Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. С. Белов, С. А. Теляковский, Усиление теорем Дирихле–Жордана и Янга о рядах Фурье функций ограниченной вариации, *Матем. сб.*, 2007, том 198, номер 6, 25–40

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm2420>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.89.56.158

26 апреля 2023 г., 16:21:27

УДК 517.518.45

А. С. Белов, С. А. Теляковский

Усиление теорем Дирихле–Жордана и Янга о рядах Фурье функций ограниченной вариации

Установлены условия на возрастающую последовательность натуральных чисел $\{n_j\}$, необходимые и достаточные для того, чтобы для ряда Фурье каждой функции ограниченной вариации была равномерно ограничена сумма абсолютных величин блоков из членов ряда с гармониками от n_j до $n_{j+1} - 1$.

Библиография: 9 названий.

§ 1. Введение

Ряды Фурье функций ограниченной вариации согласно теореме Дирихле–Жордана сходятся в каждой точке, а согласно теореме Янга частные суммы таких рядов равномерно ограничены на периоде.

В [1] было получено усиление этих результатов, а именно, показано, что если ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \quad (1)$$

является рядом Фурье функции f ограниченной вариации, то в каждой точке x сходится не только ряд (1), но сходятся также и ряды

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left| \sum_{k=n_j}^{n_{j+1}-1} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \right|, \quad (2)$$

где $n_1 = 1 < n_2 < n_3 < \dots$ – произвольная возрастающая последовательность натуральных чисел, представимая в виде объединения конечного числа лакунарных по Адамару последовательностей. При этом сумма ряда (2) является ограниченной функцией.

Известно (см. [2; с. 24]), что указанное условие на последовательность $\{n_j\}$ равносильно существованию абсолютной постоянной M такой, что

$$\sum_{j=i}^{\infty} \frac{n_i}{n_j} \leq M, \quad i = 1, 2, \dots \quad (3)$$

Сходимость ряда (2) можно рассматривать и как усиленную сходимость ряда (1), и как ослабление абсолютной сходимости этого ряда.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 05-01-00052 у первого автора, грант № 05-01-00986 у второго автора).

В [3] при тех же условиях на последовательность $\{n_j\}$ установлено, что на ряды (2) переносятся также утверждения теоремы Дирихле–Жордана о равномерной сходимости ряда (1) при условии, что функция f непрерывна в отдельной точке или во всех точках некоторого отрезка.

В работе [4] на остатки рядов (2) распространена установленная Р. Бояничем [5] оценка скорости сходимости рядов Фурье функций ограниченной вариации.

В [6] анонсировано, что упомянутые результаты из [3] справедливы и в случае, когда условие (3) заменено на менее ограничительное условие

$$\sum_{j=i}^{\infty} \frac{1}{n_j} \min(n_i, n_{j+1} - n_j) \leq M, \quad i = 1, 2, \dots, \quad (4)$$

где M – некоторая абсолютная постоянная.

В настоящей работе дается доказательство обобщения упомянутых результатов из [1], [3], [4], когда условие (3) заменено на (4). При этом рассматриваются также ряды несколько более общего вида, чем (2).

Кроме того, будет доказано, что условие (4) является не только достаточным, но и необходимым для того, чтобы ряды (2) сходились при всех x для всех функций ограниченной вариации. Таким образом, дальнейшее ослабление условий на последовательность $\{n_j\}$ невозможно. Отметим, что в [7] было показано, что условие (3) не является в этих задачах необходимым.

План дальнейшего изложения таков. В § 2 исследуются ряды вида (2) для функции

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k},$$

которая в нашем случае, как и при изучении многих других свойств функций ограниченной вариации, играет роль модельной функции. Следующий § 3 посвящен произвольным функциям ограниченной вариации, а § 4 – характеру сходимости рядов вида (2) при условии непрерывности функции f . В заключительном § 5 рассматриваются свойства последовательностей $\{n_j\}$, удовлетворяющих условию (4), и приводятся формулировки других условий, эквивалентных (4).

§ 2. Исследование модельной функции

Пусть Λ – строго возрастающая последовательность натуральных чисел $n_1 = 1 < n_2 < n_3 < \dots$.

ТЕОРЕМА 1. *Если для последовательности Λ существует такое число M , что при каждом $i = 1, 2, \dots$ справедливо неравенство (4), то при всех x имеет место оценка*

$$\sum_{j=1}^{\infty} \max_{n_j \leq l \leq m < n_{j+1}} \left| \sum_{k=l}^m \frac{\sin kx}{k} \right| < 3 + M. \quad (5)$$

В частности,

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left| \sum_{k=n_j}^{n_{j+1}-1} \frac{\sin kx}{k} \right| < 3 + M. \quad (6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем рассматривать $x \in (0, \pi)$.

Зафиксируем $x \in (0, \pi)$ и выберем натуральное n такое, что

$$\frac{1}{n+1} \leq \sin \frac{x}{2} < \frac{1}{n}, \quad (7)$$

а затем число i , для которого $n_i \leq n < n_{i+1}$.

Сначала оценим сумму слагаемых из (5), соответствующих $k \leq n$. Поскольку $x \in (0, \pi)$, то $|\sin kx| < 2k \sin(x/2)$ и

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{i-1} \max_{n_j \leq l \leq m < n_{j+1}} \left| \sum_{k=l}^m \frac{\sin kx}{k} \right| + \max_{n_i \leq l \leq m \leq n} \left| \sum_{k=l}^m \frac{\sin kx}{k} \right| \\ & < \sum_{j=1}^{i-1} \sum_{k=n_j}^{n_{j+1}-1} 2 \sin \frac{x}{2} + \sum_{k=n_i}^n 2 \sin \frac{x}{2} \\ & = 2 \sin \frac{x}{2} \left(\sum_{j=1}^{i-1} (n_{j+1} - n_j) + (n - n_i + 1) \right) = 2n \sin \frac{x}{2} < 2. \end{aligned} \quad (8)$$

При рассмотрении членов ряда (5), для которых $k \geq n+1$, будем пользоваться оценками

$$\left| \sum_{k=p}^q \frac{\sin kx}{k} \right| < \frac{1}{p \sin(x/2)}, \quad p \leq q, \quad x \in (0, \pi), \quad (9)$$

и

$$\left| \sum_{k=p}^q \frac{\sin kx}{k} \right| \leq \sum_{k=p}^q \frac{1}{k} \leq \frac{q - p + 1}{p},$$

откуда следует, что

$$\max_{n_j \leq l \leq m < n_{j+1}} \left| \sum_{k=l}^m \frac{\sin kx}{k} \right| \leq \min \left(\frac{1}{n_j \sin(x/2)}, \frac{n_{j+1} - n_j}{n_j} \right).$$

Поэтому, учитывая (7) и выбор числа i , получаем для $j \geq i+1$

$$\max_{n_j \leq l \leq m < n_{j+1}} \left| \sum_{k=l}^m \frac{\sin kx}{k} \right| \leq \frac{1}{n_j} \min(n+1, n_{j+1} - n_j) \leq \frac{1}{n_j} \min(n_{i+1}, n_{j+1} - n_j).$$

Таким образом, для членов ряда (5), соответствующих $k \geq n+1$, имеем

$$\begin{aligned} & \max_{n+1 \leq l \leq m < n_{i+1}} \left| \sum_{k=l}^m \frac{\sin kx}{k} \right| + \sum_{j=i+1}^{\infty} \max_{n_j \leq l \leq m < n_{j+1}} \left| \sum_{k=l}^m \frac{\sin kx}{k} \right| \\ & \leq \frac{1}{(n+1) \sin(x/2)} + \sum_{j=i+1}^{\infty} \frac{1}{n_j} \min(n_{i+1}, n_{j+1} - n_j) \leq 1 + M. \end{aligned}$$

Отсюда и из (8) получаем оценку (5).

Теорема 1 доказана.

Заметим, что ряд из (4) при $i = 1$ имеет вид

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{n_j} = 1 + \sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{n_j}. \quad (10)$$

Значит, $M > 1$ и в оценках (5) и (6) их правые части можно заменить на $4M$.

ТЕОРЕМА 2. *Если последовательность Λ такова, что при всех x справедлива оценка*

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left| \sum_{k=n_j}^{n_{j+1}-1} \frac{\sin kx}{k} \right| \leq M, \quad (11)$$

то для каждого натурального числа N имеем

$$\sum_{j: n_j \geq N} \frac{1}{n_j} \min(N, n_{j+1} - n_j) < 8M. \quad (12)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим ядро Фейера порядка N

$$F_N(x) = \frac{1}{2} + \sum_{m=1}^N \left(1 - \frac{m}{N+1}\right) \cos mx.$$

Имеем

$$F_N(x) \sin n_j x = \frac{1}{2} \left[\sin n_j x + \sum_{m=1}^N \left(1 - \frac{m}{N+1}\right) (\sin(n_j + m)x + \sin(n_j - m)x) \right].$$

Поэтому если $n_j \geq N$, то

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_N(x) \sin n_j x \sum_{k=n_j}^{n_{j+1}-1} \frac{\sin kx}{k} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{m=0}^N \left(1 - \frac{m}{N+1}\right) \sin(n_j + m)x \sum_{k=n_j}^{n_{j+1}-1} \frac{\sin kx}{k} dx \\ &= \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{\min(N, n_{j+1}-n_j-1)} \left(1 - \frac{m}{N+1}\right) \frac{1}{n_j + m} \\ &\geq \frac{1}{2(n_j + N)} \sum_{m=0}^{\min(N, n_{j+1}-n_j-1)} \left(1 - \frac{m}{N+1}\right) \\ &\geq \frac{1}{4n_j} \sum_{m=0}^{\min(N, n_{j+1}-n_j-1)} \left(1 - \frac{m}{N+1}\right). \end{aligned}$$

Но для каждого $N' = 0, 1, \dots, N$ имеет место оценка

$$\sum_{m=0}^{N'} \left(1 - \frac{m}{N+1}\right) = (N' + 1) \left(1 - \frac{N'}{2(N+1)}\right) > \frac{N' + 1}{2}.$$

Значит, для $n_j \geq N$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_N(x) \sin n_j x \sum_{k=n_j}^{n_{j+1}-1} \frac{\sin kx}{k} dx > \frac{1}{8n_j} \min(N, n_{j+1} - n_j).$$

В силу оценки (11) имеем

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{j:n_j \geq N} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_N(x) \sin n_j x \sum_{k=n_j}^{n_{j+1}-1} \frac{\sin kx}{k} dx \right| \\ & \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_N(x) \sum_{j:n_j \geq N} \left| \sum_{k=n_j}^{n_{j+1}-1} \frac{\sin kx}{k} \right| dx \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_N(x) M dx = M. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\frac{1}{8} \sum_{j:n_j \geq N} \frac{1}{n_j} \min(N, n_{j+1} - n_j) < M,$$

и мы пришли к оценке (12).

Теорема 2 доказана.

Сопоставление теорем 1 и 2 показывает, что из равномерной ограниченности суммы ряда из левой части (6) вытекает равномерная ограниченность суммы ряда из левой части (5).

Кроме того, мы видим, что для последовательностей Λ ограниченность абсолютной постоянной сумм рядов из (12) при всех натуральных N равносильна равномерной ограниченности сумм таких рядов только для чисел N , принадлежащих Λ , как это требуется в условии (4). Некоторые другие условия на Λ , равносильные условию (4), приведены в конце настоящей работы.

§ 3. Произвольные функции ограниченной вариации

Применим теорему 1 к вопросам сходимости и оценки скорости сходимости рядов Фурье произвольных функций ограниченной вариации.

Пусть 2π -периодическая функция f имеет ограниченную вариацию и $V(f)$ – ее вариация на периоде. Для упрощения записей, не ограничивая общности, будем считать, что при всех x

$$f(x) = \frac{1}{2}(f(x+0) + f(x-0)). \quad (13)$$

Введем обозначения $\varphi_x(\tau) := f(x+\tau) + f(x-\tau) - 2f(x)$ и $V(\varphi_x; [0, t])$ – вариация функции $\varphi_x(\tau)$ на отрезке $[0, t]$. Понятно, что $V(\varphi_x; [0, \pi]) \leq V(f)$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть для строго возрастающей последовательности натуральных чисел Λ имеет место оценка (4). Если функция f имеет ограниченную вариацию и ряд (1) является ее рядом Фурье, то справедливы следующие утверждения.

i) Ряд

$$\sum_{j=1}^{\infty} \max_{n_j \leq l \leq m < n_{j+1}} \left| \sum_{k=l}^m (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \right| \quad (14)$$

во всех точках x ограниченно сходится и сумма этого ряда не превосходит

$$\frac{3+M}{\pi} V(f).$$

ii) Для остатков ряда (14) при каждом x выполняется оценка

$$\begin{aligned} & \sum_{j=i}^{\infty} \max_{n_j \leq l \leq m < n_{j+1}} \left| \sum_{k=l}^m (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \right| \\ & \leq \frac{3+L}{\pi} V\left(\varphi_x; \left[0, \frac{\pi}{s}\right]\right) + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{s-1} V\left(\varphi_x; \left[0, \frac{\pi}{k}\right]\right) \sum_{j=i}^{\infty} \frac{1}{n_j}, \end{aligned} \quad (15)$$

где s – произвольное натуральное число.

Если при этом s_i – наибольшее натуральное число, для которого

$$\sum_{j=i}^{\infty} \frac{1}{n_j} \leq \frac{M}{s_i}, \quad (16)$$

и $s_i \geq 2$, то

$$\begin{aligned} & \sum_{j=i}^{\infty} \max_{n_j \leq l \leq m < n_{j+1}} \left| \sum_{k=l}^m (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \right| \\ & \leq \frac{3}{\pi} V\left(\varphi_x; \left[0, \frac{\pi}{s_i}\right]\right) + \frac{2M}{\pi} \frac{1}{s_i} \sum_{k=1}^{s_i-1} V\left(\varphi_x; \left[0, \frac{\pi}{k}\right]\right). \end{aligned} \quad (17)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. i) Имеем

$$\sum_{k=l}^m (a_k \cos kx + b_k \sin kx) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \varphi_x(t) \sum_{k=l}^m \cos kt \, dt = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sum_{k=l}^m \frac{\sin kt}{k} \, d\varphi_x(t). \quad (18)$$

Поэтому для каждого x и любого N

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^N \max_{n_j \leq l \leq m < n_{j+1}} \left| \sum_{k=l}^m (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \right| \\ & = \sum_{j=1}^N \max_{n_j \leq l \leq m < n_{j+1}} \left| \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sum_{k=l}^m \frac{\sin kt}{k} \, d\varphi_x(t) \right| \\ & \leq \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sum_{j=1}^N \max_{n_j \leq l \leq m < n_{j+1}} \left| \sum_{k=l}^m \frac{\sin kt}{k} \right| \, dV(\varphi_x; [0, t]). \end{aligned} \quad (19)$$

Следовательно, согласно оценке (5)

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^N \max_{n_j \leq l \leq m < n_{j+1}} \left| \sum_{k=l}^m (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \right| \\ & \leq \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (3 + M) dV(\varphi_x; [0, t]) \leq \frac{3 + L}{\pi} V(f). \end{aligned}$$

Отсюда вытекает утверждение i).

ii) С помощью рассуждений, приведших к оценке (19), находим

$$\begin{aligned} & \sum_{j=i}^\infty \max_{n_j \leq l \leq m < n_{j+1}} \left| \sum_{k=l}^m (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \right| \\ & \leq \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sum_{j=i}^\infty \max_{n_j \leq l \leq m < n_{j+1}} \left| \sum_{k=l}^m \frac{\sin kt}{k} \right| dV(\varphi_x; [0, t]). \end{aligned}$$

Разобьем в полученном интеграле промежутки интегрирования на отрезки $[0, \pi/s]$ и $[\pi/s, \pi]$. Согласно теореме 1 сходимость ряда из (4) влечет оценку (5). Значит,

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/s} \sum_{j=i}^\infty \max_{n_j \leq l \leq m < n_{j+1}} \left| \sum_{k=l}^m \frac{\sin kt}{k} \right| dV(\varphi_x; [0, t]) \leq \frac{3 + M}{\pi} V\left(\varphi_x; \left[0, \frac{\pi}{s}\right]\right) \quad (20)$$

и при $s = 1$ оценка (15) доказана.

Рассмотрим теперь интеграл по отрезку $[\pi/s, \pi]$, считая $s \geq 2$. В силу оценки

$$\left| \sum_{k=p}^q \frac{\sin kt}{k} \right| < \frac{\pi}{pt}, \quad t \in (0, \pi],$$

вытекающей из (9), имеем

$$\sum_{j=i}^\infty \max_{n_j \leq l \leq m < n_{j+1}} \left| \sum_{k=l}^m \frac{\sin kt}{k} \right| \leq \frac{\pi}{t} \sum_{j=i}^\infty \frac{1}{n_j}, \quad t \in (0, \pi]. \quad (21)$$

Поэтому

$$\frac{1}{\pi} \int_{\pi/s}^\pi \sum_{j=i}^\infty \max_{n_j \leq l \leq m < n_{j+1}} \left| \sum_{k=l}^m \frac{\sin kt}{k} \right| dV(\varphi_x; [0, t]) \leq \int_{\pi/s}^\pi \frac{1}{t} dV(\varphi_x; [0, t]) \sum_{j=i}^\infty \frac{1}{n_j}.$$

С помощью интегрирования по частям находим

$$\begin{aligned} & \int_{\pi/s}^\pi \frac{1}{t} dV(\varphi_x; [0, t]) = \frac{1}{t} V(\varphi_x; [0, t]) \Big|_{\pi/s}^\pi + \int_{\pi/s}^\pi V(\varphi_x; [0, t]) \frac{dt}{t^2} \\ & = \frac{1}{\pi} V(\varphi_x; [0, \pi]) - \frac{s}{\pi} V\left(\varphi_x; \left[0, \frac{\pi}{s}\right]\right) + \frac{1}{\pi} \int_1^s V\left(\varphi_x; \left[0, \frac{\pi}{t}\right]\right) dt \\ & \leq -\frac{s}{\pi} V\left(\varphi_x; \left[0, \frac{\pi}{s}\right]\right) + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{s-1} V\left(\varphi_x; \left[0, \frac{\pi}{k}\right]\right). \end{aligned} \quad (22)$$

Отсюда и из (20) следует оценка (15).

Если s_i – наибольшее натуральное число, для которого выполняется оценка (16), и $s_i \geq 2$, то в (20) и (22) полагаем $s = s_i$ и из этих оценок получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sum_{j=i}^\infty n_j \max_{l \leq m < n_{j+1}} \left| \sum_{k=l}^m \frac{\sin kt}{k} \right| dV(\varphi_x; [0, t]) &\leq \frac{3+M}{\pi} V\left(\varphi_x; \left[0, \frac{\pi}{s_i}\right]\right) \\ &+ \left\{ -\frac{s_i}{\pi} V\left(\varphi_x; \left[0, \frac{\pi}{s_i}\right]\right) + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{s_i-1} V\left(\varphi_x; \left[0, \frac{\pi}{k}\right]\right) \right\} \sum_{j=i}^\infty \frac{1}{n_j} \\ &\leq \frac{3}{\pi} V\left(\varphi_x; \left[0, \frac{\pi}{s_i}\right]\right) + \frac{2M}{\pi} \frac{1}{s_i} \sum_{k=1}^{s_i-1} V\left(\varphi_x; \left[0, \frac{\pi}{k}\right]\right) \end{aligned}$$

и мы приходим к оценке (17).

Теорема 3 доказана.

Условие (4) при $i = 1$ означает, что

$$\sum_{j=1}^\infty \frac{1}{n_j} \leq M.$$

Поэтому для каждого i существует число s_i , удовлетворяющее условию (16), и $s_i \rightarrow \infty$ при $i \rightarrow \infty$.

Заметим, что в силу равенства (13) функция $\varphi_x(t)$ непрерывна в нуле, значит, $V(\varphi_x; [0, t]) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow 0$ и выражение в правой части оценки (17) стремится к нулю при $i \rightarrow \infty$.

Согласно теореме 2 условие (4) на последовательность Λ необходимо для того, чтобы для каждой функции ограниченной вариации сумма ряда (2) была ограниченной функцией.

Покажем, что если условие (4) не выполнено, то существуют абсолютно непрерывные функции, для которых ряд (2) расходится в отдельных точках.

ТЕОРЕМА 4. *Если последовательность Λ такова, что для каждой абсолютно непрерывной функции с рядом Фурье (1) для ряда (2) при $x = 0$ справедлива оценка*

$$\sum_{j=1}^\infty \left| \sum_{k=n_j}^{n_{j+1}-1} a_k \right| < \infty, \quad (23)$$

то для последовательности Λ выполняется условие (4).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для каждой функции $g(t) \in L[0, \pi]$ построим функцию

$$f(x) := \int_0^x g(t) dt, \quad x \in [0, \pi],$$

и продолжим ее сначала четно на $[-\pi, 0]$, а затем с периодом 2π на всю ось. Если (1) является рядом Фурье полученной абсолютно непрерывной функции f , то

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(t) \cos kt dt = -\frac{2}{k\pi} \int_0^\pi g(t) \sin kt dt$$

и согласно (23)

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left| \sum_{k=n_j}^{n_{j+1}-1} \int_0^{\pi} g(t) \frac{\sin kt}{k} dt \right| < \infty. \quad (24)$$

Рассмотрим последовательность функционалов

$$T_N(g) = \sum_{j=1}^N \left| \sum_{k=n_j}^{n_{j+1}-1} \int_0^{\pi} g(t) \frac{\sin kt}{k} dt \right|, \quad N = 1, 2, \dots,$$

заданных на $L[0, \pi]$.

Каждый из этих функционалов непрерывен и, кроме того, для любых функций g_1 и g_2 из $L[0, \pi]$ и любого числа α выполняются условия

$$|T_N(g_1 + g_2)| \leq |T_N(g_1)| + |T_N(g_2)|, \quad |T_N(\alpha g_1)| = |\alpha| |T_N(g_1)|.$$

Поэтому согласно теореме о равномерной ограниченности (см. [8; гл. II, теорема 1]) имеем

$$\lim_{g \rightarrow 0} T_N(g) = 0$$

равномерно относительно N .

Таким образом, для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что из условия $\|g\|_L < \delta$ вытекает неравенство

$$\sup_N |T_N(g)| < \varepsilon.$$

Следовательно, для норм функционалов T_N получаем

$$\sup_N \|T_N\| < \frac{\varepsilon}{\delta}.$$

Значит, существует число c такое, что для всех $g \in L[0, \pi]$ справедлива оценка

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left| \int_0^{\pi} \sum_{k=n_j}^{n_{j+1}-1} g(t) \frac{\sin kt}{k} dt \right| \leq c \|g\|_L.$$

Записав эту оценку для функции

$$g(t) := \begin{cases} 1 & \text{при } t \in (x, x+h), \\ 0 & \text{при } t \in [0, x] \cup [x+h, \pi], \end{cases}$$

$x, x+h \in [0, \pi]$, $h > 0$, находим, что для каждого натурального N

$$\sum_{j=1}^N \left| \int_x^{x+h} \sum_{k=n_j}^{n_{j+1}-1} \frac{\sin kt}{k} dt \right| \leq ch.$$

Разделив обе части полученного неравенства на h и устремив затем h к нулю, видим, что при всех $x \in [0, \pi]$ имеет место оценка

$$\sum_{j=1}^N \left| \sum_{k=n_j}^{n_{j+1}-1} \frac{\sin kx}{k} \right| \leq c.$$

Отсюда в силу произвольности N согласно теореме 2 получаем, что для последовательности Λ выполнено условие вида (12), которое эквивалентно (4). Теорема 4 доказана.

Отметим некоторые следствия приведенных результатов.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть функция $f(x)$ суммируема на отрезке $[0, 2\pi]$ и (1) – ее ряд Фурье, а функция $h(x)$ имеет ограниченную вариацию и

$$\frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx)$$

– ее ряд Фурье. Если для последовательности Λ выполняется условие (4), то справедлива оценка

$$\sum_{j=1}^{\infty} \max_{n_j \leq l \leq m < n_{j+1}} \left| \sum_{k=l}^m (a_k \alpha_k + b_k \beta_k) \right| \leq \frac{3+M}{\pi} \|f\|_{LV}(h).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$\sum_{k=n_j}^{n_{j+1}-1} (a_k \alpha_k + b_k \beta_k) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sum_{k=n_j}^{n_{j+1}-1} (\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx) dx.$$

Отсюда

$$\left| \sum_{k=n_j}^{n_{j+1}-1} (a_k \alpha_k + b_k \beta_k) \right| \leq \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)| \left| \sum_{k=n_j}^{n_{j+1}-1} (\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx) \right| dx.$$

Просуммировав эти неравенства и воспользовавшись утверждением i) теоремы 3, приходим к требуемому неравенству.

Для последовательностей Λ , удовлетворяющих условию (3), следствие 1 было отмечено в [1].

СЛЕДСТВИЕ 2. Для того чтобы для каждой суммируемой функции с рядом Фурье (1) сходиллся ряд

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left| \sum_{k=n_j}^{n_{j+1}-1} \frac{b_k}{k} \right|,$$

необходимо, чтобы последовательность Λ удовлетворяла условию (4). Если последовательность Λ удовлетворяет условию (4), то сходится ряд

$$\sum_{j=1}^{\infty} \max_{n_j \leq l \leq m < n_{j+1}} \left| \sum_{k=l}^m \frac{b_k}{k} \right|.$$

Достаточность в этом утверждении вытекает из следствия 1, если в качестве $h(x)$ взять функцию

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k}.$$

Необходимость фактически была установлена при доказательстве теоремы 4, поскольку там было показано, что из справедливости оценки (24) для всех функций $g(x) \in L[0, \pi]$ следует выполнение условия (4) для последовательности Λ .

§ 4. Непрерывные функции ограниченной вариации

Выясним, что можно сказать о сходимости рядов (14) для функций ограниченной вариации при условии непрерывности функции.

ТЕОРЕМА 5. Пусть функция f имеет ограниченную вариацию и для строго возрастающей последовательности натуральных чисел $\Lambda = \{n_j\}$ имеет место оценка (4). Тогда:

- i) если функция f непрерывна в точке x_0 , то в этой точке ряд (14) сходится равномерно;
- ii) если функция f непрерывна в каждой точке отрезка $[a, b]$, то ряд (14) сходится равномерно на $[a, b]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зададим на отрезке $[-2\pi, 2\pi]$ функцию $v(t)$ как вариацию функции f на отрезке $[-2\pi, t]$ и оценим с помощью $v(t)$ остаток ряда (14).

Как и в (18), имеем

$$\sum_{k=l}^m (a_k \cos kx + b_k \sin kx) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \sum_{k=l}^m \cos kt \, dt = -\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=l}^m \frac{\sin kt}{k} df(x+t)$$

и, значит, по аналогии с (19)

$$\begin{aligned} & \sum_{j=i}^{\infty} \max_{n_j \leq l \leq m < n_{j+1}} \left| \sum_{k=l}^m (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \right| \\ &= \sum_{j=i}^{\infty} \max_{n_j \leq l \leq m < n_{j+1}} \left| \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=l}^m \frac{\sin kt}{k} df(x+t) \right| \\ &\leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{j=i}^{\infty} \max_{n_j \leq l \leq m < n_{j+1}} \left| \sum_{k=l}^m \frac{\sin kt}{k} \right| dv(x+t), \quad x \in [-\pi, \pi]. \end{aligned} \quad (25)$$

i) Из непрерывности функции f в точке $x_0 \in [-\pi, \pi]$ следует, что функция $v(x_0 + t)$ непрерывна в точке $t = 0$. Пользуясь этим, для произвольного $\varepsilon > 0$ выберем $\delta > 0$ такое, что $v(x_0 + 2\delta) - v(x_0 - 2\delta) < \varepsilon$.

Интеграл из правой части (25) разобьем на два по множествам, на которых $|t| \leq \delta$ и $\delta \leq |t| \leq \pi$ соответственно.

Для точек x , удовлетворяющих условию $|x - x_0| \leq \delta$, согласно оценке (5) имеем

$$\begin{aligned} & \int_{-\delta}^{\delta} \sum_{j=i}^{\infty} \max_{n_j \leq l \leq m < n_{j+1}} \left| \sum_{k=l}^m \frac{\sin kt}{k} \right| dv(x+t) \\ &\leq (3+M) \int_{-\delta}^{\delta} dv(x+t) = (3+M)(v(x+\delta) - v(x-\delta)) \\ &\leq (3+M)(v(x_0+2\delta) - v(x_0-2\delta)) < (3+M)\varepsilon. \end{aligned} \quad (26)$$

Для оценки интеграла по множеству $\delta \leq |t| \leq \pi$ воспользуемся оценкой (21). Если s_i – наибольшее натуральное число, для которого справедлива оценка (16), то согласно (21)

$$\begin{aligned} & \int_{\delta \leq |t| \leq \pi} \sum_{j=i}^{\infty} \max_{n_j \leq l \leq m < n_{j+1}} \left| \sum_{k=l}^m \frac{\sin kt}{k} \right| dv(x+t) \\ & \leq \frac{\pi M}{s_i} \int_{\delta \leq |t| \leq \pi} \frac{1}{|t|} dv(x+t) \leq \frac{2\pi M}{s_i \delta} V(f). \end{aligned} \quad (27)$$

Поскольку $s_i \rightarrow \infty$ при $i \rightarrow \infty$, из (26) и (27) вытекает равномерная сходимость ряда (14) в точке x_0 .

ii) Не теряя общности, будем считать, что $[a, b] \subset [-\pi, \pi]$.

Из непрерывности $f(t)$ в точках отрезка $[a, b]$ следует равномерная непрерывность $v(t)$ в этих точках. Поэтому для каждого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всех $x \in [a, b]$ выполняется оценка $v(x + \delta) - v(x - \delta) < \varepsilon$.

Значит, пользуясь оценкой (27) и полученной при доказательстве (26) оценкой

$$\int_{-\delta}^{\delta} \sum_{j=i}^{\infty} \max_{n_j \leq l \leq m < n_{j+1}} \left| \sum_{k=l}^m \frac{\sin kt}{k} \right| dv(x+t) \leq (3 + M)(v(x + \delta) - v(x - \delta)),$$

видим, что ряд (14) равномерно сходится на отрезке $[a, b]$.

Теорема 5 доказана.

Согласно теореме Дирихле–Жордана (см. [9; гл. II, теоремы 8.1 и 8.6]) ряд Фурье (1) функции f ограниченной вариации сходится равномерно в точках непрерывности f и сходится равномерно на отрезке $[a, b]$, если функция f непрерывна во всех точках этого отрезка.

В [3; теорема 3] эти утверждения были распространены на сходимость ряда (2) для последовательностей $\{n_j\}$, удовлетворяющих условию (3). Теорема 5 показывает, что здесь условие (3) можно заменить на (4).

Заметим, что для теоремы Дирихле–Жордана справедлив локальный вариант (см. [9; гл. II, теорема 8.14]), когда предполагается, что функция f из $L[-\pi, \pi]$ имеет ограниченную вариацию не на всем периоде, а только на некотором отрезке из $[-\pi, \pi]$. В [3; с. 321] показано, что для ряда (2) подобная локализация не имеет места даже для последовательностей $\{n_j\}$, удовлетворяющих условию (3).

§ 5. Свойства последовательностей натуральных чисел

Рассмотрим последовательности Λ , для которых выполняется условие (4), и свойства таких последовательностей. Последовательности Λ , удовлетворяющие условию (4), будем называть A -последовательностями.

Следующие свойства A -последовательностей устанавливаются с помощью теорем 1 и 2.

ТЕОРЕМА 6. 1) *Подпоследовательность A -последовательности является A -последовательностью.*

2) Объединение конечного набора A -последовательностей является A -последовательностью.

3) Пусть $\Lambda = \{n_j\}$ является A -последовательностью и для строго возрастающей последовательности натуральных чисел $\Lambda' = \{n'_j\}$ существует такое число H , что при всех $j = 1, 2, \dots$ справедлива оценка $|n_j - n'_j| \leq H$. Тогда Λ' также является A -последовательностью.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для сокращения записей введем обозначение

$$s(l, m; x) := \left| \sum_{k=l}^m \frac{\sin kx}{k} \right|.$$

1) Пусть $\Lambda' = \{n'_j\}$ является подпоследовательностью A -последовательности $\Lambda = \{n_j\}$. Если $n'_j = n_p$ и $n'_{j+1} = n_{q+1}$, то при всех x

$$s(n'_j, n'_{j+1} - 1; x) \leq \sum_{i=p}^q s(n_i, n_{i+1} - 1; x).$$

Поэтому оценка (6) для последовательности Λ' вытекает из (6) для последовательности Λ .

2) Понятно, что достаточно рассмотреть случай объединения двух последовательностей.

Пусть $\Lambda' = \{n'_j\}$ и $\Lambda'' = \{n''_j\}$ являются A -последовательностями и $\Lambda = \{n_j\}$ – их объединение.

Если $n_j = n'_r$, то $n_{j+1} \leq n'_{r+1}$, значит,

$$\max_{n_j \leq l \leq m < n_{j+1}} s(l, m; x) \leq \max_{n'_r \leq l \leq m < n'_{r+1}} s(l, m; x).$$

Следовательно, выполнение оценок вида (5) для последовательностей Λ' и Λ'' влечет оценку подобного типа для последовательности Λ . А это согласно теореме 2 показывает, что Λ является A -последовательностью.

3) Заметим сначала, что для последовательности Λ' сходится ряд вида (10) из обратных величин чисел n'_j , поскольку

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{n'_j} \leq \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n_j} + \frac{|n_j - n'_j|}{n_j n'_j} \right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1+H}{n_j}.$$

Покажем теперь, что для Λ' справедлива оценка вида (11). Положим $m_j := \min(n_j, n'_j)$ и $M_j := \max(n_j, n'_j)$. Тогда

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=n_j}^{n_{j+1}-1} \frac{\sin kx}{k} - \sum_{k=n'_j}^{n'_{j+1}-1} \frac{\sin kx}{k} \right| &\leq \sum_{k=m_j}^{M_j-1} \frac{1}{k} + \sum_{k=m_{j+1}}^{M_{j+1}-1} \frac{1}{k} \\ &\leq \frac{1}{m_j} |n_j - n'_j| + \frac{1}{m_{j+1}} |n_{j+1} - n'_{j+1}| < \frac{2H}{m_j} < 2H \left(\frac{1}{n_j} + \frac{1}{n'_j} \right). \end{aligned}$$

Поэтому

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left| \sum_{k=n_j}^{n_{j+1}-1} \frac{\sin kx}{k} - \sum_{k=n'_j}^{n'_{j+1}-1} \frac{\sin kx}{k} \right| < 2H \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n_j} + \frac{1}{n'_j} \right).$$

Отсюда в силу сходимости ряда (10) и аналогичного ряда для последовательности Λ' делаем вывод о сходимости ряда вида (11) для Λ' , а это согласно теореме 2 означает, что Λ' является A -последовательностью.

Теорема 6 доказана.

Мы уже отмечали, что каждое из условий (4) и (12) является необходимым и достаточным для того, чтобы ряды (14) сходились при каждом x для всех функций f ограниченной вариации.

Приведем еще несколько вариантов условий, равносильных условию (4).

Нам понадобится следующее предложение.

ЛЕММА. *Если для последовательности Λ при некотором N справедлива оценка*

$$\sum_{j:n_j \geq N} \frac{1}{n_{j+1}} \min(N, n_{j+1} - n_j) \leq M,$$

то

$$\sum_{j:n_j \geq N} \frac{1}{n_j} \min(N, n_{j+1} - n_j) \leq 2M + 2. \quad (28)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Разобьем сумму из левой части (28) на две: первая по j , для которых $n_{j+1} < 2n_j$, и вторая – по остальным j .

Имеем

$$\sum_{\substack{j:n_j \geq N \\ n_{j+1} < 2n_j}} \frac{1}{n_j} \min(N, n_{j+1} - n_j) < 2 \sum_{j:n_j \geq N} \frac{1}{n_{j+1}} \min(N, n_{j+1} - n_j) \leq 2M.$$

Далее,

$$\sum_{\substack{j:n_j \geq N \\ n_{j+1} \geq 2n_j}} \frac{1}{n_j} \min(N, n_{j+1} - n_j) = \sum_{\substack{j:n_j \geq N \\ n_{j+1} \geq 2n_j}} \frac{1}{n_j} N \leq 2.$$

Из полученных оценок следует (28) и лемма доказана.

Согласно лемме если в левых частях оценок (4) и (12) заменить в знаменателях дробей n_j на n_{j+1} , то получим равносильные условия на последовательность Λ .

Покажем, что если потребовать выполнение оценки вида (12) не для всех натуральных N , а только для N , являющихся степенями некоторого числа $a \geq 2$, то получим равносильное условие на последовательность Λ .

ТЕОРЕМА 7. *Пусть для некоторого натурального числа a , $a \geq 2$, при всех натуральных ν имеет место оценка*

$$\sum_{j:n_j \geq a^\nu} \frac{1}{n_{j+1}} \min(a^\nu, n_{j+1} - n_j) \leq M. \quad (29)$$

Тогда при каждом натуральном N справедлива оценка

$$\sum_{j:n_j \geq N} \frac{1}{n_{j+1}} \min(N, n_{j+1} - n_j) < M + a. \quad (30)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По заданному N подбираем ν такое, что $a^{\nu-1} \leq N < a^\nu$, и разбиваем j , для которых $n_j \geq N$, на классы

$$\sigma_1 := \{j : n_j \geq a^\nu\}, \quad \sigma_2 := \{j : n_j < a^\nu\}.$$

При этом класс σ_2 может оказаться пустым.

Рассмотрим сумму из (30) для j из σ_1 и из σ_2 по отдельности.

Согласно (29) имеем

$$\sum_{j \in \sigma_1} \frac{1}{n_{j+1}} \min(N, n_{j+1} - n_j) \leq \sum_{j: n_j \geq a^\nu} \frac{1}{n_{j+1}} \min(a^\nu, n_{j+1} - n_j) \leq M.$$

Далее,

$$\sum_{j \in \sigma_2} \frac{1}{n_{j+1}} \min(N, n_{j+1} - n_j) \leq \sum_{j \in \sigma_2} \frac{1}{n_{j+1}} (n_{j+1} - n_j).$$

Если существуют числа $j \in \sigma_2$, то для каждого такого числа, кроме одного, выполняется неравенство $n_{j+1} < a^\nu$. Поэтому

$$\begin{aligned} \sum_{j \in \sigma_2} \frac{1}{n_{j+1}} (n_{j+1} - n_j) &\leq 1 + \sum_{j: N \leq n_j < n_{j+1} < a^\nu} \frac{1}{n_{j+1}} (n_{j+1} - n_j) \\ &\leq 1 + \sum_{j: N \leq n_j < n_{j+1} < a^\nu} \frac{1}{N} (n_{j+1} - n_j) < 1 + \frac{1}{N} (a^\nu - N) = \frac{a^\nu}{N} \leq a. \end{aligned}$$

Таким образом, для каждого натурального N справедлива оценка (30).

Теорема 7 доказана.

Список литературы

- [1] С. А. Теляковский, “О частных суммах рядов Фурье функций ограниченной вариации”, *Теория приближений. Гармонический анализ*, Тр. МИАН, **219**, Наука, М., 1997, 378–386; англ. пер.: S. A. Telyakovskii, “On partial sums of Fourier series of functions of bounded variation”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **219**:4 (1997), 372–381.
- [2] Н. К. Бари, *Тригонометрические ряды*, Физматгиз, М., 1961; англ. пер.: N. K. Bari, *A treatise on trigonometric series*, vols. I, II, Pergamon Press, Oxford–London–New York–Paris–Frankfurt, 1964.
- [3] С. А. Теляковский, “О равномерной сходимости рядов Фурье функций ограниченной вариации”, *Функциональные пространства, гармонический анализ, дифференциальные уравнения*, Тр. МИАН, **232**, Наука, М., 2001, 318–326; англ. пер.: S. A. Telyakovskii, “On the uniform convergence of the Fourier series of functions of bounded variation”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **232**:1 (2001), 310–318.
- [4] С. А. Теляковский, “О скорости сходимости рядов Фурье функций ограниченной вариации”, *Матем. заметки*, **72**:6 (2002), 949–953; англ. пер.: S. A. Telyakovskii, “On the rate of convergence of Fourier series of functions of bounded variation”, *Math. Notes*, **72**:5–6 (2002), 872–876.
- [5] R. Bojanić, “An estimate of the rate of convergence for Fourier series of functions of bounded variation”, *Publ. Inst. Math. (Beograd) (N.S.)*, **26(40)** (1979), 57–60.

- [6] С. А. Теляковский, “Усиление теоремы Дирихле–Жордана о сходимости рядов Фурье функций ограниченной вариации”, *Международная конференция “Функциональные пространства, теория приближений, нелинейный анализ”, посвященная столетию академика С. М. Никольского. Тезисы докладов* (Москва, 2005), МИАН, М., 2005, 221.
- [7] А. Ю. Попов, С. А. Теляковский, “К оценкам частных сумм рядов Фурье функций ограниченной вариации”, *Изв. вузов. Матем.*, 2000, № 1, 51–55; англ. пер.: А. Yu. Popov, S. A. Telyakovskii, “On estimates of partial sums of Fourier series of functions of bounded variation”, *Russian Math. (Iz. VUZ)*, **44**:1 (2000), 50–54.
- [8] К. Иосида, *Функциональный анализ*, Мир, М., 1967; пер. с англ.: К. Yosida, *Functional analysis*, Academic Press, New York; Springer-Verlag, Berlin, 1965.
- [9] А. Зигмунд, *Тригонометрические ряды*, т. I, Мир, М., 1965; пер. с англ.: A. Zygmund, *Trigonometric series*, vol. I, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1959.

А. С. Белов (A. S. Belov)

Ивановский государственный университет

E-mail: asbel@ivanov.ru

Поступила в редакцию

27.07.2006 и 20.10.2006

С. А. Теляковский (S. A. Telyakovskii)

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

E-mail: satel@mi.ras.ru