Общероссийский математический портал

К. С. Абдухаликов, Модулярные подстановочные представления $\mathrm{PSL}(n, p)$ и инвариантные решетки, *Матем. сб.*, 1997, том 188, номер 8, 3–12

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm237>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.60.19

26 апреля 2023 г., 17:31:43

УДК 512.54

К. С. Абдухаликов

Модулярные подстановочные представления $\mathrm{PSL}(n, p)$ и инвариантные решетки

Изучаются инвариантные решетки в неприводимом модуле, ассоциированном с комплексным подстановочным представлением группы $\mathrm{PSL}(n, p)$, $n > 2$. Описана структура подмодулей подстановочного модуля данной группы над конечным полем.

Библиография: 10 названий.

§ 1. Введение

Пусть конечная группа G действует дважды транзитивно на множестве Ω . Тогда комплексный подстановочный модуль группы G является прямой суммой одномерного подмодуля и некоторого модуля V . Рассмотрим $\mathbb{Z}$ -решетки в V . Поскольку группа G действует абсолютно неприводимо на V , число классов подобия G -инвариантных подрешеток в V конечно [1], [2]. Множество представителей G -инвариантных решеток были описаны для групп A_n , $\mathrm{ASL}(2, p)$, $\mathrm{ASL}(2, p^m)$, $\mathrm{ASL}(n, p)$, $\mathrm{PSL}(2, p^m)$ в работах [2], [3], [4], [5] и [6], соответственно.

Основной задачей данной работы является исследование инвариантных решеток в отмеченном выше модуле V для группы $\mathrm{PSL}(n, p)$, $n > 2$. Пусть $\mathbf{F}_p$ – конечное поле из p элементов, p – простое. Далее, пусть $\mathcal{P}$ – проективное пространство $\mathrm{PG}(n-1, p)$ над $\mathbf{F}_p$, точками которого являются прямые без начала.

Сначала рассмотрим подстановочный модуль над полем $\mathbf{F}_p$ группы $\mathrm{PSL}(n, p)$. Существуют два подстановочных модуля $\mathcal{F}$ и $\widehat{\mathcal{F}}$, соответствующие дважды транзитивным действиям $\mathrm{PSL}(n, p)$ на множестве точек и на множестве гиперплоскостей проективного пространства $\mathcal{P}$. Композиционные факторы модуля $\mathcal{F}$ были вычислены в [7]. Мы покажем, что $\mathcal{F}$ является прямой суммой одномерного модуля и подмодуля $\mathcal{F}_0$. Далее, модуль $\mathcal{F}_0$ имеет ровно $n-1$ ненулевых подмодулей, которые образуют цепь по включению:

$$0 \subset M_1 \subset M_2 \subset \dots \subset M_{n-1} = \mathcal{F}_0.$$

Модуль $\widehat{\mathcal{F}}$ имеет аналогичную структуру.

Если характеристика основного поля не равна p , то структура подстановочного модуля группы $\mathrm{PSL}(n, p)$, $n > 2$, может быть легко описана (см. [8]).

Нам удобнее работать с группой $G = \mathrm{SL}(n, p)$ вместо группы $\mathrm{PSL}(n, p)$. Обозначим $N = |\mathcal{P}|$. Рассмотрим N -мерное пространство $V_1 = \bigoplus_{\alpha \in \mathcal{P}} \mathbb{C} v_\alpha$. Имеются два естественных действия группы G на V_1 : $\rho(g)(v_\alpha) = v_{g\alpha}$ и $\widehat{\rho}(g)(v_\alpha) = v_{t_{g^{-1}}\alpha}$, где ${}^t g$ обозначает матрицу, транспонированную к матрице $g \in G$. Действие $\widehat{\rho}$ соответствует действию группы G на гиперплоскостях пространства $\mathcal{P}$. Подпространство $V = \{\sum a_\alpha v_\alpha : \sum a_\alpha = 0\}$ является G -инвариантным и неприводимым.

Работа выполнена при частичной поддержке гранта фонда INTAS.

(Сумму по $\alpha \in \mathcal{P}$ будем обозначать $\sum$.) На модуле V имеется естественное G -инвариантное скалярное произведение

$$\left(\sum a_\alpha v_\alpha, \sum b_\alpha v_\alpha \right) = \sum a_\alpha b_\alpha.$$

Нашей главной задачей является исследование G -инвариантных решеток в V . Ясно, что множество G -инвариантных решеток одинаково для действий ρ и $\widehat{\rho}$. Рассмотрим инвариантные решетки:

$$\Lambda = \left\{ \sum a_\alpha v_\alpha : a_\alpha \in \mathbb{Z}, \sum a_\alpha = 0 \right\},$$

$$\Lambda_0 = \left\{ \sum a_\alpha v_\alpha \in \Lambda : a_\beta \equiv a_\gamma \pmod{N} \text{ для всех } \beta, \gamma \in \mathcal{P} \right\}.$$

На самом деле $\Lambda_0 = N \cdot \Lambda^*$, где Λ^* – решетка, двойственная к Λ . Для последовательности натуральных чисел $(t_1, \dots, t_{n-2})$, где $t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_{n-2} \leq n-1$ и $t_{i-1} < t_i$ при $t_i \neq n-1$ ($i = 2, \dots, n-2$), определим решетку

$$\Gamma = \Lambda(t_1, t_2, \dots, t_{n-2}) \supset p^{n-2} \Lambda$$

со свойством

$$\Gamma \cap p^{t-1} \Lambda / \Gamma \cap p^t \Lambda \cong M_t, \quad t = 1, \dots, n-2.$$

Далее, положим

$$\Lambda(t; t_1, \dots, t_{n-2}) = p^{n-2} \Lambda_0 + t \Lambda(t_1, \dots, t_{n-2}), \quad t \mid N.$$

Две решетки $\Lambda_1, \Lambda_2 \subset V$ называются *подобными*, если $\Lambda_1 = a \Lambda_2$, $a \in \mathbb{C}$.

ТЕОРЕМА 1. *Решетки $\Lambda(t; t_1, \dots, t_{n-2})$ образуют полное множество представителей классов подобия G -инвариантных решеток в V .*

Отметим, что если Λ' является G -инвариантной подрешеткой в V , то Λ' подобна некоторой решетке, содержащейся между Λ и $Np^{n-2}\Lambda$.

§ 2. Подстановочные представления группы $\mathrm{SL}(n, p)$

Пусть группа $G = \mathrm{SL}(n, p)$ действует естественным образом на линейном пространстве E с базисом $\{e_1, \dots, e_n\}$. Рассмотрим множество функций

$$\mathcal{F} = \{f : E \setminus \{0\} \rightarrow \mathbf{F}_p : f(ax) = f(x) \text{ для всех } a \in \mathbf{F}_p^*, x \in E \setminus \{0\}\}.$$

Через $\mathcal{P}$ обозначим проективное пространство $\mathrm{PG}(n-1, p)$, точками которого являются прямые в E без начала. Множество функций

$$f_\sigma(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in \sigma, \\ 0, & \text{если } x \notin \sigma, \end{cases}$$

образуют базис $\mathcal{F}$ над $\mathbf{F}_p$, $\sigma \in \mathcal{P}$. Пусть $\widehat{\mathcal{F}} = \mathcal{F}$ как линейное пространство. Снабдим пространства $\mathcal{F}$ и $\widehat{\mathcal{F}}$ структурой G -модуля, полагая

$$(\rho(g)(f))(x) = f(g^{-1}x), \quad (\widehat{\rho}(g)(h))(x) = h({}^t g x),$$

где $g \in G$, $f \in \mathcal{F}$, $h \in \widehat{\mathcal{F}}$, $x \in E \setminus \{0\}$ и ${}^t g$ – транспонированная матрица для g . Имеем

$$\rho(g)(f_\sigma) = f_{g\sigma}, \quad \widehat{\rho}(g)(f_\sigma) = f_{{}^t g\sigma}.$$

Таким образом, $\mathcal{F}$ и $\widehat{\mathcal{F}}$ реализуют представления группы G , соответствующие подстановкам на точках и гиперплоскостях пространства $\mathcal{P}$. Положим

$$\mathcal{F}_0 = \widehat{\mathcal{F}}_0 = \left\{ \sum_{\sigma \in \mathcal{P}} c_\sigma f_\sigma : c_\sigma \in \mathbf{F}_p, \sum c_\sigma = 0 \right\}.$$

Ясно, что

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \oplus \langle 1 \rangle, \quad \widehat{\mathcal{F}} = \widehat{\mathcal{F}}_0 \oplus \langle 1 \rangle,$$

где 1 обозначает постоянную функцию.

Пусть $\{X_1, \dots, X_n\}$ – дуальный базис для базиса $\{e_1, \dots, e_n\}$ пространства E . Любой элемент модуля $\mathcal{F}$ может быть представлен в виде

$$f = \sum_{i_1, \dots, i_n} c_{i_1 \dots i_n} X_1^{i_1} \dots X_n^{i_n}, \quad \sum_{j=1}^n i_j \equiv 0 \pmod{p-1}, \quad (1)$$

где

$$f(a) = \sum_{i_1, \dots, i_n} c_{i_1 \dots i_n} X_1(a)^{i_1} \dots X_n(a)^{i_n}$$

для $a \in E \setminus \{0\}$. Так как $X_i(a)^p = X_i(a)$, мы всегда можем полагать, что $i_j < p$ для степеней в (1).

Положим

$$M_0 = \widehat{M}_0 = 0,$$

$$M_t = \widehat{M}_t = \left\{ \sum_{i_1, \dots, i_n} c_{i_1 \dots i_n} X_1^{i_1} \dots X_n^{i_n} \in \mathcal{F} : 0 < \sum_{j=1}^n i_j \leq t(p-1) \right\}$$

для $t = 1, \dots, n-1$. Модули M_t и $\widehat{M}_t$ являются G -подмодулями пространств $\mathcal{F}_0$ и $\widehat{\mathcal{F}}_0$. Кроме того,

$$M_0 \subset M_1 \subset M_2 \subset \dots \subset M_{n-1} = \mathcal{F}_0,$$

$$\widehat{M}_0 \subset \widehat{M}_1 \subset \widehat{M}_2 \subset \dots \subset \widehat{M}_{n-1} = \widehat{\mathcal{F}}_0.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. *G -модули M_t/M_{t-1} являются ненулевыми, неизоморфными и неприводимыми при $t = 1, \dots, n-1$. Кроме того, $\widehat{M}_t/\widehat{M}_{t-1} \cong M_{n-t}/M_{n-t-1}$ при $t = 1, \dots, n-1$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $S = \mathbf{F}_p[Y_1, \dots, Y_n]/\langle Y_1^p, \dots, Y_n^p \rangle$ – кольцо срезанных многочленов от переменных $Y_1, \dots, Y_n$. Отождествляя $\langle Y_1, \dots, Y_n \rangle$ с пространством $E = \langle e_1, \dots, e_n \rangle$, получаем естественное действие G на S . Пусть $S^k \subset S$ – подмодуль однородных многочленов степени k . Тогда модули S^k являются неприводимыми и неизоморфными G -модулями при $k = 1, \dots, p-1$ [7]. Отображение $\varphi: \widehat{M}_i/\widehat{M}_{i-1} \rightarrow S^{i(p-1)}$,

$$\varphi(X_1^{i_1} \dots X_n^{i_n} + \widehat{M}_{i-1}) = Y_1^{i_1} \dots Y_n^{i_n},$$

определяет изоморфизм G -модулей. Следовательно, модуль $\widehat{M}_i/\widehat{M}_{i-1}$ неприводим. Тогда модуль M_i/M_{i-1} также неприводим. Ясно, что старшим вектором модуля M_{n-i}/M_{n-i-1} является $X_{i+1}^{p-1} \dots X_n^{p-1} + M_{n-i-1}$. Сравнение весов (при расширении основного поля) завершает доказательство предложения.

Положим

$$h_1 = X_1^{p-1}, \quad h_i = (X_1^{p-1} - 1) \dots (X_{i-1}^{p-1} - 1) X_i^{p-1}, \quad i = 2, \dots, n-1.$$

Пусть U (соответственно, U^-) обозначает подгруппу верхних (соответственно, нижних) унитреугольных матриц. Напомним, что $\mathcal{F}_0^{U^-}$ обозначает множество векторов из $\mathcal{F}_0$, инвариантных относительно U^- .

ЛЕММА 2.2. *Справедливо следующее: $\mathcal{F}_0^{U^-} = \langle h_1, \dots, h_{n-1} \rangle$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко видеть, что $h_i \in \mathcal{F}_0^{U^-}$. Пусть $h \in \mathcal{F}_0^{U^-}$. Если $h \in M_1$, то $h = \alpha h_1$, поскольку M_1 неприводим и инвариантный вектор единственен с точностью до умножения на скаляр. Предположим, что $h \in M_i$. Так как модуль M_i/M_{i-1} неприводим, то $h = \alpha_i h_i + g$, $g \in M_{i-1}$.

Тогда $g \in \mathcal{F}_0^{U^-}$ и по индукции имеем $g = \alpha_{i-1} h_{i-1} + \dots + \alpha_1 h_1$.

ЛЕММА 2.3. *Если M является ненулевым подмодулем в $\mathcal{F}_0$, то $\text{Soc } M = M_1$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Конечная p -группа U^- действует на множестве M и любая U^- -орбита имеет длину, равную степени p . В то же время, длина орбиты элемента 0 равна 1, поэтому модуль M содержит ненулевой элемент, инвариантный относительно U^- . Следовательно, по лемме 2.2 имеем

$$f = h_k + \alpha_{k-1} h_{k-1} + \dots + \alpha_1 h_1 \in M$$

для некоторого k .

Рассмотрим $u_{ij}(\gamma) \in U$ со свойством $u_{ij}(\gamma)(e_s) = e_s + \gamma \delta_{js} e_i$, где $\gamma \in \mathbf{F}_p$ и δ_{js} – символ Кронекера. Имеем

$$\sum_{\gamma \in \mathbf{F}_p} u_{k,k+1}(\gamma)(f) = \sum_{\gamma \in \mathbf{F}_p} u_{k,k+1}(\gamma)(h_k) = -(X_1^{p-1} - 1) \dots (X_{k-1}^{p-1} - 1) X_{k+1}^{p-1}.$$

Использование автоморфизма, отображающего X_{k+1} в X_k , дает $h_k \in M$. Далее,

$$\sum_{\gamma \in \mathbf{F}_p} u_{1k}(\gamma)(h_k) = -(X_2^{p-1} - 1) \dots (X_{k-1}^{p-1} - 1) X_k^{p-1}.$$

Следовательно, $h_{k-1} \in M$. Аналогично, $h_{k-2}, \dots, h_1 \in M$. Но элемент h_1 порождает M_1 .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.4. *Если M – подмодуль модуля $\mathcal{F}_0$ (соответственно, $\widehat{\mathcal{F}}_0$), то $M = M_t$ (соответственно, $M = \widehat{M}_t$) для некоторого $t = 0, \dots, n-1$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно доказать утверждение для $\mathcal{F}_0$. Покажем по индукции, что если $f \in M_k \setminus M_{k-1}$, то $\mathbf{F}_p G f \supset M_k$. В самом деле, если $f \in M_1 \setminus \{0\}$, то $\mathbf{F}_p G f \neq 0$ и по лемме 2.3 имеем $\mathbf{F}_p G f \supset M_1$.

Далее, пусть $f \in M_k \setminus M_{k-1}$. Обозначим $N = \mathbf{F}_p G f$. Так как M_k/M_{k-1} неприводим, найдется элемент $g \in N \setminus (N \cap M_{k-1})$, инвариантный по модулю M_{k-1} относительно U^- .

Если $U^- g = g$, то по лемме 2.2 имеем $g = \alpha_k h_k + \alpha_{k-1} h_{k-1} + \dots + \alpha_1 h_1$, $\alpha_k \neq 0$. Теперь, как в лемме 2.3, можно доказать, что $h_k, h_{k-1} \in M$. Следовательно, $M \supset M_{k-1}$ по индукционному предположению. Тогда $M \supset M_k$, поскольку $h_k \in M$ и модуль M_k/M_{k-1} неприводим.

Если $U^- g \neq g$, то $g = \alpha_k h_k + h$, $\alpha_k \neq 0$, $h \in M_{k-1}$. Для $u \in U^-$ имеем $u(g) - u = u(h) - h \in M_{s(u)} \setminus M_{s(u)-1}$. Выберем $s = \max\{s(u) \mid u \in U^-\}$. Тогда $M \supset M_s$ по индукционному предположению. Далее, в этом случае мы имеем $g = \alpha_k h_k + \dots + \alpha_{s+1} h_{s+1} + h'$, $h' \in M_s$. Так как $M \supset M_s$, получаем $g = \alpha_k h_k + \dots + \alpha_{s+1} h_{s+1} \in M$. Аналогично предыдущим рассуждениям $M \supset M_k$.

ЛЕММА 2.5. *При $t = 1, \dots, n-1$ дуальный модуль модуля M_t/M_{t-1} изоморфен M_{n-t}/M_{n-t-1} .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Существует невырожденная билинейная G -инвариантная форма на $\mathcal{F}_0$. В самом деле, положим $(f, h) = \pi(f \cdot h)$, где π – проекция из $\mathcal{F}$ на $\langle 1 \rangle$ вдоль $\mathcal{F}_0$. Ограничивая эту форму на $M_t \times M_{n-t}$, получим G -инвариантное спаривание, левым и правым ядрами которого являются M_{t-1} и M_{n-t-1} , соответственно. Следовательно,

$$(M_t/M_{t-1})^* \cong M_{n-t}/M_{n-t-1}.$$

§3. Классификация решеток

Следующая лемма получается как следствие теоремы Дойринга–Нётер [9].

ЛЕММА 3.1. *Если G – конечная группа, V – неприводимый $\mathbb{C}G$ -модуль и Λ_1, Λ_2 – две G -инвариантные решетки в V , то Λ_2 подобна некоторой подрешетке в Λ_1 .*

Напомним, что подрешетка $\Lambda' \subset \Lambda$ называется *неделимой*, если она не содержится в подрешетке вида $m\Lambda$, $m > 1$. Задача описания, с точностью до подобия, всех G -инвариантных подрешеток в V эквивалентна описанию всех неделимых G -инвариантных подрешеток в Λ . Будем называть подрешетку $\Lambda' \subset \Lambda$ *инвариантной*, если она инвариантна относительно G .

ЛЕММА 3.2. *Группа $\mathrm{GL}(n, p)$ содержит циклическую подгруппу C_n такую, что образ C_n в $\mathrm{PGL}(n, p)$ действует регулярно на $\mathcal{P}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО (ср. [10]). Рассмотрим $E = \mathbf{F}_{p^n}$ как n -мерное пространство над $\mathbf{F}_p$. Пусть $\varphi(x) \in \mathrm{GL}(E)$ – оператор умножения на $x \in E^*$. Тогда образ подгруппы $C_n = \{\varphi(x) : x \in \mathbf{F}_{p^n}^*\}$ в $\mathrm{PGL}(n, p)$ действует регулярно на $\mathcal{P} = E^*/\mathbf{F}_p^*$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.3. *Пусть $\Lambda' \subset \Lambda$ – инвариантная неделимая подрешетка. Тогда $\Lambda' \supset Np^{p-2}\Lambda$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $\alpha \in \mathcal{P}$ пусть $I_\alpha \subset \mathbb{Z}$ – идеал всех a_α , встречающихся в разложении $v = \sum a_\alpha v_\alpha$ векторов $v \in \Lambda$. Тогда I_α не зависит от α . Если $I_\alpha = r\mathbb{Z}$, $r > 1$, то $\Lambda \subset (\bigoplus_{\alpha \in \mathcal{P}} r\mathbb{Z}v_\alpha) \cap \Lambda = r\Lambda$ – противоречие. Следовательно, $I_\alpha = \mathbb{Z}$. Выберем вектор в Λ вида $v = v_\beta + \sum_{\alpha \neq \beta} a_\alpha v_\alpha$, $\beta = \langle e_1 \rangle$. Отметим, что $\sum_{\alpha \neq \beta} a_\alpha = -1$.

Обозначим $N_{n-1} = (p^{n-1} - 1)/(p - 1)$ и рассмотрим подгруппу $H = K \cdot C \subset \mathrm{PSL}(n, p)$, где K порождена образами матриц вида

$$\begin{pmatrix} 1 & y_2 & y_3 & \dots & y_n \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

C порождена образами матриц вида

$$\begin{pmatrix} \det A^{-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & A & \\ 0 & & & \end{pmatrix},$$

$A \in C_{n-1}$, C_{n-1} – подгруппа из леммы 3.2. Ясно, что H является полупрямым произведением K и C , $|H| = N_{n-1}p^{n-1}$ и H действует транзитивно на множестве $\mathcal{P} \setminus \{\beta\}$. Имеем

$$\begin{aligned} \sum_{h \in H} hv &= |H| \cdot v_\beta + \sum_{\alpha \neq \beta} a_\alpha \sum_{h \in H} v_{h\alpha} = |H| \cdot v_\beta + \sum_{\alpha \neq \beta} a_\alpha \frac{|H|}{N-1} \sum_{\alpha \neq \beta} v_\alpha \\ &= |H| \cdot v_\beta - \frac{|H|}{N-1} \sum_{\alpha \neq \beta} v_\alpha = N_{n-1}p^{n-1}v_\beta - p^{n-2} \sum_{\alpha \neq \beta} v_\alpha \\ &= N_{n-1}p^{n-1}v_\beta + p^{n-2}v_\beta - p^{n-2} \sum v_\alpha = Np^{n-2}v_\beta - p^{n-2} \sum v_\alpha. \end{aligned}$$

Следовательно, подрешетка Λ' содержит $Np^{n-2}v_\gamma - p^{n-2} \sum v_\alpha$ для всех $\gamma \in \mathcal{P}$ и также $Np^{n-2}(v_\beta - v_\gamma)$ для всех $\beta, \gamma \in \mathcal{P}$. Поэтому $\Lambda' \supset Np^{n-2}\Lambda$. Предложение доказано.

Итак, мы должны классифицировать неделимые инвариантные подмодули в $\Lambda/Np^{n-2}\Lambda$ (подмодуль $M \subset \Lambda/m\Lambda$ называется *делимым*, если $M \subset r\Lambda/m\Lambda$ для некоторого $r > 1$, $r \mid m$; иначе M *неделим*).

Пусть $\mathbb{Z}_m = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ – кольцо вычетов. Рассмотрим следующие $\mathbb{Z}_m G$ -модули. Пусть $V_m^1 = \bigoplus_{\alpha \in \mathcal{P}} \mathbb{Z}_m \bar{v}_\alpha$ – подстановочный модуль и

$$V_m = \left\{ \sum a_\alpha \bar{v}_\alpha : a_\alpha \in \mathbb{Z}_m, \sum a_\alpha = 0 \right\} \subset V_m^1.$$

Тогда $\Lambda/m\Lambda$ можно отождествить с V_m по правилу

$$\sum a_\alpha v_\alpha + m\Lambda \mapsto \sum \bar{a}_\alpha \bar{v}_\alpha,$$

где $\bar{a}_\alpha \equiv a_\alpha \pmod{m}$.

Ясно, что если $k \mid m$, то $kV_m \cong V_{m/k}$. Пусть $m = m_1 \cdots m_k$, $(m_i, m_j) = 1$. Тогда

$$V_m = \bigoplus \frac{m}{m_i} V_{m_i}.$$

Подмодуль $\frac{m}{m_i} V_{m_i}$ изоморфен модулю V_{m_i} , поэтому $V_m \cong \bigoplus V_{m_i}$. Пусть M – неделимый подмодуль в V_m . Тогда

$$M = \bigoplus M_i, \quad M_i \in \frac{m}{m_i} V_{m_i}.$$

Заметим, что M_j неделим в $\frac{m}{m_j} V_{m_j} \cong V_{m_j}$, так как иначе $M_j \subset r_j \frac{m}{m_j} V_{m_j}$, $r_j > 1$, $r_j \mid m_j$ и

$$M \subset \bigoplus_{i \neq j} \frac{m}{m_i} V_{m_i} \oplus r_j \frac{m}{m_j} V_{m_j} = r_j V_m.$$

Поэтому мы должны классифицировать неделимые инвариантные подмодули в V_N и $V_{p^{n-2}}$.

Для $m \mid N$ рассмотрим подмодуль $L_m = \langle \sum \bar{v}_\alpha \rangle \subset V_m$. Действие G на L_m тривиально. Положим $\bar{V}_m = V_m/L_m$.

ЛЕММА 3.4. Пусть M – неделимый подмодуль в V_N . Тогда $M = L_N + tV_N$ для некоторого $t \mid N$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $N = p_1^{n_1} \cdots p_k^{n_k}$ – разложение в произведение простых чисел, $m_i = p_i^{n_i}$. Нам нужно описать неделимые подмодули M_i в V_{m_i} .

Покажем, что $\mathrm{Soc} M_i = L_{m_i}$. В самом деле, каждый неделимый подмодуль в V_{m_i} содержит элемент вида $\bar{v}_\beta + \sum_{\alpha \neq \beta} a_\alpha \bar{v}_\alpha$. Тогда, как в доказательстве предложения 3.3, можно показать, что $-p^{n-2} \sum \bar{v}_\alpha \in V_{m_i}$. Так как $(p, N) = 1$, последний вектор порождает L_{m_i} .

Далее, рассмотрим $\bar{V}_{m_i}$. Согласно [8] модуль $\bar{V}_{p_i}$, неприводим, поскольку $(p, p_i) = 1$. Следовательно, любой подмодуль в $\bar{V}_{m_i}$ равен $t_i \bar{V}_{m_i}$ для некоторого $t_i \mid m_i$ и любой неделимый подмодуль M_i в V_{m_i} имеет вид $L_{m_i} + t_i V_{m_i}$.

Суммирование подмодулей в $\frac{N}{m_i} V_m \cong V_{m_i}$ завершает доказательство леммы.

Напомним, что *дуальной решеткой* для решетки $\Gamma \subset V$ является

$$\Gamma^* = \{y \in V : (x, y) \in \mathbb{Z} \ \forall x \in \Gamma\}.$$

Имеем

$$\Lambda^* = \left\{ \frac{1}{N} \sum a_\alpha v_\alpha : a_\alpha \in \mathbb{Z}, \sum a_\alpha = 0, a_\alpha \equiv a_\beta \pmod{N} \right\}.$$

Положим $\Lambda_0 = N \cdot \Lambda^*$, $w = (N-1)v_\beta - \sum_{\alpha \neq \beta} v_\alpha$, $\beta = \langle e_1 \rangle$. Тогда $\Lambda_0 = \langle w \rangle + N\Lambda$.

СЛЕДСТВИЕ 3.5. Пусть неделимая инвариантная решетка Λ' содержит $N\Lambda$. Тогда $\Lambda' = \Lambda_0 + t\Lambda$ для некоторого $t \mid N$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 3.4 имеем

$$\Lambda' = \langle w \rangle + t\Lambda = \Lambda_0 + t\Lambda.$$

Таким образом, осталось рассмотреть модуль $V_{p^{n-2}} \cong \Lambda/p^{n-2}\Lambda$. Сначала определим следующую решетку:

$$\hat{\Lambda} = \mathbb{Z}G(v_\pi),$$

где π – гиперплоскость в $\mathcal{P}$ и

$$v_\pi = p^{n-1} \sum_{\alpha \in \pi} v_\alpha - |\pi| \sum_{\alpha \notin \pi} v_\alpha.$$

ЛЕММА 3.6. G -модуль $\hat{\Lambda}/p\hat{\Lambda}$ (относительно действия ρ) изоморфен модулю $\hat{\mathcal{F}}_0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что π – гиперплоскость элементов вида $\langle (0, x_2, \dots, x_n) \rangle$. Пусть $H = \{(a_{ij}) \in \mathrm{SL}(n, p) : a_{1j} = 0 \text{ для всех } j = 2, \dots, n\}$ и $\bar{v}_\pi$ – образ элемента v_π в $\hat{\Lambda}/p\hat{\Lambda}$. Тогда

$$\hat{\Lambda}/p\hat{\Lambda} \cong \mathrm{Ind}_H^G(\bar{v}_\pi).$$

С другой стороны,

$$\hat{\mathcal{F}}_0 \cong \mathrm{Ind}_H^G(f_{\langle e_1 \rangle}).$$

Это доказывает лемму.

ЛЕММА 3.7. Справедливо следующее: $\hat{\Lambda} \cap p^{i-1}\Lambda/\hat{\Lambda} \cap p^i\Lambda \cong M_i$ при $i = 1, \dots, n-1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Следует из леммы 3.6 и предложений 2.1, 2.4.

Теперь определим решетку $\Lambda(t_1, \dots, t_{n-2})$, где $t_i \in \mathbb{N}$, $t_1 \leq \dots \leq t_{n-2} \leq n-1$, $t_{i-1} < t_i$ при $t_i \neq n-1$, следующим образом:

$$\Lambda(t_1, \dots, t_{n-2}) \cap p^{i-1}\Lambda / \Lambda(t_1, \dots, t_{n-2}) \cap p^i\Lambda = M_{t_i}, \quad i = 1, \dots, n-2. \quad (2)$$

Эту решетку можно построить с помощью решетки $\widehat{\Lambda}$

$$\Lambda(t_1, \dots, t_{n-2}) = \sum_{i=1}^{n-2} p^{i-t_i} (\widehat{\Lambda} \cap p^{t_i-1}\Lambda).$$

Так как композиционные факторы в $\Lambda/p\Lambda$ различны, то решетка $\Lambda(t_1, \dots, t_{n-2})$ определена равенством (2) единственным образом.

ЛЕММА 3.8. Пусть неделимая инвариантная решетка Λ' содержит $p^{n-2}\Lambda$. Тогда $\Lambda' = \Lambda(t_1, \dots, t_{n-2})$ для некоторой последовательности $(t_1, \dots, t_{n-2})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим ряд подмодулей $\Lambda \supset p\Lambda \supset \dots \supset p^{n-2}\Lambda$. Он определяет в $\Lambda'/p^{n-2}\Lambda$ последовательность факторов $\mathcal{R} = (R_1, \dots, R_{n-2})$,

$$R_i = \Lambda' \cap p^{i-1}\Lambda / \Lambda' \cap p^i\Lambda \subset p^{i-1}\Lambda / p^i\Lambda \cong \Lambda/p\Lambda.$$

Согласно предложению 2.4 модуль R_i изоморфен модулю M_{t_i} для некоторого t_i . Нетрудно видеть, что $t_1 \leq \dots \leq t_{n-2}$. Теперь нам нужно доказать, что $t_{i-1} < t_i$ при $t_i \neq n-1$. Действительно, предположим $t_{i-1} = t_i < n-1$ для некоторого i . Это означает, что модуль

$$N = \Lambda(t_i, t_i + 1, n-1, \dots, n-1) / \Lambda(t_i - 1, t_i, n-1, \dots, n-1)$$

разложим (здесь при $t_i = 1$ положим $\Lambda(t_i - 1, t_i, n-1, \dots, n-1) = p\Lambda(1, n-1, \dots, n-1)$). Но по лемме 3.6 $N \cong \widehat{M}_{n-t_i} / \widehat{M}_{n-t_i-2}$ и последний модуль неразложим согласно предложению 2.4.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Имеем

$$\Lambda / Np^{n-2}\Lambda \cong p^{n-2}\Lambda / Np^{n-2}\Lambda \oplus N\Lambda / Np^{n-2}\Lambda.$$

Если Λ' – неделимая подрешетка в Λ , то

$$\Lambda' / Np^{n-2}\Lambda \cong M' \oplus M'',$$

где M' – неделимый подмодуль в $p^{n-2}\Lambda / Np^{n-2}\Lambda$ и M'' – неделимый подмодуль в $N\Lambda / Np^{n-2}\Lambda$. По предложению 3.5

$$M' = (p^{n-2}\Lambda_0 + tp^{n-2}\Lambda) / Np^{n-2}\Lambda$$

для некоторого $t \mid N$, по лемме 3.8

$$M'' = N \cdot \Lambda(t_1, \dots, t_{n-2}) / Np^{n-2}\Lambda$$

для некоторой последовательности $(t_1, \dots, t_{n-2})$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \Lambda' &= p^{n-2}\Lambda_0 + tp^{n-2}\Lambda + N\Lambda(t_1, \dots, t_{n-2}) \\ &= p^{n-2}\Lambda_0 + t \left(p^{n-2}\Lambda + \frac{N}{t}\Lambda(t_1, \dots, t_{n-2}) \right) \\ &= p^{n-2}\Lambda_0 + t \left(p^{n-2}\Lambda + p^{n-2}\Lambda(t_1, \dots, t_{n-2}) + \frac{N}{t}\Lambda(t_1, \dots, t_{n-2}) \right) \\ &= p^{n-2}\Lambda_0 + t(p^{n-2}\Lambda + \Lambda(t_1, \dots, t_{n-2})) \\ &= p^{n-2}\Lambda_0 + t\Lambda(t_1, \dots, t_{n-2}) = \Lambda(t; t_1, \dots, t_{n-2}). \end{aligned}$$

§ 4. Двойственность между инвариантными решетками

В этом параграфе мы вычислим дуальные решетки для $\Lambda(t; t_1, \dots, t_{n-2})$.
Следующая лемма легко доказывается (см. [4]).

ЛЕММА 4.1. Пусть Λ_1, Λ_2 — G -инвариантные решетки, $\Lambda_1 \supset \Lambda_2 \supset p\Lambda_1$.
Тогда Λ_1/Λ_2 и Λ_2^*/Λ_1^* являются дуальными $\mathbf{F}_p G$ -модулями.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.2. Пусть $\{t_i : t_i < n-1\} = \{t_1, t_2, \dots, t_k\}$. Тогда

$$\begin{aligned} & \Lambda(t; t_1, \dots, t_k, n-1, \dots, n-1)^* \\ &= \frac{1}{Np^{n-2}} \Lambda \left(\frac{N}{t} p^{n-2-k}; n-1-t_k, \dots, n-1-t_1, n-1, \dots, n-1 \right). \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$\Lambda(n-1, \dots, n-1)^* = \Lambda^* = \frac{1}{N} \Lambda_0 = \frac{1}{pN} (p\Lambda_0 + pN\Lambda(n-1, \dots, n-1)).$$

Тогда согласно леммам 4.1 и 2.5

$$\Lambda(n-2, n-1, \dots, n-1)^* = \frac{1}{pN} (p\Lambda_0 + N\Lambda(1, n-1, \dots, n-1)).$$

Аналогично,

$$\begin{aligned} \Lambda(t_1, n-1, \dots, n-1)^* &= \frac{1}{pN} (p\Lambda_0 + N\Lambda(n-1-t_1, n-1, \dots, n-1)) \\ &= \frac{1}{p^2 N} (p^2 \Lambda_0 + pN\Lambda(n-1-t_1, n-1, \dots, n-1)). \end{aligned}$$

Тогда

$$\Lambda(t_1, n-2, n-1, \dots, n-1)^* = \frac{1}{p^2 N} (p^2 \Lambda_0 + N\Lambda(1, n-1-t_1, n-1, \dots, n-1)).$$

Продолжая таким образом, получим

$$\Lambda(t_1, \dots, t_k, n-1, \dots)^* = \frac{1}{p^k N} (p^k \Lambda_0 + N\Lambda(n-1-t_k, \dots, n-1-t_1, n-1, \dots)).$$

Далее,

$$\begin{aligned} & \Lambda(t; t_1, \dots, t_k, n-1, \dots, n-1)^* \\ &= (p^{n-2} \Lambda_0 + t\Lambda(t_1, \dots, t_k, n-1, \dots, n-1))^* \\ &= (p^{n-2} \Lambda_0)^* \cap (t\Lambda(t_1, \dots, t_k, n-1, \dots, n-1))^* \\ &= \frac{1}{p^{n-2} N} \Lambda \cap \frac{1}{tp^k N} (p^k \Lambda_0 + N\Lambda(n-1-t_k, \dots, n-1-t_1, n-1, \dots)) \\ &= \frac{1}{tp^{n-2} N} (t\Lambda \cap (p^{n-2} \Lambda_0 + Np^{n-2-k} \Lambda(n-1-t_k, \dots, n-1-t_1, n-1, \dots))) \\ &= \frac{1}{tp^{n-2} N} (tp^{n-2} \Lambda_0 + Np^{n-2-k} \Lambda(n-1-t_k, \dots, n-1-t_1, n-1, \dots)) \\ &= \frac{1}{p^{n-2} N} \left(p^{n-2} \Lambda_0 + \frac{N}{t} p^{n-2-k} \Lambda(n-1-t_k, \dots, n-1-t_1, n-1, \dots) \right) \\ &= \frac{1}{p^{n-2} N} \Lambda \left(\frac{N}{t} p^{n-2-k}; n-1-t_k, \dots, n-1-t_1, n-1, \dots, n-1 \right). \end{aligned}$$

Это доказывает предложение.

Список литературы

1. *Иванов Д. Н.* Ортогональные разложения алгебр Ли типа A_{p-1} и D_n с конечным числом подобных инвариантных подрешеток // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех. 1989. № 2. С. 40–43.
2. *Plesken W.* On absolutely irreducible representations of orders // Number theory and algebra. New York: Acad. Press, 1977. P. 241–262.
3. *Бондал А. И., Кострикин А. И., Фам Хыу Тьен.* Инвариантные решетки, решетка Лича и ее четные унимодулярные аналоги в алгебрах A_{p-1} // Матем. сб. 1986. Т. 130 (172). № 4 (8). С. 435–464.
4. *Абдухаликов К. С.* Целочисленные инвариантные решетки в алгебрах Ли типа A_{p^m-1} // Матем. сб. 1993. Т. 184. № 4. С. 61–104.
5. *Абдухаликов К. С.* Целочисленные решетки, ассоциированные с конечной аффинной группой // Матем. сб. 1994. Т. 185. № 12. С. 3–18.
6. *Буриченко В. П.* Инвариантные решетки в модуле Стейнберга и их группы изометрий // Матем. сб. 1993. Т. 184. № 12. С. 145–156.
7. *Залесский А. Е., Супруненко И. Д.* Модулярные подстановочные представления и фрагмент матрицы разложения для симплектической и специальной линейной группы над конечным полем // Препринт № 16 (286). Минск: Институт математики АН БССР, 1987.
8. *Mortimer B.* The modular permutation representations of the known doubly transitive groups // Proc. London Math. Soc. 1980. V. 41. P. 1–20.
9. *Кертис Ч., Райнер И.* Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр. М.: Наука, 1969.
10. *Gorenstein D.* Finite groups. New York: Harper and Row, 1968.

Институт теоретической и прикладной математики
Алма-Ата, Казахстан

Поступила в редакцию
07.12.1996