Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Т. О. Банах, Т. Н. Радул, Топология пространств вероятностных мер, *Матем. сб.*, 1997, том 188, номер 7, 23–46

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm241>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.5.30

26 апреля 2023 г., 16:57:24

УДК 515.12

Т. О. Банах, Т. Н. Радул

Топология пространств вероятностных мер

В работе изучается пространство $\widehat{P}(X)$ вероятностных радоновских мер на метрическом пространстве X , а также его подпространства $P_c(X)$, $P_d(X)$ и $P_\omega(X)$, состоящие соответственно из непрерывных мер, дискретных мер и мер с конечными носителями. Доказано, что для любого полно-метризуемого пространства X пространство $\widehat{P}(X)$ гомеоморфно гильбертову пространству. Получена топологическая классификация пар $(\widehat{P}(K), \widehat{P}(X))$, $(\widehat{P}(K), P_d(Y))$, $(\widehat{P}(K), P_c(Z))$, где K – метрический компакт, X – всюду плотное борелевское подмножество в K , Y – всюду плотное F_σ -подмножество K , и Z – всюду несчетное всюду плотное борелевское подмножество K достаточно высокого борелевского класса. Найдены необходимые и достаточные условия на пару (X, Y) , при которых пара $(\widehat{P}(X), P_\omega(Y))$ гомеоморфна $(l^2(A), l^2_f(A))$.

Библиография: 28 названий.

Введение

Данное исследование (результаты которого анонсированы в [1]) посвящено изучению топологии пространств вероятностных мер и находится на стыке двух дисциплин – бесконечномерной топологии и теории меры.

Интерес бесконечномерной топологии к исследованию пространств вероятностных мер объясняется тем фактом, что пространства мер, обладая дополнительной структурой выпуклости, являются идеальными, естественно возникающими в “природе” бесконечномерными объектами для приложения мощных методов бесконечномерной топологии. Среди важнейших достижений последнего времени в этой области нужно отметить характеризационные теоремы Х. Торуньчика для Q - и l^2 -многообразий [2], [3], а также созданную М. Бествиной и Е. Могильским теорию поглощающих множеств, позволяющую топологически характеризовать некоторые пространства, являющиеся универсальными объектами в некоторых классах пространств [4]. Среди таких объектов нужно выделить построенные М. Бествиной и Е. Могильским подмножества Ω_α и Λ_α гильбертова куба, являющиеся сильно универсальными пространствами для мультипликативного и аддитивного борелевских классов $\mathcal{M}_\alpha$ и $\mathcal{A}_\alpha$, где α – счетный ординал [4].

До недавнего времени, изучение пространств вероятностных мер проводилось в рамках категории компактов, где элементарной является задача топологической классификации: пространство вероятностных мер $P(X)$ компакта X гомеоморфно либо конечномерному (если X конечно), либо бесконечномерному кубу $[0, 1]^n$, $0 \leq n \leq \infty$. За пределами компактов неясно уже, что именно считать пространством вероятностных мер на X .

Существует как минимум четыре подхода к этому вопросу (дающие тот же результат для компактных X): пусть X – тихоновское пространство. Рассмотрим следующие пространства мер (более подробно см. [5]–[8]):

- (1) $P(\beta X)$ – пространство вероятностных мер на стоун-чеховской компактификации βX пространства X , которое можно отождествить с пространством всех вероятностных конечно-аддитивных мер на X ;
- (2) $P_\beta(X) = \{\mu \in P(\beta X) \mid \text{supp}(\mu) \subset X \subset \beta X\} \subset P(\beta X)$ – пространство вероятностных мер с компактными носителями на X ;
- (3) $P_\tau(X) = \{\mu \in P(\beta X) \mid 1 = \mu^*(X) = \inf\{\mu(B) \mid B \supset X \text{ – борелевское подмножество в } \beta X\}\} \subset P(\beta X)$ – пространство вероятностных τ -гладких мер на X ;
- (4) $\hat{P}(X) = \{\mu \in P(\beta X) \mid 1 = \mu_*(X) = \sup\{\mu(B) \mid B \subset X \text{ – борелевское подмножество в } \beta X\}\} \subset P(\beta X)$ – пространство вероятностных радоновских мер на X .

Основной объект, с которым мы будем работать в этой статье – пространство $\hat{P}(X)$ вероятностных радоновских мер на X . Выбор этот объясняется тем фактом, что, в отличие от конструкции пространства $P(\beta X)$, конструкция $\hat{P}$ сохраняет метризуемость пространств (пространство $P(\beta X)$ метризуемо только в том случае, когда X – метрический компакт). В то же время, пространство $\hat{P}(X)$, в отличие от пространства $P_\beta(X)$, достаточно богато и содержит многие важные классы вероятностных мер (такие, например, как класс дискретных мер). Для некоторых пространств X (например, для абсолютных борелевских) пространство $\hat{P}(X)$ совпадает с пространством $P_\tau(X)$; более того, если X – сепарабельное абсолютное борелевское множество, тогда пространство $\hat{P}(X)$ содержит *все* счетно-аддитивные вероятностные меры на X .

Конструкция пространства $\hat{P}(X)$ детально изучалась в [7], [8] с категорной и общетопологической точек зрения. Там, в частности, доказано, что конструкция $\hat{P}$ функториальна на категории тихоновских пространств. Более того, функтор $\hat{P}$ сохраняет вложения, т.е. для пары пространств (X, Y) , $Y \subset X$, пространство $\hat{P}(Y)$ естественно вкладывается в $\hat{P}(X)$, поэтому можно говорить о паре $(\hat{P}(X), \hat{P}(Y))$. Кроме того, в отличие от конструкции пространства $P_\beta(X)$ (см. [9], [10]) конструкция $\hat{P}$ чутко реагирует на изменение дескриптивных свойств X : пространство $\hat{P}(X)$ принадлежит мультипликативному классу $\mathcal{M}_\alpha$ абсолютных борелевских множеств, где α – счетный ординал, тогда и только тогда, когда $X \in \mathcal{M}_\alpha$ [11] либо [7, 2.30]. Один из основных результатов этой статьи утверждает большее: для счетного ординала α и абсолютного борелевского пространства $X \in \mathcal{M}_\alpha \setminus \bigcup_{\xi < \alpha} \mathcal{M}_\xi$, пространство $\hat{P}(X)$, в зависимости от боревских свойств X , гомеоморфно либо Ω_α , либо $Q \setminus \Lambda_\alpha$, где Ω_α и Λ_α – уже упоминавшиеся подмножества гильбертова куба Q , универсальные для борелевских классов $\mathcal{M}_\alpha$ и $\mathcal{A}_\alpha$.

Теперь немного об организации данной работы. Статья состоит из пяти параграфов. Первый имеет подготовительный характер – в нем собраны все необходимые в дальнейшем сведения.

Во втором параграфе, посвященном изучению топологии пространств вероятностных радоновских мер, мы получим полную топологическую классификацию пар вида $(\hat{P}(X), \hat{P}(Y))$, где X – польское пространство и Y – его всюду плотное борелевское подмножество (см. теоремы 2.7 и 2.8), откуда вытекает уже упоми-

навшийся выше классификационный результат: для бесконечного сепарабельного абсолютного борелевского пространства X пространство $\widehat{P}(X)$ гомеоморфно одному из пространств: Q , ℓ^2 , Ω_α , $Q \setminus \Lambda_\alpha$, $2 \leq \alpha < \omega_1$. В частности, $\widehat{P}(X)$ гомеоморфно сепарабельному гильбертову пространству ℓ^2 тогда и только тогда, когда X – польское некомпактное пространство. Этот результат обобщается в теореме 2.11 на несепарабельный случай: пространство $\widehat{P}(X)$ гомеоморфно гильбертову пространству плотности A тогда и только тогда, когда X – полно-метризуемое (метризуемое полной метрикой) некомпактное пространство плотности A .

Третий параграф посвящен изучению топологии пространства $P_d(X)$ вероятностных дискретных мер. Здесь $P_d(X) = \{\mu \in \widehat{P}(X) \mid \mu(C) = 1 \text{ для некоторого счетного подмножества } C \subset X\} \subset \widehat{P}(X)$. Мы получим полную топологическую классификацию пар вида $(\widehat{P}(K), P_d(X))$, где K – метрический компакт и $X \subset K$ – его всюду плотное $F_{\sigma\delta}$ -подмножество (см. теорему 3.5).

В четвертом параграфе исследуется подпространство $P_c(X) \subset \widehat{P}(X)$ вероятностных непрерывных мер (мера μ на X называется непрерывной, если $\mu(\{x\}) = 0$ для любой точки $x \in X$). В отличие от §3, где мы смогли идентифицировать топологию пространства $P_d(X)$ лишь для пространств X маленькой борелевской сложности, здесь ситуация противоположная: мы получим топологическую классификацию пространств $P_c(X)$ лишь для достаточно сложных в борелевском отношении пространств X (более конкретно, для борелевских пространств, не принадлежащих классу $(\mathcal{M}_2 \cap \mathcal{S}_2) \setminus \mathcal{M}_1$), см. теоремы 4.5 и 4.8.

Наконец, в пятом параграфе мы изучаем топологию пары $(\widehat{P}(X), P_\omega(Y))$, где для $Y \subset X$ $P_\omega(Y)$ – подмножество $\widehat{P}(Y)$, состоящее из вероятностных мер с конечными носителями. Т. Ф. Жураев [12] получил необходимые и достаточные условия на пару (X, Y) , при которых пара $(\widehat{P}(X), P_\omega(Y))$ гомеоморфна паре (Q, σ) , где $\sigma = \{(t_i)_{i=1}^\infty \in s : |\{i \in \mathbb{N} : t_i \neq 0\}| < \infty\} \subset Q$. Несепарабельным аналогом пространства σ является подмножество

$$\ell_f^2(A) = \{(t_a)_{a \in A} \in \ell^2(A) : |\{a \in A \mid t_a \neq 0\}| < \infty\} \subset \ell^2(A)$$

гильбертова пространства плотности A . Основным результатом §5 является теорема 5.1, дающая необходимые и достаточные условия на пару (X, Y) , при которых пара $(\widehat{P}(X), P_\omega(Y))$ гомеоморфна $(\ell^2(A), \ell_f^2(A))$.

§1. Предварительные сведения

Все пространства, рассматриваемые в этой работе, предполагаются метризуемыми, а отображения – непрерывными. Через $\text{cov}(X)$ обозначается множество всех открытых покрытий пространства X . Пусть $\mathcal{U} \in \text{cov}(Y)$. Отображения $f, g: X \rightarrow Y$ называются $\mathcal{U}$ -близкими (обозначается $(f, g) \prec \mathcal{U}$), если для любого $x \in X$ существует такое $U \in \mathcal{U}$, что $\{f(x), g(x)\} \subset U$. Напомним, что $\text{St}(\mathcal{U}) = \{\text{St}(U, \mathcal{U}) \mid U \in \mathcal{U}\}$, где $\text{St}(U, \mathcal{U}) = \bigcup \{V \in \mathcal{U} \mid V \cap U \neq \emptyset\}$. Хорошо известно, что для каждого покрытия $\mathcal{U} \in \text{cov}(Y)$ метрического пространства (Y, d) существует такая положительная функция $\varepsilon: Y \rightarrow (0, 1]$, что для каждой точки $y \in Y$ существует множество $U \in \mathcal{U}$ с $\{y' \in Y \mid d(y, y') < \varepsilon(y)\} \subset U$. При этом функцию ε можно выбрать липшицевой с коэффициентом 1 [4].

Польским называется любое сепарабельное полно-метризуемое пространство. Через $A(N)R$ обозначается класс абсолютных (окрестностных) ретрактов для

класса метрических пространств. Хорошо известно, что каждое выпуклое подмножество локально выпуклого пространства является абсолютным ретрактом. Символом " $\cong$ " обозначаются гомеоморфизмы.

Замкнутое множество $A \subset X$ пространства X называется Z -множеством в X , если любое отображение $f: Q \rightarrow X$ гильбертова кирпича $Q = [-1, 1]^\omega$ равномерно аппроксимируется отображениями в $X \setminus A$. Подмножество $A \subset X$ пространства X называется σZ -множеством в X , если оно представляется в виде счетного объединения Z -множеств в X . Вложение $f: X \rightarrow Y$ называется Z -вложением, если $f(Y)$ — Z -множество в X . Подмножество $A \subset X$ называется гомотопически пренебрежимым в X , если существует такая гомотопия $H: X \times [0, 1] \rightarrow X$, что $H(x, 0) = x$ для всех $x \in X$ и $H(X \times (0, 1]) \cap A = \emptyset$. Очевидно, что замкнутое гомотопически пренебрежимое множество является Z -множеством. Хорошо известно (см., например, [13]), что для всюду плотного выпуклого множества $Y \subset X$ метризуемого подмножества X локально выпуклого пространства дополнение $X \setminus Y$ гомотопически пренебрежимо в X .

Напомним, что семейство $\mathcal{B}_0(X)$ всех борелевских подмножеств метризуемого пространства X представляется в виде $\bigcup_{\alpha < \omega_1} (\mathcal{M}_\alpha(X) \cup \mathcal{A}_\alpha(X))$, где $\mathcal{M}_0(X)$ ($\mathcal{A}_0(X)$) — класс всех замкнутых (открытых) подмножеств пространства X . Для каждого счетного ординала α $\mathcal{M}_\alpha(X)$ ($\mathcal{A}_\alpha(X)$) — семейство подмножеств X , представляемых в виде счетных пересечений (объединений) множеств из $\bigcup_{\xi < \alpha} \mathcal{A}_\xi(X)$ ($\bigcup_{\xi < \alpha} \mathcal{M}_\xi(X)$).

Через $\mathcal{M}_\alpha$ ($\mathcal{A}_\alpha$) обозначается класс пространств, гомеоморфных подмножествам класса $\mathcal{M}_\alpha(Q)$ ($\mathcal{A}_\alpha(Q)$), где $Q = [-1, 1]^\omega$ — гильбертов куб.

Семейство $\mathcal{C}$ топологических пространств называется:

- (1) *топологическим*, если для любого гомеоморфизма $f: X \rightarrow Y$ из $X \in \mathcal{C}$ следует $Y \in \mathcal{C}$;
- (2) *замкнуто-аддитивным*, если любое пространство $X = X_1 \cup X_2$, являющееся объединением двух своих замкнутых подмножеств $X_1, X_2 \in \mathcal{C}$, принадлежит классу $\mathcal{C}$;
- (3) *замкнуто-наследственным*, если для любого $X \in \mathcal{C}$ каждое замкнутое подмножество $Y \subset X$ принадлежит классу $\mathcal{C}$.

Хорошо известно, что классы $\mathcal{M}_\alpha$ и $\mathcal{A}_\alpha$ для $\alpha < \omega_1$, являются топологическими замкнуто-аддитивными и замкнуто-наследственными.

Пусть X, K — пространства и $Y \subset X$, $L \subset K$. Пара (X, Y) называется (K, L) -универсальной (соответственно, (K, L) -предуниверсальной), если существует замкнутое вложение (соответственно, совершенное отображение) $f: K \rightarrow X$ с $f^{-1}(Y) = L$. Пара (X, Y) называется *сильно* (K, L) -универсальной, если для любого покрытия $\mathcal{U} \in \text{cov}(X)$, любого замкнутого подмножества $B \subset K$ и отображения $f: K \rightarrow X$ такого, что $f|_B: B \rightarrow X$ — Z -вложение с $(f|_B)^{-1}(Y) = L \cap B$, существует такое Z -вложение $h: K \rightarrow X$, что $(h, f) \prec \mathcal{U}$, $h|_B = f|_B$ и $h^{-1}(Y) = L$.

Для классов $\mathcal{K}, \mathcal{C}$ пространств через $(\mathcal{K}, \mathcal{C})$ обозначается класс всех пар (K, C) , где $\mathcal{K} \ni K \supset C \in \mathcal{C}$. Пара (X, Y) называется *сильно* $(\mathcal{K}, \mathcal{C})$ -универсальной ($(\mathcal{K}, \mathcal{C})$ -предуниверсальной), если она *сильно* (K, L) -универсальна ((K, L) -предуниверсальна) для любой пары $(K, L) \in (\mathcal{K}, \mathcal{C})$.

Пара (X, Y) называется $(\mathcal{K}, \mathcal{C})$ -поглощающей, если

- (1) Y содержится в счетном объединении $\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$ Z -множеств $K_n \subset X$, причем для любого $n \in \mathbb{N}$ $(K_n, K_n \cap Y) \in (\mathcal{K}, \mathcal{C})$;
- (2) пара (X, Y) – сильно $(\mathcal{K}, \mathcal{C})$ -универсальна.

Две пары (X, Y) и (X', Y') называются *гомеоморфными*, если $h(Y) = Y'$ для некоторого гомеоморфизма $h: X \rightarrow X'$.

Напомним, что $Q = [-1, 1]^\omega$ – гильбертов куб, $s = (-1, 1)^\omega$ – его псевдовнутренность и $\ell^2(A) = \{(x_a)_{a \in A} \mid x_a \in \mathbb{R}, \sum_{a \in A} x_a^2 < \infty\}$ – стандартное гильбертово пространство плотности A . Если множество A счетно, соответствующее сепарабельное гильбертово пространство обозначается через ℓ^2 . Хорошо известно, что пространство ℓ^2 гомеоморфно псевдовнутренности s гильбертова куба [14], [15].

Основным инструментом в нашем дальнейшем исследовании является следующая

1.1. ТЕОРЕМА [16, 1.7.6]. Пусть $\mathcal{K}, \mathcal{C}$ – топологические замкнуто-аддитивные замкнуто-наследственные классы пространств и пусть $F = Q$ либо $F = s$. Любые две $(\mathcal{K}, \mathcal{C})$ -поглощающие пары (X, Y) и (X', Y') , где X, X' – топологические копии пространства F , гомеоморфны.

При применении теоремы 1.1 на практике, приходится проверять два перечисленных свойства, входящие в определение поглощающей пары, причем проверка сильной универсальности, как правило, технически сложна. На счастье, на данный момент, для пар *выпуклых* множеств получены глубокие результаты, позволяющие свести проверку сильной универсальности к доказательству предуниверсальности. Имеется ввиду следующая теорема, вытекающая из [16, 5.3.5, 5.2.6, 3.2.11 и 3.1.4].

1.2. ТЕОРЕМА. Пусть L_0 – локально-выпуклое линейное метрическое пространство, L – его линейное подпространство и $K \subset L_0$ – такое выпуклое замкнутое подмножество, что пересечение $K \cap L$ всюду плотно в K . Для любого счетного ординала $\alpha \geq 2$ пара $(K, K \cap L)$ сильно $(\mathcal{M}_0, \mathcal{M}_\alpha)$ -универсальна тогда и только тогда, когда она $(\mathcal{M}_0, \mathcal{M}_\alpha)$ -предуниверсальна.

Прилагая эту теорему к нашим задачам, мы, для метрического компакта X и подмножества $Y \subset X$, будем полагать $K = P(X)$ и $K \cap L = \hat{P}(Y)$, либо $K \cap L = P_d(Y)$, либо $K \cap L = P_c(Y)$ (пространства $\hat{P}(Y)$, $P_d(Y)$, $P_c(Y)$, как легко видеть, являются пересечениями $P(X)$ с соответствующими линейными подпространствами).

Пусть X – топологическое пространство с $X^\omega \cong X$. Для подмножества $A \subset X$ и $* \in A$ положим $W(A, *) = \{(a_i)_{i=1}^\infty \in A^\omega \mid a_i = * \text{ для почти всех } i\} \subset X^\omega$. Для каждого счетного ординала α мы построим пары $(X, \Omega_\alpha(X))$ и $(X, \Lambda_\alpha(X))$, которые в случаях $X = Q$, либо $X = s$, являются соответственно $(\mathcal{M}_0(X), \mathcal{M}_\alpha(X))$ - и $(\mathcal{M}_0(X), \mathcal{A}_\alpha(X))$ -поглощающими. Положим $(X, \Lambda_1(X)) \cong (X^\omega, W(X, *))$, где $* \in X$, и $(X, \Omega_1(X)) \cong (X^\omega, W(X \setminus \Lambda_1(X), *))$, где $* \in X \setminus \Lambda_1(X)$. Далее, предполагая, что для счетного ординала α пары $(X, \Omega_\xi(X))$ и $(X, \Lambda_\xi(X))$, где $\xi < \alpha$, уже построены, положим $(X, \Omega_\alpha(X)) \cong (X^\omega, \Lambda_\beta(X)^\omega)$, если $\alpha = \beta + 1$ и $(X, \Omega_\alpha(X)) \cong (\prod_{\xi < \alpha} X^\omega, \prod_{\xi < \alpha} \Lambda_\xi(X)^\omega)$, если α – предельный ординал; и

$(X, \Lambda_\alpha(X)) \cong (X^\omega, W(X \setminus \Omega_\alpha(X), *))$, где $*$ $\in X \setminus \Omega_\alpha(X)$. Кроме того, положим $\Lambda_0(X) = \emptyset$.

Отметим, что для любого счетного ординала α

$$(s, \Lambda_\alpha(s)) \cong (Q \times s, \Lambda_\alpha(Q) \times s) \quad \text{и} \quad (s, \Omega_\alpha(s)) \cong (Q \times s, \Omega_\alpha(Q) \times s).$$

Это следует из построения пар $(s, \Omega_\alpha(s))$ и $(s, \Lambda_\alpha(s))$, а также из известного факта, утверждающего, что пары $(s^\omega, W(s, 0))$ и $(Q \times s, \Sigma \times s)$ гомеоморфны (последнее является следствием теоремы 1 из [17]).

Еще несколько слов о конструкции $\hat{P}(X)$ пространства вероятностных радоновских мер на X (детали см. в [7], [8]). Напомним, что мерой на X называется любая счетно-аддитивная функция $\mu: \mathcal{B}(X) \rightarrow [0, \infty)$, определенная на семействе $\mathcal{B}(X)$ всех борелевских подмножеств пространства X . При этом, мера μ называется *вероятностной*, если $\mu(X) = 1$ и *радоновской*, если для любого борелевского множества $B \subset X$ и любого $\varepsilon > 0$ существует компакт $K \subset B$ с $\mu(B \setminus K) < \varepsilon$.

Кроме внешнего описания (через стоун-чеховские компактификации), существует и внутреннее описание пространства $\hat{P}(X)$ — это пространство всех вероятностных радоновских мер на X , наделенное топологией, предбазу которой составляют множества вида

$$\left\{ \mu \in \hat{P}(X) : \left| \int f d\mu - \int f d\mu_0 \right| < \varepsilon \right\},$$

где $\mu_0 \in \hat{P}(X)$ и $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ — ограниченная непрерывная функция на X .

Если (X, d) — ограниченное метрическое пространство, тогда пространство $\hat{P}(X)$ метризуемо, причем метрика $\hat{d}$ на $\hat{P}(X)$ может быть выписана в явном виде:

$$\hat{d}(\mu_1, \mu_2) = \inf \{ \lambda(d) \mid \lambda \in \hat{P}(X \times X), \hat{P}(\text{pr}_i)(\lambda) = \mu_i, i = 1, 2 \},$$

где $\text{pr}_i: X \times X \rightarrow X$ — соответствующие проекции. При этом, если d — полная метрика на X , тогда $\hat{d}$ — полная метрика на $\hat{P}(X)$. Мы будем использовать следующее свойство метрики $\hat{d}$ (доказанное в [8, §4]): $\hat{d}((1-t)\mu + t\eta, \mu) \leq t\hat{d}(\mu, \eta)$ для любых $t \in [0, 1]$ и мер $\mu, \eta \in \hat{P}(X)$.

Если Y — борелевское подмножество пространства X , тогда пространство $\hat{P}(Y)$ может быть отождествлено с подмножеством $\{\mu \in \hat{P}(X) \mid \mu(Y) = 1\}$ в $\hat{P}(X)$. Как мы уже упоминали, для любого счетного ординала α $Y \in \mathcal{M}_\alpha(X)$ тогда и только тогда, когда $\hat{P}(Y) \in \mathcal{M}_\alpha(\hat{P}(X))$ [11]. В частности, если F — замкнутое множество в X , тогда $\hat{P}(F)$ замкнуто в $\hat{P}(X)$. Более того, для любого $a \in \mathbb{R}$ множество $\{\mu \in \hat{P}(X) \mid \mu(F) \geq a\}$ тоже замкнуто в $\hat{P}(X)$ (см. [7, 1.19]).

§ 2. Топология пространств $\hat{P}(X)$

В этом параграфе мы получим полную топологическую классификацию пар вида $(\hat{P}(X), \hat{P}(Y))$, где X — польское пространство и $Y \subset X$ — его всюду плотное борелевское подмножество.

Если X — метризуемое пространство, то $\hat{P}(X)$ является метризуемым выпуклым подмножеством локально-выпуклого пространства (см. [7, §2]). Отсюда и из обобщенной теоремы Титце [14] вытекает

2.1. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Для любого метризуемого пространства X пространство $\hat{P}(X)$ является абсолютным ретрактом для класса метрических пространств.

Напомним, что X называется пространством первой категории, если X представляется в виде счетного объединения нигде не плотных подмножеств. Если в X существует непустое открытое подмножество, являющееся пространством первой категории, тогда X называется пространством где-то первой категории; X называется бэровским пространством, если для любой последовательности $\{U_n\}$ открытых всюду плотных подмножеств X , пересечение $\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$ всюду плотно в X . Хорошо известно, что класс пространств где-то первой категории совпадает с классом пространств, не являющихся бэровскими.

2.2. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть $Y \subset X$ – пара метрических пространств. Если пространство Y не является бэровским, тогда $\hat{P}(Y)$ содержится в σZ -множестве в $\hat{P}(X)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $U \subset Y$ – непустое открытое множество в Y , являющееся пространством первой категории. Положим $F = \text{cl}_X(Y \setminus U)$. Поскольку U – множество первой категории, $U \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, где $F_n \subset F_{n+1} \subset X$, $n \in \mathbb{N}$, – замкнутые нигде не плотные множества в X . Очевидно, что $Y \subset F \cup (\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n)$. Тогда $\hat{P}(Y) = \hat{P}(F) \cup (\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)$, где $A_n = \{\mu \in \hat{P}(X) \mid \mu(F_n) \geq 2^{-n}\}$, $n \geq 1$. Поскольку $F \neq X$, то $\hat{P}(F)$ – Z -множество в $\hat{P}(X)$. Действительно, множество $\hat{P}(F)$ замкнуто в $\hat{P}(X)$. Кроме того, $\hat{P}(X) \setminus \hat{P}(F)$ – выпуклое всюду плотное подмножество в AR -пространстве $\hat{P}(X)$. Отсюда следует, что замкнутое множество $\hat{P}(F)$ – гомотопически пренебрежимо в $\hat{P}(X)$, а значит, является Z -множеством в $\hat{P}(X)$. Аналогично, множества A_n , $n \in \mathbb{N}$, являются Z -множествами в $\hat{P}(X)$ (поскольку F_n – нигде не плотное замкнутое множество, то A_n – замкнутое подмножество $\hat{P}(X)$, причем его дополнение $\hat{P}(X) \setminus A_n$ – выпуклое всюду плотное множество в $\hat{P}(X)$). Таким образом, множество $\hat{P}(Y)$ содержится в σZ -множестве $\hat{P}(F) \cup (\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \subset \hat{P}(X)$.

2.3. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть Y – всюду плотное борелевское подмножество метрического пространства X . Если пространство Y – бэровское, тогда $\hat{P}(X) \setminus \hat{P}(Y)$ содержится в σZ -множестве в $\hat{P}(X)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку Y – борелевское подмножество в X , то $Y = G \cup F$, где G – G_δ -подмножество и F – множество первой категории в X [18, §11]. Тогда $\hat{P}(X) \setminus \hat{P}(Y) \subset \hat{P}(X) \setminus \hat{P}(G)$. Поскольку пространство Y – бэровское, то G – всюду плотное множество в X . Тогда $X \setminus G = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, где $F_n \subset F_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$, – замкнутые нигде не плотные подмножества в X . Следовательно, $\hat{P}(X) \setminus \hat{P}(G) = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, где $A_n = \{\mu \in \hat{P}(X) \mid \mu(F_n) \geq 2^{-n}\}$, $n \in \mathbb{N}$. Поскольку F_n , $n \in \mathbb{N}$, – замкнутые нигде не плотные подмножества X , то A_n – Z -множество в $\hat{P}(X)$ для каждого $n \in \mathbb{N}$. Таким образом, $\hat{P}(X) \setminus \hat{P}(Y) \subset \hat{P}(X) \setminus \hat{P}(G) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ содержится в σZ -подмножестве $\hat{P}(X)$.

2.4. ТЕОРЕМА. Пусть X – бесконечный метрический компакт и $Y \neq X$ – его всюду плотное G_δ -подмножество. Тогда пара $(P(X), \hat{P}(Y))$ гомеоморфна паре (Q, s) .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно показать, что пара $(P(X), P(X) \setminus \widehat{P}(Y))$ гомеоморфна паре (Q, Σ) . Поскольку X – бесконечный компакт, $P(X)$ – бесконечномерный выпуклый компакт в локально выпуклом пространстве, который, в силу теоремы Келлера–Кли [15, 8.2.4], гомеоморфен гильбертову кирпичу Q . Отметим, что множество $P(X) \setminus \widehat{P}(Y)$ – выпукло и всюду плотно в $P(X)$. Поскольку $\widehat{P}(Y)$ – выпуклое всюду плотное множество в $P(X)$, то множество $P(X) \setminus \widehat{P}(Y)$ – гомотопически пренебрежимо в $P(X)$. Следовательно, каждый компакт в $P(X) \setminus \widehat{P}(Y)$ является Z -множеством в $P(X)$. Далее, пространство $P(X) \setminus \widehat{P}(Y)$ содержит бесконечномерный выпуклый компакт $K = \{\mu \in P(X) \mid \mu(\{x\}) \geq \frac{1}{2}\}$, где $x \in X \setminus Y$. Согласно предложению 3.4 [19] множество $P(X) \setminus \widehat{P}(Y)$ содержит скелетоид для компактов. Поскольку Y – G_δ -множество в X , то $\widehat{P}(Y)$ – G_δ -множество в $P(X)$ (см. [11] либо [7, 2.30]). Отсюда $P(X) \setminus \widehat{P}(Y)$ – σ -компактное множество, а, следовательно, и σZ -множество в $P(X)$. По [15, §6.5] пара $(P(X), P(X) \setminus \widehat{P}(Y))$ гомеоморфна паре (Q, s) .

2.5. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть $1 \leq \alpha < \omega_1$ – счетный ординал и $Y \notin \bigcup_{\xi < \alpha} \mathcal{M}_\xi(X)$ – всюду плотное борелевское подмножество метрического компакта X . Тогда пара $(\widehat{P}(X), \widehat{P}(Y))$ сильно $(\mathcal{M}_0, \mathcal{M}_\alpha)$ -универсальна.

Для доказательства нам понадобятся некоторые вспомогательные леммы.

Через $C = \{0, 1\}^\omega$ обозначим канторов куб. По аналогии с парами $(C, \Lambda_\alpha(C))$, $(C, \Omega_\alpha(C))$, для каждого счетного ординала α мы построим пары $(C, A_\alpha(C))$, $(C, M_\alpha(C))$. Положим $(C, M_1(C)) \cong (C^\omega, (C \setminus \Lambda_1(C))^\omega)$ и $(C, A_1(C)) = (C, C \setminus M_1(C))$. Предположив, что для счетного ординала α пары $(C, M_\xi(C))$ и $(C, A_\xi(C))$, где $\xi < \alpha$, уже построены, положим $(C, M_\alpha(C)) \cong (C^\omega, A_\beta(C)^\omega)$, если $\alpha = \beta + 1$; и $(C, M_\alpha(C)) \cong (\prod_{\xi < \alpha} C^\omega, \prod_{\xi < \alpha} A_\xi(C)^\omega)$, если α – предельный ординал; и $(C, A_\alpha(C)) = (C, C \setminus M_\alpha(C))$. Легко видеть, что $A_\alpha(C) \in \mathcal{A}_\alpha(C)$ и $M_\alpha(C) \in \mathcal{M}_\alpha(C)$.

2.6. ЛЕММА. Для каждого счетного ординала $\alpha \geq 1$ пара $(P(C), \widehat{P}(A_\alpha(C)))$ $(\mathcal{M}_0, \mathcal{M}_{\alpha+1})$ -предуниверсальна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем сначала, что пара $(P(C), \widehat{P}(A_1(C)))$ $(\mathcal{M}_0, \mathcal{A}_1)$ -предуниверсальна. По теореме 2.4 пара $(P(C), \widehat{P}(M_1(C)))$ гомеоморфна паре (Q, s) . Пусть $h: (Q, s) \rightarrow (P(C), \widehat{P}(M_1(C)))$ – соответствующий гомеоморфизм пар. Положим $H: Q \rightarrow P(C^\omega)$ – отображение, определенное формулой $H(q) = h(q) \otimes h(q) \otimes \dots$ – бесконечное тензорное произведение мер $h(q) \in P(C)$ для $q \in Q$ (см. [20, §2.6], либо [7, §2]). При этом $H(s) \subset \widehat{P}(M_1(C)^\omega)$ и $H(\Sigma) \subset \widehat{P}(C^\omega \setminus (M_1(C))^\omega)$, где $\Sigma = Q \setminus s$. Теперь пусть $f: (C^\omega, M_1(C)^\omega) \rightarrow (C, M_1(C))$ – гомеоморфизм пар. Тогда отображение $\xi = P(f) \circ H: Q \rightarrow P(C)$ обладает следующими свойствами: $\xi(s) \subset \widehat{P}(M_1(C))$ и $\xi(\Sigma) \subset \widehat{P}(C \setminus M_1(C))$. Следовательно, $\xi^{-1}(\widehat{P}(A_1(C))) = \Sigma$. Поскольку пара (Q, Σ) сильно $(\mathcal{M}_0, \mathcal{A}_1)$ -универсальна [15, §6.5], то она $(\mathcal{M}_0, \mathcal{A}_1)$ -предуниверсальна. Следовательно, и пара $(P(C), \widehat{P}(A_1(C)))$ $(\mathcal{M}_0, \mathcal{A}_1)$ -предуниверсальна. Покажем, что она $(\mathcal{M}_0, \mathcal{M}_2)$ -предуниверсальна. Пусть K – компакт и $K \supset L \in \mathcal{M}_2$. Тогда $L = \bigcap_{n=1}^\infty L_n$, где $K \supset L_n \in \mathcal{A}_1$, $n \in \mathbb{N}$. Поскольку пара $(P(C), \widehat{P}(A_1(C)))$ $(\mathcal{M}_0, \mathcal{A}_1)$ -предуниверсальна, то для каждого $n \in \mathbb{N}$ существует такое непрерывное отображение $\xi_n: K \rightarrow P(C)$, что $\xi_n^{-1}(\widehat{P}(A_1(C))) = L_n$. Тогда отображение

$\xi: K \rightarrow P(C)$, определенное формулой $\xi(q) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \xi_n(q)$, $q \in K$, обладает свойством:

$$\xi^{-1}(\widehat{P}(A_1(C))) = \bigcap_{n=1}^{\infty} L_n = L.$$

То есть, пара $(P(C), \widehat{P}(A_1(C)))$ $(\mathcal{M}_0, \mathcal{M}_2)$ -предуниверсальна.

Пусть $\alpha > 1$ – счетный ординал. Предположим, что для всех ординалов $\xi < \alpha$ мы уже доказали, что пара $(P(C), \widehat{P}(A_\xi(C)))$ $(\mathcal{M}_0, \mathcal{M}_{\xi+1})$ -предуниверсальна. Покажем сначала, что пара $(P(C), \widehat{P}(A_\alpha(C)))$ $(\mathcal{M}_0, \mathcal{A}_\alpha)$ -предуниверсальна.

Предположим, что $\alpha = \beta + 1$ – непереломный ординал. Пусть K – компакт и $K \supset L \in \mathcal{A}_\alpha$. Тогда $K \setminus L \in \mathcal{M}_\alpha$. Согласно предположению трансфинитной индукции, пара $(P(C), \widehat{P}(A_\beta(C)))$ $(\mathcal{M}_0, \mathcal{M}_\alpha)$ -предуниверсальна. Следовательно, существует такое непрерывное отображение $\xi: K \rightarrow P(C)$, что $\xi^{-1}(\widehat{P}(A_\beta(C))) = K \setminus L$. Определим отображение $H: K \rightarrow P(C^\omega)$ формулой $H(x) = \xi(x) \otimes \xi(x) \otimes \dots$, $x \in K$. Легко видеть, что $H(K \setminus L) \subset \widehat{P}(A_\beta(C)^\omega)$ и $H(L) \subset \widehat{P}(C^\omega \setminus (A_\beta(C)^\omega))$. Пусть $h: C^\omega \rightarrow C$ – гомеоморфизм, для которого $h(C^\omega \setminus A_\beta(C)^\omega) = A_\alpha(C)$. Тогда отображение $f = P(h) \circ H: K \rightarrow P(C)$ обладает следующим свойством:

$$f^{-1}(\widehat{P}(A_\alpha(C))) = L.$$

Таким образом, пара $(P(C), \widehat{P}(A_\alpha(C)))$ $(\mathcal{M}_0, \mathcal{A}_\alpha)$ -предуниверсальна.

Теперь пусть α – предельный ординал, K – компакт и $K \supset L \in \mathcal{A}_\alpha$. Тогда $K \setminus L \in \mathcal{M}_\alpha$ и, следовательно,

$$K \setminus L = \bigcap_{n=1}^{\infty} N_n,$$

где

$$N_n \in \bigcup_{\xi < \alpha} \mathcal{M}_\xi = \bigcup_{\xi < \alpha} \mathcal{A}_\xi$$

для каждого $n \in \mathbb{N}$. Поскольку

$$(C, M_\alpha(C)) \cong \left(\prod_{\xi < \alpha} C^\omega, \prod_{\xi < \alpha} A_\xi(C)^\omega \right)$$

и для каждого $\xi < \alpha$ пара $(P(C), \widehat{P}(A_\xi(C)))$ $(\mathcal{M}_0, \mathcal{M}_{\xi+1})$ -предуниверсальна, то для каждого $n \in \mathbb{N}$ существует такое отображение $\xi_n: K \rightarrow P(C)$, что $\xi_n^{-1}(\widehat{P}(M_\alpha(C))) = N_n$. Заменяя, если необходимо, отображение ξ_n его счетной тензорной степенью и используя гомеоморфизм $(C, M_\alpha(C)) \cong (C^\omega, M_\alpha(C)^\omega)$, можно добиться чтобы $\xi_n(N_n) \subset \widehat{P}(M_\alpha(C))$ и $\xi_n(K \setminus N_n) \subset \widehat{P}(C \setminus M_\alpha(C))$. Рассмотрим теперь поточечное тензорное произведение

$$H = \bigotimes_{n=1}^{\infty} \xi_n: K \rightarrow P(C^\omega).$$

Нетрудно убедиться, что $H(K \setminus L) \subset \widehat{P}(M_\alpha(C)^\omega)$ и $H(L) \subset \widehat{P}(C^\omega \setminus M_\alpha(C)^\omega)$. Пусть $h: (C^\omega, M_\alpha(C)^\omega) \rightarrow (C, M_\alpha(C))$ – гомеоморфизм пар. Тогда отображение $f = P(h) \circ H: K \rightarrow P(C)$ обладает свойством:

$$f^{-1}(\widehat{P}(C \setminus M_\alpha(C))) = f^{-1}(\widehat{P}(A_\alpha(C))) = L.$$

Таким образом, пара $(P(C), \widehat{P}(A_\alpha(C)))$ $(\mathcal{M}_0, \mathcal{A}_\alpha)$ -предуниверсальна.

Покажем, что пара $(P(C), \widehat{P}(A_\alpha(C)))$ $(\mathcal{M}_0, \mathcal{M}_{\alpha+1})$ -предуниверсальна. Пусть K – компакт и $K \supset L \in \mathcal{M}_{\alpha+1}$. Тогда $L = \bigcap_{n=1}^\infty L_n$, где $K \supset L_n \in \mathcal{A}_\alpha$, $n \in \mathbb{N}$. Поскольку пара $(P(C), \widehat{P}(A_\alpha(C)))$ $(\mathcal{M}_0, \mathcal{A}_\alpha)$ -предуниверсальна, для каждого $n \in \mathbb{N}$ существует такое непрерывное отображение $\xi_n: K \rightarrow P(C)$, что $\xi_n^{-1}(\widehat{P}(A_\alpha(C))) = L_n$. Тогда отображение $\xi: K \rightarrow P(C)$, определенное формулой $\xi(x) = \sum_{n=1}^\infty 2^{-n} \xi_n(x)$, $x \in K$, обладает свойством

$$\xi^{-1}(\widehat{P}(A_\alpha(C))) = L.$$

Таким образом, пара $(P(C), \widehat{P}(A_\alpha(C)))$ $(\mathcal{M}_0, \mathcal{M}_{\alpha+1})$ -предуниверсальна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 2.5. Пусть $1 \leq \alpha < \omega_1$ – счетный ординал и $Y \notin \bigcup_{\xi < \alpha} \mathcal{M}_\xi(X)$ – всюду плотное борелевское подмножество компакта X . Если $Y \in \mathcal{M}_1 \setminus \mathcal{M}_0$, то из теоремы 2.4 следует, что пара $(P(X), \widehat{P}(Y))$ гомеоморфна паре (Q, s) и, следовательно, является сильно $(\mathcal{M}_0, \mathcal{M}_1)$ -универсальной. Поэтому далее мы предполагаем, что $Y \notin \mathcal{M}_1$.

Далее, рассмотрим два случая:

- (1) $\alpha = \beta + 1$ – неперелый ординал;
- (2) α – предельный ординал.

1) Пусть $\alpha = \beta + 1$. Тогда $Y \notin \mathcal{M}_\beta$. Согласно [21, 22.13], существует такое отображение $\xi: C \rightarrow X$, что $\xi^{-1}(Y) = A_\beta(C)$. Поскольку функтор $\widehat{P}$ сохраняет прообразы (см. [7, 2.14]), то для отображения $\widehat{P}(\xi): \widehat{P}(C) \rightarrow \widehat{P}(X)$ выполняется равенство $\widehat{P}(\xi)^{-1}(\widehat{P}(Y)) = \widehat{P}(A_\beta(C))$. По лемме 2.6 пара $(P(C), \widehat{P}(A_\beta(C)))$ $(\mathcal{M}_0, \mathcal{M}_\alpha)$ -предуниверсальна. Следовательно, пара $(P(X), \widehat{P}(Y))$ тоже $(\mathcal{M}_0, \mathcal{M}_\alpha)$ -предуниверсальна. По теореме 1.2 пара $(P(X), \widehat{P}(Y))$ сильно $(\mathcal{M}_0, \mathcal{M}_\alpha)$ -универсальна.

Теперь пусть α – предельный ординал и пусть $\{\alpha_n\}$ – монотонная последовательность ординалов $< \alpha$, сходящаяся к α .

Пусть K – компакт и $L \subset K \in \mathcal{M}_\alpha$. Тогда множество L представимо в виде пересечения $L = \bigcap_{n=1}^\infty L_n$, где $L_n \subset K$ – подмножества класса $\mathcal{M}_{\alpha_n}$. Из доказанного выше следует, что для каждого $n \in \mathbb{N}$ пара $(P(X), \widehat{P}(Y))$ $(\mathcal{M}_0, \mathcal{M}_{\alpha_n})$ -предуниверсальна, откуда вытекает существование непрерывного отображения $\xi_n: K \rightarrow P(X)$ со свойством $\xi_n^{-1}(\widehat{P}(Y)) = L_n$. Пусть $\xi: K \rightarrow P(X)$ – отображение, определенное формулой $\xi(x) = \sum_{n=1}^\infty 2^{-n} \xi_n(x)$. Легко видеть, что $\xi^{-1}(\widehat{P}(Y)) = L$, т.е. пара $(P(X), \widehat{P}(Y))$ $(\mathcal{M}_0, \mathcal{M}_\alpha)$ -предуниверсальна.

По теореме 1.2, пара $(P(X), \widehat{P}(Y))$ сильно $(\mathcal{M}_0, \mathcal{M}_\alpha)$ -универсальна.

2.7. ТЕОРЕМА. Пусть $\alpha \geq 1$ – счетный ординал, X – метрический компакт и $Y \in \mathcal{M}_\alpha \setminus \bigcup_{\xi < \alpha} \mathcal{M}_\xi$ – всюду плотное подмножество в X . Если Y – бэровское пространство, тогда пара $(P(X), \widehat{P}(Y))$ гомеоморфна паре $(Q, Q \setminus \Lambda_\alpha(Q))$; в противном случае, пара $(P(X), \widehat{P}(Y))$ гомеоморфна паре $(Q, \Omega_\alpha(Q))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку Y – всюду плотное собственное подмножество X , то X – бесконечный компакт. Следовательно, пространство $P(X)$ гомеоморфно гильбертову кубу Q . Из [11] следует, что $\hat{P}(Y) \in \mathcal{M}_\alpha(P(X))$.

При $\alpha = 1$, утверждение теоремы 2.7 следует из теоремы 2.4, поскольку пара (Q, s) гомеоморфна паре $(Q, Q \setminus \Lambda_1(Q))$.

Предположим, что пространство Y не является бэровским. Согласно предложению 2.2, $\hat{P}(Y)$ содержится в σZ -множестве в $\hat{P}(X)$. Кроме того, из предложения 2.5 вытекает, что пара $(P(X), \hat{P}(Y))$ сильно $(\mathcal{M}_0, \mathcal{M}_\alpha)$ -универсальна. Таким образом, пара $(P(X), \hat{P}(Y))$ $(\mathcal{M}_0, \mathcal{M}_\alpha)$ -поглощающая и, по теореме 1.1, гомеоморфна стандартной $(\mathcal{M}_0, \mathcal{M}_\alpha)$ -поглощающей паре $(Q, \Omega_\alpha(Q))$.

Если пространство Y – бэровское, то из предложения 2.3 следует, что множество $P(X) \setminus \hat{P}(Y)$ содержится в σZ -множестве в $P(X)$. Кроме того, поскольку $\hat{P}(Y) \in \mathcal{M}_\alpha$, то $P(X) \setminus \hat{P}(Y) \in \mathcal{A}_\alpha$. Далее, поскольку пара $(P(X), \hat{P}(Y))$ сильно $(\mathcal{M}_0, \mathcal{M}_\alpha)$ -универсальна, то пара $(P(X), P(X) \setminus \hat{P}(Y))$ сильно $(\mathcal{M}_0, \mathcal{A}_\alpha)$ -универсальна. Таким образом, пара $(P(X), P(X) \setminus \hat{P}(Y))$ $(\mathcal{M}_0, \mathcal{A}_\alpha)$ -поглощающая и по теореме 1.1 гомеоморфна стандартной $(\mathcal{M}_0, \mathcal{A}_\alpha)$ -поглощающей паре $(Q, \Lambda_\alpha(Q))$. Следовательно, $(P(X), \hat{P}(Y)) \cong (Q, Q \setminus \Lambda_\alpha(Q))$.

2.8. ТЕОРЕМА. Пусть $\alpha \geq 1$ – счетный ординал, X – польское некомпактное пространство и $Y \in \mathcal{M}_\alpha \setminus \bigcup_{\xi < \alpha} \mathcal{M}_\xi$ – его всюду плотное собственное подмножество. Пара $(\hat{P}(X), \hat{P}(Y))$ гомеоморфна

- (1) паре $(s, s \setminus \Lambda_\alpha(s))$, если Y – бэровское пространство;
- (2) паре $(s, \Omega_\alpha(s))$ в противном случае.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассуждая аналогично, как при доказательстве 2.7, мы видим, что доказательство теоремы 2.8 сводится к проверке сильной $(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_\alpha)$ -универсальности пары $(\hat{P}(X), \hat{P}(Y))$. Мы будем использовать следующий факт, вытекающий из результатов [22] (см. также [16, 5.3.2]).

2.9. ЛЕММА. Пусть X – польское пространство, Y – его всюду плотное подмножество, и $\alpha \geq 1$ – счетный ординал. Если для некоторого замкнутого подмножества $A \subset X$ с бесконечным дополнением пара $(\hat{P}(A), \hat{P}(A \cap Y))$ $(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_\alpha)$ -универсальна, тогда пара $(\hat{P}(X), \hat{P}(Y))$ сильно $(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_\alpha)$ -универсальна.

Нам понадобится также следующее тривиальное

2.10. ЗАМЕЧАНИЕ. Если пара (A, B) $(\mathcal{M}_0, \mathcal{M}_\alpha)$ -универсальна, тогда пара $(A \times s, B \times s)$ $(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_\alpha)$ -универсальна.

Итак, для доказательства 2.8, нам достаточно найти замкнутое подмножество $A \subset X$ с бесконечным дополнением, для которого пара $(\hat{P}(A), \hat{P}(A \cap Y))$ $(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_\alpha)$ -универсальна. Как и в 2.6, мы рассматриваем два случая.

I) $\alpha = \beta + 1$ – непереломный ординал. Поскольку $Y \notin \mathcal{M}_\beta$, то существует такой компакт $K \subset X$, что $K \cap Y \notin \mathcal{M}_\beta$ [21, 22.13 и 24.20]. Согласно 2.5 пара $(P(K), P(K \cap Y))$ $(\mathcal{M}_0, \mathcal{M}_\alpha)$ -универсальна.

Поскольку пространство X некомпактно и Y всюду плотно в X , то X содержит замкнутое дискретное подмножество $N \subset Y$. Без ограничения общности,

$K \cap N = \emptyset$ и $X \setminus (K \cup N)$ бесконечно. По теореме 2.4 пространство $\widehat{P}(N) \subset \widehat{P}(Y)$ гомеоморфно s . Рассмотрим подмножество $\frac{1}{2}P(K) + \frac{1}{2}\widehat{P}(N) \subset \widehat{P}(K \cup N)$ и отметим, что оно замкнуто; более того, пара

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{2}P(K) + \frac{1}{2}\widehat{P}(N), \left(\frac{1}{2}P(K) + \frac{1}{2}\widehat{P}(N) \right) \cap \widehat{P}(Y) \right) \\ &= \left(\frac{1}{2}P(K) + \frac{1}{2}\widehat{P}(N), \frac{1}{2}P(K \cap Y) + \frac{1}{2}\widehat{P}(N) \right) \end{aligned}$$

гомеоморфна паре

$$(P(K) \times \widehat{P}(N), \widehat{P}(K \cap Y) \times \widehat{P}(N)),$$

которая в силу 2.10 $(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_\alpha)$ -универсальна. Поскольку множество $\frac{1}{2}P(K) + \frac{1}{2}\widehat{P}(N)$ замкнуто в $\widehat{P}(K \cup N)$, отсюда следует, что пара $(\widehat{P}(K \cup N), \widehat{P}(K \cup N) \cap \widehat{P}(Y))$ $(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_\alpha)$ -универсальна.

II) α – предельный ординал. Тогда возможны два варианта:

- (1) существует такая точка $x \in X$, что для любой ее окрестности $U \subset X$ $U \cap Y \notin \cup_{\xi < \alpha} \mathcal{M}_\xi$;
- (2) такой точки не существует.

В первом случае, используя [21, 22.13 и 24.20], можно построить такой компакт $B \subset X$, что $B \cap Y \notin \cup_{\xi < \alpha} \mathcal{M}_\xi$. Далее поступаем совершенно аналогично случаю $\alpha = \beta + 1$.

Рассмотрим теперь вариант (2). Пусть $\{\alpha_n\}$ – возрастающая последовательность ординалов, сходящаяся к ординалу α . Легко видеть, что тогда существует такое замкнутое в X дискретное множество $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset X$, что для любого $n \in \mathbb{N}$ и любой окрестности U точки x_n имеем $U \cap Y \notin \mathcal{M}_{\alpha_n}$. Подходящим выбором метрики d на X можно добиться, чтобы $d(x_n, x_m) \geq 3$ для $n, m \in \mathbb{N}$. Используя [21, 22.13 и 24.20], для каждого $n \in 2\mathbb{N}$ находим такой компакт $K_n \subset O(x_n, 1)$, что $K_n \cap Y \notin \mathcal{M}_{\alpha_n}$ и $K_n \cap Y$ – плотно в K_n .

Легко видеть, что множества $N = \{x_n \mid n \in 2\mathbb{N} + 1\}$ и $B = N \cup \bigcup_{n \in 2\mathbb{N}} K_n$ замкнуты в X , и дополнение $X \setminus B$ бесконечно. Более того, пара $(\widehat{P}(B), \widehat{P}(B \cap Y))$ $(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_\alpha)$ -универсальна. Действительно, пространство $\widehat{P}(B)$ содержит множество

$$M = \left\{ \mu \in \widehat{P}(B) \mid \mu(N) = \frac{1}{2}, \mu(K_{2n}) = 2^{-n+1}, n \in \mathbb{N} \right\},$$

которое гомеоморфно произведению $\widehat{P}(N) \times \prod_{n=1}^\infty \widehat{P}(K_{2n})$. При этом пара $(M, M \cap \widehat{P}(Y))$ гомеоморфна паре $(s \times \prod_{n=1}^\infty \widehat{P}(K_{2n}), s \times \prod_{n=1}^\infty \widehat{P}(K_{2n} \cap Z))$, которая $(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_\alpha)$ -предуниверсальна, поскольку для каждого $n \in \mathbb{N}$ пара $(\widehat{P}(K_{2n}), \widehat{P}(K_{2n} \cap Z))$ сильно $(\mathcal{M}_0, \mathcal{M}_{\alpha_{2n}})$ -универсальна (см. 2.5), и в силу 2.4 $\widehat{P}(N) \cong s$.

Из теоремы 2.4 следует, что для сепарабельного полного некомпактного метрического пространства X , пространство $\widehat{P}(X)$ гомеоморфно псевдовнутренности $s = (-1, 1)^\omega$ гильбертова куба, которая, в свою очередь, гомеоморфна сепарабельному гильбертову пространству ℓ^2 . Ниже мы доказываем несепарабельный аналог этого утверждения.

2.11. ТЕОРЕМА. Пусть X – полное метрическое некомпактное пространство плотности A . Тогда пространство $\hat{P}(X)$ гомеоморфно гильбертову пространству $\ell^2(A) = \{(x_a) \mid a \in A, x_a \in \mathbb{R}, \sum_{a \in A} x_a^2 < \infty\}$ плотности A .

Для доказательства теоремы нам понадобятся два вспомогательных утверждения.

2.12. ЛЕММА. Если X – выпуклое полнометризуемое AR -подмножество плотности A в линейном топологическом пространстве, тогда произведение $X \times \ell^2$ гомеоморфно гильбертову пространству $\ell^2(A)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если кардинал A счетен, то лемма следует из [23]. Так что далее мы предполагаем, что кардинал A несчетен. Мы покажем, что любое замкнутое подмножество $K \subset X$ плотности $< A$, является Z -множеством в X . Пусть $\mathcal{U} \in \text{cov}(X)$ – любое покрытие и $f: Q \rightarrow X$ отображение гильбертова кирпича. Очевидно, что множество $X \cap L$, где L – линейная оболочка множества $K \cup f(Q)$ имеет плотность $< A$. Следовательно, существует точка $a \in X \setminus L$. Выберем $\varepsilon > 0$ так, чтобы отображение $\bar{f}: Q \rightarrow X$, где $\bar{f}(q) = (1 - \varepsilon)f(q) + \varepsilon a$ было $\mathcal{U}$ -близким к f . Легко видеть, что $\bar{f}(Q) \cap K = \emptyset$. Таким образом K – Z -множество в X . Теперь лемма следует из предложения 6.2 [3].

2.13. ЛЕММА. Если X – полное метрическое пространство плотности A , содержащее открыто-замкнутое счетное дискретное подмножество, тогда пространство $\hat{P}(X)$ гомеоморфно гильбертову пространству $\ell^2(A)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Запишем $X = Y \cup N$, где N – счетное дискретное открыто-замкнутое подмножество X и $Y = X \setminus N$. В пространстве $\hat{P}(X)$ рассмотрим открытое выпуклое подмножество

$$\hat{P}(X) \setminus (\hat{P}(Y) \cup \hat{P}(N)) = \{\mu \in \hat{P}(X) \mid 0 < \mu(N) < 1\},$$

которое гомеоморфно произведению $(0, 1) \times \hat{P}(N) \times \hat{P}(Y)$ посредством гомеоморфизма

$$h: (0, 1) \times \hat{P}(N) \times \hat{P}(Y) \rightarrow \hat{P}(X) \setminus (\hat{P}(Y) \cup \hat{P}(N)),$$

где $h(t, \mu, \eta) = t\mu + (1 - t)\eta$, $(t, \mu, \eta) \in (0, 1) \times \hat{P}(N) \times \hat{P}(Y)$. Поскольку пространство $\hat{P}(N)$ гомеоморфно ℓ^2 (см. теорему 2.4), то по лемме 2.12 произведение $(0, 1) \times \hat{P}(N) \times \hat{P}(Y)$, а значит и пространство $\hat{P}(X) \setminus (\hat{P}(N) \cup \hat{P}(Y))$ гомеоморфно $\ell^2(A)$.

Согласно [24, В1], если полное метрическое AR -пространство E содержит такое сильное Z -множество $Z \subset E$, что дополнение $E \setminus Z$ гомеоморфно $\ell^2(A)$, тогда пространство E также гомеоморфно $\ell^2(A)$. Напомним, что замкнутое множество $Z \subset E$ называется *сильным Z -множеством*, если для любого покрытия $\mathcal{U} \in \text{cov}(E)$ существует такое $\mathcal{U}$ -близкое к тождественному отображение $f: E \rightarrow E$, что $\text{cl}_E(f(E)) \cap Z = \emptyset$. Итак, чтобы доказать, что пространство $\hat{P}(X)$ гомеоморфно гильбертову пространству $\ell^2(A)$, нам достаточно доказать, что $\hat{P}(N) \cup \hat{P}(Y)$ является сильным Z -множеством в $\hat{P}(X)$. Для этого зафиксируем ограниченную единицей метрику d на X и функцию $\varepsilon: \hat{P}(X) \rightarrow (0, 1]$. Через $\hat{d}$ обозначается метрика на $\hat{P}(X)$, порожденная метрикой d (см. [8, §4]).

Определим отображение $f : \hat{P}(X) \rightarrow \hat{P}(X)$ формулой $f(\mu) = (1 - \varepsilon(\mu))\mu + \varepsilon(\mu)\eta_0$, где η_0 – любая мера вида $\eta_0 = \frac{1}{2}\delta_x + \frac{1}{2}\delta_y$, $x \in N$, $y \in Y$. Легко видеть, что $\hat{d}(f(\mu), \mu) \leq \varepsilon(\mu)$ и $\text{cl}(f(\hat{P}(X))) \cap (\hat{P}(N) \cup \hat{P}(Y)) = \emptyset$, т.е. $\hat{P}(N) \cup \hat{P}(Y)$ – сильное Z -множество в $\hat{P}(X)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.11. Итак, пусть X – полное метрическое некомпактное пространство плотности A . Поскольку пространство X – некомпактно, оно содержит замкнутое счетное дискретное подмножество $D \subset X$. Зафиксируем любой гомеоморфизм $h' : \mathbb{N} \rightarrow D$ множества натуральных чисел $\mathbb{N}$ на D и рассмотрим пространство $X \sqcup \mathbb{N}$ являющееся дискретным объединением пространств X и $\mathbb{N}$. Пусть $h : X \sqcup \mathbb{N} \rightarrow X$ – отображение, определенное формулой $h(x) = x$ для $x \in X$ и $h(n) = h'(n)$ для $n \in \mathbb{N}$. Очевидно, что $h : X \sqcup \mathbb{N} \rightarrow X$ – совершенное (т.е. замкнутое с компактными прообразами точек) сюръективное отображение. Согласно [7, 2.2], отображение $\hat{P}(h) : \hat{P}(X \sqcup \mathbb{N}) \rightarrow \hat{P}(X)$ также сюръективное и собственное. Кроме того, поскольку $\hat{P}(h)$ – аффинное отображение между выпуклыми подмножествами локально выпуклых пространств, $\hat{P}(h)$ является CE -отображением [15, § 7.1]. Итак, мы установили, что пространство $\hat{P}(X)$ является совершенным CE -образом пространства $\hat{P}(X \sqcup \mathbb{N})$, гомеоморфного гильбертову пространству $\ell^2(A)$. Согласно [3, 4.1, 4.2] пространство $\hat{P}(X)$ также гомеоморфно $\ell^2(A)$.

§ 3. Топология пространства $P_d(X)$ вероятностных дискретных мер

Цель этого параграфа – получить топологическую классификацию пар вида $(P(X), P_d(Y))$, где X – компактное метрическое пространство, Y – его всюду плотное $F_{\sigma\delta}$ -подмножество, и $P_d(Y)$ – подпространство $\hat{P}(Y)$, состоящее из вероятностных дискретных мер. Напомним, что мера $\mu \in \hat{P}(X)$ называется *дискретной*, если $\mu(C) = 1$ для некоторого счетного множества $C \subset X$. Если $f : X \rightarrow Y$ – отображение тихоновских пространств, тогда, очевидно, что $\hat{P}(f)(P_d(X)) \subset P_d(Y)$. Таким образом, положив $P_d(f) = \hat{P}(f) \mid P_d(X) : P_d(X) \rightarrow P_d(Y)$ мы определяем подфунктор P_d функтора $\hat{P}$. Функтор P_d обладает многими замечательными свойствами: например, он сохраняет сюръективность отображений, он монадичен на категории Tych и т. д. Мы не будем, однако, останавливаться на функториальных свойствах конструкции P_d , а будем основательно изучать лишь топологию пространств $P_d(X)$.

Начнем мы с борелевской классификации.

3.1. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Для любого тихоновского пространства X , пространство $P_d(X)$ является $F_{\sigma\delta}$ -множеством в $\hat{P}(X)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть X – тихоновское пространство и cX – любая его компактификация. Согласно [7, 2.4] мы можем рассматривать пространство $\hat{P}(X)$ как подмножество компакта $P(cX)$, причем $P_d(X) = \hat{P}(X) \cap P_d(cX)$. Предложение будет доказано, если мы покажем, что $P_d(cX)$ – $F_{\sigma\delta}$ -множество в $P(cX)$. Но, очевидно, что

$$P_d(cX) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} M_{n,m},$$

где

$$M_{n,m} = \left\{ \mu \in P(cX) \mid \exists A \subset cX, |A| \leq m, \text{ такое, что } \mu(A) \geq 1 - \frac{1}{n} \right\}.$$

Покажем, что для любых $n, m \in \mathbb{N}$ множество $M_{n,m}$ замкнуто в $P(cX)$. Пусть $\mu \in P(cX)$ – предельная точка множества $M_{n,m}$. Тогда существует направленность $\{\mu_i\}_{i \in \mathcal{J}} \subset M_{n,m}$, сходящаяся к мере μ . Через $\text{exr}_m(cX)$ мы обозначаем подпространство гиперпространства $\text{exr}(cX)$, состоящее из множеств мощности $\leq m$. Для каждого $i \in \mathcal{J}$ зафиксируем такое $A_i \in \text{exr}_m(cX)$, что $\mu_i(A_i) \geq 1 - 1/n$. Поскольку пространство $\text{exr}_m(cX)$ – компактно [25, IV, §4], то существует $A \in \text{exr}_m(cX)$ – предельная точка направленности $\{A_i\}_{i \in \mathcal{J}}$ [26, 3.1.23]. Покажем, что $\mu(A) \geq 1 - 1/n$, т.е. $\mu \in M_{n,m}$. Поскольку мера μ регулярна, т.е. $\mu(A) = \inf\{\mu(U) \mid U \supset A \text{ – открытое подмножество } cX\}$, то нам достаточно доказать, что $\mu(U) \geq 1 - 1/n - \varepsilon$ для любого $\varepsilon > 0$ и любого открытого множества $U \subset cX$, содержащего множество A . Пусть $V \subset cX$ – такое открытое множество, что $A \subset V \subset \bar{V} \subset U$. Поскольку направленность $\{\mu_i\}_{i \in \mathcal{J}}$ сходится к мере μ , то существует такое $i_0 \in \mathcal{J}$, что $\mu_i(\bar{V}) < \mu(\bar{V}) + \varepsilon$ для любого $i \geq i_0$ [5, теорема II.2]. Поскольку A – предельная точка направленности $\{A_i\}_{i \in \mathcal{J}}$, то существует такое $i \geq i_0$, что $A_i \subset V$. Тогда

$$\mu(U) \geq \mu(\bar{V}) > \mu_i(\bar{V}) - \varepsilon \geq \mu_i(A_i) - \varepsilon \geq 1 - \frac{1}{n} - \varepsilon.$$

Если $Y \subset X$ – пара тихоновских пространств, тогда $P_d(Y) = P_d(X) \cap \hat{P}(Y)$. Отсюда, из предложения 3.1 и [7, 2.30] следует

3.2. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть X – метрическое пространство, $Y \subset X$ – его подмножество и $\alpha \geq 2$ – счетный ординал. Если $Y \in \mathcal{M}_\alpha(X)$, тогда $P_d(Y) \in \mathcal{M}_\alpha(\hat{P}(X))$.

Поскольку любая радоновская мера на метрическом пространстве имеет сепарабельный носитель, и любая радоновская мера на счетном пространстве является дискретной, то справедливо

3.3. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Если каждое сепарабельное подпространство метрического пространства X счетно, тогда $P_d(X) = \hat{P}(X)$. В частности, если борелевское подмножество X полного метрического пространства не содержит канторова куба 2^ω , тогда $P_d(X) = \hat{P}(X)$.

Для метрического пространства X через $X^{(1)} \subset X$ мы обозначаем множество предельных точек X .

3.4. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть X – метрическое пространство и $Y \subset X$ – его всюду плотное подмножество. Если множество $Y^{(1)}$ предельных точек нигде не плотно в Y , тогда $\hat{P}(X) \setminus P_d(Y)$ содержится в σZ -множестве в $\hat{P}(X)$. В противном случае, $P_d(Y)$ содержится в σZ -множестве в $\hat{P}(X)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что множество $Y^{(1)}$ предельных точек нигде не плотно в Y . Тогда множество $Y \setminus Y^{(1)} = X \setminus Y^{(1)}$ изолированных точек открыто и всюду плотно в X . Из доказательства предложения 2.3 следует, что множество $\hat{P}(X) \setminus \hat{P}(Y \setminus Y^{(1)})$ содержится в σZ -множестве в $\hat{P}(X)$. Но согласно предложению 3.3 $P_d(Y \setminus Y^{(1)}) = \hat{P}(Y \setminus Y^{(1)})$. Следовательно, множество

$$\hat{P}(X) \setminus P_d(Y) \subset \hat{P}(X) \setminus P_d(Y \setminus Y^{(1)}) = \hat{P}(X) \setminus \hat{P}(Y \setminus Y^{(1)})$$

содержится в σZ -множестве в $\widehat{P}(X)$.

Теперь предположим, что множество $Y^{(1)}$ где-то плотно и покажем, что тогда $P_d(Y)$ содержится в σZ -множестве в $\widehat{P}(X)$. Положим $F = \text{cl}_X(Y \setminus Y^{(1)})$. Согласно предположению, $F \neq X$. Пусть $G = \text{cl}_X(X \setminus F)$. Тогда

$$P_d(Y) \subset \widehat{P}(F) \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right),$$

где

$$A_n = \left\{ \mu \in \widehat{P}(X) \mid \exists x \in G \text{ такое, что } \mu(\{x\}) \geq \frac{1}{n} \right\}.$$

Из доказательства предложения 2.2 следует, что $\widehat{P}(F)$ — Z -множество в $\widehat{P}(X)$, а из доказательства предложения 3.1, что A_n — замкнутые подмножества в $\widehat{P}(X)$. Кроме того, нетрудно убедиться, что для любого $n \in \mathbb{N}$ множество

$$\widehat{P}(X) \setminus A_n = \left\{ \mu \in \widehat{P}(X) \mid \forall x \in G \quad \mu(x) < \frac{1}{n} \right\}$$

выпукло и всюду плотно в $\widehat{P}(X)$. Следовательно, A_n — замкнутое гомотопически пренебрежимое множество в $\widehat{P}(X)$, откуда следует, что A_n — Z -множество в $\widehat{P}(X)$. Таким образом, множество $P_d(Y)$ содержится в σZ -множестве

$$\widehat{P}(F) \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) \subset \widehat{P}(X).$$

Основным результатом этого параграфа является следующая

3.5. ТЕОРЕМА. Пусть X — бесконечный метрический компакт и $Y \subset X$ — всюду плотное собственное $F_{\sigma\delta}$ -подмножество X . Пара $(P(X), P_d(Y))$ гомотопически гомотопична

- (1) паре (Q, s) , если Y — счетное G_δ -множество в X ;
- (2) паре $(Q, \Omega_2(Q))$, если Y не является счетным G_δ -множеством в X и множество $Y^{(1)}$ предельных точек где-то плотно в X ;
- (3) паре $(Q, Q \setminus \Lambda_2(Q))$, если Y не является счетным G_δ -множеством в X и множество $Y^{(1)}$ предельных точек нигде не плотно в X .

Для доказательства нам понадобится

3.6. ЛЕММА. Пусть D — счетное всюду плотное множество в канторовом кубе $C = \{0, 1\}^\omega$. Пара $(P(C), P_d(D))$ $(\mathcal{M}_0, \mathcal{M}_2)$ -предуниверсальна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим отображение $h: [0, 1] \rightarrow P(\{0, 1\})$, где $h(t) = \frac{t}{2}\delta_0 + (1 - \frac{t}{2})\delta_1$, $t \in [0, 1]$, а также отображение $H: [0, 1]^\omega \rightarrow P(\{0, 1\}^\omega)$, где $H((t_i)_{i=1}^\infty) = \bigotimes_{i=1}^\infty h(t_i)$ — тензорное произведение мер $h(t_i) \in P(\{0, 1\})$. Легко видеть, что

$$\begin{aligned} H^{-1}(P_d(\{0, 1\}^\omega)) &= W([0, 1], 0) \\ &= \{(t_i)_{i=1}^\infty \mid t_i \neq 0 \text{ для конечного числа индексов } i\}. \end{aligned}$$

Обозначим пару $([0, 1]^\omega, W([0, 1], 0))$ через (Q, σ) и рассмотрим отображение $f: Q^\omega \rightarrow P(C)$, где

$$f((q_i)_{i=1}^\infty) = \sum_{i=1}^\infty 2^{-i} H(q_i), \quad (q_i)_{i=1}^\infty \in Q^\omega.$$

Легко видеть, что $f^{-1}(P_d(C)) = \sigma^\omega$. Поскольку пара $(Q^\omega, \sigma^\omega)$ $(\mathcal{M}_0, \mathcal{M}_2)$ -предуниверсальна, то пара $(P(C), P_d(C))$ также $(\mathcal{M}_0, \mathcal{M}_2)$ -предуниверсальна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3.5. Если множество Y счетно, тогда $P_d(Y) = \hat{P}(Y)$ и утверждение теоремы следует из 2.7. Поэтому далее мы предполагаем, что Y несчетно. Тогда по [18, §37] Y содержит топологическую копию $C \subset Y$ канторова куба. В этом случае лемма 3.7 позволяет утверждать, что пара $(\hat{P}(X), P_d(Y))$ $(\mathcal{M}_0, \mathcal{M}_2)$ -предуниверсальна.

Теперь наша теорема немедленно следует из 1.1, 1.2, 3.2 и 3.4.

В связи с результатами этого параграфа интересным представляется

3.7. ВОПРОС. Пусть $X \subset C$ – подмножество канторова куба. Может ли пространство $P_d(X)$ быть $\mathcal{A}_2$ -универсальным?

§4. Топология пространства $P_c(X)$ непрерывных вероятностных мер

В этом параграфе мы изучаем топологию подпространства $P_c(X) \subset \hat{P}(X)$, состоящего из непрерывных мер. Напомним, что мера $\mu \in \hat{P}(X)$ называется *непрерывной*, если $\mu(\{x\}) = 0$ для каждой точки $x \in X$. Легко видеть, что множество $P_c(X)$ выпукло в $\hat{P}(X)$.

Отметим, что непрерывные меры существуют не на всех пространствах. Напомним, что точка x пространства X называется *точкой конденсации*, если каждая ее окрестность несчетна, иначе говоря, если пространство X не является локально счетным в точке x [18, §23.III]. Множество точек конденсации пространства X обозначается через $X^\odot$. Хорошо известно, что для метрического сепарабельного пространства X множество $X^\odot$ замкнуто в X , а дополнение $X \setminus X^\odot$ счетно. Следовательно, множество $X^\odot$ непусто тогда и только тогда, когда пространство X несчетно.

Непосредственно из определения носителя меры следует, что $\text{supp}(\mu) \subset X^\odot$ для любой непрерывной меры $\mu \in P_c(X)$. Таким образом, справедливо

4.1. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Для любого метрического пространства X имеем $P_c(X) = P_c(X^\odot)$.

Отметим, что подпространство $X^\odot \subset X$ *всюду несчетно* (т.е. любое непустое открытое подмножество $X^\odot$ несчетно). Более того, $X = X^\odot$ тогда и только тогда, когда X – всюду несчетное пространство. Поэтому, ввиду предложения 4.1, при рассмотрении пространств $P_c(X)$, достаточно ограничиться всюду несчетными пространствами X .

Напомним, что *аналитическим пространством* называется любой непрерывный метризуемый образ пространства $\mathbb{N}^\omega$ иррациональных чисел. Хорошо известно, что борелевские подмножества метрических компактов являются аналитическими пространствами [21].

4.2. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Если X – аналитическое всюду несчетное пространство, тогда $P_c(X)$ всюду плотное выпуклое подмножество в $\hat{P}(X)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выпуклость множества $P_c(X)$ очевидна. Покажем его всюду плотность в $\hat{P}(X)$. Для этого зафиксируем меру $\mu_0 \in \hat{P}(X)$ и ее окрестность $U \subset \hat{P}(X)$. Поскольку множество $P_\omega(X)$ мер с конечными носителями всюду плотно в $\hat{P}(X)$, то существует мера

$$\eta = \sum_{i=1}^n t_i \delta_{x_i} \in U \cap P_\omega(X),$$

где $t_i > 0$, $x_i \in X$ и $\sum_{i=1}^n t_i = 1$. Несложно построить такие окрестности $U_i \subset X$ точек x_i , что для любых мер $\mu_i \in \hat{P}(U_i) \subset \hat{P}(X)$ мера $\sum_{i=1}^n t_i \mu_i$ близка к η и принадлежит окрестности U . Поскольку пространство X аналитично и всюду несчетно, то же верно для множеств U_i . Тогда, согласно теореме 29.1 [21], каждое множество U_i содержит топологическую копию K_i канторова куба 2^ω . Очевидно, что на канторовом кубе существует непрерывная мера (например инвариантная мера Хаара, ведь 2^ω – компактная топологическая группа). Следовательно, на каждом K_i существует непрерывная мера $\mu_i \in P_c(K_i) \subset \hat{P}(X)$. Тогда мера $\mu = \sum_{i=1}^n t_i \mu_i$ тоже непрерывна и принадлежит окрестности U меры μ_0 . То есть множество $P_c(X)$ всюду плотно в $\hat{P}(X)$.

4.3. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Для любого тихоновского пространства X пространство $P_c(X)$ является G_δ -множеством в $\hat{P}(X)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассуждая аналогично как при доказательстве предложения 3.1, можно ограничиться случаем, когда X – компакт. Очевидно, что

$$P(X) \setminus P_c(X) = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n,$$

где

$$M_n = \left\{ \mu \in P(X) \mid \exists x \in X \text{ с } \mu(\{x\}) \geq \frac{1}{n} \right\}.$$

Повторяя аргументы предложения 3.1, приходим к выводу, что каждое множество M_n замкнуто в $P(X)$. Следовательно, $P_c(X)$ – G_δ -множество в $P(X)$.

Если $Y \subset X$ – пара тихоновских пространств, тогда $P_c(Y) = P_c(X) \cap \hat{P}(Y)$. Отсюда, из предложения 4.3 и [7, 2.30] следует

4.4. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть X – метрическое пространство, $Y \subset X$ – его подмножество и $\alpha \geq 1$ – счетный ординал. Если $Y \in \mathcal{M}_\alpha(X)$, тогда $P_c(Y) \in \mathcal{M}_\alpha(\hat{P}(X))$.

Повторяя аргументацию теоремы 2.4, можно доказать следующий факт.

4.5. ТЕОРЕМА. Пусть X – метрический компакт и $Y \subset X$ – его всюду плотное всюду несчетное G_δ -подмножество. Тогда пара $(P(X), P_c(Y))$ гоомеоморфна паре (Q, s) .

Теперь рассмотрим вопрос, когда пространство $P_c(X)$ является σZ -множеством. Поскольку всегда $P_c(Y) \subset \hat{P}(Y)$, то из предложения 2.2 следует

4.6. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть $Y \subset X$ – пара метрических пространств. Если пространство Y не является бэровским, то $P_c(Y)$ содержится в σZ -множестве пространства $\widehat{P}(X)$.

Для пространств непрерывных вероятностных мер существует также аналог предложения 2.3.

4.7. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть X – метрическое сепарабельное пространство и Y – всюду плотное аналитическое всюду несчетное подпространство в X . Если пространство Y – бэровское, тогда $\widehat{P}(X) \setminus P_c(Y)$ содержится в σZ -подмножестве пространства $\widehat{P}(X)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку пространство Y аналитично, то по теореме 29.5 [21] $Y = G \cup F$, где G – абсолютное G_δ -множество и F – множество первой категории в Y . Поскольку Y – бэровское пространство, множество G – всюду плотно в Y (и, следовательно, в X). Отметим, что пространство G всюду несчетно, иначе, по теореме Бэра, G содержало бы изолированную точку, что исключено ввиду всюду плотности G во всюду несчетном пространстве Y . По предложениям 4.2 и 4.4, $P_c(G)$ – выпуклое всюду плотное G_δ -подмножество в $\widehat{P}(X)$. Тогда дополнение $\widehat{P}(X) \setminus P_c(G)$ является искомым σZ -множеством, содержащим $\widehat{P}(X) \setminus P_c(Y)$.

4.8. ТЕОРЕМА. Пусть X – метрический компакт и $Y \subset X$ – всюду плотное всюду несчетное подмножество. Предположим, что $Y \notin \mathcal{M}_2 \cap \mathcal{A}_2$ и $Y \in \mathcal{M}_\alpha \setminus \bigcup_{\xi < \alpha} \mathcal{M}_\xi$ для некоторого $\alpha \geq 2$. Тогда пара $(P(X), P_c(Y))$ гомеоморфна

- (1) паре $(Q, Q \setminus \Lambda_\alpha(Q))$, если Y – бэровское пространство и
- (2) паре $(Q, \Omega_\alpha(Q))$ в противном случае.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Аналогично, как и при доказательстве теоремы 2.7, достаточно доказать $(\mathcal{M}_0, \mathcal{M}_\alpha)$ -предуниверсальность пары $(P(X), P_c(Y))$ и затем использовать теоремы 1.1, 1.2 и предложения 4.4, 4.6 и 4.7.

Рассмотрим три случая.

I) $\alpha = 2$. Тогда $Y \in \mathcal{M}_2 \setminus \mathcal{A}_2$. Зафиксируем любое подмножество $A \subset 2^\omega$ класса $\mathcal{M}_2 \setminus \mathcal{M}_1$. Поскольку $Y \notin \mathcal{A}_2$, мы можем использовать теорему Луво и Сан-Ремо [21, 28.19], согласно которой, существует такое вложение $e: 2^\omega \times 2^\omega \rightarrow X$, что $e^{-1}(Y) = A \times 2^\omega$. Применяя к этому вложению функтор P , получим вложение $P(e): P(2^\omega \times 2^\omega) \rightarrow P(X)$, причем $P(e)^{-1}(P_c(Y)) = P_c(A \times 2^\omega)$. Зафиксируем любую непрерывную вероятностную меру μ_0 на канторовом кубе 2^ω и рассмотрим отображение $f: P(2^\omega) \rightarrow P(2^\omega \times 2^\omega)$, ставящее в соответствие мере $\mu \in P(2^\omega)$ меру $f(\mu) = \mu \otimes \mu_0$ (тензорное произведение мер μ и μ_0). Очевидно, что $f(P(2^\omega)) \subset P_c(2^\omega \times 2^\omega)$ и $f^{-1}(P_c(A \times 2^\omega)) = f^{-1}(\widehat{P}(A \times 2^\omega)) = \widehat{P}(A)$. Следовательно, для отображения $P(e) \circ f: P(2^\omega) \rightarrow P(X)$ имеем: $(P(e) \circ f)^{-1}(P_c(Y)) = \widehat{P}(A)$. Поскольку $A \in \mathcal{M}_2 \setminus \mathcal{M}_1$, то пара $(P(2^\omega), \widehat{P}(A))$ $(\mathcal{M}_0, \mathcal{M}_2)$ -универсальна, согласно предложению 2.5. Тогда пара $(P(X), P_c(Y))$ $(\mathcal{M}_0, \mathcal{M}_2)$ -предуниверсальна.

II) $\alpha = \beta + 1 > 2$ – неперелый ординал. В этом случае, $Y \notin \mathcal{M}_\beta$. Зафиксируем любое подмножество $A \subset 2^\omega$ класса $\mathcal{A}_\beta \setminus \mathcal{M}_\beta$ и, используя теорему Луво и Сан-Ремо [21, 28.19], найдем такое вложение $e: 2^\omega \times 2^\omega \rightarrow X$, что $e^{-1}(Y) = A \times 2^\omega$. Повторяя далее рассуждения случая $\alpha = 2$, показываем, что пара $(P(X), P_c(Y))$ $(\mathcal{M}_0, \mathcal{M}_\alpha)$ -предуниверсальна.

III) α – предельный ординал. Зафиксируем любую последовательность ординалов $\{\alpha_n\}$ с $2 < \alpha_n < \alpha$ и $\sup_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n = \alpha$. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ выберем подмножество $A_n \subset 2^\omega$ класса $\mathcal{A}_{\alpha_n} \setminus \mathcal{M}_{\alpha_n}$. Повторяя аргументы предыдущего случая, для каждого $n \in \mathbb{N}$ построим такое отображение $f_n: P(2^\omega) \rightarrow P(X)$, что $f_n^{-1}(P_c(Y)) = \widehat{P}(A_n)$. Тогда отображение $f: P(2^\omega)^\mathbb{N} \rightarrow P(X)$, определенное формулой $f((\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}) = \sum_{n=1}^\infty 2^{-n} f_n(\mu_n)$, имеет следующее свойство:

$$f^{-1}(P_c(Y)) = \prod_{n \in \mathbb{N}} \widehat{P}(A_n).$$

Поскольку для каждого n пара $(P(2^\omega), \widehat{P}(A_n))$ $(\mathcal{M}_0, \mathcal{M}_{\alpha_n})$ -универсальна, то произведение

$$\left(\prod_{n \in \mathbb{N}} P(2^\omega), \prod_{n \in \mathbb{N}} \widehat{P}(A_n) \right)$$

является $(\mathcal{M}_0, \mathcal{M}_\alpha)$ -универсальной парой. Следовательно, пара $(P(X), P_c(Y))$ $(\mathcal{M}_0, \mathcal{M}_\alpha)$ -предуниверсальна.

Отметим, что теоремы 4.5 и 4.8 дают исчерпывающее описание топологии пространства $P_c(X)$ для всех сепарабельных абсолютных борелевских пространств, не принадлежащих классу $(\mathcal{M}_2 \cap \mathcal{A}_2) \setminus \mathcal{M}_1$.

4.9. ПРОБЛЕМА. Описать топологию пространства $P_c(X)$ для несчетных пространств $X \in (\mathcal{M}_2 \cap \mathcal{A}_2) \setminus \mathcal{M}_1$.

§5. Топология пространства вероятностных мер с конечными носителями

Напомним, что для пространства X пространство всех вероятностных мер с конечными носителями обозначается через $P_\omega(X) \subset \widehat{P}(X)$. Цель этого параграфа – найти необходимые и достаточные условия, при которых пара $(\widehat{P}(X), P_\omega(X))$ гомеоморфна паре $(\ell^2(A), \ell_f^2(A))$, где $\ell^2(A)$ – стандартное гильбертово пространство плотности A , и

$$\ell_f^2(A) = \{(x_a)_{a \in A} \in \ell^2(A) \mid x_a \neq 0 \text{ для конечного числа индексов } a\} \subset \ell^2(A)$$

– подпространство, состоящее из финитных “последовательностей”.

Согласно [27] пара $(\ell^2(A), X)$ гомеоморфна паре $(\ell^2(A), \ell_f^2(A))$ тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:

- (1) множество X представляется в виде счетного объединения конечномерных локально-компактных замкнутых подмножеств $\ell^2(A)$;
- (2) для любого покрытия $\mathcal{U} \in \text{cov}(\ell^2(A))$, любого конечномерного локально компактного замкнутого множества $Z \subset \ell^2(A)$ и его замкнутого подмножества $F \subset Z \cap X$ существует такое замкнутое вложение $e: Z \rightarrow \ell^2(A)$, что $e(Z) \subset X$, $e \mid F = \text{id} \mid F$ и $(e, \text{id} \mid Z) \prec \mathcal{U}$.

Известно [12], [6], что для метрического компакта X и его подмножества Y , пара $(P(X), P_\omega(Y))$ гомеоморфна паре (Q, σ) тогда и только тогда, когда множество Y представляется в виде счетного объединения конечномерных компактов. Напомним, что

$$\sigma = \{(q_i)_{i=1}^\infty \in (-1, 1)^\omega \mid q_i \neq 0 \text{ для конечного числа индексов } i\} \subset Q.$$

5.1. ТЕОРЕМА. Пусть X — полное метрическое некомпактное пространство плотности A и $Y \subset X$ — его всюду плотное подмножество. Пара $(\hat{P}(X), P_\omega(Y))$ гомеоморфна паре $(\ell^2(A), \ell_f^2(A))$ тогда и только тогда, когда множество Y представляется в виде счетного объединения конечномерных локально компактных замкнутых подмножеств X .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме 2.11, пространство $\hat{P}(X)$ гомеоморфно гильбертову пространству $\ell^2(A)$. Если пара $(\hat{P}(X), P_\omega(Y))$ гомеоморфна паре $(\ell^2(A), \ell_f^2(A))$, то, поскольку множество Y — замкнуто в $P_\omega(X)$, Y представляется в виде счетного объединения конечномерных локально компактных замкнутых подмножеств X . Далее теорема следует из лемм 5.2 и 5.3.

5.2. ЛЕММА. Пусть X — полное метрическое пространство и $Y \subset X$ — подмножество, представляемое в виде счетного объединения конечномерных локально компактных замкнутых подмножеств X . Тогда множество $P_\omega(Y)$ представляется в виде счетного объединения конечномерных локально компактных замкнутых подмножеств $\hat{P}(X)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $Y = \bigcup_{n=1}^\infty Y_n$, где Y_n , $n \in \mathbb{N}$, — конечномерные локально компактные замкнутые подмножества X . Очевидно, что

$$P_\omega(Y) = \bigcup_{n,m=1}^\infty P_n(Y_m) \setminus P_{n-1}(Y_m)$$

(мы полагаем $P_0(Y_m) = \emptyset$), и для любых $n, m \in \mathbb{N}$

$$P_n(Y_m) \setminus P_{n-1}(Y_m) = \bigcup_{k=1}^\infty A_k,$$

где

$$A_k = \left\{ \mu \in P_n(Y_m) \setminus P_{n-1}(Y_m) \mid \mu = \sum_{i=1}^n t_i \delta(y_i), \right. \\ \left. \text{где } t_i \geq \frac{1}{k} \text{ и } d(y_i, y_j) \geq \frac{1}{k} \text{ для } 1 \leq i \neq j \leq n \right\}$$

(здесь d — метрика на X). Легко видеть, что каждое множество A_k является конечномерным локально компактным замкнутым подмножеством в $\hat{P}(X)$.

5.3. ЛЕММА. Пусть X – полное метрическое некомпактное пространство и $Y \subset X$ – его всюду плотное подмножество. Тогда для любого покрытия $\mathcal{U} \in \text{cov}(\widehat{P}(X))$, любого конечномерного локально компактного замкнутого множества $Z \subset \widehat{P}(X)$ и его замкнутого подмножества $F \subset Z \cap P_\omega(Y)$ существует такое замкнутое вложение $e: Z \rightarrow \widehat{P}(X)$, что $e(Z) \subset P_\omega(Y)$, $e|_F = \text{id}|_F$ и $(e, \text{id}|_Z) \prec \mathcal{U}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем полную ограниченную метрику d на X , покрытие $\mathcal{U} \in \text{cov}(\widehat{P}(X))$, конечномерное локально компактное замкнутое множество $Z \subset \widehat{P}(X)$ и его замкнутое подмножество $F \subset Z \cap P_\omega(Y)$. Через $\widehat{d}$ обозначаем метрику на $\widehat{P}(X)$, порожденную метрикой d .

Поскольку тождественное вложение $Z \setminus F \hookrightarrow \widehat{P}(X) \setminus F$ совершенно, то согласно [28, 4.1] существует такое покрытие $\mathcal{U}' \in \text{cov}(\widehat{P}(X) \setminus F)$, что любое $\mathcal{U}'$ -близкое к тождественному вложению отображение $g: Z \setminus F \rightarrow \widehat{P}(X) \setminus F$ является совершенным. Пусть $\mathcal{V} \in \text{cov}(\widehat{P}(X) \setminus F)$ – такое покрытие, состоящее из выпуклых открытых множеств, что $\text{St}(\mathcal{V}) \prec \mathcal{U}$, $\text{St}(\mathcal{V}) \prec \mathcal{U}'$ и $\text{St}(\mathcal{V}) \prec \{O(\mu, \widehat{d}(\mu, F)/2) \mid \mu \in \widehat{P}(X) \setminus F\}$.

Мы построим сперва $\mathcal{V}$ -близкое к тождественному вложению отображение $g: Z \setminus F \rightarrow P_\omega(Y) \setminus F$. Пусть $\mathcal{V}' \in \text{cov}(\widehat{P}(X) \setminus F)$ – такое локально конечное покрытие, что $\text{St}(\mathcal{V}') \prec \mathcal{V}$, и $\{\lambda_V: \widehat{P}(X) \setminus F \rightarrow [0, 1]\}_{V \in \mathcal{V}'}$ – разбиение единицы, подчиненное покрытию $\mathcal{V}'$. Для каждого элемента $V \in \mathcal{V}'$ зафиксируем меру $\mu_V \in V \cap P_\omega(Y)$ (здесь мы используем плотность множества $P_\omega(Y)$ в $\widehat{P}(X)$). Наконец, определим отображение $g: Z \setminus F \rightarrow P_\omega(Y)$ формулой $g(z) = \sum_{V \in \mathcal{V}'} \lambda_V(z) \cdot \mu_V$.

Несложно убедиться, что отображение g $\mathcal{V}$ -близко к тождественному вложению $Z \setminus F \hookrightarrow \widehat{P}(X)$. Поскольку $\text{St}(\mathcal{V}) \prec \{O(\mu, \widehat{d}(\mu, F)/2) \mid \mu \in \widehat{P}(X) \setminus F\}$ и $\text{St}(\mathcal{V}) \prec \mathcal{U}'$, то $g(Z \setminus F) \subset P_\omega(Y) \setminus F$ и отображение $g: Z \setminus F \rightarrow P_\omega(Y) \setminus F$ совершенно. Более того, каждая точка $\mu \in g(Z \setminus F)$ обладает такой окрестностью $U \subset \widehat{P}(X)$, что $U \cap g(Z \setminus F) \subset P_n(Y)$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$. Действительно, из конструкции отображения g , для каждой точки $y \in g(Z \setminus F)$ $g^{-1}(y)$ – компакт, обладающий окрестностью V с $g(V) \subset P_n(Y)$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$. Поскольку отображение g – замкнуто, существует такая окрестность $U \subset \widehat{P}(X)$ точки y , что $g^{-1}(U) \subset V$ (см. [15, 1.1.10]). Тогда $U \subset g(V) \subset P_n(Y)$.

Пусть $\mathcal{W} \in \text{cov}(g(Z \setminus F))$ – такое локально конечное покрытие, что $\mathcal{W} \prec \mathcal{V}$ и для каждого элемента $W \in \mathcal{W}$, его замыкание $\overline{W}$ компактно и содержится в $P_{n(W)}(Y)$ для некоторого $n(W) \in \mathbb{N}$. Пусть $\{\lambda_W: g(Z \setminus F) \rightarrow [0, 1]\}_{W \in \mathcal{W}}$ – разбиение единицы, подчиненное покрытию $\mathcal{W}$. Поскольку отображение $g: Z \setminus F \rightarrow P_\omega(Y) \setminus F$ собственно, а пространство Z конечномерно, то для каждого $W \in \mathcal{W}$ прообраз $g^{-1}(\overline{W})$ является конечномерным компактом. Следовательно, существует конечное множество $m(W)$ и вложение $e_W: g^{-1}(\overline{W}) \rightarrow P(m(W))$ такое, что для любых различных точек $z_1, z_2 \in g^{-1}(\overline{W})$ их образы $e(z_1), e(z_2)$ различаются более чем по $2n(W) + 1$ координатах. Положим $D = \bigsqcup_{W \in \mathcal{W}} m(W)$ и определим отображение $e': Z \setminus F \rightarrow P_\omega(D)$ формулой

$$e'(z) = \sum_{W \in \mathcal{W}} \lambda_W(g(z)) e_W(z), \quad z \in Z \setminus F.$$

Несложно убедиться, что существует инъекция $i: D \rightarrow Y$, которая порождает инъекцию $P_\omega(i): P_\omega(D) \rightarrow P_\omega(Y)$.

Пусть $\mathcal{W}' \in \text{cov}(g(Z \setminus F))$ – такое покрытие, что $\text{St}(\mathcal{W}') \prec \mathcal{W}$ и пусть $\varepsilon: g(Z \setminus F) \rightarrow (0, 1]$ – такая функция, что для любого $\mu \in g(Z \setminus F)$ $O_{\hat{d}}(\mu, \varepsilon(\mu)) \subset W$ для некоторого $W \in \mathcal{W}'$. Искомое вложение $e: Z \rightarrow \hat{P}(X)$ определим следующим образом:

$$e(z) = \begin{cases} z, & \text{если } z \in F; \\ (1 - \varepsilon(g(z))) \cdot g(z) + \varepsilon(g(z)) \cdot P_\omega(i) \circ e', & \text{если } z \in Z \setminus F. \end{cases}$$

Легко видеть, что $(e|Z \setminus F, g) \prec \mathcal{W}' \prec \mathcal{W} \prec \mathcal{V}$. Следовательно, отображение $e: Z \setminus F \rightarrow \hat{P}(X) \setminus F$ – собственное. Нетрудно убедиться также, что отображение e – инъективно. Поскольку собственные отображения замкнуты, то e – вложение. Кроме того, из построения отображения e ясно, что $e|F = \text{id}$, $e(Z) \subset P_\omega(Y)$ и $(e, \text{id}) \prec \mathcal{U}$.

Список литературы

1. Банах Т. О., Радул Т. М. Про функтор ймовірносних радонівських мір // Доповіді АН України. 1994. № 8. С. 16–20.
2. Toruńczyk H. On CE -images of the Hilbert cube and characterization of Q -manifolds // Fund. Math. 1980. V. 106. P. 31–40.
3. Toruńczyk H. Characterizing Hilbert space topology // Fund. Math. 1981. V. 111. P. 247–262.
4. Bestvina M., Mogilski J. Characterizing certain incomplete infinite-dimensional absolute retracts // Michigan Math. J. 1986. V. 33. № 3. P. 291–313.
5. Варадарайн В. С. Меры на топологических пространствах // Матем. сб. 1961. Т. 55. № 1. С. 33–100.
6. Федорчук В. В. Вероятностные меры в топологии // УМН. 1991. Т. 46. № 1. С. 41–80.
7. Банах Т. О. Топология пространств вероятностных мер, I // Математичні студії. 1995. № 5. С. 65–87.
8. Банах Т. О. Топология пространств вероятностных мер, II // Математичні студії. 1995. № 5. С. 88–106.
9. Банах Т. О., Коти Р. Топологическая классификация пространств вероятностных мер коаналитических множеств // Матем. заметки. 1994. Т. 55. № 1. С. 10–19.
10. Банах Т. О. Топологическая классификация пространств вероятностных мер на проективных пространствах // Матем. заметки. 1997. Т. 61. № 3. С. 441–444.
11. Радул Т. Н. О некоторых представлениях псевдовнутренности гильбертова куба в пространствах вероятностных мер // Вестник МГУ. Сер. I. Матем., мех. 1993. № 3. С. 79–81.
12. Журавев Т. Ф. Пространство всех вероятностных мер с конечными носителями гомеоморфно бесконечномерному линейному пространству // Общая топология. Пространства и отображения. М.: Изд-во МГУ, 1989. С. 66–70.
13. Toruńczyk H. Concerning locally homotopy negligible sets and characterization of l_2 -manifolds // Fund. Math. 1978. V. 101. P. 93–110.
14. Bessaga C., Pełczyński A. Selected topics in infinite-dimensional topology. Warsaw: PWN, 1975.
15. van Mill J. Infinite dimensional topology: prerequisites and introduction. Amsterdam: North-Holland, 1989.
16. Banach T., Radul T., Zarichnyi M. Absorbing sets in infinite-dimensional manifolds. Lviv: VNTL Publishers, 1996.
17. Банах Т. О. О топологии конструкции Милнора универсального G -расслоения // Сиб. матем. журн. 1992. Т. 33. № 1. С. 16–25.

18. *Курастовский К.* Топология, I. М.: Мир, 1966.
19. *Curtis D. W., Dobrowolski T., Mogilski J.* Some applications of the topological characterizations of the sigma-compact spaces l_f^2 and Σ // Trans. Amer. Math. Soc. 1984. V. 284. P. 837–846.
20. *Федерер Г.* Геометрическая теория меры. М.: Наука, 1987.
21. *Kechris A. S.* Classical descriptive set theory. Graduate texts in Mathematics. V. 156. New York: Springer-Verlag, 1995.
22. *Banach T.* The strongly universal property in convex sets // Математичні Студії (to appear).
23. *Toruńczyk H.* Absolute retracts as factors of normed linear spaces // Fund. Math. 1974. V. 86. P. 53–67.
24. *Toruńczyk H.* A correction of two papers concerning Hilbert manifolds // Fund. Math. 1985. V. 125. P. 89–93.
25. *Федорчук В. В., Филиппов В. В.* Общая топология. Основные конструкции. М.: Изд-во МГУ, 1988.
26. *Энгелькинг Р.* Общая топология. М.: Мир, 1986.
27. *West J. E.* The ambient homeomorphy of an incomplete subspace of incomplete subspace of infinite-dimensional Hilbert spaces // Pacific J. Math. 1970. V. 34. № 1. P. 257–267.
28. *Чепмэн Т.* Лекции о Q -многообразиях. М.: Мир, 1981.

Львовский университет им. Ив. Франко

Поступила в редакцию
30.10.1995