Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. Н. Агеев, Спектральный тип перекладываний $T_{\alpha,\beta}$, *Матем. сб.*, 1997, том 188, номер 8, 13–44

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm238>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.197.8

26 апреля 2023 г., 11:09:20

УДК 517.9

О. Н. Агеев

Спектральный тип перекладываний $T_{\alpha,\beta}$

Предложен метод геометрических моделей и применен к изучению спектральных свойств классических преобразований $T_{\alpha,\beta}$.

Доказаны отсутствие в рассматриваемом классе эргодических преобразований с абсолютно непрерывной и перемешивающей компонентами, с не простым спектром. В терминах геометрических моделей получен критерий эргодичности преобразований $T_{\alpha,\beta}$. Определена функция кратности спектра преобразований $T_{\alpha,\beta}$ для любого n , где α – золотое сечение.

Библиография: 9 названий.

В качестве пространства с мерой рассматриваем $(X \times \mathbb{Z}_2, \mu \times l)$, где X – окружность, отождествленная с $[0, 1)$, μ – мера Лебега на $[0, 1)$ и l – равномерная мера на $\mathbb{Z}_2 \equiv \{-1, 1\}$. Преобразования $T_{\alpha,\beta}$ определены формулой

$$T_{\alpha,\beta}(x, y) = (x + \alpha \pmod{1}, \omega_\beta(x)y), \quad (1)$$

где

$$\omega_\beta(x) = \begin{cases} -1, & 0 \leq x < \beta, \\ 1, & \beta \leq x < 1. \end{cases}$$

В работе изучается класс преобразований $T_{\alpha,\beta}$, ставший классическим. Предложенный фон Нейманом, он служил источником разнообразных контрпримеров к многим гипотезам эргодической теории. Спектральные свойства $T_{\alpha,\beta}$ для типичных пар (α, β) подробно изучены Катком и Стёпиным в [1]. Предшествующие методы исследования $T_{\alpha,\beta}$ использовали либо комбинаторные соотношения, выполняющиеся для отдельных преобразований, либо хорошее приближение α и β рациональными числами.

Ниже изложен новый подход, основанный на геометрических моделях,¹ дающий возможность изучить спектральные свойства для произвольной пары (α, β) . Доказано, что эргодические преобразования $T_{\alpha,\beta}$ имеют простой сингулярный спектр. Доказан критерий эргодичности, непрерывности спектра в компоненте H_- (дополнение к спектру поворота на угол α). Построены примеры преобразований с немонотонной функцией кратности $m(T^n)$.

В дальнейшем мы используем следующие обозначения:

T_α – поворот в пространстве (X, μ) : $T_\alpha x = x + \alpha \pmod{1}$; E – тождественное преобразование ($\forall x \ Ex = x$); E_H – тождественный оператор в гильбертовом пространстве H ; $H_1 \oplus H_2$ – прямая сумма гильбертовых пространств H_i . Для преобразования T пространства (Y, m) : $\tilde{T}$ – унитарный оператор, отвечающий T , т.е.

$$\tilde{T}: L_2(Y, m) \rightarrow L_2(Y, m), \quad \tilde{T}f(y) = f(Ty);$$

¹Элементы метода использовались Катцнельсоном и Орнштейном в [2].

T_A – производное преобразование на множестве A : $Ty = T^{k(y)}y$, где

$$k(y) = \min\{n > 0 : T^n y \in A\} \quad \text{для } y \in A;$$

$\text{WCL}(\tilde{T}^n)$ – замыкание группы операторов $\tilde{T}^n$, $n \in \mathbb{Z}$, в топологии слабой операторной сходимости в $L_2(Y, m)$; $C_{\tilde{T}}(f_1, \dots, f_k)$ – наименьшее замкнутое, инвариантное относительно оператора $\tilde{T}$, содержащее векторы f_i , $i = 1, \dots, k$, подпространство гильбертова пространства $L_2(Y, m)$ (при $k = 1$ – это циклическое пространство); σ_f – спектральная мера, отвечающая вектору $f \in L_2(Y, m)$, т.е. единственная борелевская мера на $X = [0, 1)$ с $\hat{\sigma}_f(n) = \int_0^1 e^{2\pi i n \lambda} d\sigma_f(\lambda) = (\tilde{T}^n f, f)$; $m(\tilde{T})$ – функция кратности спектра оператора $\tilde{T}$.

Спектральные свойства оператора $\tilde{T}$ приписывают преобразованию T . В некоторых случаях знак “ $\sim$ ” мы будем опускать, но подразумевать.

ТЕОРЕМА 1. *Для любой пары (α, β) существует с такое, что $0 < |c| \leq 1$ и $E_{H_0} \oplus cE_{H_1} \in \text{WCL}(\tilde{T}_{\alpha, \beta}^n)$, где $L_2(X \times \mathbb{Z}_2, \mu \times l) = H_0 \oplus H_1$ и $\tilde{T}H_i = H_i$, $i = 0, 1$.*

СЛЕДСТВИЕ 1. *Преобразования $T_{\alpha, \beta}$ имеют сингулярный спектр.*

Действительно, отсутствие абсолютно непрерывной компоненты в спектре в H_i , $i = 0, 1$, следует из леммы Римана–Лебега, в силу которой $(\tilde{T}_{\alpha, \beta}^n f, f) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ для любой функции f из абсолютно непрерывной компоненты.

Отметим, что аналогичный результат для перемешивающих преобразований класса I Орнштейна [3] получен Бургеном [4].

Рассмотренный ниже метод распространим на класс произвольных косых произведений над поворотом окружности с функцией, имеющей конечное число точек разрыва. Однако, как показали Хельсон и Пэрри [5], уже для преобразований вида (1), где $\omega_\beta(x) : X \rightarrow \mathbb{Z}_2$ – измеримая функция, существуют преобразования с лебеговой компонентой (бесконечной кратности).

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Далее будем рассматривать $T_{\alpha, \beta}$ только для иррациональных α , иначе для некоторого n $T_\alpha^n = E$, поэтому $T_{\alpha, \beta}^{2n} = E$ и $\tilde{E} \in \text{WCL}(\tilde{T}_{\alpha, \beta}^k)$.

Вопросы о метрическом, спектральном изоморфизме, непрерывности спектра в компоненте H_- (теорема 3) в рассматриваемом классе тесно связаны с неэргодичностью отдельных преобразований. В §4 доказан критерий эргодичности $T_{\alpha, \beta}$ в терминах геометрических моделей (теорема 2).

В §5 использование теоремы 1 дает возможность получить точные значения $m(T_{\alpha, \beta}^n)$ при $\alpha = [1, 1, \dots]$, $n \neq 0$. Отметим, что спектральный инвариант $m(T_{\alpha, \beta}^n)$ является D -функцией (впервые введена в [6]).

Преобразования $T_{\alpha, \beta}$ в компоненте H_- , как правило, наследуют спектральные свойства преобразований T_α : тип меры максимального спектрального типа инвариантен относительно поворота на угол α , но сингулярен себе при повороте на любой рациональный угол. В контрасте с общим случаем теорема 5 показывает, что уже преобразования $T_{\alpha, k\alpha+1/2}$, где α – золотое сечение, дают спектральные меры в H_- , эквивалентные при повороте на $\frac{1}{2} \pmod{1}$.

Часть результатов была анонсирована автором в [7].

§1. Геометрические представления перекладываний T_α и $T_{\alpha,\beta}$

Зафиксируем $\alpha \in [0, 1)$. Разложим α в непрерывную дробь

$$\alpha = \frac{1}{\alpha_1 + \frac{1}{\alpha_2 + \dots}}, \quad (2)$$

где α_i – натуральные числа. Запись: $\alpha = [\alpha_1, \alpha_2, \dots]$. Хорошо известны следующие свойства непрерывных дробей. Представление α в виде (2) существует и единственно. Разложение (2) конечно, если α рационально, и бесконечно, если α иррационально. В последнем случае

$$\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} [\alpha_1, \dots, \alpha_n].$$

Положим

$$q_0 = 0, \quad q_1 = 1, \quad q_{n+1} = q_n \alpha_n + q_{n-1},$$

тогда $[\alpha_1, \dots, \alpha_n] = p_{n+1}/q_{n+1}$, где p_n и q_n – взаимно простые числа. Справедлива следующая оценка:

$$|q_n \alpha - p_n| \leq \frac{1}{q_{n+1}}. \quad (3)$$

Отождествим окружность X с полуинтервалом $[0, 1)$. Башней будем называть объединение непересекающихся полуинтервалов

$$F, T_\alpha F, T_\alpha^2 F, \dots, T_\alpha^k F,$$

F будем называть *основанием башни*, k – ее *высотой*. Сопоставим каждому $\alpha = [\alpha_1, \alpha_2, \dots]$ последовательность разбиений X на пары башен $A(n)$, $B(n)$ ($X = A(n) \cup B(n)$, $n > 1$), где

$$A(n) = \bigcup_{i=0}^{q_n-1} T_\alpha^i A_1(n),$$

$$B(n) = \bigcup_{i=0}^{q_{n-1}-1} T_\alpha^i B_1(n).$$

Предварительно рекуррентно определим меры оснований башен $a_n = \mu(A_1(n))$ и $b_n = \mu(B_1(n))$, $n > 1$. Пусть

$$a_1 = 1, \quad b_1 = \alpha, \quad a_{n+1} = b_n, \quad b_{n+1} = a_n - \alpha_n b_n.$$

Нетрудно убедиться, что $a_n, b_n > 0$, $b_n q_{n-1} + a_n q_n = 1$ и

$$\frac{a_n}{b_n} = \alpha_n + \frac{1}{\alpha_{n+1} + \dots}. \quad (4)$$

Положим $B_1(2) = [0, 1 - \alpha_1 \alpha)$, $A_1(2) = [1 - \alpha_1 \alpha, 1 - \alpha_1 \alpha + \alpha)$. Пусть множество $C_1(n) = B_1(n) \cup A_1(n)$ – полуинтервал. Тогда производное преобразование $T_{C_1(n)}$ есть перекладывание полуинтервалов $B_1(n)$ и $A_1(n)$, т.е. поворот на угол b_n , если отождествить концы полуинтервала $C_1(n)$. Учитывая (4), получаем, что

Рис. 1

полуинтервалы $B_1(n)$, $T_{C_1(n)}^{-1} B_1(n)$, $T_{C_1(n)}^{-2} B_1(n)$, $\dots$, $T_{C_1(n)}^{-\alpha_n} B_1(n)$ не пересекаются и множество

$$\tilde{B}(n) = \bigcup_{i=0}^{\alpha_n} T_{C_1(n)}^{-i} B_1(n)$$

есть полуинтервал. Множества $A_1(n+1) = T_{C_1(n)}^{-\alpha_n} B_1(n)$ и $B_1(n+1) = A_1(n) \setminus \tilde{B}(n)$ — основания искоемых башен $A(n+1)$ и $B(n+1)$, а $C_1(n+1)$ — полуинтервал (см. рис. 1).

Далее для удобства и лучшей наглядности перейдем к “нормированным” моделям X (зависящим от n) как подмножествам $\mathbb{R}^2$. Для пар (x, i) , где $x \in A_1(n)$ и $i = 0, 1, \dots, q_n - 1$, $x \in B_1(n)$ и $i = 0, 1, \dots, q_n - 1$, отождествим точки $T_{C_1(n)}^i x$ и $((x - x_0)/a_n, i/q_n) \in \mathbb{R}^2$, где x_0 — левый конец полуинтервала $C_1(n)$. По построению множество $A(n)$ лежит в квадрате с единичной стороной. Множество $A_1(n)$ есть $[b_n/a_n, b_n/a_n + 1) \times \{0\} \subset \mathbb{R}^2$ для четных n и $[0, 1) \times \{0\}$ для нечетных.

§ 2. Структура коциклов

Гильбертово пространство $L_2(X \times \mathbb{Z}_2, \mu \times l)$ представимо в виде прямой суммы инвариантных относительно $\tilde{T}_{\alpha, \beta}$ подпространств H_+ и H_- , где $H_{\pm} = \{f(x, y) : \tilde{\sigma}f = \pm f\}$ и $\sigma(x, y) = (x, -y)$. Оператор $\tilde{T}_{\alpha, \beta}$ в подпространстве $H_{\pm}$ спектрально изоморфен оператору

$$\omega_{\beta}^{(1 \pm 1)/2}(x) \tilde{T}_{\alpha} : f(x) \mapsto \omega_{\beta}^{(1 \pm 1)/2}(x) f(T_{\alpha} x),$$

действующему в $L_2(X, \mu)$. Пусть

$$V_{\beta} = \omega_{\beta}(x) \cdot \tilde{T}_{\alpha}, \quad \omega_{\beta}^{(k)}(x) = \omega_{\beta}(x) \cdot \omega_{\beta}(T_{\alpha} x) \cdot \dots \cdot \omega_{\beta}(T_{\alpha}^{k-1} x).$$

Пусть $z_1(n, x)$, $z_2(n, x)$ — координаты точки $x \in X$ в n -й модели.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 0. *Справедливы следующие свойства:*

1)

$$z_1(n, 0) = 0, \quad z_2(n, 0) = \begin{cases} (q_{n-1} - 1)/q_n, & n - \text{четно}, \\ (q_n - 1)/q_n, & n - \text{нечетно}; \end{cases}$$

2) *если $z_2(n, x_1) = z_2(n, x_2) \neq z_2(n, \beta)$, то $\omega_\beta(x_1) = \omega_\beta(x_2)$;*

3) *если $z_2(n, x_1) = z_2(n, x_2) = z_2(n, \beta)$ и $z_1(n, x_1) < z_1(n, x_2)$, то*

$$\omega_\beta(x_1) = \begin{cases} -\omega_\beta(x_2) & \text{при } z_1(n, x_1) < z_1(n, \beta) \leq z_1(n, x_2), \\ \omega_\beta(x_2) & \text{иначе.} \end{cases}$$

Без ограничения общности будем рассматривать только нечетные n .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Пусть $z_1(n, \beta) < 1$ и $\delta = \omega_\beta^{(q_n)}(x_0)$, где $z_2(n, x_0) = 0$ и $z_1(n, \beta) < z_1(n, x_0) < 1$, тогда (см. рис. 2) если $z_1(n, \beta) \geq b_n/a_n$, то*

1) $\omega_\beta^{(q_n)}(y) = -\delta$ *при $z_1(n, y) < z_1(n, \beta) - b_n/a_n$;*

2) $\omega_\beta^{(q_n)}(y) = \delta$ *при $z_1(n, \beta) \leq z_1(n, y)$;*

3) *при $z_1(n, \beta) - b_n/a_n \leq z_1(n, y) < z_1(n, \beta)$ имеем*

$$\omega_\beta^{(q_n)}(y) = \begin{cases} \delta & \text{при } z_2(n, \beta) < z_2(n, y), \\ -\delta & \text{иначе;} \end{cases}$$

если $z_1(n, \beta) < b_n/a_n$, то

$$4) \quad \omega_\beta^{(q_n)}(y) = \begin{cases} -\delta & \text{при } z_1(n, y) < z_1(n, \beta), \quad z_2(n, y) \leq z_2(n, \beta), \\ -\delta & \text{при } y \in T_\alpha^{-k}([z_1(n, \beta), b_n/a_n) \times \{0\}), \\ & 0 < k < q_n(1 - z_2(n, \beta)), \\ \delta & \text{иначе.} \end{cases}$$

5) *Если $z_1(n, \beta) \geq 1$, то для $\delta = -\omega_\beta^{(q_n)}(x_0)$, где $z_2(n, x_0) = 0$, $z_1(n, x_0) < 1$, справедливы п.п. 1)–3).*

Положим $S_\pm^{(i)}(n) = \{x : \omega_\beta^{(iq_n)}(x) = \pm 1\}$, $\varkappa_n(i) = \mu(S_+^{(i)}(n)) - \mu(S_-^{(i)}(n))$. Заметим, что $|\varkappa_n(i)| \leq 1$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Если $\varkappa$ – предельная точка последовательности $\varkappa_n(i)$, то*

$$\varkappa \tilde{E} \in \text{WCL} \left(\bigcup_n V_\beta^{iq_n} \right).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Доказано, что если $\varkappa_{n_k}(i) \rightarrow \varkappa$, то

$$V_\beta^{iq_{n_k}} \rightarrow \varkappa E \quad \text{при } k \rightarrow \infty.$$

РИС. 2

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Для любых $\alpha = [\alpha_1, \alpha_2, \dots]$ и β существует $c > 0$ такое, что если $\alpha_k \geq 4$, то

$$\max_{\substack{i \in \{1, 2\} \\ n \in \{k, k+1\}}} |\mathcal{K}_n(i)| > c.$$

Пусть l_n — прямая, проходящая через точки $(c_n/2, 1)$ и $(c_n/2 + b_n/a_n, 0)$, где $c_n = 1 + q_{n-1}b_n/(q_n a_n)$. Положим $\tilde{l}_n = l_n$, если $c_n/2 \geq b_n/a_n$, и

$$\begin{aligned} \tilde{l}_n = & \left(\{z : z = (z_1, z_2), z_1 \geq b_n/a_n\} \cap l_n \right) \\ & \cup \left(\{z : z = (z_1, z_2), z_1 < b_n/a_n, z_1 z_2 + (1 - z_2)(b_n/a_n - z_1) = c_n/2\} \right), \end{aligned}$$

если $c_n/2 < b_n/a_n$. Заметим, что при $\alpha_n > 1$ $\tilde{l}_n = l_n$. Функция $\tilde{l}_n$ монотонно убывает и для n таких, что $c_n/2 < b_n/a_n$, имеет один разрыв в точке $z_1 = b_n/(2a_n)$. Пусть $U_\varepsilon(B)$ — ε -окрестность множества B и $U_\varepsilon(n) = U_\varepsilon(\tilde{l}_n)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Если множество $\{n \in \mathbb{N} : \alpha_{n-1} < 20, \beta \notin U_\varepsilon(n)\}$ бесконечно, то верно свойство (A)

$$\overline{\lim_{n \rightarrow \infty}} |\mathcal{K}_n(1)| > 0. \quad (\text{A})$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Доказано, что для любого $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} & \underline{\lim_{n \rightarrow \infty}} |\mathcal{K}_n(1)| > 0; \\ & \{n : \alpha_{n-1} < 20, \beta \notin U_\varepsilon(n)\}. \end{aligned}$$

Обозначим

$$\Omega_n = \{\alpha : \exists i (\forall k \geq i \alpha_k \leq n)\}.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Если $\alpha \in \Omega_3$, то существуют $\varepsilon > 0$ и номер n_0 такие, что

$$(\alpha_n = 3 \ \& \ n > n_0) \implies X \cap U_\varepsilon(n-1) \cap U_\varepsilon(n) \cap U_\varepsilon(n+1) = \emptyset.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. Если $\alpha \in \Omega_2$ и множество $\{n \in \mathbb{N} : \beta \in B(n)\}$ бесконечно, то верно свойство (A).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. Пусть $\alpha \in \Omega_2$, тогда существуют $\varepsilon > 0$ и n_0 такие, что если $n > n_0$, $\alpha_n = 1$ и $\beta \in U_\varepsilon(n) \setminus (B(n) \cup B(n+1))$, то

$$\beta \notin U_\varepsilon(n+1).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8. Если $\alpha_i = 2$, $i > n$, и для любого $\varepsilon > 0$ при $n > n(\varepsilon)$ имеем $\beta \in U_\varepsilon(n)$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(S_+^{(2)}(n)) = \sqrt{2} - 1.$$

§3. Доказательства предложений 1–8 и теоремы 1

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 1. Пусть $z_1(n, \beta) = 0$ и

$$y \in Y = \left\{ y : z_1(n, y) < 1 - \frac{b_n}{a_n} \right\} \cup \left\{ y : 1 - \frac{b_n}{a_n} \leq z_1(n, y) < 1, \ z_2(n, y) \leq \frac{q_{n-1}}{q_n} \right\}.$$

Обозначим $\tilde{y} = T_\alpha^{-z_2(n,y)q_n} y$. Тогда $\tilde{y} \in A_1(n)$, $z_1(n, \tilde{y}) = z_1(n, y)$. В силу предложения 0 имеем

$$\omega_\beta(T_\alpha^i \tilde{y}) = \omega_\beta(T_\alpha^i x_0), \quad i = 0, 1, \dots, q_n - 1.$$

Поэтому

$$\omega_\beta^{(q_n)}(\tilde{y}) = \omega_\beta^{(q_n)}(x_0). \quad (5)$$

Так как $z_2(n, T_\alpha^{q_n+i} \tilde{y}) = z_2(n, T_\alpha^i \tilde{y})$ при $0 \leq i < z_2(n, y)q_n$, то $\omega_\beta(T_\alpha^{q_n+i} \tilde{y}) = \omega_\beta(T_\alpha^i \tilde{y})$ при $0 \leq i < z_2(n, y)q_n$ и

$$\begin{aligned} \omega_\beta^{(q_n)}(\tilde{y}) &= \omega_\beta^{(z_2(n,y)q_n)}(\tilde{y}) \omega_\beta^{(q_n(1-z_2(n,y)))}(y) \\ &= \omega_\beta^{(z_2(n,y)q_n)}(T_\alpha^{q_n} \tilde{y}) \omega_\beta^{(q_n(1-z_2(n,y)))}(y) = \omega_\beta^{(q_n)}(y). \end{aligned} \quad (6)$$

Выберем $y_1, y_2 \in X$ так, что $z_1(n, y_1) = z_2(n, y_1) = 0$ и

$$y_2 \in B = \left\{ y : 1 - \frac{b_n}{a_n} \leq z_1(n, y) < 1, \ z_2(n, y) = \frac{q_{n-1}}{q_n} \right\}.$$

(Выбор $z_1(n, y_2)$ уточним позднее.) Тогда $T_\alpha^{q_n-1} y_1 = 0$ и $T_\alpha^{z_2(n,\beta)q_n} y_1 = \beta$ (см. рис. 3). Существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что

$$\bigcup_{i=0}^{q_n-1} T_\alpha^i [y_1 - \varepsilon_0, y_1) \cap \{0, \beta\} = \emptyset.$$

РИС. 3

Так как множество $T_\alpha^i[y_1 - \varepsilon_0, y_1]$ есть отрезок в X , то при $0 \leq i \leq q_n - 1$ и $z \in [y_1 - \varepsilon_0, y_1]$ имеем

$$\omega_\beta(T_\alpha^i z) \neq \omega_\beta(T_\alpha^i y_1) \iff T_\alpha^i y_1 \in \{0, \beta\}. \quad (7)$$

Рассмотрим y_1 и y_2 в $(n-1)$ -модели. Имеем $z_2(n-1, y_1) = 0 = z_2(n-1, y_2)$, $z_1(n-1, y_2) \nearrow z_1(n-1, y_1)$ при $z_1(n, y_2) \rightarrow 1$. Подберем $z_1(n, y_2)$ так, что $y_2 \in [y_1 - \varepsilon_0, y_1]$. Из (7) при $0 \leq i \leq q_n - 1$ получим

$$\omega_\beta(T_\alpha^i y_2) = \begin{cases} -\omega_\beta(T_\alpha^i y_1), & i \in \{q_n - 1, z_2(n, \beta)q_n\}, \\ \omega_\beta(T_\alpha^i y_1) & \text{иначе.} \end{cases} \quad (8)$$

Множества $T_\alpha^i B$, $i = 1, 2, \dots, q_n$, попарно не пересекаются и составляют $X \setminus Y$. Зафиксируем $y \in X \setminus Y$. Выберем $i_0, \tilde{y}$ так, что $\tilde{y} \in B$, $T_\alpha^{i_0} \tilde{y} = y$ и $1 \leq i_0 \leq q_n$. Так как $z_2(n, T_\alpha^i \tilde{y}) = z_2(n, T_\alpha^i y_2)$ при $i = 0, 1, \dots, 2q_n - 1$, то

$$\omega_\beta^{(q_n)}(T_\alpha^i \tilde{y}) = \omega_\beta^{(q_n)}(T_\alpha^i y_2), \quad i = 1, 2, \dots, q_n.$$

Так как $z_2(n, T_\alpha^{q_n+i} y_2) = z_2(n, T_\alpha^i y_1)$ при $i = 0, 1, \dots, q_n - 1$, то

$$\begin{aligned} \omega_\beta^{(q_n)}(y) &= \omega_\beta^{(q_n)}(T_\alpha^{i_0} \tilde{y}) = \omega_\beta^{(q_n)}(T_\alpha^{i_0} y_2) \\ &= \omega_\beta(T_\alpha^{i_0} y_2) \omega_\beta(T_\alpha^{i_0+1} y_2) \dots \omega_\beta(T_\alpha^{i_0+q_n-1} y_2) \\ &= \omega_\beta(T_\alpha^{i_0} y_2) \omega_\beta(T_\alpha^{i_0+1} y_2) \dots \omega_\beta(T_\alpha^{q_n-1} y_2) \omega_\beta(y_1) \dots \omega_\beta(T_\alpha^{i_0-1} y_1). \end{aligned}$$

Учитывая (8), получаем

$$\omega_\beta^{(q_n)}(y) = \begin{cases} \omega_\beta^{(q_n)}(y_2) & \text{при } i_0 \leq z_2(n, \beta)q_n, \\ -\omega_\beta^{(q_n)}(y_2) & \text{иначе.} \end{cases}$$

Так как $y_2 \in Y$, то из (5) и (6) следует

$$\omega_\beta^{(q_n)}(y) = \begin{cases} \omega_\beta^{(q_n)}(x_0) & \text{при } i_0 \leq z_2(n, \beta)q_n, \\ -\omega_\beta^{(q_n)}(x_0) & \text{иначе.} \end{cases} \quad (9)$$

Пусть $z_1(n, \beta) > 0$. Если $\omega_{\tilde{\beta}}(y)$ коцикл, определяющий $T_{\alpha, \tilde{\beta}}$, где $z_1(n, \tilde{\beta}) = 0$, $z_2(n, \tilde{\beta}) = z_2(n, \beta)$, то, очевидно,

$$\omega_\beta(y) = \omega_{\tilde{\beta}}(y) \iff y \in X \setminus X_0,$$

где

$$X_0 = \{y : z_2(n, y) = z_2(n, \beta), z_1(n, y) < z_1(n, \beta)\}.$$

Следовательно,

$$\omega_{\beta}^{(q_n)}(y) = \omega_{\tilde{\beta}}^{(q_n)}(y) \iff y \in X \setminus \bigcup_{i=0}^{q_n-1} T_{\alpha}^{-i} X_0. \quad (10)$$

Пункты 1)–4) предложения непосредственно вытекают из (5), (8), (10) и расположения в n -й модели множества $\bigcup_{i=0}^{q_n-1} T_{\alpha}^{-i} X_0$.

Сдвинув, как и выше, точку β по горизонтали, нетрудно расставить знаки функции $\omega_{\beta}^{(q_n)}(y)$ и для $\beta \in B(n)$. Но вместо (10) надо использовать следующее:

$$\omega_{\beta}^{(q_n)}(y) = \omega_{\tilde{\beta}}^{(q_n)}(y) \iff y \in \left(X \setminus \bigcup_{i=0}^{q_n-1} T_{\alpha}^{-i} X_0 \right) \cup X_1,$$

где

$$X_1 = \bigcup_{i=0}^{q_n - q_{n-1} - 1} T_{\alpha}^{-i} \{y : z_2(n, \beta) = z_2(n, y), 1 \leq z_1(n, y) < z_1(n, \beta)\}$$

(так как для $y \in X_1$ множество $\bigcup_{i=0}^{q_n-1} T_{\alpha}^i y$ содержит две точки из X_0).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 2. Зафиксируем $f, g \in L_2(X, \mu)$. Перепишем $(V_{\beta}^{iq_n} f, g)$ в виде

$$\int_{S_+^{(i)}(n)} f(T_{\alpha}^{iq_n} x) \overline{g(x)} d\mu - \int_{S_-^{(i)}(n)} f(T_{\alpha}^{iq_n} x) \overline{g(x)} d\mu.$$

Для любого h из $L_2(X, \mu)$ в силу (3)

$$\|\tilde{T}_{\alpha}^{iq_n} h - h\|_{L_2} \rightarrow 0 \quad (11)$$

при $n \rightarrow \infty$. Поэтому для произвольной последовательности измеримых множеств $\Phi(n)$ имеем

$$\int_{\Phi(n)} f(T_{\alpha}^{iq_n} x) \overline{g(x)} d\mu - \int_{\Phi(n)} f(x) \overline{g(x)} d\mu \rightarrow 0 \quad (12)$$

при $n \rightarrow \infty$. Воспользуемся следующей леммой.

ЛЕММА 1. Если последовательность функций h_n ограничена по норме, U – унитарный оператор и $h_n - Uh_n$ слабо сходится к 0, то $h_n - P_U h_n$ слабо сходится к 0, где P_U – оператор ортогонального проектирования на $H_{\text{inv}} = \{h : h = Uh\}$.

В силу предложения 1 (см. рис. 2)

$$\mu\{x : \omega_{\beta}^{(q_n)}(x) \neq \omega_{\beta}^{(q_n)}(T_{\alpha} x)\} \leq 2b_n.$$

Поэтому для любого $j \in \mathbb{Z}$

$$\mu\{x : \omega_{\beta}^{(q_n)}(T_{\alpha}^{jq_n} x) \neq \omega_{\beta}^{(q_n)}(T_{\alpha}^{jq_n+1} x)\} \leq 2b_n.$$

Так как

$$\omega_{\beta}^{(iq_n)}(x) = \omega_{\beta}^{(q_n)}(x) \cdot \omega_{\beta}^{(q_n)}(T_{\alpha}^{q_n} x) \cdot \dots \cdot \omega_{\beta}^{(q_n)}(T_{\alpha}^{(i-1)q_n} x),$$

то

$$\mu\{x : \omega_{\beta}^{(iq_n)}(x) \neq \omega_{\beta}^{(iq_n)}(T_{\alpha} x)\} \leq 2b_n i.$$

Поэтому

$$\|\chi_{S_{\pm}^{(i)}(n)} - \tilde{T}_{\alpha} \chi_{S_{\pm}^{(i)}(n)}\|_{L_2} \leq \sqrt{2ib_n} \rightarrow 0$$

при $n \rightarrow \infty$, где

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \notin A. \end{cases}$$

В силу эргодичности T_{α} пространство H_{inv} , где $U = \tilde{T}_{\alpha}$, состоит из констант. По лемме для любого h имеем

$$\int_{S_{\pm}^{(i)}(n)} h d\mu - \mu(S_{\pm}^{(i)}(n)) \int_X h d\mu = (\chi_{S_{\pm}^{(i)}(n)} - P_{\tilde{T}_{\alpha}} \chi_{S_{\pm}^{(i)}(n)}, h) \rightarrow 0 \quad (13)$$

при $n \rightarrow \infty$. Используя (12) и (13), получаем

$$(V_{\beta}^{iq_n} f, g) - \kappa_n(i)(f, g) \rightarrow 0$$

при $n \rightarrow \infty$. Доказательство предложения 2 окончено.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 1. Гильбертово пространство $L_2(X, \mu)$ разлагается в прямую сумму

$$H = H_{\text{inv}} \oplus H_U,$$

где H_U — замыкание подпространства функций вида $f - U^{-1}f$. Достаточно показать, что

$$(h_n, \varphi) - (P_U h_n, \varphi) \rightarrow 0$$

при $n \rightarrow \infty$ только для φ из H_U . Очевидно, что $(P_U h_n, \varphi) = 0$. Если $\varphi = f - U^{-1}f$, то

$$(h_n, \varphi) = (h_n, f) - (U h_n, f) \rightarrow 0 \quad (14)$$

при $n \rightarrow \infty$. Так как $\|h_n\| < c$, то из (14) имеем

$$(h_n, \varphi) \rightarrow 0$$

для любого φ из H_U . Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 3. Зафиксируем n так, что $\alpha_n \geq 4$. Используем предложение 1, в котором для определенности $\delta = 1$. Доказательство разобьем на два шага.

Шаг 1. При $z_1(n, \beta) < b_n/a_n$ в силу (4) имеем

$$\mu(S_{-}^{(1)}(n)) \leq \mu\left\{y : z_1(n, y) \leq \frac{b_n}{a_n}\right\} < 0.25.$$

Шаг 2. Пусть $z_1(n, \beta) \geq b_n/a_n$. Так как $\omega_{\beta}^{(2q_n)}(y) = \omega_{\beta}^{(q_n)}(y) \cdot \omega_{\beta}^{(q_n)}(T_{\alpha}^{q_n} y)$, то

$$S_{-}^{(2)}(n) = (S_{+}^{(1)}(n) \cap T_{\alpha}^{-q_n} S_{-}^{(1)}(n)) \cup (S_{-}^{(1)}(n) \cap T_{\alpha}^{-q_n} S_{+}^{(1)}(n)).$$

Поэтому

$$\mu(S_-^{(2)}(n)) \leq 2\mu\left\{y : z_1(n, y) \leq \frac{b_n}{a_n}\right\}.$$

Если $\alpha_n \geq 5$, то $\mu\{y : z_1(n, y) \leq b_n/a_n\} < 0.2$. Если $\alpha_n = 4$ и $\mu\{y : z_1(n, y) \leq b_n/a_n\} > 0.24$, то $\mu\{y : z_1(n, y) \leq 1 - 4b_n/a_n\} \leq 0.04$. Поэтому

$$\alpha_{n+1} + \frac{1}{\alpha_{n+2} + \dots} = \frac{b_n/a_n}{1 - 4b_n/a_n} > 6.$$

Следовательно, $\alpha_{n+1} \geq 6$. Предложение 3 доказано.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 4. Положим $D(n) = [0, 1]^2 \cup [1, 1 + b_n/a_n] \times [0, q_{n-1}/q_n]$. Если в предложении 1 заменить $z_i(n, \beta)$ и $z_i(n, y)$ на z_i и z'_i соответственно, где $z = (z_1, z_2)$ и $y = (z'_1, z'_2)$ — любые точки из $D(n)$, то неравенства в формулировке определяют разбиение $D(n)$ на 2 подмножества $\tilde{S}_{\pm}^{(1)}(n)$ (см. рис. 2). Аналогично определим $\tilde{S}_{\pm}^{(i)}(n)$ по соответствующим неравенствам, задающим границы неизменности функции $\beta^{(iq_n)}(y)$. Нетрудно заметить, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\substack{\Delta \subset D(n) \\ \Delta = \Delta_1 \times \Delta_2}} \left| \mu\{x \in X : x \in \Delta\} - \frac{m(\Delta)}{c_n} \right| = 0, \quad (15)$$

где Δ_i — отрезки, m — мера Лебега в $\mathbb{R}^2$. Так как $1 < c_n < 2$ и $\tilde{S}_{\pm}^{(1)}(n)$ состоят из равномерно ограниченного по n количества прямоугольников $\Delta_1 \times \Delta_2$, то

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |\tilde{\varkappa}_n(1)| > 0 \iff (A),$$

где

$$\tilde{\varkappa}_n(i) = \tilde{\varkappa}_n(i)(\beta) = m(\tilde{S}_+^{(i)}(n)(\beta)) - m(\tilde{S}_-^{(i)}(n)(\beta)).$$

Зафиксируем n так, что $\alpha_{n-1} \leq 20$ и $\beta \notin U_\varepsilon(n)$. Если $z \in \tilde{l}_n \cap D(n)$, то $\tilde{\varkappa}_n(1)(z) = 0$.

Пусть $\alpha_n > 1$. Для любого $c \in [0, 1]$

$$\{z = (z_1, z_2) : z_2 = c\} \cap l_n \cap D(n) \neq \emptyset.$$

Если $z_1(n, \beta) \geq b_n/a_n$, то, очевидно,

$$|\tilde{\varkappa}_n(1)(\beta)| = 2|z_1(n, \beta) - z'_1| \geq 2\varepsilon, \quad (16)$$

где $(z'_1, z_2(n, \beta)) \in l_n \cap D(n)$. Если $z_1(n, \beta) < b_n/a_n$, то справедлива оценка (см. рис. 2)

$$\min_{\pm} m(\tilde{S}_{\pm}^{(1)}(n)) \leq \frac{b_n}{a_n}.$$

Но $c_n = m(D(n)) > \alpha_n b_n/a_n + q_{n-1} b_n/(q_n a_n) > 43b_n/(21a_n)$, следовательно,

$$|\tilde{\varkappa}_n(1)(\beta)| > \frac{c_n}{43} > \frac{1}{43}.$$

Пусть $\alpha_n = 1$. Шаг 1. $z_1(n, \beta) \geq b_n/a_n$. Пусть существует $z' \in D(n) \cap l_n$, где $z' = (z'_1, z'_2)$, $z'_1 \geq b_n/a_n$ и z' отличается только одной координатой от β (не менее чем на ε). Если отличается первой координатой, то верно (16), если второй, то

$$|\tilde{\varkappa}_n(1)(\beta)| = \frac{2|z_2(n, \beta) - z'_2|b_n}{a_n} > \frac{2b_n\varepsilon}{a_n} > \varepsilon.$$

При отсутствии такого z' имеем $b_n/a_n \leq z_1(n, \beta) < c_n/2$. Тогда

$$|\tilde{\varkappa}_n(1)(\beta)| = |\tilde{\varkappa}_n(1)(z''')| + 2\left(\frac{b_n}{a_n}(1 - z_2(n, \beta)) + \left(\frac{c_n}{2} - z_1(n, \beta)\right)\right) > \varepsilon,$$

где $z''' = (c_n/2, 1)$.

Шаг 2. $z_1(n, \beta) \leq b_n/a_n$. Тогда (см. рис. 2)

$$|\tilde{\varkappa}_n(1)(z)| = 2\left|\frac{c_n}{2} - z_1z_2 - (1 - z_2)\left(\frac{b_n}{a_n} - z_1\right)\right|,$$

где $z = (z_1, z_2) \in D(n)$. Оценка

$$\inf_{n, \beta \in [0, b_n/a_n] \times [0, 1] \setminus U_\varepsilon(n)} |\tilde{\varkappa}_n(1)(\beta)| > \varepsilon_0 > 0$$

следует из равномерной непрерывности $\tilde{\varkappa}_n(1)(z)$ как функции от переменных $z = (z_1, z_2)$, b_n/a_n , q_{n-1}/q_n . Предложение 4 доказано.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 5. Прямой l_n в $(n+1)$ -й модели соответствует прямая l'_n , проходящая через точки $(b_{n+1}/a_{n+1}, 1 - c_{n+1}/2 + q_n/q_{n+1})$ и $(1 + b_{n+1}/a_{n+1}, 1 - c_{n+1}/2)$. Множеству $l_n \cap D(n)$ соответствует в точности $l'_n \cap D(n+1)$. Для точки $A' = (z_1, z_2) \in l'_n \cap l_{n+1}$ имеем $A' = ((1 + b_{n+1}/a_{n+1})/2, (q_n/q_{n+1} + 1)/2)$. Точке A' в n -й модели соответствует $A = (1/2 + b_n/a_n, q_{n-1}/(2q_n))$.

Пусть $\beta \in U_{0.001}(n) \cap U_{0.001}(n+1)$. Очевидно, что $\beta \in U_{0.004}(l'_n)$. Если $\tilde{l}_{n+1} = l_{n+1}$, то $\beta \in U_{0.005}(A')$. Пусть $\tilde{l}_{n+1} \neq l_{n+1}$. В силу четности $n+1$ функция $\tilde{l}_{n+1}$ монотонно возрастает (см. рис. 4). Так как

$$\tilde{l}_{n+1}(1) - l'_n(1) = \frac{c_{n+1}a_{n+1}}{2b_{n+1}} - \frac{c_{n+1}}{2} > 0.005,$$

$$l'_n\left(1 + \frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}\right) - \tilde{l}_{n+1}\left(1 + \frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}\right) = 1 - \frac{c_{n+1}}{2} - \left(1 - \frac{a_{n+1}c_{n+1}}{2b_{n+1}}\right) > 0.005,$$

то $U_{0.001}(n+1) \cap U_{0.004}(l'_n) \cap \{z = (z_1, z_2) : z_1 \geq 1\} = \emptyset$.

Рис. 4

Поэтому $\beta \in U_{0.005}(A')$. Следовательно,

$$\beta \in U_{0.02}(A). \quad (17)$$

Аналогично, прямая l'_{n-1} в n -й модели проходит через точки $(0, 1 - c_n/2)$ и $(1, 1 - c_n/2 + q_{n-1}/q_n)$. Так как $\alpha_n = 3$, то

$$l'_{n-1} \left(1 - \frac{b_n}{a_n}\right) = \frac{1}{2} + \frac{q_{n-1}(1 - 3b_n/(2a_n))}{q_n} > \frac{(1 + q_{n-1}/q_n)}{2}. \quad (18)$$

В силу выбора α

$$\frac{2b_n}{a_n} - \frac{1}{2} = \frac{1 - \frac{1}{\alpha_{n+1} + \frac{1}{\alpha_{n+2} + \dots}}}{2a_n/b_n} > 0.025.$$

Поэтому

$$A \notin U_{0.025} \left(\left\{ (z_1, z_2) : z_1 = 1 - \frac{b_n}{a_n} \right\} \right). \quad (19)$$

Учитывая (18), $A \notin U_{0.025}(l'_{n-1})$. Учитывая (17), $\beta \notin U_{0.005}(l'_{n-1})$. Следовательно, $\beta \notin U_{0.001}(l_{n-1})$. При $\tilde{l}_{n-1} = l_{n-1}$ имеем $\beta \notin U_{0.001}(n-1)$. При $\tilde{l}_{n-1} \neq l_{n-1}$ (см. рис. 4) покажем, что $\tilde{l}'_{n-1}$ также отделена от точки A , где $\tilde{l}'_{n-1}$ — точки кривой $\tilde{l}_{n-1}$ в n -й модели. Имеем

$$\begin{aligned} (\tilde{l}'_{n-1})^{-1}(0) &= \left((\tilde{l}_{n-1})^{-1}(0) - \frac{b_{n-1}}{a_{n-1}} \right) \cdot \left(1 + \frac{b_n}{a_n} \right) \\ &= \left(1 + \frac{c_{n-1}}{2} - \frac{b_{n-1}}{a_{n-1}} \right) \left(1 + \frac{b_n}{a_n} \right) \\ &= \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2} \frac{b_{n-1}}{a_{n-1}} \left(\frac{q_{n-2}}{q_{n-1}} - 2 \right) \right) \left(1 + \frac{b_n}{a_n} \right). \end{aligned} \quad (20)$$

В силу выбора α первый множитель в (20) больше $\frac{4}{5}$. Поэтому $(\tilde{l}'_{n-1})^{-1}(0) > 1$. Комбинируя с (19) и (17), получаем $\beta \notin U_{0.005}(\tilde{l}'_{n-1})$. Следовательно, $\beta \notin U_{0.001}(n-1)$ и для $\alpha_{n-1} = 1$. Предложение 5 доказано.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 6. Используем те же обозначения. Точки из $B(n+1)$ в n -й модели (n — нечетно) содержатся в $B'(n+1) = \{(z_1, z_2) : z_1 < 1 - \alpha_n b_n/a_n\}$. Так как при $\alpha_n = 2$ $B'(n+1) \cap U_{0.1}(\tilde{l}_n) = \emptyset$, то утверждение следует из предложения 4, если множество $\{n \in \mathbb{N} : \alpha_n = 2, \beta \in B(n+1)\}$ бесконечно. Иначе бесконечно множество $\{n \in \mathbb{N} : \alpha_n = 1, z_1(n, \beta) < 1 - b_n/a_n\}$, зафиксируем номер n из данного множества. Если $\tilde{l}_n = l_n$, то, учитывая

$$\frac{c_n}{2} - z_1(n, \beta) > \frac{c_n}{2} - 1 + \frac{b_n}{a_n} > \frac{b_n}{a_n} - \frac{1}{2} = \frac{1}{1 + \frac{1}{\alpha_{n+1} + \dots}} - \frac{1}{2} > \frac{1}{14},$$

имеем $\beta \notin U_{0.07}(n)$. Пусть $\tilde{l}_n \neq l_n$. Прямая l'_{n-1} проходит через точки $(0, 1 - c_n/2)$ и $(1, 1 - c_n/2 + q_{n-1}/q_n)$. Так как

$$\begin{aligned} l'_{n-1}(0) - \tilde{l}_n(0) &= 1 - \frac{c_n}{2} - \left(1 - \frac{c_n}{2} \frac{a_n}{b_n} \right) > \frac{1}{2} \left(\frac{a_n}{b_n} - 1 \right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{\alpha_{n+1} + \frac{1}{\alpha_{n+2} + \dots}} > \frac{1}{6}, \end{aligned}$$

то $\{(z_1, z_2) : z_1 < 1 - b_n/a_n\} \cap U_{1/12}(\tilde{l}'_{n-1}) \cap U_{1/12}(n) = \emptyset$, т.е. β не может одновременно принадлежать $U_{1/12}(n)$ и $U_{1/36}(n-1)$. Предложение 6 доказано.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 7. Зафиксируем n и β так, чтобы $\alpha_i \leq 2$ при $i \geq n-1$, $\alpha_n = 1$ и $\beta \in U_{0.001}(n) \setminus (B(n) \cup B(n+1))$. Тогда $\beta \in D = [b_{n+1}/a_{n+1}, 1 + b_{n+1}/a_{n+1}] \times [0, q_n/q_{n+1}]$. Прямая l'_n (см. предложение 5) проходит через точки $(b_{n+1}/a_{n+1}, 1 - c_{n+1}/2 + q_n/q_{n+1})$ и $(1 + b_{n+1}/a_{n+1}, 1 - c_{n+1}/2)$. Для z'_1 и z''_1 , где $l_{n+1}(z'_1) = q_n/q_{n+1} = l'_n(z''_1)$, имеем

$$z''_1 - z'_1 = \left(\frac{q_{n+1}}{2q_n} + \frac{b_{n+1}}{2a_{n+1}} \right) - \frac{c_{n+1}}{2} > \frac{1}{2} \left(\frac{q_{n+1}}{q_n} - 1 \right) > \frac{1}{2} \frac{1}{\alpha_{n-1} + 1} \geq \frac{1}{6}. \quad (21)$$

Если $\tilde{l}'_n$ — точки кривой $\tilde{l}_n$ в $(n+1)$ -й модели, то $\tilde{l}'_n$ может отличаться от l'_n только при $z_1 < (b_n/a_n - c_n/2)(1 + b_{n+1}/a_{n+1}) < b_{n+1}/a_{n+1}$ и $z''_1 < z < z''_1 + (b_n/a_n - c_n/2)(1 + b_{n+1}/a_{n+1})$. Поэтому если $l_{n+1} = \tilde{l}_{n+1}$, то на множестве D кривые $\tilde{l}_{n+1}$ и l'_n также отделены не менее чем на $\frac{1}{6}$. Но $\beta \in U_{0.002}(l'_n)$. Поэтому $\beta \notin U_{0.001}(n+1)$.

Пусть $\tilde{l}_{n+1} \neq l_{n+1}$. Очевидно, что часть кривой $\tilde{l}_{n+1}$, отличная от l_{n+1} , пересекается с D только при $z \geq 1 + c_{n+1}/2$. В силу (21) и неравенства

$$\tilde{l}'_n \left(1 + \frac{b_{n+1}}{a_{n+1}} \right) - \tilde{l}_{n+1} \left(1 + \frac{b_{n+1}}{a_{n+1}} \right) = 1 - \frac{c_{n+1}}{2} - \left(1 - \frac{a_{n+1}c_{n+1}}{2b_{n+1}} \right) > 0.005$$

кривые $\tilde{l}_{n+1}$ и l'_n также отделены в D не менее чем на 0.005. Предложение 7 доказано.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 8. В силу (4) при $n > n_0$ имеем

$$\frac{b_n}{a_n} = \sqrt{2} - 1. \quad (22)$$

Так как

$$\frac{q_{n-1}}{q_n} = \frac{1}{\alpha_{n-1} + \frac{1}{\alpha_{n-2} + \dots \frac{1}{\alpha_2 + \frac{1}{\alpha_1}}}},$$

то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q_{n-1}}{q_n} = \sqrt{2} - 1. \quad (23)$$

Для точки $A_n = l_n \cap l'_{n-1}$, где l'_{n-1} — точки l_{n-1} в n -й модели, имеем

$$A_n \rightarrow A = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \quad (24)$$

При $n > n_0$ $\tilde{l}_n = l_n$. В силу выбора β для любого $\varepsilon > 0$ при достаточно большом n $\beta \in U_\varepsilon(A_n)$.

Используя предложение 1 и формулу $\omega_\beta^{(2q_n)}(x) = \omega_\beta^{(q_n)}(x) \cdot \omega_\beta^{(q_n)}(T_\alpha^{q_n} x)$ нетрудно определить разбиение $D(n)$ на множества $\tilde{S}_\pm^{(2)}(n)(A_n)$ (см. рис. 5). Очевидно, что

$$m(\tilde{S}_+^{(2)}(n)(\beta)) - m(\tilde{S}_+^{(2)}(n)(A_n)) \rightarrow 0$$

при $n \rightarrow \infty$. Осталось воспользоваться (15) и (22)–(24).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Комбинируя предложения 3–8 нетрудно получить, что для любых α и β существуют такие $\varkappa$ и i , что $0 < |\varkappa| \leq 1$, $i \in \{1, 2\}$ и $\varkappa \tilde{E} \in \text{WCL}(\bigcup_n V_\beta^{iq_n})$. В подпространстве H_+ в силу (3) для любого i $\tilde{T}_{\alpha, \beta}^{iq_n} \rightarrow \tilde{E}$ при $n \rightarrow \infty$. Теорема 1 доказана.

Рис. 5

§ 4. Функция кратности спектра и эргодичность

Зафиксируем $0 < \varepsilon < \frac{1}{3}$. Для точки $\alpha \in X = [0, 1]$ в n -й модели имеем $z_2(n, \alpha) = 0$, $z_1(n, \alpha) = b_n/a_n$ при нечетном n и $z_1(n, \alpha) = 1$ при четном n . Положим $\Delta_0 = \{x \in X : z_2(n, x) = 0, |z_1(n, x) - z_1(n, \alpha)| < \delta b_n/a_n\}$, $\Delta_i = T_\alpha^{2iq_n} \Delta_0$, $U_\delta^{(i)}(n) = \{x \in X : \exists j (T_\alpha^j(x) \in \Delta_i \text{ \& } |j| < \delta q_n)\}$ (см. рис. 6), где $i = 0$ при $b_n/a_n \geq \varepsilon$ и $(2|i|+1)b_n/a_n < \varepsilon$ при $b_n/a_n < \varepsilon$. Заметим, что $U_\delta^{(i_1)}(n) \cap U_\delta^{(i_2)}(n) = \emptyset$ при $i_1 \neq i_2$ и $\delta < \frac{1}{2}$.

Рис. 6

ТЕОРЕМА 2. Если $\alpha = [\alpha_1, \alpha_2, \dots]$, то свойства 1) и 2) равносильны:

- 1) $T_{\alpha, \beta}$ — не эргодично;
- 2) $\exists n_0 \forall n > n_0 \exists k_n \in \mathbb{Z} : \beta \in U_\varepsilon^{(k_n)}(n), \sum |k_n|/\alpha_n < \infty, \chi_n(1) = \int \omega_\beta^{(q_n)}(x) d\mu \rightarrow 1$ при $n \rightarrow \infty$. (Здесь число $2k_n$ естественно интерпретируется как величина отскока точки β по горизонтали от 0 на n -м шаге.)

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что свойство 1) влечет свойство 2). Зафиксируем $f(x)$, удовлетворяющую условиям $f(T_\alpha x) = \omega_\beta(x)f(x)$ и $|f(x)| = 1$ для

п.в. x . Если для некоторой последовательности номеров m_i выполнено $T_\alpha^{m_i} \rightarrow E$ при $i \rightarrow \infty$, то

$$\begin{aligned} \int \omega_\beta^{(m_i)}(x) d\mu &= \int \omega_\beta^{(m_i)}(x) |f(x)|^2 d\mu \\ &\rightarrow \int \omega_\beta^{(m_i)}(x) f(T_\alpha^{m_i} x) \overline{f(x)} d\mu = \int |f(x)|^2 d\mu = 1. \end{aligned} \quad (25)$$

Поэтому

$$\kappa_n(1) \rightarrow 1 \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \quad (26)$$

Рассмотрим n -ю модель (n — нечетно). Учитывая (26) и расположение множеств знакопостоянства функций $\omega_\beta^{(q_n)}(x)$ (см. предложение 1), для любых $\varepsilon' > 0$ и $\delta' > 0$ при достаточно большом n

$$\begin{aligned} \frac{2b_n}{a_n} < \varepsilon' &\implies z_1(n, \beta) < \varepsilon' \text{ или } z_1(n, \beta) > 1 - \varepsilon', \\ \frac{2b_n}{a_n} \geq \varepsilon' &\implies \beta \in U_{\delta'}^{(0)}(n). \end{aligned} \quad (27)$$

Для $\varepsilon' = \varepsilon/4$ и $\delta' = \varepsilon$ при достаточно большом n при условии $b_n/a_n \geq \varepsilon/8$ имеем $\beta \in U_\varepsilon^{(0)}(n)$. Пусть $b_n/a_n < \varepsilon/8$. Рассмотрим случай $z_1(n, \beta) < \varepsilon/8$. При $z_1(n, \beta) > 1 - \varepsilon/8$ рассуждения аналогичны.

Предположим, что $\beta \notin U_\varepsilon^{(i)}(n)$ для любого i такого, что $(2|i| + 1)b_n/a_n < \varepsilon$.

Пусть $\varepsilon \leq z_2(n, \beta) \leq 1 - \varepsilon$. Обозначим

$$\alpha'_n = \left\lfloor \frac{\alpha_n}{2} \right\rfloor, \quad \text{Orb}\{x\} = \bigcup_{i=0}^{\alpha'_n-1} T_\alpha^{q_n i}(x).$$

Исследуем множество $S_-^{(\alpha'_n)}(n)$, где $S_-^{(i)}(n) = \{x : \omega_\beta^{(iq_n)}(x) = -1\}$. Так как

$$\omega_\beta^{(iq_n)}(x) = \omega_\beta^{(q_n)}(x) \cdot \omega_\beta^{(q_n)}(T_\alpha^{q_n} x) \cdot \dots \cdot \omega_\beta^{(q_n)}(T_\alpha^{q_n(i-1)} x),$$

то $S_-^{(\alpha'_n)}(n) = \{x : \#\{\text{Orb}\{x\} \cap S_-^{(1)}(n)\} = 1 \pmod{2}\}^2$

Пусть $\Phi(n) = \{x \in S_-^{(1)}(n) : T_\alpha^{q_n} x \notin S_-^{(1)}(n)\}$. Очевидно, что

$$\forall x \quad \#\{\text{Orb}\{x\} \cap \Phi(n)\} \leq 1. \quad (28)$$

Положим $i(x) = \min\{i \in \mathbb{N} : T_\alpha^{-q_n i} x \notin S_-^{(1)}(n)\}$, $\tilde{\Phi}(n) = \{x \in \Phi(n) : i(x) = 1 \pmod{2}\}$. Параметры $z_1(n, \beta)$, $z_2(n, \beta)$, b_n/a_n , ε , α'_n выбраны так, что $\forall x \in \Phi(n)$

$$\begin{aligned} i(x) &\leq \left\lceil \frac{a_n z_1(n, \beta)}{b_n} \right\rceil + 1 \leq \frac{\varepsilon}{8} \frac{a_n}{b_n} + 1 < \frac{\varepsilon}{8} (\alpha_n + 1) + 1 < \frac{1}{12} \alpha'_n + 2 < \frac{1}{4} \alpha'_n, \\ y &\in \bigcup_{j=[\alpha'_n/4]}^{\alpha'_n-1} T_\alpha^{-jq_n} \tilde{\Phi}(n) \\ &\implies \#\{\text{Orb}\{y\} \cap S_-^{(1)}(n)\} = 1 \pmod{2}, \\ \mu(\tilde{\Phi}(n)) &> \frac{\varepsilon}{2} \frac{b_n}{a_n} \frac{1}{1 + b_n q_{n-1}/(q_n a_n)} > \frac{\varepsilon}{4} \frac{b_n}{a_n}. \end{aligned} \quad (29)$$

---

² $\#\{A\}$ обозначает количество элементов в множестве A .

Последнее неравенство – это оценка площади фигуры

$$\tilde{\Phi}'(n) = \left\{ (z_1, z_2) : \exists x \in \tilde{\Phi}(n) \left(z_1(n, x) = z_1, z_2(n, x) \leq z_2 < z_2(n, x) + \frac{1}{q_n} \right) \right\}.$$

в n -й модели. Поэтому

$$S_-^{(\alpha'_n)}(n) \supseteq \bigcup_{j=[\alpha'_n/4]}^{\alpha'_n-1} T_{\alpha}^{-jq_n} \tilde{\Phi}(n).$$

Следовательно, используя (28), последовательно получаем

$$\begin{aligned} \mu(S_-^{(\alpha'_n)}(n)) &\geq \frac{\varepsilon}{4} \frac{b_n}{a_n} \left(\alpha'_n - \left\lfloor \frac{\alpha'_n}{4} \right\rfloor \right) > \frac{\varepsilon}{20}, \\ \int \omega_{\beta}^{(\alpha'_n q_n)}(x) d\mu &< 1 - 0.1\varepsilon. \end{aligned}$$

Имеем противоречие, так как в силу (3) для последовательности $m_n = \alpha'_n q_n$ имеет место (25).

Пусть $z_2(n, \beta) < \varepsilon$. При $z_2(n, \beta) \geq 1 - \varepsilon$ рассуждения аналогичны. Ввиду сделанного предположения

$$\left| z_1(n, \beta) - (2i+1) \frac{b_n}{a_n} \right| > \varepsilon \frac{b_n}{a_n} \quad \text{при} \quad 0 \leq i < \frac{1}{2} \left(\frac{\varepsilon a_n}{b_n} - 1 \right).$$

В силу выбора параметров имеет место оценка, аналогичная (29),

$$\mu(\tilde{\Phi}(n)) > \frac{\varepsilon(1-\varepsilon)}{2} \frac{b_n}{a_n}.$$

Следовательно, также имеем противоречие со свойством (25) при $m_n = \alpha'_n q_n$. Поэтому $\beta \in U_{\varepsilon}^{(k_n)}(n)$ и $T_{\alpha}^j \beta \in \Delta_{k_n}$ при $|j| < \varepsilon q_n$, $n > n_0$. Обозначим $\beta(n) = T_{\alpha}^{2k_n q_n - j} \alpha$. Очевидно, что $\beta(n) \in U_{\varepsilon}^{(k_n)}(n) \cap U_{\varepsilon}^{(0)}(n+1)$. Заметим, что $\{x : \beta(x) \neq \beta(n)(x)\}$ полуинтервал в n -й модели (исключая случай $k_n = 0$ & $z_2(n, T_{\alpha}^{-j} \beta) = 0$ & $1 < z_1(n, T_{\alpha}^{-j} \beta) < b_n(1+\varepsilon)/a_n$ & $q_{n-1} \leq j < \varepsilon q_n$ – здесь два полуинтервала). Имеем

$$\begin{aligned} &\mu\{x : \beta(x) \neq \beta(n)(x)\} \\ &< \mu\left\{x : z_2(n, x) = 0, |z_1(n, x) - z_1(n, \alpha)| < \frac{\varepsilon b_n}{2a_n}\right\} < \frac{\varepsilon b_n}{a_n q_n}. \end{aligned} \quad (30)$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \mu\{x : \omega_{\beta}^{(q_n)}(x) \neq \omega_{\beta(n)}^{(q_n)}(x)\} &< \frac{\varepsilon b_n}{a_n}, \\ \mu\{x : \omega_{\beta}^{(q_{n+1})}(x) \neq \omega_{\beta(n)}^{(q_{n+1})}(x)\} &< 2\varepsilon. \end{aligned} \quad (31)$$

Построим инвариантные функции f_n для операторов $V_{\beta(n)}$. Положим $f_n(x) = 1$ при $x \in \tilde{A}_1(n) = \{x : z_2(n, x) = 0, z_1(n, x) < b_n/a_n\}$. Пусть $k_n \geq 0$. При $k_n < 0$

рассуждения аналогичны. Для всех $x \notin T_\alpha^{q_n-1-1}B_1(n)$ доопределим функцию f_n с учетом равенства $f_n(T_\alpha x) = \omega_{\beta(n)}(x)f_n(x)$. Учитывая предложение 1, (26) и (31), имеем $\omega_{\beta(n)}^{(q_n)}(x) = 1$, если $z_2(n, x) = 0$, $z_1(n, x) \geq b_n \alpha_n / a_n$. Отсюда $f_n(T_\alpha^{q_n} x) = \omega_{\beta(n)}^{(q_n)}(x)f_n(x) = f_n(x)$. Следовательно, $f_n(x) = c(k)$ при $x \in T_\alpha^k B_1(n)$, $k = 0, 1, \dots, q_n - 1$. Покажем, что $\omega_{\beta(n)}(x)f_n(x) = 1$ при $x \in T_\alpha^{q_n-1-1}B_1(n) = T_\alpha^{q_{n+1}-1}A_1(n+1)$. Ясно, что $z_1(n+1, \beta(n)) = 1$. Если $z_1(n+1, y) = b_{n+1}/a_{n+1}$, $z_2(n+1, y) = 0$, то в силу (26) и (31) $\omega_{\beta(n)}^{(q_{n+1})}(y) = 1$. Поэтому

$$\begin{aligned} 1 &= \omega_{\beta(n)}^{(q_{n+1})}(y) = \omega_{\beta(n)}^{(q_{n+1}-1)}(y)\omega_{\beta(n)}(T_\alpha^{q_{n+1}-1}y)f_n(y) \\ &= f_n(T_\alpha^{q_{n+1}-1}y)\omega_{\beta(n)}(x) = f_n(x)\omega_{\beta(n)}(x). \end{aligned}$$

Для любого борелевского $\Delta \subset \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ множество $\{x : f(x) \in \Delta \cup (-\Delta)\}$ инвариантно относительно T_α . Следовательно, для некоторого c $f(x) = \pm c$ для п.в. x . Далее будем считать, что $c = 1$.

Покажем, что для некоторой последовательности $l_n \in \{1, 2\}$ справедливо следующее: $\|(-1)^{l_n} f_n - f\|_{L_2}^2 \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Зафиксируем $0 < \varepsilon'' < \frac{1}{3}$. При достаточно большом n в силу (27) для $2b_n/a_n < \varepsilon''/20$ имеем $z_1(n, \beta) < \varepsilon''/20$ (случай $z_1(n, \beta) > 1 - \varepsilon''/20$ рассматривается аналогично). При достаточно большом n для некоторых $i = i(n) \in \{0, 1, \dots, q_n - 1\}$ и $c \in \{\pm 1\}$ в силу измеримости f имеем

$$\int_{T_\alpha^i A_1(n)} |f - c| d\mu = 2\mu\{x \in T_\alpha^i A_1(n) : f(x) = -c\} \leq \frac{\varepsilon''}{4} \mu(A_1(n)).$$

Положим $\tilde{f}_n(x) = \omega_\beta^{(j)}(x_0)\omega_\beta^{(i)}(x_0)c$ при $x \in T_\alpha^j A_1(n)$, где $z_1(n, x_0) = \frac{1}{2}$, $z_2(n, x_0) = 0$, $j = 0, 1, \dots, q_n - 1$, $\omega_\beta^{(0)}(x_0) = 1$. Учитывая инвариантность f , имеем, что если $z_1(n, \beta) < z_1(n, x) = z_1(n, y) < 1$, то $f(x) = \tilde{f}_n(x) \Leftrightarrow f(y) = \tilde{f}_n(y)$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \int_{A(n)} |f - \tilde{f}_n| d\mu &\leq \frac{\varepsilon''}{4} + \int_{\{x: z_1(n, x) < z_1(n, \beta)\}} |f - \tilde{f}_n| d\mu \\ &< \frac{\varepsilon''}{4} + 2\mu\left\{x : z_1(n, x) < \frac{\varepsilon''}{20}\right\} < \frac{7}{20}\varepsilon''. \end{aligned}$$

Выберем l_n так, чтобы $\tilde{f}_n(x_0) = (-1)^{l_n} f_n(x_0)$. Тогда

$$\begin{aligned} \int_X |f - (-1)^{l_n} f_n|^2 d\mu &< 2 \int_X |f - (-1)^{l_n} f_n| d\mu \\ &< 2 \int_{A(n)} |f - (-1)^{l_n} f_n| d\mu + 4\mu(B(n)) \\ &< 2 \int_{A(n)} |\tilde{f}_n - (-1)^{l_n} f_n| d\mu + \frac{7}{10}\varepsilon'' + \frac{4b_n}{a_n} \\ &< 2 \int_{\{x: z_1(n, \beta(n)) \leq z_1(n, x) < 1\}} |\tilde{f}_n - (-1)^{l_n} f_n| d\mu + 2z_1(n, \beta(n)) + \frac{4}{5}\varepsilon''. \end{aligned}$$

Учитывая (30), при достаточно большом n имеем $z_1(n, \beta(n)) < \varepsilon''/10$. По построению f_n и $\beta(n)$ если $z_1(n, \beta(n)) \leq z_1(n, x_1) \leq z_1(n, x_2)$ и $z_2(n, x_1) = z_2(n, x_2)$, то $f_n(x_1) = f_n(x_2)$, $k_n \geq 0$. Следовательно, при достаточно большом n

$$\int_{\{x: z_1(n, \beta(n)) \leq z_1(n, x) < 1\}} |\tilde{f}_n - (-1)^{l_n} f_n| d\mu = 0.$$

Комбинируя выведенные оценки, получаем

$$\int_X |f - (-1)^{l_n} f_n|^2 d\mu < \varepsilon''.$$

При $2b_n/a_n \geq \varepsilon''/20$ в силу (27) имеем

$$\beta \in U_{\varepsilon''/32}^{(0)}(n). \quad (32)$$

Так как $\mu\{x : z_1(n, x) < b_n/a_n\} > b_n/(2a_n) > \varepsilon''/80$, то при достаточно большом n для некоторых $i = i(n) \in \{0, 1, \dots, q_n - 1\}$ и $c \in \{\pm 1\}$

$$\int_{T_{\alpha}^i \tilde{A}_1(n)} |f - c| d\mu < \frac{\varepsilon''}{8} \mu(\tilde{A}_1(n)).$$

Учитывая (32) и инвариантность f , для некоторого $c_0 \in \{\pm 1\}$

$$\int_{\tilde{A}_1(n)} |f - c_0| d\mu < \frac{3}{16} \varepsilon'' \mu(\tilde{A}_1(n)). \quad (33)$$

Пусть $\tilde{B}(n) = \{x : \beta(x) \neq \beta(n)(x)\}$. Для $x \in \tilde{A}_1(n)$ определим $k(x) = \min\{k > 0 : T_{\alpha}^k x \in \tilde{A}_1(n)\}$, $\text{Orb}\{x\} = \bigcup_{i=0}^{k(x)-1} T_{\alpha}^i x$. Ясно, что $k(x) \in \{q_{n+1}, q_n + q_{n+1}\}$ и

$$\int_{\tilde{A}_1(n)} k(x) d\mu = 1.$$

Поэтому

$$\int_D k(x) d\mu < 2\delta, \quad (34)$$

если $D \subseteq \tilde{A}_1(n)$ и $\mu(D) = \delta \mu(\tilde{A}_1(n))$. Очевидно, что если $x_1, x_2 \in \text{Orb}\{x\}$ и $\text{Orb}\{x\} \cap \tilde{B}(n) = \emptyset$, то $f(x_1) = c_0 f_n(x_1) \Leftrightarrow f(x_2) = c_0 f_n(x_2)$. Последовательно учитывая (34), (33) и (32), имеем

$$\begin{aligned} \int_X |f - c_0 f_n|^2 d\mu &< 2 \int_X |f - c_0 f_n| d\mu \\ &< 2 \int_{\{\text{Orb}\{x\} : \text{Orb}\{x\} \cap \tilde{B}(n) = \emptyset\}} |f - c_0 f_n| d\mu \\ &\quad + 4\mu\{\text{Orb}\{x\} : \text{Orb}\{x\} \cap \tilde{B}(n) \neq \emptyset\} \\ &= 4 \int_{\{x \in \tilde{A}_1(n) : \text{Orb}\{x\} \cap \tilde{B}(n) = \emptyset \text{ \& } f(x) = -c_0\}} k(x) d\mu \\ &\quad + 4 \int_{\{x \in \tilde{A}_1(n) : \text{Orb}\{x\} \cap \tilde{B}(n) \neq \emptyset\}} k(x) d\mu \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&< \frac{3\varepsilon''}{4} + \frac{8\mu\{x \in \tilde{A}_1(n) : \text{Orb}\{x\} \cap \tilde{B}(n) \neq \emptyset\}}{\mu(\tilde{A}_1(n))} \\
&< \frac{3\varepsilon''}{4} + \frac{8\mu(\tilde{B}(n))}{\mu(\tilde{A}_1(n))} < \varepsilon''.
\end{aligned}$$

Обозначим $(-1)^{l_n} f_n = \varphi_n$, $D_n = \{x : \varphi_n(x) \neq \varphi_{n-1}(x)\}$. Покажем, что при $n > m$

$$\mu(D_n \cap D_m) \leq 4\mu(D_n)\mu(D_m). \quad (35)$$

Так как $\beta \in U_\varepsilon^{(k_n-1)}(n-1) \cap U_\varepsilon^{(k_n)}(n)$, то $T_\alpha^{j(m)}\beta \in \Delta_{k_m}(m)$, где $|j(m)| < \varepsilon q_m$, $m = n-1, n$. Используя n -ю модель, имеем, что если $x \in \Delta_i(n)$ и $T_\alpha^r x \in \Delta_0(n-1)$, где $|r| < q_n$, то $r = 0$. Учитывая, что

$$\begin{aligned}
&|j(n-1) - 2k_{n-1}q_{n-1} - j(n)| < 2\varepsilon q_n + 2|k_{n-1}|q_{n-1} \\
&< \begin{cases} \frac{2q_n}{3} & \text{при } k_{n-1} = 0, \\ 2\varepsilon q_n + \left(\frac{\varepsilon a_n}{b_n} - 1\right)q_{n-1} < 2\varepsilon q_n + \varepsilon \alpha_{n-1}q_{n-1} < q_n & \text{при } k_{n-1} \neq 0, \end{cases}
\end{aligned}$$

$T_\alpha^{j(n-1)-2k_{n-1}q_{n-1}-j(n)}T_\alpha^{j(n)}\beta \in \Delta_0(n-1)$, имеем $-j(n) = -j(n-1) + 2k_{n-1}q_{n-1}$.

Поэтому

$$\beta(n) = T_\alpha^{2k_n q_n - j(n)}\alpha = T_\alpha^{2k_n q_n}\beta(n-1).$$

Если $k_n = 0$, то φ_n и φ_{n-1} инвариантны относительно $V_{\beta(n)} = V_{\beta(n-1)}$. Следовательно, $\mu(D_n) = 0$. Пусть $k_n \neq 0$. Учитывая взаимное расположение $\beta(n-1)$, $\beta(n)$, β , нетрудно указать множество $\{x : \beta(n-1)(x) \neq \beta(n)(x)\} = \Phi_n$ в n -й модели. А учитывая инвариантность φ_k относительно $V_{\beta(k)}$, фундаментальность последовательности φ_l , свойство $\varphi_k(x) = c(k)$ при $x \in \tilde{A}_1(n)$, $c(k) \in \{\pm 1\}$, $k = n-1, n$, — и множество D_n (см. рис. 7).

Рис. 7

Множество D_m распадается на подмножества вида $T_{\alpha}^i \tilde{A}_1(m)$, где $|i| < (2|k_m| + 1)q_m$. Наблюдая динамику изменения положения множества $\tilde{A}_1(m)$ в $(m+r)$ -й модели при возрастании r , получаем, что множества $T_{\alpha}^i \tilde{A}_1(m)$ распадаются на подмножества $D_m^{(j)}$ следующего вида: $\{x : z_2(n, x) = c_1, z_1(n, x) < b_n/a_n \text{ или } z_2(n, x) = c_2, z_1(n, x) \geq b_n/a_n\}$; $\{x : z_2(n, x) = c_1, z_1(n, x) \geq b_n/a_n\}$ при $c_1 < q_{n-1}/q_n$; $\{x : z_2(n, x) = c_1, z_1(n, x) < b_n/a_n \text{ или } z_2(n, x) = c_2\}$ при $c_1 < q_{n-1}/q_n, c_2 \geq q_{n-1}/q_n$. Поэтому

$$\mu(D_m^{(j)} \cap D_n) \leq 2|k_n| \frac{b_n}{a_n} \mu(D_m^{(j)}).$$

Так как

$$\mu(D_n) = |k_n| q_n \mu(\tilde{A}_1(n)) = |k_n| \frac{b_n}{a_n} \mu(A(n)), \quad (36)$$

то

$$\mu(D_m^{(j)} \cap D_n) \leq \frac{2\mu(D_m^{(j)})\mu(D_n)}{\mu(A(n))} < 4\mu(D_m^{(j)})\mu(D_n).$$

Отсюда следует неравенство (35).

Учитывая (36) и $\frac{1}{4} < \mu(A(n))/2 < \alpha_n q_n \mu(\tilde{A}_1(n)) < \mu(A(n)) < 1$, имеем

$$\sum \frac{|k_n|}{\alpha_n} < \infty \iff \sum \mu(D_n) < \infty.$$

Пусть $\sum \mu(D_n) = \infty$. Подберем n и k так, чтобы

$$\|\varphi_{n+k} - \varphi_n\|^2 < \varepsilon, \quad \frac{1}{8} < \sum_{i=n+1}^{n+k} \mu(D_i) < \frac{1}{6}.$$

Используя (35), получаем

$$\begin{aligned} \|\varphi_{n+k} - \varphi_n\|^2 &= 2\mu\{x : \varphi_{n+k} \neq \varphi_n\} > 2 \sum_{i=n+1}^{n+k} \mu\left(D_i \setminus \bigcup_{\substack{j=n+1 \\ j \neq i}}^{n+k} D_j\right) \\ &= 2 \sum_{i=n+1}^{n+k} \mu(D_i) - 2 \sum_i \mu\left(D_i \cap \bigcup_{\substack{j=n+1 \\ j \neq i}}^{n+k} D_j\right) \\ &> \frac{1}{2} - 2 \sum_i \sum_j \mu(D_i \cap D_j) > \frac{5}{18}. \end{aligned}$$

Полученное противоречие доказывает сходимость ряда.

Покажем, что свойство 2) влечет свойство 1). Определим последовательности $\beta(n)$ и f_n , как и выше. Выберем $l_n, n = n_0, n_0 + 1, \dots$, так, чтобы

$$\mu\{x : (-1)^{l_n} f_n \neq (-1)^{l_{n-1}} f_{n-1}\} = |k_n| q_n \mu(\tilde{A}_1(n))$$

(см. рис. 7). Ясно, что $|k_n|q_n\mu(\tilde{A}_1(n)) < |k_n|/\alpha_n$. Следовательно, по лемме Бореля–Кантелли последовательность $(-1)^{l_n}f_n$ сходится к φ для п.в. x . Учитывая, что при $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \|\omega_\beta(x)f_n(T_\alpha x) - f_n(x)\| &= \|\omega_\beta(x)f_n(T_\alpha x) - \omega_{\beta(n)}(x)f_n(T_\alpha x)\| \\ &< 2\sqrt{\mu\{x : \omega_\beta(x) \neq \omega_{\beta(n)}(x)\}} \rightarrow 0, \end{aligned}$$

имеем $\omega_\beta(x)\varphi(T_\alpha x) = \varphi(x)$. Теорема 2 доказана.

СЛЕДСТВИЕ 2. Если α – число конечного типа (т.е. $\exists N \forall i \alpha_i < N$, где $\alpha = [\alpha_1, \alpha_2, \dots]$), то $T_{\alpha, \beta}$ не эргодично $\Leftrightarrow \exists m: \beta = m\alpha \pmod{1}$ и $\int \omega_\beta^{(q_n)}(x) d\mu \rightarrow 1$ при $n \rightarrow \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $n > n_0$ имеем $k_n = 0$. При переходе от n -й модели к $(n+1)$ -й локально горизонтальные расстояния растягиваются, а вертикальные сжимаются. Поэтому, рассматривая точки $x \in U_\varepsilon^{(0)}(n)$ в $(n+l)$ -й модели, $l = 1, 2, \dots$, получаем, что для любого n ($n > n_0$) $\beta \in U_\varepsilon^{(0)}(n)$ в точности тогда, когда $\beta = m\alpha \pmod{1}$.

Зафиксируем набор точек $x(n) \in X$ таких, что $z_2(n, x(n)) = 0$ и $b_n/a_n < z_1(n, x(n)) < 1$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Если $\beta = m\alpha \pmod{1}$, то $T_{\alpha, \beta}$ не эргодично $\Leftrightarrow \exists n: q_n > |m|$ & $\omega_\beta^{(q_n)}(x(n)) = \omega_\beta^{(q_{n+1})}(x(n+1)) = 1$. Действительно, в этом случае для любого n ($n > n_0$) $\beta \in U_\varepsilon^{(0)}(n)$. Учитывая предложение 1, имеем $|\varkappa_n(1)| \rightarrow 1$ при $n \rightarrow \infty$, и если $q_n > |m|$, $n > n_0$, то $\varkappa_n(1) = \omega_\beta^{(q_n)}(x(n))|\varkappa_n(1)|$. Осталось заметить, что если $q_n > |m|$ и $\omega_\beta^{(q_m)}(x(m)) = 1$ при $m = n, n+1$, то $\omega_\beta^{(q_{n+2})}(x(n+2)) = 1$.

Группа собственных чисел $\Lambda_d(T_{\alpha, \beta})$ преобразования $T_{\alpha, \beta}$ состоит из собственных чисел Λ_d^+ и Λ_d^- , соответствующих собственным функциям из подпространств H_+ и H_- , соответственно. Обозначим $\Lambda_\pm = \{\pm e^{2\pi i k \alpha}\}_{k \in \mathbb{Z}}$, $\Lambda_{\pm i} = \{\pm e^{\pi i \alpha(1+2k)}\}_{k \in \mathbb{Z}}$. Здесь (и до теоремы 4) i – мнимая единица.

Следующая теорема полностью описывает точечную часть спектра преобразования $T_{\alpha, \beta}$ в подпространстве H_- .

ТЕОРЕМА 3. Пусть преобразование $T_{\alpha, \beta}$ эргодично, тогда

- 1) $\Lambda_d^- \subseteq \Lambda_- \cup \Lambda_{\pm i}$;
- 2) $\forall \chi \in \{-, \pm i\}$ или $\Lambda_\chi \cap \Lambda_d^- = \emptyset$, или $\Lambda_\chi \subseteq \Lambda_d^-$;
- 3) $\forall \chi \in \{-, \pm i\}$ $\Lambda_\chi \subseteq \Lambda_d^- \Leftrightarrow \Lambda_\chi = \Lambda_d^-$;
- 4) $\Lambda_- \subseteq \Lambda_d^- \Leftrightarrow T_{\alpha, 1-\beta}$ не эргодично;
- 5) $\Lambda_{+i} \subseteq \Lambda_d^- \Leftrightarrow \alpha + \beta \neq 1$ & $T_{\alpha, \gamma}$ не эргодично, где

$$\gamma = \begin{cases} 2 - \beta - \alpha & \text{при } \beta + \alpha > 1, \\ \beta + \alpha & \text{при } \beta + \alpha < 1; \end{cases}$$

- 6) $\Lambda_{-i} \subseteq \Lambda_d^- \Leftrightarrow \beta + \alpha = 1$ или $T_{\alpha, |\beta + \alpha - 1|}$ не эргодично.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Пусть $T_{\alpha,\beta}f = \lambda f$ и $f \in H_-$, тогда $T_{\alpha,\beta}f^2 = \lambda^2 f^2$ и $f^2 \in H_+$, ($|f| \equiv c$, поэтому $f^2 \in L_2(X, \mu)$). Отсюда $f^2 = c_0 e^{2\pi i k x}$ и $\lambda^2 = e^{2\pi i k \alpha}$ для некоторых $k \in \mathbb{Z}$ и c_0 . Поэтому $\lambda \in \Lambda_{\pm} \cup \Lambda_{\pm i}$. Если $\lambda \in \Lambda_+$, то существуют две собственные функции $f_{\pm}$ из $H_{\pm}$ с собственным значением λ . Это противоречит эргодичности преобразования $T_{\alpha,\beta}$.

2) Этот пункт легко следует из группового свойства множества $\Lambda_d(T_{\alpha,\beta})$ и равенства $\Lambda_d^+ = \Lambda_+$.

3) Предположим противное. Ввиду 1) существуют такие χ_1 и χ_2 из $\{-, \pm i\}$ и $\lambda_j \in \Lambda_{\chi_j}$, $j = 1, 2$ ($\chi_1 \neq \chi_2$), что $T_{\alpha,\beta}f_j = \lambda_j f_j$ для некоторых $f_j \in H_-$ ($f_j \neq 0$). Следовательно, $f_1 \cdot f_2 \in H_+$ и $T_{\alpha,\beta}(f_1 \cdot f_2) = \lambda_1 \lambda_2 f_1 \cdot f_2$. Но $\lambda_1 \lambda_2 \notin \Lambda_+$. Полученное противоречие доказывает 3).

4) В силу 2) имеем

$$\begin{aligned} \Lambda_- \subseteq \Lambda_d^- &\iff -1 \in \Lambda_d^- \\ &\iff \exists f \in L_2(X, \mu) : f(x + \alpha) = -\omega_{\beta}(x)f(x) \\ &\iff \text{преобразование } S(x, y) = (x + \alpha, -\omega_{\beta}(x)y) \text{ не эргодично.} \end{aligned}$$

Осталось заметить, что S и $T_{\alpha,1-\beta}$ метрически изоморфны, так как для $\Phi(x, y) = (x + 1 - \beta, y)$ имеем

$$\begin{aligned} T_{\alpha,1-\beta}\Phi(x, y) &= (x + 1 - \beta + \alpha, \omega_{1-\beta}(x + 1 - \beta)y), \\ \Phi S(x, y) &= (x + 1 - \beta + \alpha, -\omega_{\beta}(x)y) \end{aligned}$$

и из определения $\omega_{\beta}(x)$ $\omega_{1-\beta}(x + 1 - \beta) \equiv -\omega_{\beta}(x)$.

5) Пусть $e^{\pi i \alpha} \in \Lambda_d^-$. Тогда $\tilde{T}_{\alpha,\beta}f^2(x, y) = e^{2\pi i \alpha}f^2(x, y)$ для некоторой $f \in H_-$. Поэтому $f^2(x, y) = c_0 e^{2\pi i x}$. Без ограничения общности можно считать, что $c_0 = 1$. Поэтому $f(x, y) = c(x)e^{\pi i x}y$ для некоторой измеримой функции $c(x)$ такой, что где для любого x $c(x) \in \{-1, +1\}$. Заметим, что

$$\tilde{T}_{\alpha,\beta}f(x, y) = c(x + \alpha)e^{\pi i(x + \alpha)}\varphi(x)\omega_{\beta}(x)y,$$

где

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < 1 - \alpha, \\ -1, & 1 - \alpha \leq x < 1. \end{cases}$$

Поэтому $c(x + \alpha) = \omega_{\beta}(x)\varphi(x)c(x) = -\omega_{\beta}(x)\omega_{1-\alpha}(x)c(x)$. Следовательно, преобразование $S(x, y) = (x + \alpha, -\omega_{\beta}(x)\omega_{1-\alpha}(x)y)$ не эргодично. Так как преобразование $\Psi(x, y) = (x + \alpha, -y)$ эргодично, то $\Psi \neq S$ и, следовательно, $\beta \neq 1 - \alpha$. Заметим, что функция $-\omega_{\beta}(x)\omega_{1-\alpha}(x)$ принимает значение $+1$ на некотором полуинтервале длины $|\beta + \alpha - 1|$. Поступая, как и при доказательстве п. 4), получаем, что $S(x, y)$ и $T_{\alpha,\gamma}$ метрически изоморфны.

Пусть $\alpha + \beta \neq 1$ и $T_{\alpha,\gamma}$ не эргодично. Тогда $S(x, y)$ не эргодично. Следовательно, существует функция $f \in L_2(X, \mu)$, обладающая свойством $f(x + \alpha) = -\omega_{\beta}(x)\omega_{1-\alpha}(x)f(x)$ для п.в. x . Так как

$$\begin{aligned} T_{\alpha,\beta}(f(x)e^{\pi i x}y) &= f(x + \alpha)e^{\pi i(x + \alpha)}\varphi(x)\omega_{\beta}(x)y \\ &= -\omega_{1-\alpha}(x)f(x)e^{\pi i(x + \alpha)}\varphi(x)y = e^{\pi i \alpha}f(x)e^{\pi i x}y, \end{aligned}$$

то $e^{\pi i \alpha} \in \Lambda_d^-$.

6) Доказательство аналогично 5).

СЛЕДСТВИЕ 3. Эргодическое преобразование $T_{\alpha,\beta}$ имеет в подпространстве H_- непрерывный спектр в точности тогда, когда $\alpha + \beta \neq 1$ и $T_{\alpha,1-\beta}$, $T_{\alpha,|\beta+\alpha-1|}$, $T_{\alpha,\gamma}$ эргодичны, где

$$\gamma = \begin{cases} 2 - \beta - \alpha & \text{при } \beta + \alpha > 1, \\ \beta + \alpha & \text{при } \beta + \alpha < 1. \end{cases}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Спектр неэргодических преобразований $T_{\alpha,\beta}$ (α – иррационально) устроен значительно проще: оператор $T_{\alpha,\beta}$ в подпространстве H_- спектрально изоморфен оператору T_α в H_+ .

ЗАМЕЧАНИЕ 6. В силу теоремы 3 для эргодического преобразования $T_{\alpha,\beta}$ $\Lambda_d(T_{\alpha,\beta}) = \Lambda_+ \cup \Lambda_\chi$, где $\chi \in \{\pm, \pm i\}$. Функция $\Lambda_d: (\alpha, \beta) \mapsto \Lambda_d(T_{\alpha,\beta})$ принимает все четыре возможных значения. Действительно, для пары (α_0, β) , где $\alpha_0 = [1, 1, \dots]$ и для любого $n \in \mathbb{Z}$ $\beta \neq n\alpha_0 \pmod{1}$ в силу следствий 2 и 3 имеем $\Lambda_d(T_{\alpha,\beta}) = \Lambda_+$. Для пары $(\alpha, \beta) = (\alpha_0, 2\alpha_0 - 1)$, пользуясь теоремой 2 и геометрическими моделями, несложно проверить, что преобразование $T_{\alpha,\beta}$ эргодично и $T_{\alpha,1-\beta}$ не эргодично, поэтому $\Lambda_d(T_{\alpha,\beta}) = \Lambda_+ \cup \Lambda_-$. Для пары $(\alpha, \beta) = (\alpha_0, 2 - 3\alpha_0)$ аналогично получим, что преобразование $T_{\alpha,\beta}$ эргодично, $T_{\alpha,\alpha+\beta}$ не эргодично. Поэтому $\Lambda_d(T_{\alpha,\beta}) = \Lambda_+ \cup \Lambda_{+i}$. Для пары $(\alpha, \beta) = (\alpha_0, 1 - \alpha_0)$ преобразование $T_{\alpha,\beta}$ эргодично, поэтому $\Lambda_d(T_{\alpha,\beta}) = \Lambda_+ \cup \Lambda_{-i}$.

СЛЕДСТВИЕ 4. Эргодическое преобразование $T_{\alpha,\beta}$ имеет чисто точечный спектр в точности тогда, когда $\Lambda_d(T_{\alpha,\beta}) \neq \Lambda_d^+ = \Lambda_+$.

Действительно, если $\Lambda_d(T_{\alpha,\beta}) = \Lambda_+$, то $\Lambda_d^- = \emptyset$ и спектр в H_- непрерывен. Пусть $\lambda \in \Lambda_d(T_{\alpha,\beta}) \setminus \Lambda_+$. Тогда существует $f \in H_- : T_{\alpha,\beta}f = \lambda f$. Поэтому $\varphi(x + \alpha) = \lambda \omega_\beta(x) \varphi(x)$ для п.в. x , где $f = \varphi(x)y$, $\varphi \in L_2(X, \mu)$. В силу эргодичности T_α для п.в. x $|\varphi(x)| = c$. Следовательно, $\varphi(x) \neq 0$ для п.в. x . Поэтому система функций $\{\varphi(x)e^{2\pi i k x}y\}_{k \in \mathbb{Z}}$ образует ортогональный базис в H_- . Осталось заметить, что $\varphi(x)e^{2\pi i k x}y$ собственная функция с собственными значениями $\lambda e^{2\pi i k \alpha}$.

ТЕОРЕМА 4. Эргодическое преобразование $T_{\alpha,\beta}$ имеет простой спектр.

Доказательство использует следующую лемму из спектральной теории унитарных операторов.

ЛЕММА 2. Пусть U унитарный оператор в сепарабельном гильбертовом пространстве H . Если максимальная спектральная кратность U не меньше, чем n , то существуют n нормированных, попарно ортогональных векторов $h_1, \dots, h_n$ таких, что для любого циклического относительно U пространства $C(h) \subseteq H$ справедливо неравенство

$$\sum_{i=1}^n d^2(h_i, C(h)) \geq n - 1,$$

где

$$d(g, C(h)) = \min_{f \in C(h)} \|g - f\|_{L_2}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ в целом следует доказательству в [8]. Действительно, разложим пространство H в непрерывную прямую сумму $H = \int_{S^1} \bigoplus H_\lambda d\sigma(\lambda)$ гильбертовых пространств H_λ , $\lambda \in S^1$, по мере максимального спектрального типа σ , причем $\dim H_\lambda$ как функция от λ совпадает с функцией кратности U , и $C(h)$ имеет вид $C(h) = \int_{S^1} \bigoplus C(h)_\lambda d\sigma(\lambda)$, где $C(h)_\lambda \subseteq H_\lambda$ и $\dim C(h)_\lambda \leq 1$ для почти всех λ по мере σ . Пусть $A_n = \{\lambda \in S^1 : \dim H_\lambda \geq n\}$, тогда $\sigma(A_n) > 0$. Пусть $\lambda \in A_n$ и $e_1(\lambda), \dots, e_n(\lambda)$ первые n векторов базиса в H_λ . Положим $h_i(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{\sigma(A_n)}} e_i(\lambda)$ при $\lambda \in A_n$ и 0 при $\lambda \notin A_n$. Очевидно, что $\|h_i(\lambda)\| = 1$ и $(h_i(\lambda), h_j(\lambda)) = 0$, $i \neq j$. Пусть $e'(\lambda)$ – нормированный вектор в $C(h)_\lambda$, если $\dim C(h)_\lambda = 1$, и 0 в противном случае. Каждый вектор $f \in C(h)$ записывается в виде $f(\lambda) = e'(\lambda)c(\lambda)$, где $|c(\lambda)| = \|f(\lambda)\|_{H_\lambda}$. Имеем

$$\begin{aligned} d^2(C(h), h_i) &= \min_{f \in C(h)} \int_{S^1} \|f(\lambda) - h_i(\lambda)\|_{H_\lambda}^2 d\sigma(\lambda) \\ &\geq \int_{A_n} \min_c \left\| ce'(\lambda) - \frac{1}{\sqrt{\sigma(A_n)}} e_i(\lambda) \right\|^2 d\sigma(\lambda) \\ &= \frac{1}{\sigma(A_n)} \int_{A_n} \min_c \left(|c|^2 - 2 \operatorname{Re}(c \cdot (e'(\lambda), e_i(\lambda))) + 1 \right) d\sigma(\lambda) \\ &\geq \frac{1}{\sigma(A_n)} \int_{A_n} \min_c \left(|c|^2 - 2|c| |(e'(\lambda), e_i(\lambda))| + 1 \right) d\sigma(\lambda) \\ &= \frac{1}{\sigma(A_n)} \int_{A_n} 1 - |(e'(\lambda), e_i(\lambda))|^2 d\sigma(\lambda). \end{aligned}$$

Поэтому, пользуясь неравенством Бесселя, получаем

$$\sum_{i=1}^n d^2(C(h), h_i) \geq n - \frac{1}{\sigma(A_n)} \int_{A_n} \sum_{i=1}^n |(e'(\lambda), e_i(\lambda))|^2 d\sigma(\lambda) \geq n - 1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4. В силу теоремы 3 пункт 1) имеем $\sigma_- \perp \sigma_+$, где $\sigma_\pm$ – мера максимального спектрального типа оператора $\tilde{T}_{\alpha,\beta}$ в подпространстве $H_\pm$. Поэтому достаточно показать, что оператор V_β имеет простой спектр. В силу леммы 2 достаточно предъявить число $\theta > 0$ и последовательность векторов h_i из $L_2(X, \mu)$, обладающих свойством

$$\forall h (\|h\| = 1) \quad \overline{\lim}_i d^2(C(h_i), h) \leq \frac{1}{2} - \theta. \quad (37)$$

Рассмотрим n -ю модель. Хотя бы для одного k из множества $\{n, n+1\}$ имеем

$$\mu(A(k)) \geq 2\mu(B(k)). \quad (38)$$

Выберем последовательность четных или нечетных номеров k , для которых верно (38). Для определенности все k нечетны. Переходя к подпоследовательности k_i получаем “стабилизирующуюся” модель, т.е. $z_j(k_i, \beta) \rightarrow z_j$, $j = 1, 2$, $b_{k_i}/a_{k_i} \rightarrow c_1$, $q_{k_i-1}/q_{k_i} \rightarrow c_2$ при $i \rightarrow \infty$. В силу (38) имеем

$$2c_1c_2 \leq 1. \quad (39)$$

Рис. 8

Положим $h_i = \chi_{D_i}$, где $D_i = \{x \in X : z_2(k_i, x) = 0, z_1(k_i, x) \leq 0.9\}$, если $z_1 \geq 1$, и $D_i = \{x \in X : z_2(k_i, x) = z_2(k_i, \beta) + 1/q_n, z_1(k_i, x) \leq 1\}$, если $z_1 < 1$. На рис. 8 изображена k_i -я модель и заштрихованы множества $\tilde{D}_i = \bigcup_{j=0}^{q_{k_i}-1} T_\alpha^j D_i$. В силу (39) при достаточно большом i

$$\mu(\tilde{D}_i) > 0.6. \quad (40)$$

Так как T_α эргодично и $\|\chi_{\tilde{D}_i} - \tilde{T}_\alpha \chi_{\tilde{D}_i}\| \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, то по лемме 1 для любой f

$$\int_{\tilde{D}_i} f d\mu - \int_X f d\mu \cdot \mu(\tilde{D}_i) \rightarrow 0 \quad \text{при } i \rightarrow \infty. \quad (41)$$

Свойство (37) достаточно доказать для всюду плотного подмножества векторов h , где $\|h\| = 1$. Поэтому рассмотрим только функцию h , постоянную на всех полуинтервалах в n -й модели, начиная с некоторого n . Так как h постоянна на полуинтервалах в $(k_i - 1)$ -й модели, то $h(x) = c(j)$ для любого x из $T_\alpha^j D_i$, $j = 0, 1, \dots, q_{k_i} - 1$. Так как $V_\beta^{-l} \chi_{D_i} = d(l) \chi_{T_\alpha^l D_i}$, где $d(l) \in \{-1, 1\}$, $l = 0, 1, \dots, q_{k_i} - 1$, то $\chi_{T_\alpha^l D_i} \in C(h_i)$, $l = 0, 1, \dots, q_{k_i} - 1$. Поэтому

$$h(x) \chi_{\tilde{D}_i} = \sum_{l=0}^{q_{k_i}-1} h(x) \chi_{T_\alpha^l D_i} = \sum_{l=0}^{q_{k_i}-1} c(l) \chi_{T_\alpha^l D_i} \in C(h_i).$$

Следовательно, учитывая (40), (41), имеем

$$\begin{aligned} d^2(C(h_i), h) &\leq \|h - h \chi_{\tilde{D}_i}\|^2 = \int_{X \setminus \tilde{D}_i} |h|^2 d\mu \\ &= (1 - \mu(\tilde{D}_i)) + \left(\mu(\tilde{D}_i) - \int_{\tilde{D}_i} |h|^2 d\mu \right) < 0.41 \end{aligned}$$

при достаточно большом i . Теорема 4 доказана.

§5. Приложения

Рассматриваемые геометрические модели позволяют исследовать функцию кратности спектра и для преобразований $T_{\alpha, \beta}^n$. Для иллюстрации этого остановимся на наиболее наглядном случае, когда $\alpha = [1, 1, \dots]$.

Рассмотрим $\tilde{m}(k) = \text{НОД}\{i : \exists c \neq 0 \exists n_1, n_2, \dots, n_j, \dots (n_j \in \mathbb{Z} \ \& \ n_j \rightarrow \infty, V^{n_j} \rightarrow cE \text{ при } j \rightarrow \infty \ \& \ \forall j \ r_j = r_1, \text{ где } r_j - \text{остаток от деления } n_j \text{ на } k \ \& \ i = r_1, \text{ если } r_1 \neq 0, i = k, \text{ если } r_1 = 0)\}$.

Докажем несколько вспомогательных утверждений.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9. *Функция $\tilde{m}(k)$ удовлетворяет следующим свойствам:*

- 1) $k : \tilde{m}(k)$ (k делится на $\tilde{m}(k)$);
- 2) $\tilde{m}(k) = k \Leftrightarrow$ (если для последовательности $\{n_j\}_{j=1}^\infty$ и числа c ($c \neq 0$) выполняется $n_j \rightarrow \infty \ \& \ V^{n_j} \rightarrow cE$ при $j \rightarrow \infty$, то существует такое j_0 , что для любого $j > j_0$ выполняется $n_j : k$);
- 3) $\text{НОД}\{k_1, k_2\} = 1 \Rightarrow \tilde{m}(k_1 k_2) = \tilde{m}(k_1) \tilde{m}(k_2)$;
- 4) для любого простого p либо $\tilde{m}(p^l) = p^l$ для любого l из $\mathbb{N}$, либо существует такое $l_0 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, что $\tilde{m}(p^l) = \text{НОД}\{p^l, p^{l_0}\}$ для любого l из $\mathbb{N}$.

Функция, удовлетворяющая свойствам 3) и 4), называется D -функцией.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 10. *Если существуют число $c \neq 0$ и такая последовательность $n_1, n_2, \dots$, что $U^{n_j} \rightarrow cE$ при $j \rightarrow \infty$, где U унитарный оператор в сепарабельном гильбертовом пространстве, то для любого k из $\mathbb{N}$*

$$m(U^k) \leq m(U) \tilde{m}(k)$$

(здесь $m(U)$ – спектральная кратность оператора U).

Используем обозначения §2. Пусть $\alpha = [1, 1, \dots] = (\sqrt{5} - 1)/2$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 11. 1) *Для любого простого числа $p > 2$ существуют последовательность $\{n_k\}_{k=1}^\infty$ и число $c \neq 0$ такие, что $n_k \in \mathbb{Z}$ для любого k , $V_\beta^{q_{n_k}} \rightarrow cE$, $n_k \rightarrow \infty$ при $k \rightarrow \infty$ и $\text{НОД}\{q_{n_k}, p\} = 1$.*

2) *Существуют число $c \neq 0$ и последовательность $\{n_k\}_{k=1}^\infty$ такие, что $n_k \in \mathbb{Z}$ для любого k , $V_\beta^{q_{n_k}} \rightarrow cE$, $n_k \rightarrow \infty$ при $k \rightarrow \infty$ и $\text{НОД}\{q_{n_k}, 4\} = 2$.*

3) *Если для любого целого $k \ \beta \neq \frac{1}{2} + k\alpha \pmod{1}$, то существуют такие $c \neq 0$ и $\{n_k\}_{k=1}^\infty$, что $n_k \in \mathbb{Z}$ для любого k , $n_k \rightarrow \infty$, $V_\beta^{q_{n_k}} \rightarrow cE$ при $k \rightarrow \infty$ и q_{n_k} нечетно.*

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 12. *Для любых α и β*

$$T_{\alpha,\beta}^2 \cong T_{\alpha,\beta+2\alpha}^2$$

($\cong$ – метрический изоморфизм).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 13. *Оператор $T_{\alpha,\beta}^2$ имеет однородный спектр в подпространстве H_- кратности 2 в точности тогда, когда $\tilde{T}_{\alpha,\beta} \sim \tilde{T}_{\alpha,1-\beta}$ ($\sim$ – спектральный изоморфизм).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 9. Свойство 2) очевидно. Докажем, что множество

$$J(k) = \{s : \exists c \neq 0 \exists \tilde{n}_1, \dots, \tilde{n}_j, \dots (\tilde{n}_j \rightarrow \infty, V^{k\tilde{n}_j+s} \rightarrow cE \text{ при } j \rightarrow \infty)\} \quad (42)$$

– подгруппа в $\mathbb{Z}$.

Если $V^{n_j(i)} \rightarrow c_i E$ при $j \rightarrow \infty$ ($c_i \neq 0$), $i = 1, 2$, то $V^{-n_j(i)} \rightarrow c_i E$ и, применив диагональный процесс, для некоторой последовательности $n'_j = n_j(1) + n_{j'(j)}(2)$ имеем $V^{n'_j} \rightarrow c_1 c_2 E$ при $j \rightarrow \infty$. Ясно, что из этого следует (42).

В силу (42) имеем $0 \in J(k)$, поэтому $k \in J(k)$ и, следовательно,

$$\tilde{m}(k) = \min\{i : i \in J(k), i > 0\}. \quad (43)$$

Свойство 1) доказано.

Пусть $\text{НОД}\{k_1, k_2\} = 1$. В силу (43) существуют $c_i \neq 0$ и последовательность $\tilde{n}_1, \dots, \tilde{n}_j, \dots$ такие, что $V^{k_1 k_2 \tilde{n}_j + \tilde{m}(k_1 k_2)} \rightarrow c_i E$, $\tilde{n}_j \rightarrow \infty$ при $j \rightarrow \infty$. Поэтому $\tilde{m}(k_1 k_2) \in J(k_1) \cap J(k_2)$. Учитывая (42) и (43), имеем $\tilde{m}(k_1 k_2) : \tilde{m}(k_1)$ и $\tilde{m}(k_1 k_2) : \tilde{m}(k_2)$. Поэтому $\tilde{m}(k_1 k_2) = q \tilde{m}(k_1) \tilde{m}(k_2)$, где $q \in \mathbb{N}$. Так как $k_1 k_2 : \tilde{m}(k_1 k_2)$, то $q = q_1 q_2$, где $q_i \in \mathbb{N}$ и $k_i : q_i \tilde{m}(k_i)$. В силу (43) существуют $c \neq 0$ и последовательность $\tilde{n}_1, \tilde{n}_2, \dots, \tilde{n}_j, \dots$ такие, что $V^{k_1 \tilde{n}_j + \tilde{m}(k_1)} \rightarrow c E$, $\tilde{n}_j \rightarrow \infty$ при $j \rightarrow \infty$. Выберем подпоследовательность $\tilde{n}_{j_l}$ так, чтобы остатки r_{j_l} при делении $\tilde{n}_{j_l}$ на k_2 не зависели от l . Тогда $r_{j_l} \cdot k_1 + \tilde{m}(k_1) \in J(k_1 k_2)$. Поэтому последовательно получим $r_{j_l} \cdot k_1 + \tilde{m}(k_1) : \tilde{m}(k_1 k_2)$; $r_{j_l} \cdot k_1 + \tilde{m}(k_1) : q_1 \tilde{m}(k_1)$; $\tilde{m}(k_1) : q_1 \tilde{m}(k_1)$, $q_1 = 1$. Аналогично, $q_2 = 1$. Свойство 3) доказано.

Зафиксируем простое число p и $l_0 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ такие, что $l_0 = \sup\{l : \text{если для последовательности } n_1, n_2, \dots \text{ и числа } c \text{ } (c \neq 0) \text{ выполняется } n_j \rightarrow \infty, V^{n_j} \rightarrow c E \text{ при } j \rightarrow \infty, \text{ то существует такой номер } j_l, \text{ что для любого } j > j_l \text{ выполняется } n_j : p^l\}\}$. В силу свойства 2) при $l_0 = \infty$ имеем $\tilde{m}(p^l) = p^l$ для любого l , при $l_0 < \infty$ имеем $\tilde{m}(p^l) = \text{НОД}\{p^l, p^{l_0}\}$ для $l \leq l_0$. Если $l_0 < l < \infty$, то $p^{l_0} \in J(p^l)$. В силу (43) свойство 4) доказано.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 10. Ясно, что ввиду спектральной теоремы о каноническом виде унитарного оператора достаточно доказать предложение 10 для оператора U в циклических подпространствах, фигурирующих в формулировке этой теоремы.

Пусть $m(U) = 1$. Зафиксируем элемент f из $L_2(X, \mu)$, обладающий свойством $C_U(f) = L_2(X, \mu)$. Для любого $i \in J(k)$ для некоторой последовательности $\tilde{n}_1, \tilde{n}_2, \dots$ и числа c_i ($c_i \neq 0$) имеем слабую сходимость последовательности $U^{k \tilde{n}_j} f$ к $c_i U^{-i} f$. Следовательно, $U^{-i} f \in C_{U^k}(f)$ для любого i из $J(k)$. Учитывая (42) и (43), получаем

$$\{U^j f\}_{j \in \mathbb{Z}} \subseteq C_{U^k}(f, Uf, \dots, U^{\tilde{m}(k)-1} f),$$

т.е. $C_{U^k}(f, Uf, \dots, U^{\tilde{m}(k)-1} f) = L_2(X, \mu)$. Поэтому

$$m(U^k) \leq \tilde{m}(k).$$

Доказательство окончено.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 11. Рассмотрим n -ю модель (n – нечетно) (см. рис. 9).

Имеем

$$\frac{b_n}{a_n} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q_{n-1}}{q_n} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

и для любого n $\tilde{l}_n = l_n$.

Рис. 9

Рассмотрим изменения местоположения точек $\mathbb{R}^2$ при переходах от n -й к $(n+1)$ -й модели (см. рис. 9). Очевидно, что существует такое $\varepsilon > 0$, что для любого n , начиная с некоторого n_0 , если $\beta \in U_\varepsilon(s)$, $s = n, n+1$, то $\beta \notin U_\varepsilon(n+2)$.

В силу замечаний 2 и 3 $\forall \varepsilon > 0$ имеем

$$(\beta \notin U_\varepsilon(n_k), k = 1, 2, \dots) \\ \implies (\exists c \neq 0 \exists \{k_l\}, l = 1, 2, \dots : V_\beta^{q_{n_{k_l}}} \rightarrow cE \text{ при } l \rightarrow \infty). \quad (44)$$

Поэтому пункт 1) следует из того, что для любого простого $p > 2$ существует бесконечно много троек $n, n+1, n+2$ со свойством $\text{НОД}\{q_n, p\} = \text{НОД}\{q_{n+1}, p\} = \text{НОД}\{q_{n+2}, p\} = 1$.

Аналогично, пункт 2) следует из того, что $\text{НОД}\{q_k, 4\} \leq 2$, $k = n, n+1, n+2$, для бесконечного множества значений n .

Рассмотрим при нечетных $q(n)$ (т.е. $n \not\equiv 0 \pmod{3}$) оператор $V_{1/2}^{q(n)}$. В силу замечания 2 для любой подпоследовательности n_i ($n_i \not\equiv 0 \pmod{3}$) существует подпоследовательность n_{i_k} , обладающая свойством $V_{1/2}^{q_{n_{i_k}}} \rightarrow \varkappa E$ при $k \rightarrow \infty$ для некоторого $\varkappa$. В частности,

$$(V_{1/2}^{q_{n_{i_k}}} \mathbf{1}, \mathbf{1}) \rightarrow \varkappa(\mathbf{1}, \mathbf{1}) \text{ при } k \rightarrow \infty.$$

Однако $V_{1/2}^k \mathbf{1} = \omega_{1/2}^{(k)}(x) = -\omega_{1/2}^{(k)}(x + \frac{1}{2})$ при нечетных k . Поэтому $(V_{1/2}^k \mathbf{1}, \mathbf{1}) = 0$ при нечетных k . Следовательно, $\varkappa = 0$. Поэтому

$$V_{1/2}^{q(n)} \rightarrow 0 \text{ при } n \not\equiv 0 \pmod{3} \text{ и } n \rightarrow \infty. \quad (45)$$

Зафиксируем $k \in \mathbb{Z}$. В силу (45) для любого $\varepsilon > 0$ при достаточно большом n $\frac{1}{2} \in U_\varepsilon(A_{n+1})$, где $A_{n+1} = l_{n+1} \cap l'_n$ и $n \equiv 1 \pmod{3}$ (см. рис. 9). Следовательно, для любого k при достаточно большом n $z_1(n, \frac{1}{2}) = z_1(n, \frac{1}{2} + k\alpha)$. Очевидно, что $z_2(n, \frac{1}{2}) - z_2(n, \frac{1}{2} + k\alpha) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Поэтому $\varkappa_n(1)(\frac{1}{2}) - \varkappa_n(1)(\frac{1}{2} + k\alpha) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Комбинируя с замечанием 2 и (45), имеем

$$\forall k \quad V_{1/2+k\alpha}^{q(n)} \rightarrow 0 \text{ при } n \not\equiv 0 \pmod{3} \text{ и } n \rightarrow \infty. \quad (46)$$

Зафиксируем такое β , что для любого $k \in \mathbb{Z}$ $\beta \neq \frac{1}{2} + k\alpha \pmod{1}$. Предположим, что для любого $\varepsilon > 0$ существует номер n_0 , что для любого $n > n_0$, если $n \equiv 1 \pmod{3}$, то $\beta \in U_\varepsilon(A_{n+1})$. В силу (45) выберем такой номер k , что $z_2(n+1, \beta) = z_2(n+1, \frac{1}{2} + k\alpha)$ и $\frac{1}{2} + k\alpha \in U_\varepsilon(A_{n'+1})$, если $n' \geq n$ и $n' \equiv 1 \pmod{3}$ (см. рис. 9). Ввиду (46) $\frac{1}{2} + k\alpha \rightarrow A_{3l+2}$ при $l \rightarrow \infty$ в топологии $\mathbb{R}^2$. Однако для любого $n' > n$ из геометрических моделей имеем

$$z_1(n' + 1, \beta) - z_1\left(n' + 1, \frac{1}{2} + k\alpha\right) = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} \left(z_1(n', \beta) - z_1\left(n', \frac{1}{2} + k\alpha\right) \right).$$

Поэтому существует такой $n' > n$, что $n' \equiv 1 \pmod{3}$ и $\frac{1}{2} + k\alpha \notin U_\varepsilon(n' + 1)$. Полученное противоречие, учитывая (44), доказывает пункт 3).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 12. Ясно, что для любого γ $T_{\alpha, \beta} \cong S_\gamma$, где $S_\gamma(x, y) = (x + \alpha \pmod{1}, \omega_\beta(x + \gamma)y)$. Для преобразования $S_{\gamma, s(x)}(x, y) = (x + \gamma \pmod{1}, s(x)y)$, где $s(x): X \rightarrow \{-1, 1\}$ измеримая функция, имеем

$$S_{\gamma, s(x)}^{-1} T_{\alpha, \beta} S_{\gamma, s(x)}(x, y) = (x + \alpha \pmod{1}, s(x + \alpha)s(x)\omega_\beta(x + \gamma)y).$$

Существует такое γ , что для $s(x) = \omega_\alpha(x)$ множества $J_\pm = \{x \in X : s(x + \alpha)s(x)\omega_\beta(x + \gamma) = \pm 1\}$ — суть подинтервалы на окружности X , обладающие свойством $|J_\pm| \in \{\pm(2\alpha + \beta) \pmod{1}\}$. Следовательно, либо $T_{\alpha, \beta} \cong T_{\alpha, \beta+2\alpha}$, либо $T_{\alpha, \beta} \cong T_{\alpha, -\beta-2\alpha}$. Но, очевидно, для любых α и γ имеем $T_{\alpha, \gamma}^2 = (T_{\alpha, \gamma} S_{0, -1})^2$ и $T_{\alpha, \gamma} S_{0, -1} \cong T_{\alpha, -\gamma}$. Поэтому $T_{\alpha, \gamma}^2 \cong T_{\alpha, -\gamma}^2$. Предложение 12 доказано.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 13. Так как $\omega_{1-\beta}(x) = -\omega_\beta(x + \beta)$, то $T_{\alpha, 1-\beta} \cong T'_{\alpha, 1-\beta}$ и $V_{1-\beta} \sim V'_{1-\beta}$, где $T'_{\alpha, 1-\beta}(x, y) = (x + \alpha \pmod{1}, -\omega_\beta(x)y)$, $V'_{1-\beta}: f(x) \mapsto -\omega_\beta(x)f(T_\alpha x)$.

Обозначим σ_f^+ , σ_f^- спектральные меры функции f операторов V_β , $V'_{1-\beta}$ и σ_{f+}^+ , σ_{f-}^- меры максимального спектрального типа, соответственно. Учитывая теорему 4, имеем

$$\tilde{T}_{\alpha, \beta} \sim \tilde{T}_{\alpha, 1-\beta} \iff V_\beta \sim V'_{1-\beta} \iff \sigma_{f+}^+ \sim \sigma_{f-}^-.$$

Для преобразования Фурье спектральных мер имеем

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_f^+(n) &= (V_\beta^n f, f) = (\omega_\beta^{(n)}(x) \tilde{T}_\alpha^n f, f) \\ &= (-1)^n ((V'_{1-\beta})^n f, f) = (-1)^n \hat{\sigma}_f^-(n) = \hat{\delta}_{1/2}(n) \hat{\sigma}_f^-(n). \end{aligned}$$

Поэтому $\sigma_f^+(\lambda) = \delta_{1/2} * \sigma_f^- = \sigma_f^-(\lambda + \frac{1}{2})$. Следовательно, $\sigma_{f+}^+ \sim \sigma_{f-}^- \iff \sigma_{f+}^+(\lambda + \frac{1}{2}) \iff$ оператор $\tilde{V}_\beta^2: L_2([0, 1], \sigma_{f+}^+) \rightarrow L_2([0, 1], \sigma_{f+}^+)$, где $\tilde{V}_\beta^2: \tilde{f}(\lambda) \mapsto e^{4\pi i \lambda} \tilde{f}(\lambda)$, имеет однородный спектр кратности 2.

Однако $\tilde{V}_\beta^2 \sim V_\beta^2$. Предложение 13 доказано.

При изучении функции кратности оператора $T_{\alpha, \beta}^n$ естественно ограничиться случаем вполне эргодического преобразования $T_{\alpha, \beta}$ (т.е. $T_{\alpha, \beta}^n$ эргодично для любого n). Действительно, в силу теоремы 3 преобразование $T_{\alpha, \beta}$ эргодично и не вполне эргодично в точности тогда, когда $-1 \in \Lambda_d$, т.е. $T_{\alpha, 1-\beta}$ не эргодично. В этом случае по следствию 4 $T_{\alpha, \beta}$ имеет чисто точечный спектр $\Lambda_d(T_{\alpha, \beta}) = \Lambda_+ \cup \Lambda_-$.

ТЕОРЕМА 5. Для любого вполне эргодического преобразования $T_{\alpha,\beta}$, где $\alpha = [1, 1, \dots]$, справедливо следующее:

- а) если для любого $k \in \mathbb{Z}$ $\beta \neq \frac{1}{2} + k\alpha \pmod{1}$, то для любого n ($n \neq 0$) преобразование $T_{\alpha,\beta}^n$ имеет простой спектр;
- б) если $\beta = \frac{1}{2} + k\alpha \pmod{1}$ для некоторого $k \in \mathbb{Z}$, то при нечетном n преобразование $T_{\alpha,\beta}^n$ имеет простой спектр, при четном n ($n \neq 0$) спектр $T_{\alpha,\beta}^n$ есть сумма точечной и двукратной непрерывной компонент.

ЗАМЕЧАНИЕ 7. В силу следствия 1 преобразования $T_{\alpha,\beta}^n$ имеют сингулярный спектр для любого n .

ЗАМЕЧАНИЕ 8. Хорошо известно, что множество преобразований T , для которых все преобразования T^n имеют простой сингулярный спектр, типично в группе всех сохраняющих меру преобразований пространства (X, μ) относительно слабой топологии. В силу теоремы 2 пункт а) теоремы 5 существенно уточняет этот факт в рассматриваемом подклассе.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 5. Для мер $\sigma_{\pm}$ максимального спектрального типа оператора $\tilde{T}_{\alpha,\beta}^n$ в пространстве $H_{\pm}$ имеем, что σ_{+} дискретна, следовательно, $\sigma_{+} \perp \sigma_{-}$.

Если для любого $k \in \mathbb{Z}$ $\beta \neq \frac{1}{2} + k\alpha \pmod{1}$, то для любого простого p , учитывая предложения 11 п. 1) и 9 п.п. 1), 2) для оператора V_{β} имеем $\tilde{m}(p) = 1$. Поэтому для любого n в силу предложений 10 и 9 п.п. 3), 4) имеем $m(V_{\beta}^n) = 1$. Пункт а) доказан.

Аналогично, если для некоторого k $\beta = \frac{1}{2} + k\alpha \pmod{1}$, то $\tilde{m}(p) = 1$ при $p \neq 2$, а также $\tilde{m}(4) \leq 2$. Поэтому $m(V_{\beta}^n) = 1$ при нечетном n и

$$m(V_{\beta}^n) \leq 2 \text{ при четном } n. \quad (47)$$

Для преобразования $S(x, y) = (x, s(x)y)$, где

$$s(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } \alpha - \frac{1}{2} \leq x < \frac{1}{2}, \\ -1 & \text{иначе,} \end{cases}$$

имеем

$$\begin{aligned} T_{\alpha,\alpha-1/2} S(x, y) &= (x + \alpha \pmod{1}, \omega_{\alpha-1/2}(x) s(x) y), \\ ST_{\alpha,3/2-\alpha}(x, y) &= (x + \alpha \pmod{1}, s(x + \alpha) \omega_{3/2-\alpha}(x) y). \end{aligned}$$

Учитывая равенство $\omega_{\alpha-1/2}(x) s(x) = -\omega_{1/2}(x) = s(x + \alpha) \omega_{3/2-\alpha}(x)$, получаем

$$T_{\alpha,\alpha-1/2} \cong T_{\alpha,3/2-\alpha}, \quad V_{3/2-\alpha} \sim V_{\alpha-1/2}.$$

Учитывая предложения 12 и 13, операторы $V_{1/2}^2$, $V_{\alpha-1/2}^2$, а следовательно, и $V_{1/2+k\alpha \pmod{1}}^2$ для любого $k \in \mathbb{Z}$ имеют однородный спектр кратности 2.

Учитывая (47), для любого n и k оператор $V_{1/2+k\alpha}^{2n}$ имеет однородный спектр кратности 2 ($n \neq 0$).

Осталось заметить, что мера σ_{-} для оператора $V_{1/2+k\alpha}$ (а следовательно, и $V_{1/2+k\alpha}^n$ для любого n) в силу следствия 3 непрерывна.

Список литературы

1. Каток А. Б., Стёпин А. М. Об аппроксимациях эргодических динамических систем периодическими преобразованиями // Докл. АН СССР. 1966. Т. 171. С. 1268–1271.
2. Katznelson Y., Ornstein D. S. The differentiability of the conjugation of certain diffeomorphisms of the circle // Ergodic Theory Dynam. Systems. 1989. V. 9. P. 643–680.
3. Ornstein D. S. On the root problem in ergodic theory // Proc. Sixth. Berkeley Sympos. Math. Statist and Probab. 1967. V. 11. P. 347–356.
4. Bourgain J. On the spectral type of Ornstein's class one transformations // Preprint. France: IHES, 1992. P. 1–11.
5. Helson H., Parry W. Cocycles and spectra // Ark. Mat. 1978. V. 16. P. 195–206.
6. Сян Дун Е. Минимальные множества и сосуществование почти периодических точек преобразований замкнутого интервала // Докл. АН СССР. 1989. Т. 309. № 5. С. 1049–1051.
7. Агеев О. Н. Перемешивание в компонентах и перекладывания // УМН. 1994. Т. 49. № 2. С. 143–144.
8. Стёпин А. М. О связи аппроксимативных и спектральных свойств метрических автоморфизмов // Матем. заметки. 1973. Т. 13. № 3. С. 403–409.
9. Корнфельд И. П., Синай Я. Г., Фомин С. В. Эргодическая теория. М.: Наука, 1980.

Московский государственный
технический университет им. Н. Э. Баумана

Поступила в редакцию
21.11.1996