кусочно-гладкая кривая, $l(0) = t$. Тогда для всех $0 \leq t \leq 1$ выполнено включение (6.34), где $\xi(l(t))$ – вектор, параллельный ξ_0 относительно связности Σ вдоль кривой (6.33).

Доказательство вытекает из леммы 6.9.

7. Доказательства основных результатов.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4.1. Сопоставление всякому уравнению (1.9) общего положения характеристической аффинной связности Σ осуществляется в соответствии с леммой 6.18.

Пусть диффеоморфизм (3.4) удовлетворяет равенству (3.5), т.е. осуществляет контактную эквивалентность уравнений (1.9) и (3.3). Тогда по лемме 6.20 диффеоморфизм (3.4) является аффинным, т.е. справедливо равенство (4.1). А по лемме 5.4 для всякой точки $\tilde{m} \in \widetilde{M}$ выполнено (4.3).

Обратно, пусть диффеоморфизм (3.4) является аффинным, т.е. справедливо (4.1), и для некоторых точек $t \in M$ и $\tilde{m} \in \widetilde{M}$, связанных соотношением (4.2), выполнено (4.3). Возьмем произвольную точку $r \in \widetilde{M}$. В силу связности $\widetilde{M}$ найдется гладкая кривая

$$l: [0, 1] \rightarrow \widetilde{M}, \quad (7.1)$$

соединяющая точки $\tilde{m}$ и r :

$$l(0) = \tilde{m}, \quad l(1) = r. \quad (7.2)$$

Образ кривой (7.1) относительно диффеоморфизма (3.4)

$$f \circ l: [0, 1] \rightarrow M \quad (7.3)$$

соединяет точки $f(\tilde{m})$ и $f(r)$:

$$f \circ l(0) = f(\tilde{m}), \quad f \circ l(1) = f(r). \quad (7.4)$$

Обозначим через $\tilde{\tau}$ параллельный перенос вдоль кривой (7.1) из $\tilde{m}$ в r , а через τ – параллельный перенос вдоль кривой (7.3) из $f(\tilde{m})$ в $f(r)$. По условию теоремы f является аффинным диффеоморфизмом, а потому

$$f_* \circ \tilde{\tau} = \tau \circ f_*. \quad (7.5)$$

Следовательно, $f_* \circ \tilde{\tau}(\tilde{H}(\tilde{m})) = \tau \circ f_*(\tilde{H}(\tilde{m}))$, откуда, учитывая (7.2) и (7.4), по условию (4.3) и по лемме 6.21 получаем, что для всех точек $r \in \tilde{M}$ выполнено равенство (5.6). Поэтому в силу леммы 5.4 для диффеоморфизма (3.4) выполнено равенство (3.5). Теорема доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4.3. (a) $\Rightarrow$ (b). Пусть выполнено утверждение (a). Определим изоморфизм (4.6) выражением

$$F = f_*(\tilde{m}). \quad (7.6)$$

Выполнение (4.7) вытекает из леммы 5.4. По теореме 4.1 в силу равенства (4.5) диффеоморфизм (4.4) является аффинным, т.е.

$$f_*(\tilde{\Sigma} \mid \tilde{U}) = \Sigma \mid U. \quad (7.7)$$

Поэтому то, что изоморфизм (7.6) переводит тензоры $\tilde{\nabla}^k \tilde{T}(\tilde{m})$ и $\tilde{\nabla}^k \tilde{R}(\tilde{m})$ в тензоры $\nabla^k T(m)$ и $\nabla^k R(m)$, вытекает из известных свойств аффинных отображений [12, гл. 6, § 1] и ковариантного дифференциала [12, гл. 3, § 2].

(b) $\Rightarrow$ (a). Пусть выполнено утверждение (b). Тогда по известной теореме о локальной эквивалентности аффинных связностей [12, гл. 6, § 7] найдется аналитический диффеоморфизм (4.4) некоторой связной окрестности $\tilde{U}$ точки $\tilde{m}$ на окрестность U точки m , удовлетворяющий равенствам (4.2), (7.6) и (7.7), т.е. являющийся аффинным. Отсюда и из (4.7) по теореме 4.1 заключаем, что диффеоморфизм (4.4) удовлетворяет равенству (4.5). Теорема доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4.4. (a) $\Rightarrow$ (b). Дословно совпадает с доказательством импликации (a) $\Rightarrow$ (b) теоремы 4.3.

(b) $\Rightarrow$ (a). Аналогично доказательству импликации (b) $\Rightarrow$ (a) теоремы 4.3. Ссылку на теорему о локальной эквивалентности аффинных связностей следует заменить ссылкой на теорему о глобальной эквивалентности аффинных связностей [12, гл. 6, § 7]. Теорема доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4.6. (a) $\Rightarrow$ (b). Пусть выполнено утверждение (a). Выберем окрестности (4.8) так, чтобы им отвечали нормальные координатные окрестности (4.10). При этом всегда можно добиться того, чтобы U и $\tilde{U}$ удовлетворяли утверждению (a). Определим линейный изоморфизм F посредством равенства (7.6). Справедливость (4.7) вытекает из леммы 5.4. По теореме 4.1 диффеоморфизм (4.4) является аффинным, т.е. имеет место (7.7). Поэтому справедливо соотношение (7.5), где $\tilde{\tau}$ – параллельный перенос вдоль любой гладкой кривой (7.1) из точки $\tilde{m}$ в точку r , а τ – параллельный перенос вдоль кривой (7.3) из точки m в точку $f(r)$. Из (7.5) вытекает, что изоморфизм (4.12), построенный из соотношения коммутативности (4.13), удовлетворяет равенству $F_r = f_*(r)$. Но $f_*(r)$ переводит $\tilde{R}_r$ в $R_{f(r)}$ и $\tilde{T}_r$ в $T_{f(r)}$, где $\tilde{R}$ и $\tilde{T}$ (соответственно R и T) – кривизна и

кручение связности $\widetilde{\Sigma}$ (соответственно Σ) по известным свойствам аффинных отображений [12, гл. 6, § 1].

(b) $\Rightarrow$ (c). Пусть имеет место утверждение (b). По теореме Э. Картана [13, § 17] построенный из соотношения коммутативности (4.11) диффеоморфизм (4.4) является аффинным, т.е. выполнено (7.7). Кроме того, справедливо (4.2) и (7.6). По теореме 4.1 из (7.7), (7.6) и (4.7) вытекает, что диффеоморфизм (4.4) удовлетворяет равенству (4.5). Выберем базис Ξ касательного пространства $T_{\widetilde{m}}\widetilde{M}$ и вычислим его образ $F(\Xi)$. Отвечающие этим базисам изоморфизмы (4.14) и (4.15) удовлетворяют соотношению

$$F \circ \Xi = F(\Xi). \quad (7.8)$$

Сопоставляя (7.8) и (4.11), приходим к равенству

$$f \circ (\exp_{\widetilde{m}} \circ \Xi) = \exp_m \circ F(\Xi). \quad (7.9)$$

Из равенств (4.5) и (7.9) заключаем справедливость (4.16).

(c) $\Rightarrow$ (a). Пусть имеет место утверждение (c). Выберем диффеоморфизм (4.4) из коммутационного условия (7.9), т.е.

$$f = \exp_m \circ F(\Xi) \circ (\exp_{\widetilde{m}} \circ \Xi)^{-1}.$$

Тем самым, для f справедливо (4.2) и

$$f^* = ((\exp_{\widetilde{m}} \circ \Xi)^{-1})^* \circ (\exp_m \circ F(\Xi))^*.$$

Отсюда и из (4.16) вытекает (4.5). Теорема доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4.7. (a) $\Rightarrow$ (b). Пусть имеет место утверждение (a). Определим линейный изоморфизм F посредством равенства (7.6). Из леммы 5.4 вытекает справедливость равенства (4.7). По теореме 4.1 диффеоморфизм (3.4) является аффинным, т.е. справедливо (4.1). Следовательно, справедливо соотношение (7.5). Из этого соотношения вытекает, что линейный изоморфизм (4.23), построенный в соответствии с (4.24), удовлетворяет равенству

$$F_G = f_*(\gamma_G(k)). \quad (7.10)$$

Поскольку аффинный диффеоморфизм (3.4) необходимо переводит $\widetilde{R}_{\gamma_G(k)}$ в $R_{\gamma_{F(G)}(k)}$ и $\widetilde{T}_{\gamma_G(k)}$ в $T_{\gamma_{F(G)}(k)}$, то этим свойством обладает и F_G .

(b) $\Rightarrow$ (a). Пусть имеет место утверждение (b). По теореме Картана–Амброуза–Хикса [13, § 1.9] существует единственный аффинный диффеоморфизм (3.4), для которого выполнены равенства (7.10) и $f(\gamma_G(k)) = \gamma_{F(G)}(k)$. Следовательно, для этого диффеоморфизма справедливы свойства (4.1), (4.2) и (7.6). По теореме 4.1 из (4.1), (4.2) и (4.7), (7.6) вытекает, что диффеоморфизм (3.4) удовлетворяет равенству (3.5). Теорема доказана.

Список литературы

1. *Лычагин В. В.* Контактная геометрия и нелинейные дифференциальные уравнения второго порядка // УМН. 1979. Т. 34. №1(205). С. 137–165.
2. *Курятт Р.* Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1964.
3. *Кобаяси Ш.* Группы преобразований в дифференциальной геометрии. М.: Мир, 1986.
4. *Lie S.* Kurzes Résumé mehrerer neuer Theorien // Gesammelte Abhandlungen. Leipzig: B.G. Teubner–Oslo: H. Aschehoug & Co, 1922. Bd. 3. P. 1–4.
5. *Lie S.* Neue Integrationsmethode der Monge–Ampèreschen Gleichung // Gesammelte Abhandlungen. Leipzig: B.G. Teubner–Oslo: H. Aschehoug & Co, 1922. Bd. 3. P. 287–294.
6. *Lie S.* Untersuchungen üb Differentialgleichungen // Gesammelte Abhandlungen. Leipzig: B.G. Teubner–Oslo: H. Aschehoug & Co, 1922. Bd. 3. P. 537–547.
7. *Goursat E.* Lecons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre. V. 1. Paris: Hermann, 1896.
8. *Лычагин В. В., Рубцов В. Н.* О теоремах Софуса Ли для уравнений Монжа–Ампера // ДАН БССР. 1983. Т. 27. №5. С. 396–398.
9. *Lychagin V. V., Rubtsov V. N., Chekalov I. V.* A classification of Monge–Ampère equations // Ann. scient. Éc. Norm. Sup. 4 série. 1993. V. 26. P. 281–308.
10. *Morimoto T.* La géométrie des équations Monge–Ampère // C. R. Acad. Sc. Paris. Série A. 1979. V. 289. P. 25–28.
11. *Постников М. М.* Дифференциальная геометрия. М.: Наука, 1988.
12. *Кобаяси Ш., Номидзу К.* Основы дифференциальной геометрии. Т. 1. М.: Наука, 1981.
13. *Вольф Дж.* Пространства постоянной кривизны. М.: Наука, 1982.

Международный Центр “Софус Ли”

Поступила в редакцию
25.09.1995