Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. А. Бородин, Квазиортогональные множества и условия гильбертовости банахова пространства, *Матем. сб.*, 1997, том 188, номер 8, 63–74

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm243>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.217.227

26 апреля 2023 г., 13:25:53

УДК 517.982.22

П. А. Бородин

Квазиортогональные множества и условия гильбертовости банахова пространства

Квазиортогональным множеством $Q(Y, X)$ к подпространству Y в банаховом пространстве X называется совокупность всех элементов $n \in X$, для которых 0 является одним из ближайших элементов в подпространстве Y . Исследуются свойства множеств $Q(Y, X)$; в их терминах доказываются критерии гильбертовости пространства X , обобщающие, в частности, известные теоремы Рудина–Смита–Зингера и Какутани.

Библиография: 11 названий.

§ 0. Введение

Пусть X – комплексное или вещественное банахово пространство, Y – его (замкнутое линейное) подпространство, $P_Y(x) = \{z \in Y : \|x - z\| = \inf\{\|x - y\| : y \in Y\}\}$ – множество ближайших к $x \in X$ элементов в Y .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Квазиортогональным множеством $Q(Y) = Q(Y, X)$ к подпространству Y в пространстве X назовем совокупность всех элементов $n \in X$, для которых $P_Y(n) \ni 0$.*

Этот объект впервые появляется в работах Чини и Вульберта [1] и Зингера [2] в связи с задачами теории приближений в нормированных пространствах (термин “квазиортогональное множество” предложил профессор Е. П. Долженко). В случае гильбертова пространства X каждый элемент $n \in Q(Y)$ ортогонален подпространству Y в обычном смысле, а само множество $Q(Y)$ есть ортогональное дополнение к Y .

Цель настоящей работы состоит в изучении свойств квазиортогональных множеств (§1) и получении различных критериев гильбертовости банахова пространства в терминах множеств, квазиортогональных к его подпространствам (§§2–4). При этом обобщаются известные теоремы Рудина–Смита–Зингера (§2), Какутани (§3) и доказываются двойственные им теоремы (§4). Приложением формулируемых критериев гильбертовости являются различные геометрические характеристики эллипсоидов в классе выпуклых замкнутых поверхностей в $\mathbb{R}^n$, обобщающие, в частности, известную теорему Бляшке–Александрова в $\mathbb{R}^3$ (§5).

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-01-01366).

§ 1. Квазиортогональные множества

Множество, квазиортогональное к подпространству, всегда замкнуто и является двусторонним конусом: если $n \in Q(Y, X)$, то $\lambda n \in Q(Y, X)$ для любого числа λ . Очевидно, $Q(X, X) = \{0\}$ и, обратно, $Q(\{0\}, X) = X$.

Если через точку $n \in Q(Y)$ провести плоскость $Y + n$, параллельную подпространству Y , то она не пересекает открытый шар $\{x : \|x\| < \|n\|\}$, т.е. является опорной к сфере $\{x : \|x\| = \|n\|\}$ в точке n .

Установим основные свойства квазиортогональных множеств.

Пусть $Y^\perp = \{f \in X^* : f(y) = 0 \ \forall y \in Y\}$ — аннулятор подпространства Y в сопряженном пространстве X^* .

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. *Имеет место равенство $Q(Y) = \{n \in X : \exists f \in Y^\perp, f \neq 0 \ (f(n) = \|f\| \|n\|)\}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, для любого элемента n из правой части и любого $y \in Y$ имеем $\|n - y\| \geq |f(n - y)|/\|f\| = |f(n)|/\|f\| = \|n\|$, т.е. $0 \in P_Y(n)$. Обратно, пусть $n \in Q(Y)$. Обозначим через $\langle n \rangle$ одномерное подпространство, порожденное вектором n , и зададим функционал f_0 на $Y \oplus \langle n \rangle$ равенством $f_0(y + \lambda n) = \lambda$. Очевидно, $\|f_0\| = 1/\|n\|$. По теореме Хана–Банаха f_0 можно без увеличения нормы линейно продолжить на X , в результате чего получится функционал $f \in Y^\perp$, для которого $f(n) = 1 = \|n\| \|f\|$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. *Если Y_1, Y_2 — подпространства в рефлексивном банаховом пространстве X и $Q(Y_1) \subseteq Y_2$, то $Y_1^\perp \subseteq Q(Y_2^\perp)$ (в X^*).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, пусть $g \in Y_1^\perp$. По теореме Джеймса [3] всякий линейный непрерывный функционал на рефлексивном пространстве достигает своей нормы и потому найдется $x \in X$, для которого $g(x) = \|g\| \|x\|$. По утверждению 1 $x \in Q(Y_1)$, откуда $x \in Y_2$. Элемент x , рассматриваемый как элемент пространства X^{**} , лежит в $(Y_2^\perp)^\perp = Y_2$ и достигает своей нормы на элементе g . По утверждению 1 $g \in Q(Y_2^\perp)$, что и требовалось.

Для справедливости двойственного утверждения необходима гладкость пространства X (т.е. единственность опорной гиперплоскости в каждой точке единичной сферы $S(X)$).

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. *Если Y_1, Y_2 — подпространства в рефлексивном гладком банаховом пространстве X и $Y_2 \subseteq Q(Y_1)$, то $Q(Y_2^\perp) \subseteq Y_1^\perp$ (в X^*).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В самом деле, если $g \in Q(Y_2^\perp)$, то по утверждению 1 найдется такой элемент $x \in (Y_2^\perp)^\perp = Y_2$, $x \neq 0$, что $g(x) = \|x\| \|g\|$. Тогда для всякого y из ядра $\text{Ker}(g)$ функционала g имеем $\|x + \lambda y\| \geq g(x + \lambda y)/\|g\| = \|x\|$, т.е. гиперплоскость, параллельная $\text{Ker}(g)$, является опорной к единичной сфере пространства X в точке x . Но эта плоскость, будучи единственной, должна содержать все направления из подпространства Y_1 ($x \in Q(Y_1)$). Отсюда $Y_1 \subseteq \text{Ker}(g)$, т.е. $g \in Y_1^\perp$, что и требовалось.

Простые примеры показывают, что в утверждении 3 нельзя опустить требование гладкости пространства X .

Из утверждений 2 и 3 непосредственно вытекает

УТВЕРЖДЕНИЕ 4. Если Y_1, Y_2 – подпространства в рефлексивном гладком банаховом пространстве X и $Q(Y_1) = Y_2$, то $Y_1^\perp = Q(Y_2^\perp)$ (в X^*).

Следующее свойство квазиортогональных множеств касается их поведения при переходе к факторпространству.

Пусть Z – (замкнутое) подпространство в пространстве X . Как известно [4], факторпространство X/Z является банаховым пространством с нормой $\|[x]\| = \inf\{\|x + z\| : z \in Z\}$, где $[x]$ обозначает элемент X/Z , соответствующий классу смежности элемента $x \in X$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 5. Если Y, Z – подпространства в банаховом пространстве X и $Z \subset Y$, то $\{[n] \in X/Z : n \in Q(Y, X)\} \subseteq Q(Y/Z, X/Z)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любого $n \in Q(Y, X)$ и любого $[y] \in Y/Z$ имеем

$$\|[n] + [y]\| = \inf\{\|n + y + z\| : z \in Z\} \geq \|n\| = \inf\{\|n + z\| : z \in Z\} = \|[n]\|,$$

где неравенство и следующее за ним равенство выполнены в силу того, что $n \in Q(Y, X)$ и $z, y + z \in Y$. Таким образом, $\|[n] + [y]\| \geq \|[n]\|$ в X/Z , откуда $[n] \in Q(Y/Z, X/Z)$. Утверждение доказано.

Нетрудно показать, что в случае рефлексивного пространства X имеет место равенство $\{[n] \in X/Z : n \in Q(Y, X)\} = Q(Y/Z, X/Z)$.

§ 2. Аппроксимативная характеристика гильбертовых пространств

Оператор P_Y метрического проектирования на подпространства $Y \subset X$ определен, вообще говоря, не на всем пространстве X (не у каждого $x \in X$ может быть элемент наилучшего приближения) и не является в общем случае ни линейным, ни непрерывным [1], [2]. Нетрудно показать (см. также [2]), что оператор P_Y линеен на своей области определения тогда и только тогда, когда $Q(Y)$ – линейное подпространство.

Если X гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$, то $Q(Y) = \{n \in X : (n, y) = 0 \quad \forall y \in Y\}$ – подпространство, являющееся ортогональным дополнением к Y . Очевидно, в этом случае $Q(Q(Y)) = Y$.

Другой пример: если $X = C[a, b]$, а Y – подпространство всех многочленов степени $\leq m$, то по классической теореме Чебышёва $Q(Y)$ состоит из функций $f \in C[a, b]$, альтернирующих (т.е. попеременно принимающих значения $\|f\|$ и $-\|f\|$) по крайней мере $m + 2$ раза на $[a, b]$. Такие функции, конечно, не образуют линейного подпространства.

Как показывает следующая теорема, в любом негильбертовом пространстве всегда есть подпространства Y любой размерности и любой коразмерности ≥ 2 , квазиортогональные множества к которым нелинейны (а значит, оператор P_Y не линеен на своей области определения).

ТЕОРЕМА 1. Пусть $d \geq 1$ и $k \geq 2$ – заданные натуральные числа, и пусть размерность банахова пространства X не меньше чисел $d + 2$ и $k + 1$. Тогда следующие условия эквивалентны:

- 1) пространство X гильбертово (т.е. норма в X задается скалярным произведением);

- 2) для любого d -мерного подпространства $Y \subset X$ квазиортогональное множество $Q(Y, X)$ является подпространством;
- 3) для любого подпространства $Y \subset X$ коразмерности k множество $Q(Y, X)$ является подпространством.

Эквивалентность условий 1) и 2) в случае вещественного пространства была доказана Рудиным и Смитом [5] (см. также [2]). Зингер в [2] доказал также и эквивалентность 1) и 3) при дополнительном предположении $Q(Y) + Y = X$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как уже отмечалось, из 1) очевидным образом вытекают 2) и 3). Предположив сначала эквивалентность 1) и 2), докажем, что 1) следует из 3).

Итак, пусть выполнено условие 3) при некотором $k \geq 2$. Пусть X_{k+1} – какое-либо $(k+1)$ -мерное подпространство в X . Возьмем любое одномерное подпространство $Y_1 \subset X_{k+1}$ и два произвольных вектора n_1 и n_2 из $Q(Y_1, X_{k+1})$ с $\|n_1\| = \|n_2\| = 1$. Обозначим через Π_1 и Π_2 какие-либо гиперплоскости, опорные к единичной сфере $S(X)$ пространства X , соответственно, в точках n_1 и n_2 и содержащие в себе прямые, параллельные Y_1 , а через Π'_1 и Π'_2 – гиперподпространства (т.е. подпространства коразмерности 1 в X), параллельные Π_1 и Π_2 . Эти гиперподпространства содержат Y_1 . Подпространство $\Pi'_1 \cap \Pi'_2$ имеет в X коразмерность ≤ 2 , поэтому $\Pi'_1 \cap \Pi'_2$ есть подпространство Y коразмерности k в X , содержащее Y_1 , $k \geq 2$. Имеем $n_1 \in Q(\Pi'_1, X)$, $n_2 \in Q(\Pi'_2, X)$, поэтому $n_1, n_2 \in Q(Y, X)$. Так как по предположению $Q(Y, X)$ – подпространство, то $n_1 + n_2 \in Q(Y, X)$, а так как $Q(Y, X) \cap X_{k+1} \subseteq Q(Y_1, X_{k+1})$, то $n_1 + n_2 \in Q(Y_1, X_{k+1})$. Таким образом, $Q(Y_1, X_{k+1})$ – подпространство для любого одномерного $Y_1 \subset X_{k+1}$. По предположенной нами импликации $2) \Rightarrow 1)$ (для $d = 1$) X_{k+1} гильбертово (условие $\dim X_{k+1} \geq d + 2 = 3$ выполнено, так как $k + 1 \geq 3$). Поскольку для любых двух векторов из X можно найти содержащее их $(k+1)$ -мерное подпространство, норма в X удовлетворяет равенству параллелограмма. Последнее же достаточно для гильбертовости всего X (см., например, [4]).

Докажем теперь $2) \Rightarrow 1)$. Сведем все к случаю $\dim X = 3$, $d = 1$. Пусть X_{d+2} – произвольное $(d+2)$ -мерное подпространство в X ($\dim X \geq d + 2$ по условию). Для любого d -мерного подпространства $Y_d \subset X_{d+2}$ имеем $Q(Y_d, X_{d+2}) = Q(Y_d, X) \cap X_{d+2}$ – подпространство, и мы пришли к уже обсуждавшейся ситуации: в X_{d+2} квазиортогональное множество к любому подпространству коразмерности $k = 2$ является подпространством. Как было показано, в этом случае в любом $(k+1)$ -мерном (т.е. трехмерном) подпространстве в X_{d+2} квазиортогональные множества ко всем одномерным подпространствам тоже линейны. Поскольку любое трехмерное подпространство в X лежит в каком-то X_{d+2} , мы действительно свели задачу к случаю $\dim X = 3$, $d = 1$.

Квазиортогональное множество к прямой l в трехмерном банаховом пространстве X получается всевозможными гомотетиями из множества общих точек сферы $S(X)$ и описанного вокруг нее цилиндра, образующая которого параллельна l . Отсюда следует, что $Q(l)$, будучи подпространством, должно быть, по крайней мере, двумерным. С другой стороны, трехмерным оно быть не может, так как $Q(l) \cap l = \{0\}$.

Таким образом, для завершения доказательства теоремы нужна

ЛЕММА 1. Пусть в $\mathbb{R}^3$ ($\mathbb{C}^3$) задана двумерная (вещественно-пятимерная) выпуклая замкнутая поверхность S , которая касается каждого описанного вокруг нее цилиндра (образующая которого – соответственно вещественная или комплексная прямая) по множеству, лежащему в двумерной (комплексно-двумерной) плоскости. Тогда S – эллипсоид (т.е. задается в декартовых координатах как множество уровня вещественной (эрмитовой) положительно определенной квадратичной формы).

Эта лемма представляет собой обобщенную теорему Бляшке об эллипсоиде. В [6] она доказана в $\mathbb{R}^3$ для так называемого овалоида (регулярной аналитической замкнутой выпуклой поверхности с везде отличной от нуля кривизной). Для случая $\mathbb{R}^3$ лемма 1 непосредственно вытекает из результатов Александрова [7]. Таким образом, теорема 1 полностью доказана для вещественного пространства X .

Нами получено доказательство леммы 1 и для комплексного случая; оно не приводится ввиду ограниченности объема статьи.

Заметим, что в формулировке теоремы 1 условия $\dim X \geq d + 2$ и $k \geq 2$ существенны. Дело в том, что в достаточно гладком пространстве X для любого подпространства Y коразмерности 1 множество $Q(Y, X)$ есть одномерное подпространство, порожденное вектором $n \in S(X)$, в котором опорная гиперплоскость к $S(X)$ параллельна Y (необходимое условие гладкости X как раз и состоит в том, чтобы вектор n был единственным с точностью до знака). Эти условия нельзя устранить и дополнительным условием $Q(Q(Y)) = Y$: можно привести пример двумерного негильбертова пространства, в котором $Q(Q(Y)) = Y$ для любого Y . Замкнутые выпуклые гладкие кривые, являющиеся единичными сферами в таких пространствах, описаны Радоном (см. [6]).

§3. Обобщение теоремы Какутани

ТЕОРЕМА (Какутани [8]). Если вещественное банахово пространство X имеет размерность ≥ 3 , и для каждого подпространства $Y \subset X$ существует линейный проектор $\pi_Y: X \rightarrow Y$ нормы 1, то пространство X гильбертово.

Покажем, что условие этой теоремы можно ослабить до требования существования проектора π_Y лишь на каждое подпространство заданной размерности ≥ 2 или же заданной коразмерности.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $d \geq 2$, $k \geq 1$ – натуральные числа, и пусть $\dim X \geq \max\{d + 1, k + 2\}$. Тогда следующие условия эквивалентны:

- 1) пространство X гильбертово;
- 2) для любого подпространства $Y \subset X$ размерности d существует линейный проектор $\pi_Y: X \rightarrow Y$ нормы 1;
- 3) для любого подпространства $Y \subset X$ коразмерности k существует линейный проектор $\pi_Y: X \rightarrow Y$ нормы 1.

Эквивалентность 1) и 2) при $d = 2$ доказана Филлипсом в [9].

ЗАМЕЧАНИЕ. Условие существования проектора нормы 1 можно переформулировать в терминах квазиортогональных множеств. Именно, для любого элемента $x \in X$ имеем $x = y + y'$, где $y \in Y$, $y' \in Y' = \text{Ker } \pi_Y := \{k : \pi_Y(k) = 0\}$, причем $\|y + y'\| \geq \|\pi_Y(y + y')\| = \|y\|$, т.е. для всякого $y \in Y$ элемент 0 является одним из ближайших в Y' . Другими словами, $Y \subseteq Q(Y')$. Обратно, если существует подпространство Y' , для которого $Y \subseteq Q(Y')$ и $Y' + Y = X$, то эта сумма – прямая, и отображение $x = y + y' \mapsto y$ задает проектор $X \rightarrow Y$ нормы 1. Итак, *существование проектора π_Y нормы 1 эквивалентно существованию подпространства Y' со свойствами: $Y \subseteq Q(Y')$ и $Y' + Y = X$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Надо доказать $2) \Rightarrow 1)$ и $3) \Rightarrow 1)$. Рассмотрим три случая: а), б) и в).

а) В пространстве X выполнено условие 2) с $d = 2$. Тогда, очевидно, любое трехмерное подпространство $X_3 \subseteq X$ также удовлетворяет этому условию. Доказав, что любое X_3 гильбертово, мы докажем выполнение равенства параллелограмма для любых двух элементов в X . Последнее же достаточно для гильбертовости всего X .

Итак, надо доказать гильбертовость трехмерного банахова пространства X_3 , в котором на каждое двумерное подпространство Y есть проектор π_Y нормы 1. Существование π_Y равносильно существованию такого вектора $\tau(Y)$, определяющего направление проектирования, что $\|y\| = \|\pi_Y(y + \lambda\tau(Y))\| \geq \|y + \lambda\tau(Y)\|$ для любого $y \in Y$ и любого числа λ . Это означает, что направление $\tau(Y)$ является опорным к единичной сфере $S(X_3)$ во всех точках пересечения $S \cap Y$. Поэтому доказательство теоремы в случае а) будет завершено, если будет доказана

ЛЕММА 2. Пусть в $\mathbb{R}^3$ ($\mathbb{C}^3$) задана двумерная (соответственно, вещественно-пятимерная) выпуклая замкнутая поверхность S , симметричная относительно начала координат O . Если для каждой двумерной (соответственно, комплексно-двумерной) плоскости Y_2 , проходящей через O , существует направление $\tau(Y_2)$, опорное к S во всех точках пересечения $S \cap Y_2$, то S – эллипсоид.

Заметим, что в вещественном случае лемма 2 совпадает с теоремой 5 из работы Какутани [8]. Эту теорему Какутани доказывает ссылкой на упомянутый результат Бляшке (обобщением которого является лемма 1) и тем заканчивает доказательство основной своей теоремы, приведенной нами в начале параграфа. Однако, формулировки леммы 2 и теоремы Бляшке (см. лемму 1) отнюдь не тождественны, их эквивалентность нуждается в доказательстве.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 2. Пункт 1. В терминах квазиортогональных множеств условие леммы 2 формулируется так: в трехмерном банаховом пространстве X для каждого двумерного подпространства Y_2 найдется такое одномерное подпространство Y_1 , что $Y_2 \subseteq Q(Y_1)$.

Покажем, что единичная сфера S^* сопряженного пространства X^* удовлетворяет условиям леммы 1.

Если бы X было гладким, то по утверждению 3 в X^* мы имели бы $Q(Y_2^\perp) \subseteq Y_1^\perp$ для любого одномерного $Y_2^\perp$, что в точности соответствует условию леммы 1.

Общий же случай требует некоторых рассуждений. Фиксируем Y_2 и соответствующее ему Y_1 . Пусть $g \in Y_1^\perp$, и параллельная $\text{Ker}(g)$ двумерная

плоскость Π является опорной к сфере S в какой-то точке p . Справедливо включение $Y_1 \subset \text{Ker}(g)$, поэтому в плоскости Π есть прямая l , параллельная Y_1 и проходящая через точку p . Пусть q – точка пересечения l и Y_2 . По условию l является опорной прямой к сфере $\{x : \|x\| = \|q\|\}$ в точке q , и в то же время по построению она является опорной прямой к $S = \{x : \|x\| = 1\}$ в точке p . Отсюда $\|q\| = 1$, отрезок $pq \subset S$, а плоскость Π является опорной к S в точке q . Следовательно, $g(p) = g(q) = \|g\|$. Элемент $q \in Y_2$, поэтому $g \in Q(Y_2^\perp)$. Таким образом, $Y_1^\perp \subseteq Q(Y_2^\perp)$.

Пункт 2. Итак, в сопряженном пространстве X^* квазиортогональное множество ко всякому одномерному подпространству $Z_1 = Y_2^\perp$ содержит двумерное подпространство $Z_2 = Y_1^\perp$, $Q(Z_1) \supseteq Z_2$. Для окончательного приведения к условиям леммы 1 осталось доказать, что $Q(Z_1) = Z_2$.

Для наглядности рассмотрим только вещественный случай. Пусть прямая l параллельна подпространству Z_1 и является опорной к сфере S^* в точке $p \notin Z_2$. Эта прямая пересекается с Z_2 в некоторой точке q . Как и выше, доказывается, что весь отрезок $pq \subset S^*$. Покажем, что это невозможно.

Пусть Π – двумерная плоскость, опорная к S^* во всех точках отрезка pq , а Γ – двумерное подпространство, порожденное векторами p и q . Существует одномерное подпространство $Z'_1 \neq Z_1$, параллельное Π и такое, что соответствующее ему двумерное подпространство Z'_2 (для которого $Q(Z'_1) \supseteq Z'_2$) не совпадает с Γ . Действительно, если $\Gamma \subseteq Q(Z'_1)$ для любого $Z'_1 \parallel \Pi$, $Z'_1 \neq Z_1$, то по непрерывности $\Gamma \subseteq Q(Z_1)$, что невозможно, так как $Z_1 \subset \Gamma$ (отрезок $pq \parallel Z_1$). Таким образом, прямая $\Pi \cap Z'_2$ и отрезок pq , лежащие в одной плоскости Π , не параллельны. Как и выше, доказывается, что всякий отрезок, параллельный подпространству Z'_1 , имеющий один конец на отрезке pq и другой на прямой $\Pi \cap Z'_2$, целиком лежит на поверхности S^* . Следовательно, пересечение $\Pi \cap S^*$ имеет внутренние точки относительно плоскости Π , т.е. представляет собой невырожденную (выпуклую замкнутую) плоскую область D .

Возьмем направление v , не параллельное плоскости Π , и соответствующее двумерное подпространство $Z_2(v) \subseteq Q(\langle v \rangle)$. Оно не может пересекать область D по внутренности, иначе часть области D (а значит, и сферы S^*) лежит вне цилиндра с образующим вектором v , описанного по кривой $S^* \cap Z_2(v)$. Итак, для любого вектора v , не параллельного Π , область D лежит в Π по одну сторону от прямой $\Pi \cap Z_2(v)$. По непрерывности мы можем утверждать это и для любого вектора v , параллельного Π . Но, как уже было дважды показано выше в подобных случаях, если $v \parallel \Pi$, то область D вместе с каждой своей точкой P содержит отрезок, параллельный v и соединяющий P с прямой $\Pi \cap Z_2(v)$.

Итак, мы получили невырожденную выпуклую замкнутую область $D \subset \Pi$, которая по любому направлению v сама по себе проектируется на некоторую прямую $l(v)$, не пересекающую внутренность D . Очевидно, такой области не существует (для доказательства достаточно взять направление v , параллельное какому-либо диаметру области D). Лемма 2 и случай а) доказаны.

б) В исходном пространстве X выполнено условие 3) и $\dim X = k+2$. Очевидно, этот случай просто совпадает с а).

в) X удовлетворяет условию 2) с $d \geq 3$ или условию 3) с $\dim X \geq k+3$. Пусть Y – произвольное подпространство размерности d или коразмерности k , $Y^\perp \subset Y$ –

произвольное подпространство коразмерности 1 в Y . Возьмем $y' \in Y' := \text{Ker}(\pi_Y)$, $y' \neq 0$. Подпространство $Z = \langle y' \rangle \oplus Y^1$ имеет в X размерность d или коразмерность k — ту же, что и Y . По условию существует проектор $\pi_Z: X \rightarrow Z$ нормы 1. Рассмотрим действие композиции $\pi_Y \circ \pi_Z$ на подпространстве Y . Для всех $y \in Y$ имеем $\pi_Z(y) = y_1 + \lambda y'$, где $y_1 \in Y^1$, а λ — число. Отсюда $\pi_Y \circ \pi_Z(y) = \pi_Y(y_1) + \lambda \pi_Y(y') = y_1 + \lambda \cdot 0 = y_1$, т.е. оператор $\pi_Y \circ \pi_Z$ переводит Y в его собственное подпространство Y^1 . Поскольку π_Y и π_Z не увеличивают норму, то их композиция также обладает этим свойством. При этом $\forall y_1 \in Y^1$ имеем $\pi_Y \circ \pi_Z(y_1) = y_1$. Таким образом, $\pi_Y \circ \pi_Z = \pi_{Y^1}: Y \rightarrow Y^1$ — проектор нормы 1, т.е. Y как банахово пространство удовлетворяет условию 3) с $k = 1$. При этом в рассматриваемом случае Y не менее чем трехмерно.

Возьмем произвольное подпространство $U \subset Y$ коразмерности 3 в Y и покажем, что в факторпространстве $Y_3 = Y/U$ существует проектор $\pi_V: Y_3 \rightarrow V$ нормы 1 на любое двумерное подпространство $V \subset Y_3$. Действительно, всякое такое V изометрично факторпространству Y^1/U для некоторого подпространства $Y^1 \subset Y$, $\text{Codim}_Y(Y^1) = 1$, $Y^1 \supset U$. Для любого $[y] \in Y_3$ ($[y]$ обозначает элемент пространства $Y_3 = Y/U$, соответствующий классу смежности элемента $y \in Y$) положим $\pi_V([y]) = [\pi_{Y^1}(y)]$. Очевидно, π_V линейно проектирует Y_3 на подпространство V . Поэтому $\|\pi_V\| \geq 1$. Следующая выкладка показывает, что $\|\pi_V\| \leq 1$:

$$\|\pi_V([y])\| = \inf_{u \in U} \|\pi_{Y^1}(y) + u\| = \inf_{u \in U} \|\pi_{Y^1}(y + u)\| \leq \inf_{u \in U} \|y + u\| = \|[y]\|$$

(неравенство здесь выполнено в силу того, что $\|\pi_{Y^1}\| = 1$).

Таким образом, $Y_3 = Y/U$ как банахово пространство удовлетворяет условию 2) теоремы при $d = 2$. Согласно уже разобранным случаям а) Y_3 — гильбертово. Гильбертовость Y (а значит, ввиду произвольности выбора Y и исходного пространства X) вытекает из следующей леммы.

ЛЕММА 3. Пусть X — банахово пространство, $k \geq 2$ — натуральное число, $\dim X \geq k + 1$. Если для всякого подпространства Z^k коразмерности k в X факторпространство X/Z^k гильбертово, то X — гильбертово.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 3. Достаточно показать, что для любых элементов $x, y \in X$ выполняется равенство параллелограмма. Возьмем такие ненулевые функционалы $f, g \in X^*$, что $f(x) = \|f\| \|x\|$ и $g(y) = \|g\| \|y\|$. В $\text{Ker}(f) \cap \text{Ker}(g)$ выберем подпространство Z^k , имеющее коразмерность k в X (по условию $k \geq 2$). Согласно утверждению 1 $x, y \in Q(Z^k, X)$. Поэтому в факторпространстве X/Z^k нормы классов смежности $[x]$ и $[y]$ совпадают с нормами исходных элементов x, y : $\|[x]\| = \|x\|$, $\|[y]\| = \|y\|$.

Пространство X/Z^k гильбертово, поэтому

$$\|[x] + [y]\|^2 + \|[x] - [y]\|^2 = 2(\|[x]\|^2 + \|[y]\|^2)$$

или

$$\inf \{\|x + y + z\|^2 : z \in Z^k\} + \inf \{\|x - y + z\|^2 : z \in Z^k\} = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Отсюда для любых $x, y \in X$ получаем неравенство

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 \geq 2(\|x\|^2 + \|y\|^2). \quad (*)$$

Запишем (*) с заменой x и y , соответственно, на $(x+y)/2$, $(x-y)/2$

$$\|x\|^2 + \|y\|^2 \geq \frac{\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2}{2}. \quad (**)$$

Неравенства (*) и (**) вместе дают искомое равенство параллелограмма. Лемма 3, а вместе с ней и теорема 2, доказаны.

Как уже отмечалось (см. замечание после формулировки теоремы 2), существование проектора π_Y нормы 1 в теореме 2 эквивалентно существованию подпространства Y' со свойствами:

- (A) $Y \subseteq Q(Y')$;
- (B) $Y' + Y = X$.

Теорема 2 может быть сформулирована в этих терминах. Возникает вопрос о возможности ослабления условия (B) в переформулированной теореме 2. Следующий пример показывает, что (B) нельзя заменить условием $\text{Codim}_X(Y' + Y) \leq 2$.

В 5-мерном вещественном линейном пространстве $X = \{(x_1, \dots, x_5)\}$ введем норму $\|x\| = (|x_1|^4 + \dots + |x_5|^4)^{1/4}$. Это пространство — негильбертово. Покажем, что всякое двумерное подпространство $Y_2 \subset X$ квазиортогонально к некоторому одномерному подпространству. Пусть Y_2 порождено векторами v и w . Нормали к единичной сфере S в точках $S \cap Y_2$ имеют координаты $\{4(\lambda v_k + \mu w_k)^3\}_{k=1}^5$, где λ и μ — произвольные числа. Все эти нормали лежат в 4-мерном подпространстве, порожденном векторами с координатами $\{v_k^3\}$, $\{v_k^2 w_k\}$, $\{v_k w_k^2\}$, $\{w_k^3\}$. Следовательно, существует ненулевой вектор e , ортогональный (в обычном смысле) всем нормальям. Но тогда направление e является опорным к S во всех точках множества $S \cap Y_2$, т.е. $Y_2 \subset Q(\langle e \rangle)$.

§ 4. Двойственные теоремы

ТЕОРЕМА 3. Пусть $d \geq 1$, $k \geq 2$ — натуральные числа, и пусть $\dim X \geq \max\{d+2, k+1\}$. Тогда следующие условия эквивалентны:

- 1) пространство X — гильбертово;
- 2) для любого подпространства $Y \subset X$ коразмерности d найдется такое подпространство Y' , что $Y' \subseteq Q(Y)$ и $Y' + Y = X$;
- 3) для любого подпространства $Y \subset X$ коразмерности k найдется такое подпространство Y' , что $Y' \subseteq Q(Y)$ и $Y' + Y = X$.

Условие 2) (или 3)) означает, что каждое подпространство данной размерности (или коразмерности) является ядром некоторого проектора с нормой 1 — см. замечание после формулировки теоремы 2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО обоих утверждений $2) \Rightarrow 1)$ и $3) \Rightarrow 1)$ (обратные импликации очевидны) сводится к случаю $3) \Rightarrow 1)$ с $k = 2$. В самом деле, пусть, например, выполнено условие 2). Возьмем любое подпространство $X_{d+2} \subseteq X$ размерности $d+2$ и любое d -мерное подпространство $Y \subset X_{d+2}$. По условию существует такое подпространство $Y' \subset X$, что $Y' \subseteq Q(Y, X)$ и $Y' + Y = X$. Для двумерного пересечения $Y'_2 = Y' \cap X_{d+2}$ получаем $Y'_2 + Y = X_{d+2}$ и $Y'_2 \subseteq Q(Y, X) \cap X_{d+2} = Q(Y, X_{d+2})$. Таким образом, X_{d+2} как банахово пространство удовлетворяет условию 3) с

$k = 2$. Доказав $3) \Rightarrow 1)$ с $k = 2$ для произвольного банахова пространства, мы в нашем случае докажем гильбертовость X_{d+2} , а значит, ввиду произвольности выбора $X_{d+2} \subseteq X$ и гильбертовость самого X . Аналогично сводится к этому случаю и доказательство импликации $3) \Rightarrow 1)$ с любым $k \geq 2$.

Итак, пусть банахово пространство X удовлетворяет условию 3) с $k = 2$. Возьмем произвольное подпространство Z^3 коразмерности 3 в X (по условию $\dim X \geq k + 1 = 3$). Каждое одномерное подпространство факторпространства X/Z^3 может быть представлено как Y/Z^3 при некотором подпространстве $Y \subset X$, $\text{Codim}_X Y = 2$, $Y \supset Z^3$. По предположению $Q(Y, X)$ содержит некоторое двумерное подпространство $Y' \subset X$. По утверждению 5 из §1 справедливо включение $\{[y'] \in X/Z^3 : y' \in Y'\} \subseteq Q(Y/Z^3, X/Z^3)$. Левая часть здесь является двумерным подпространством в X/Z^3 , поскольку $Y' \cap Z^3 \subseteq Y' \cap Y \subseteq Q(Y, X) \cap Y = \{0\}$. Таким образом, в трехмерном пространстве X/Z^3 квазиортогональное множество к любому одномерному подпространству содержит некоторое двумерное подпространство. Согласно п. 2 доказательства леммы 2 в §3 единичная сфера такого пространства является эллипсоидом, т.е. X/Z^3 – гильбертово.

Для завершения доказательства осталось применить лемму 3.

СЛЕДСТВИЕ 3.1. Пусть X – рефлексивное банахово пространство, $\dim X \geq \max\{d + 1, k + 2\}$, где $d \geq 2$ и $k \geq 1$ – заданные натуральные числа. Тогда следующие условия эквивалентны:

- 1) пространство X – гильбертово;
- 2) для любого d -мерного подпространства $Y \subset X$ найдется такое подпространство Y' , что $Q(Y') \subseteq Y$ и $Y' \cap Y = \{0\}$;
- 3) для любого подпространства $Y \subset X$ коразмерности k найдется такое подпространство Y' , что $Q(Y') \subseteq Y$ и $Y' \cap Y = \{0\}$.

Действительно, применяя утверждение 2, получаем $(Y')^\perp \subseteq Q(Y^\perp)$ и $(Y')^\perp + Y^\perp = X^*$. Таким образом, если в X выполнено условие 2) (3)), то X^* удовлетворяет условию 3) (2)) теоремы 3.

СЛЕДСТВИЕ 3.2. Эквивалентность пунктов 1)–3) в следствии 3.1 остается в силе при замене в 2) и 3) условий $Q(Y') \subseteq Y$ и $Y' \cap Y = \{0\}$ одним условием $Q(Y') = Y$.

(Каждое подпространство заданной размерности или коразмерности является квазиортогональным множеством к какому-то подпространству.) Следствие 3.2 – частный случай следствия 3.1. В случае гладкого пространства X оно сразу вытекает из утверждения 4 и теоремы 1.

Требование рефлексивности X в следствии 3.1 существенно. Можно показать, что в пространстве l_1 абсолютно суммируемых последовательностей условие 2) следствия 3.1 выполнено для всех $d \geq 2$ (именно, $\forall Y \subset l_1$, $\dim Y = d$, $\exists Y'$ с $Q(Y') = \{0\}$ и $Y' \cap Y = \{0\}$). Неизвестно, однако, можно ли опустить требование рефлексивности X в следствии 3.2.

Отметим, что среди доказанных выше утверждений естественно выделяются пары двойственных друг другу. Именно, следствие 3.2 двойственно теореме 1, следствие 3.1 – теореме 3. Следующее утверждение является двойственным к теореме 2.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $d \geq 1$, $k \geq 2$ – заданные натуральные числа, и пусть $\dim X \geq \max\{d+2, k+1\}$. Тогда следующие условия эквивалентны:

- 1) пространство X – гильбертово;
- 2) для любого подпространства $Y \subset X$ размерности d найдется такое подпространство Y' , что $Q(Y) \subseteq Y'$ и $Y' \cap Y = \{0\}$;
- 3) для любого подпространства $Y \subset X$ коразмерности k найдется такое подпространство Y' , что $Q(Y) \subseteq Y'$ и $Y' \cap Y = \{0\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 2) $\Rightarrow$ 1). Возьмем произвольное $(d+2)$ -мерное подпространство $X_{d+2} \subseteq X$. Очевидно, X_{d+2} как банахово пространство само удовлетворяет условию 2), т.е. для любого d -мерного подпространства $Y \subset X_{d+2}$ найдется подпространство $Y' \subset X_{d+2}$ с $Q(Y, X_{d+2}) \subseteq Y'$ и $Y' \cap Y = \{0\}$. По утверждению 2 в X_{d+2}^* имеем $Y^\perp \subseteq Q((Y')^\perp)$ и $Y^\perp + (Y')^\perp = X_{d+2}^*$. Таким образом, в X_{d+2}^* существует проектор нормы 1 на любое двумерное подпространство $Y^\perp$ (см. замечание после формулировки теоремы 2), и по теореме 2 пространство X_{d+2}^* гильбертово. Отсюда гильбертовыми являются и X_{d+2} , и X .

3) $\Rightarrow$ 1). Пусть X удовлетворяет условию 3). Покажем, что любое k -мерное подпространство $X_k \subset X$ как банахово пространство удовлетворяет 2) с $d = 1$. Действительно, пусть для какого-то одномерного подпространства $Y_1 \subset X_k$ множество $Q(Y_1, X_k)$ не содержит ни в каком собственном подпространстве X_k . Это означает, что в $Q(Y_1, X_k)$ есть k линейно независимых векторов $n_1, \dots, n_k$. Рассмотрим соответствующие функционалы $f_j \in Y_1^\perp \subset X_k^*$: $f_j \neq 0$, $f_j(n_j) = \|f_j\| \|n_j\|$, $j = \overline{1, k}$ (см. утверждение 1). Продолжим каждый функционал f_j без увеличения нормы до функционала $F_j \in X^*$. Подпространство $Z = \bigcap \text{Ker}(F_j)$ имеет в X коразмерность не более k и содержит Y_1 . Выберем подпространство Y коразмерности k в X так, чтобы $Y_1 \subseteq Y \subseteq Z$. Поскольку $Q(Z, X) \subseteq Q(Y, X)$, векторы $n_1, \dots, n_k \in Q(Y, X)$. Их линейная оболочка – подпространство X_k – пересекается с Y по прямой Y_1 . Но по условию 3) $Q(Y, X)$ должно содержаться в подпространстве, трансверсальном к Y . Полученное противоречие доказывает выполнение в пространстве X_k условия 2) с $d = 1$. По ранее доказанной импликации 2) $\Rightarrow$ 1) X_k – гильбертово. Следовательно, гильбертовым является и исходное пространство X .

Отметим, что имеются и другие аппроксимативные критерии гильбертовости банахова пространства, указанные автору профессором В. М. Тихомировым: в [10] такой критерий получен в терминах чебышёвских центров, в [11] – в терминах n -поперечников по Колмогорову.

§ 5. Некоторые характеристики эллипсоидов в $\mathbb{R}^n$

В случае конечномерного банахова пространства X каждое из доказанных выше утверждений по существу представляет собой геометрический критерий того, что единичная сфера $S(X)$ является эллипсоидом (т.е. при введении в X координат задается как поверхность уровня положительной квадратичной формы от этих координат). Приведем эти критерии, формулируя их на обычном геометрическом языке.

Пусть в $\mathbb{R}^n$ задана выпуклая замкнутая поверхность S , симметричная относительно 0. Ниже $C(\Gamma)$ обозначает объединение всех плоскостей, параллельных

плоскости Γ , имеющих одинаковую с Γ линейную размерность $d \in \overline{1, n-2}$ и опорных к поверхности S (другими словами, $C(\Gamma)$ есть “цилиндр” с образующей Γ , описанный вокруг S).

ТЕОРЕМА 5. *Каждое из следующих условий (1)–(6) необходимо и достаточно для того, чтобы поверхность S была эллипсоидом (Γ – подпространство в $\mathbb{R}^n$, Γ_d – d -мерное подпространство в $\mathbb{R}^n$):*

- (1) $\forall \Gamma_d \exists \Gamma : C(\Gamma_d) \cap S = \Gamma \cap S \quad (d \leq n-2);$
- (2) $\forall \Gamma_d \exists \Gamma : C(\Gamma) \cap S = \Gamma_d \cap S \quad (d \geq 2);$
- (3) $\forall \Gamma_d \exists \Gamma : C(\Gamma_d) \cap S \supseteq \Gamma \cap S \quad (d \leq n-2);$
- (4) $\forall \Gamma_d \exists \Gamma : C(\Gamma) \cap S \supseteq \Gamma_d \cap S \quad (d \geq 2);$
- (5) $\forall \Gamma_d \exists \Gamma : C(\Gamma_d) \cap S \subseteq \Gamma \cap S \quad (d \leq n-2);$
- (6) $\forall \Gamma_d \exists \Gamma : C(\Gamma) \cap S \subseteq \Gamma_d \cap S \quad (d \geq 2).$

(См., соответственно, теорему 1, следствие 3.2, теорему 3, теорему 2, теорему 4 и следствие 3.1.)

В этой теореме все ограничения на Γ и d существенны. Несущественным является условие центральной симметричности поверхности S , но при опускании его формулировка теоремы 5 должна быть изменена. Мы не будем приводить это более общее утверждение. Отметим лишь, что его справедливость можно вывести из того, что выше при доказательстве теорем о банаховых пространствах нигде не использовалась симметричность единичных сфер этих пространств, т.е. эти теоремы, вообще говоря, верны и для пространств с несимметричной нормой.

Список литературы

1. *Cheney E. W., Wulbert D. E.* The existence and unicity of best approximations // *Math. Scand.* 1969. V. 24. №1. P. 113–140.
2. *Singer I.* Best approximations in Normed Linear Spaces by Elements of Linear Subspaces. Berlin: Acad. SRR, Bucharest; Springer-Verlag, 1970.
3. *James R. S.* Reflexivity and the supremum of linear functionals // *Ann. of Math.* 1957. V. 66. №1. P. 159–169.
4. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1989.
5. *Rudin W., Smith K. T.* Linearity of best approximation: a characterization of ellipsoids // *Indag. Math.* 1961. V. 23. №1. P. 97–103.
6. *Бляшке В.* Круг и шар. М.: Наука, 1967.
7. *Александров А. Д.* О выпуклых поверхностях с плоскими границами теней // *Матем. сб.* 1939. Т. 5. №2. С. 309–316.
8. *Kakutani S.* Some characterizations of euclidian spaces // *Japan. J. Math.* 1939. V. 16. №2. P. 93–97.
9. *Phillips R. S.* A characterization of Euclidian spaces // *Bull. Amer. Math. Soc.* 1940. V. 46. №12. P. 930–933.
10. *Гаркави А. Л.* О чебышёвском центре и выпуклой оболочке множества // *УМН.* 1964. Т. 19. №6. С. 139–145.
11. *Тихомиров В. М., Исмаилов Р. С., Бабаджанов С. Б.* Геометрия банахова пространства и поперечники множеств // *Изв. АН Узбекской ССР. Сер. физ.-матем.* 1979. №4. С. 25–32.