Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Давыдов, Периодические λ -кольца и периоды конечных групп, *Матем. сб.*, 1997, том 188, номер 8, 75–82

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm244>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.209.52.79

26 апреля 2023 г., 17:17:54

УДК 512.737

А. А. Давыдов

Периодические λ -кольца и периоды конечных групп

λ -кольцо называется *n-периодическим*, если операции Адамса на нем удовлетворяют соотношениям $\psi^{i+n} = \psi^i$ для всех i . В статье описывается фактор по радикалу свободного периодического λ -кольца, порожденного одним элементом. На основании этого описания показывается, что порядок конечной группы является делителем периода (экспоненты) группы в степени размерности точного комплексного представления.

Библиография: 6 названий.

§ 1. Введение

Классическая теорема Лагранжа утверждает, что порядок любого элемента конечной группы делит порядок самой группы. В частности, период группы (наибольшее общее кратное порядков элементов) является делителем порядка группы. Из теоремы существования Силова следует, что для любого простого делителя порядка группы в ней найдется элемент такого порядка. Следовательно, порядок группы делит некоторую степень периода группы.

В настоящей статье показывается, что в качестве степени можно взять размерность точного комплексного представления группы (теорема 2) или размерность точного комплексного представления группы минус один (теорема 3), если детерминант (максимальная внешняя степень) представления тривиален.

Теоремы 2, 3 следуют из сравнения коэффициентов главных частей лорановских разложений двух выражений для производящего ряда инвариантов симметрических степеней точного комплексного представления. Одно из выражений – это формула Молина [1], другое получается из исследования свойств λ -структуры кольца представлений конечной группы.

Понятие λ -кольца было введено Гротендиком в связи с формулировкой обобщенной теоремы Римана–Роха [2]. λ -структуру кольца представлений удобно описывать в терминах некоторых операторов, введенных Адамсом [3], [4]. Операции Адамса на кольце представлений конечной группы удовлетворяют некоторому условию периодичности с периодом, равным периоду группы [5]. Это условие используется в статье для определения понятия периодического λ -кольца. Описание фактора по радикалу свободного периодического λ -кольца (теорема 1) приводит к другому выражению для производящей функции инвариантов симметрических степеней точного комплексного представления.

В первом параграфе рассматриваются основные понятия и факты теории λ -колец.

Второй параграф посвящен периодическим λ -кольцам.

В третьем параграфе рассматриваются λ -кольца представлений конечных групп.

§ 2. λ -кольца

Пусть A – коммутативное кольцо без кручения. Набор отображений $\lambda^i: A \rightarrow A$, $i \geq 0$, удовлетворяющий условиям

$$\lambda^0(x) = 1, \quad \lambda^1(x) = x, \quad \lambda^i(x+y) = \sum_{s+t=i} \lambda^s(x)\lambda^t(y) \quad \forall x, y \in A, \quad (1)$$

называется λ -операциями или *внешними степенями*. Условия (1) удобно записывать в терминах производящего ряда $\lambda_t(x) = \sum_{i \geq 0} \lambda^i(x)t^i$,

$$\lambda_t(x+y) = \lambda_t(x)\lambda_t(y) \quad \forall x, y \in A.$$

Производящий ряд λ -операций удобен также для определения некоторых других наборов операций:

σ -операций (*симметрических степеней*) $\sigma^i: A \rightarrow A$, $i \geq 0$, с производящим рядом

$$\sigma_t(x) = \lambda_{-t}(x)^{-1},$$

и операций Адамса $\psi^i: A \rightarrow A$, $i \geq 1$, с производящим рядом

$$\psi_{-t}(x) = -t \frac{\lambda'_t(x)}{\lambda_t(x)}.$$

Производящие ряды этих операций обладают следующими свойствами:

$$\sigma_t(x+y) = \sigma_t(x)\sigma_t(y), \quad \psi_t(x+y) = \psi_t(x) + \psi_t(y) \quad \forall x, y \in A.$$

Кольцо A вместе с набором λ -операций называется λ -кольцом, если его операции Адамса являются кольцевыми гомоморфизмами.

Элемент x λ -кольца A называется *конечным*, если производящий ряд $\lambda_t(x)$ – многочлен. В этом случае степень $\lambda_t(x)$ называется *рангом* x . Заметим, что для элемента ранга один $\lambda_t(x) = 1 + xt$. Групповое кольцо $Z[G]$ группы G можно наделить структурой λ -кольца полагая, что элементы группы G имеют ранг один. Такое λ -кольцо будет называться *групповым* λ -кольцом.

Свободное λ -кольцо $\Lambda(d)$, порожденное конечным элементом x ранга d , изоморфно $\mathbb{Z}[x, \lambda^2(x), \dots, \lambda^d(x)]$ кольцу многочленов с целыми коэффициентами от внешних степеней x или кольцу симметрических многочленов с целыми коэффициентами от переменных $x_1, \dots, x_d$ ранга один [6]. При этом отождествлении $\lambda^i(x)$ совпадает с i -й элементарной симметрической функцией от $x_1, \dots, x_d$. В частности, максимальная внешняя степень $\lambda^d(x)$ есть $x_1 \cdots x_d$.

§ 3. Свободные периодические λ -кольца

Элемент x λ -кольца A называется *n -периодическим*, если

$$\psi^{i+n}(x) = \psi^i(x) \quad \forall i \in \mathbb{Z}.$$

λ -кольцо называется n -периодическим, если все его элементы n -периодические.

Свободное n -периодическое λ -кольцо $\Lambda(d, n)$, порожденное конечным элементом x размерности d , это фактор λ -кольца $\Lambda(d) = \mathbb{Z}[x, \lambda^2(x), \dots, \lambda^d(x)]$ по идеалу, порожденному $(\psi^{n+i}(x) - \psi^i(x))$. В следующей теореме описывается свободное полупростое n -периодическое λ -кольцо.

ТЕОРЕМА 1. *Естественный гомоморфизм*

$$\Lambda(d, n) / \text{rad}(\Lambda(d, n)) \rightarrow \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_d, x_i^n = 1]$$

из фактора по радикалу (Джекобсона) свободного периодического λ -кольца $\Lambda(d, n)$ в групповое λ -кольцо $\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_d, x_i^n = 1]$, переводящий образующую x в $\sum_{i=0}^d x_i$, является изоморфизмом на подкольцо S_d -инвариантов, где симметрическая группа S_d действует перестановками образующих x_i .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Естественный гомоморфизм

$$\Lambda(d, n) / \text{rad}(\Lambda(d, n)) \rightarrow \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_d, x_i^n = 1], \quad (2)$$

переводящий образующую x в $\sum_{i=0}^d x_i$, может быть продолжен до гомоморфизма

$$\Lambda(d) \rightarrow \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_d, x_i^n = 1]$$

из свободного λ -кольца $\Lambda(d)$, порожденного элементом x размерности d . Поскольку λ -кольцо $\Lambda(d)$ изоморфно подкольцу S_d -инвариантных элементов полугруппового λ -кольца $\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_d]$, образ гомоморфизма (2) совпадает с подкольцом S_d -инвариантных элементов $\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_d, x_i^n = 1]$.

Докажем теперь инъективность гомоморфизма (2). Она будет следовать из инъективности естественного гомоморфизма

$$\Lambda(n, d) / \text{rad}(\Lambda(n, d)) \rightarrow \Lambda(n, d) / \text{rad}(\Lambda(n, d)) \otimes \mathbb{C},$$

полупростоты $\Lambda(n, d) / \text{rad}(\Lambda(n, d)) \otimes \mathbb{C}$ и того факта, что любой гомоморфизм алгебр

$$\Lambda(d, n) / \text{rad}(\Lambda(d, n)) \otimes \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \quad (3)$$

может быть представлен как композиция гомоморфизма (2) и некоторого гомоморфизма

$$\mathbb{C}[x_1, \dots, x_d, x_i^n = 1]^{S_d} \rightarrow \mathbb{C}.$$

Сначала мы опишем гомоморфизмы вида (3). Заметим, что для n -периодического элемента x производящий ряд для операций Адамса имеет следующий вид:

$$\psi_t(x) = \sum_{i \geq 1} \psi^i(x) t^i = \sum_{i=1}^n \psi^i(x) t^i \sum_{j \geq 0} t^j n = \frac{\sum_{i=1}^n \psi^i(x) t^i}{1 - t^n}.$$

ЛЕММА 1. Пусть A коммутативная алгебра над полем $\mathbb{C}$. Тогда для любого $f(t) \in A[t]$, $\deg f(t) < n$, дифференциальное уравнение

$$\frac{l'(t)}{l(t)} = \frac{f(-t)}{1 - (-t)^n}, \quad l(0) = 1,$$

имеет единственное решение

$$l(t) = \prod_{\varepsilon: \varepsilon^n=1} (1 + \varepsilon t)^{f(\varepsilon^{-1})/n}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ. Используя прямо проверяемое равенство

$$\frac{t^i}{1 - t^n} = \frac{1}{n} \sum_{\varepsilon: \varepsilon^n=1} \frac{\varepsilon^{1-i}}{1 - \varepsilon t},$$

можно разложить правую часть дифференциального уравнения в сумму простейших дробей

$$\frac{f(t)}{1 - t^n} = \frac{1}{n} \sum_{\varepsilon: \varepsilon^n=1} \frac{\varepsilon f(\varepsilon^{-1})}{1 - \varepsilon t}.$$

Теперь лемма следует из аддитивности левой части уравнения

$$\frac{(l_1(t)l_2(t))'}{l_1(t)l_2(t)} = \frac{l_1'(t)}{l_1(t)} + \frac{l_2'(t)}{l_2(t)}$$

и равенства

$$\frac{l'(t)}{l(t)} = \frac{a}{1 + bt}, \quad l(t) = (1 + bt)^{a/b}.$$

Используя определение операций Адамса

$$\psi_{-t}(x) = -t \frac{\lambda_t'(x)}{\lambda_t(x)}$$

и лемму 1, можно записать производящий ряд внешних степеней n -периодического элемента как формальный ряд из $\Lambda(d, n) \otimes \mathbb{C}[t]$

$$\lambda_t(x) = \prod_{\varepsilon: \varepsilon^n=1} (1 + \varepsilon t)^{\alpha(\varepsilon)}, \quad \alpha(\varepsilon) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \psi^i(x) \varepsilon^{-i}.$$

Поскольку по условию элемент x имеет размерность d , то $\lambda_t(x)$ является многочленом степени d . Поэтому для произвольного гомоморфизма алгебр $\phi: \Lambda(d, n) \otimes \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ образ

$$l(t) = \phi(\lambda_t(x)) = \prod_{\varepsilon: \varepsilon^n=1} (1 + \varepsilon t)^{\phi(\alpha(\varepsilon))}$$

также будет многочленом.

Равенство в $\mathbb{C}[t]$

$$tl(t)f(t) = l'(t)(1 - t^n)$$

означает, что корни многочлена $l(t)$ являются корнями из единицы степени n .

Поэтому для произвольного гомоморфизма $\phi: \Lambda(d, n) \otimes \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ значения многочлена $f(t) = \phi(\psi(t)) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \phi(\psi^i(x))t^i$ в корнях n -й степени из единицы являются целыми неотрицательными числами. Коэффициенты $\phi(\psi^i(x))$ многочлена $\phi(\psi(t))$ можно выразить через его значения

$$\begin{aligned} \sum_{\varepsilon: \varepsilon^n=1} \phi(\psi(\varepsilon))\varepsilon^{-j} &= \sum_{\varepsilon: \varepsilon^n=1} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \phi(\psi^i(x))\varepsilon^{i-j} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \phi(\psi^i(x)) \sum_{\varepsilon: \varepsilon^n=1} \varepsilon^{i-j} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \phi(\psi^i(x))n\delta_{i,j} = \phi(\psi^j(x)). \end{aligned}$$

В частности,

$$d = \phi(\psi^n(x)) = \sum_{\varepsilon: \varepsilon^n=1} \phi(\psi(\varepsilon)).$$

Поэтому произвольный гомоморфизм $\phi: \Lambda(d, n) \otimes \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ определяет множество $\{\phi(\psi(\varepsilon)), \varepsilon^n = 1\}$ неотрицательных целых чисел, сумма которых равна d . Поскольку $\psi^i(x)$ порождают алгебру $\Lambda(d, n) \otimes \mathbb{C}$, гомоморфизм ϕ определяется этим множеством.

Чтобы закончить доказательство теоремы, определим гомоморфизм

$$\varphi: \mathbb{C}[x_1, \dots, x_d, x_i^n = 1]^{S_d} \rightarrow \mathbb{C},$$

для которого ϕ будет композицией (2) и φ .

Рассмотрим отображение множеств $\varphi: \{x_1, \dots, x_d\} \rightarrow \{\varepsilon: \varepsilon^n = 1\}$ такое, что $\phi(\psi(\varepsilon)) = |\varphi^{-1}(\varepsilon^{-1})|$. Нетрудно видеть, что это отображение продолжается до искомого гомоморфизма φ .

§ 4. Кольцо представлений конечной группы

Приведем некоторые факты из теории представлений конечных групп.

Кольцо представлений $R_{\mathbb{C}}(G)$ конечной группы G (кольцо Гротендика комплексного группового кольца) является примером λ -кольца [4]. Внешняя степень класса представления по определению является классом его внешней степени. Более простой вид λ -структура кольца представлений получает при переходе к характеристам.

Сопоставление комплексному представлению следов элементов группы на нем отождествляет кольцо представлений с подкольцом (кольцом характеров) в алгебре комплекснозначных функций на классах сопряженных элементов группы. Отсюда, в частности, следует тривиальность радикала кольца представлений. Операции Адамса на характеристах имеют следующий вид [4]:

$$\psi^i(x)(g) = x(g^i) \quad \forall x \in R_{\mathbb{C}}(G), \quad g \in G.$$

Из этого описания следует периодичность λ -кольца представлений конечной группы [5].

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. *Период кольца представлений $R_{\mathbb{C}}(G)$ конечной группы G равен периоду (экспоненте) группы G , т.е. наименьшему положительному целому числу n такому, что $g^n = e$ для любых g из G .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любого характера χ из $R_{\mathbb{C}}(G)$

$$\psi^{k+n}(\chi(g)) = \chi(g^{k+n}) = \chi(g^k) = \psi^k(\chi(g)),$$

где n является периодом группы G . Следовательно, период λ -кольца $R_{\mathbb{C}}(G)$ делит n .

Обратно, пусть m – период λ -кольца $R_{\mathbb{C}}(G)$. Тогда для характера регулярного представления ρ ($\rho(g) = |G|\delta_{e,g}$) m -периодичность означает

$$\psi^m(\rho) = \psi^0(\rho) = \rho(e)\varepsilon = |G|\varepsilon.$$

С другой стороны,

$$\rho(g^m) = \psi^m(\rho)(g) = |G|\varepsilon(g) = |G|.$$

То есть $g^m = e$ и m равно n .

Размерность пространства инвариантных элементов представления определяет линейную функцию χ на кольце представлений. На языке характеров эта функция имеет вид:

$$\chi(x) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} x(g) \quad \forall x \in R_{\mathbb{C}}(G), \quad g \in G.$$

Размерности инвариантов симметрических степеней точного комплексного представления $X: G \rightarrow GL(V)$ допускают следующее выражение (формула Молина [1]):

$$\chi(s_t(x)) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \frac{1}{\det(1 - X(g)t)}. \quad (4)$$

Теперь мы в состоянии доказать основную теорему настоящей статьи.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть n – период конечной группы G и d – размерность ее точного представления. Тогда n^d делится на порядок группы G .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из формулы Молина (4) можно видеть, что коэффициент при главной части лорановского разложения производящей функции $\chi(s_t(x))$ в $t = 1$ есть $1/|G|$

$$\chi(s_t(x)) = \frac{1}{|G|(1-t)^d} + \dots$$

С другой стороны, мы можем представить $\chi(s_t(x))$ в виде $f(t)/(1-t^n)^d$, где $f(t) \in \mathbb{Z}[t]$ – некоторый многочлен.

Рассмотрим (S_d -инвариантную) линейную форму χ на $\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_d]$ (со значениями в $\mathbb{Q}$), индуцированную гомоморфизмом

$$\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_d, x_i^n = 1]^{S_d} \rightarrow R_{\mathbb{C}}(G)$$

из свободного периодического λ -кольца $\Lambda(d, n)$ в $R_{\mathbb{C}}(G)$, переводящим образующий в класс x некоторого точного d -мерного представления, и вложением $\Lambda(d, n) \sim$

$\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_d]^{S_d} \subset \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_d]$. Производящая функция формы χ имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \chi(t_1, \dots, t_d) &= \sum_{i_s \geq 0} \chi(i_1, \dots, i_d) t_1^{i_1} \dots t_d^{i_d} \\ &= \sum_{0 \leq i_s < n} \chi(i_1, \dots, i_d) t_1^{i_1} \dots t_d^{i_d} \sum_{j_s \geq 0} t_1^{nj_1} \dots t_d^{nj_d} = \frac{f(t_1, \dots, t_d)}{\prod_{i=1}^d (1 - t_i^n)}, \end{aligned}$$

где $\chi(i_1, \dots, i_d) = \chi(x_1^{i_1} \dots x_d^{i_d})$ и $f(t_1, \dots, t_d) = \sum_{0 \leq i_s < n} \chi(i_1, \dots, i_d) t_1^{i_1} \dots t_d^{i_d}$. Используя выражение для симметрической степени $s^k(x) = \sum_{\sum_s i_s = k} x_1^{i_1} \dots x_d^{i_d}$ в $\Lambda(d, n)$, мы имеем

$$\chi(s_t(x)) = \chi(t, \dots, t) = \frac{f(t)}{(1 - t^n)^d},$$

где $f(t) = f(t, \dots, t)$. В частности,

$$\chi(s_t(x)) = \frac{f(1)}{n^d(1 - t)^d} + \dots$$

Остается заметить, что число $f(1) = n^d/|G|$ является целым, так как форма χ целочислена на $\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_d]^{S_d}$.

В некоторых случаях дополнительная информация о ядре гомоморфизма

$$\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_d, x_i^n = 1]^{S_d} \rightarrow R_{\mathbb{C}}(G), \quad (5)$$

переводящего образующий в класс x точного d -мерного представления, позволяет оценить константу $f(1)$. Например, в случае тривиального детерминанта x , т.е. когда ядро (5) содержит $x_1 \dots x_d - 1$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть n – период конечной группы G и d – размерность ее точного представления, детерминант (максимальная внешняя степень) которого тривиален. Тогда n^{d-1} делится на порядок группы G .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме 2 отношение $n^d/|G|$ совпадает со значением в единице многочлена

$$f(t) = \sum_{0 \leq i_s < n} \chi(x_1^{i_1} \dots x_d^{i_d}) t^{i_1 + \dots + i_d}.$$

Поскольку ядро (5) содержит $x_1 \dots x_d - 1$,

$$\chi(x_1^{i_1+i} \dots x_d^{i_d+i}) = \chi(x_1^{i_1} \dots x_d^{i_d}) \quad \forall i.$$

Следовательно,

$$f(t) = \left(\sum_{j=1}^d \sum_{0 \leq i_s < n, i_j=0} \chi(x_1^{i_1} \dots x_d^{i_d}) t^{i_1 + \dots + i_d} \right) \left(\sum_{i=0}^{n-1} t^{di} \right) = g(t) \sum_{i=0}^{n-1} t^{di}.$$

В частности, $n^d/|G| = f(1) = g(1)n$ для некоторого целого $g(1)$.

Список литературы

1. *Molien T.* Über die Invarianten der linear Substitutionsgruppen // Sitzungsber. König. Preuss. Akad. Wiss. 1897. P. 1152–1156.
2. *Grothendieck A.* Special λ -rings (рукопись).
3. *Adams J. F.* Vector fields on spheres // Ann. of Math. 1962. V. 75. P. 603–632.
4. *Atiyah M. F., Tall D. O.* Group representations, λ -rings and J -homomorphism // Topology. 1963. V. 8. № 3. P. 253–297.
5. *Kervair M.* Opération d'Adams en théorie des représentations linéaires des groupes finis // Enseign. Math. Ser. 2. 1976. V. 22. № 1. P. 1–28.
6. *Knutson D.* λ -rings and the representation theory of the symmetric group // Lecture Notes in Math. V. 308. Berlin: Springer-Verlag, 1973.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Поступила в редакцию
05.11.1996