Общероссийский математический портал

Н. В. Денисова, О структуре полей симметрий геодезических потоков на двумерном торе, *Матем. сб.*, 1997, том 188, номер 7, 107–122

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm245>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.97.219

26 апреля 2023 г., 14:44:13

УДК 517.9+531.01

Н. В. Денисова

О структуре полей симметрий геодезических потоков на двумерном торе

Рассматривается задача о геодезических линиях на двумерном торе. Изучаются однопараметрические группы симметрий в четырехмерном фазовом пространстве, порожденные векторными полями, коммутирующими с исходным гамильтоновым векторным полем. В. В. Козлов и С. В. Болотин установили, что если геодезический поток на двумерном торе допускает нетривиальное поле симметрий степени n , то найдется многозначный полиномиальный по импульсам интеграл степени не выше n . Ранее В. В. Козлов и автор установили, что если имеются поля симметрий первой и второй степени, то их наличие связано с существованием скрытых циклических координат и разделенных переменных. В работе описывается структура полиномиальных полей симметрий степени не выше четвертой, причем эти поля симметрий предполагаются негамильтоновыми.

Библиография: 5 названий.

1. Введение

Результаты данной работы и работ [1], [2] верны для таких метрик на двумерном торе $\mathbb{T}^2$, которые приводятся к метрике следующего вида:

$$ds^2 = \frac{M}{2}(dq_1^2 + dq_2^2), \quad (1.1)$$

где M — положительная функция на торе. Тогда q_1, q_2 — изотермические угловые координаты на торе $\mathbb{T}^2 = \{q_1, q_2 \bmod 2\pi\}$, который является конфигурационным пространством динамической системы с двумя степенями свободы. Введем канонические импульсы p_1, p_2 , сопряженные с координатами q_1, q_2 : $p_j = M\dot{q}_j$. Пусть $x = (q_1, q_2, p_1, p_2)$ — совокупность канонических переменных в фазовом пространстве $\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2$.

Геодезические линии римановой метрики (1.1) описываются гамильтоновой системой

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}, \quad \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}, \quad k = 1, 2, \quad (1.2)$$

с гамильтонианом

$$H = \frac{\Lambda}{2}(p_1^2 + p_2^2), \quad (1.3)$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-01-00747), гранта Intas-93-0570 и фонда Сороса (грант a96-44).

где $\Lambda = 1/M$. Функции H однозначно сопоставляется векторное поле v , которое называется гамильтоновым векторным полем. Оно порождает гамильтонову динамическую систему на фазовом пространстве $\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2$:

$$\dot{x} = v(x). \quad (1.4)$$

В координатах q, p эти уравнения принимают вид канонических уравнений Гамильтона (1.2).

Рассмотрим задачу о симметриях динамической системы (1.4), которые порождаются векторными полями u на фазовом пространстве, коммутирующими с исходным гамильтоновым полем $v : [u, v] = 0$. Такие поля называются полями симметрий. Все объекты, встречающиеся ниже, будем считать бесконечно дифференцируемыми.

Оператор дифференцирования вдоль поля v имеет следующий вид:

$$L_v = \Lambda p_1 \frac{\partial}{\partial q_1} + \Lambda p_2 \frac{\partial}{\partial q_2} - \frac{1}{2} \frac{\partial \Lambda}{\partial q_1} (p_1^2 + p_2^2) \frac{\partial}{\partial p_1} - \frac{1}{2} \frac{\partial \Lambda}{\partial q_2} (p_1^2 + p_2^2) \frac{\partial}{\partial p_2}.$$

Пусть u – векторное поле с оператором дифференцирования

$$L_u = Q_1 \frac{\partial}{\partial q_1} + Q_2 \frac{\partial}{\partial q_2} + P_1 \frac{\partial}{\partial p_1} + P_2 \frac{\partial}{\partial p_2}.$$

В работе [1] дано определение однородного поля степени n : Q_1, Q_2 – многочлены по импульсам степени $n - 1$, а P_1, P_2 – многочлены степени n . Там же показано, что при решении задачи о полях симметрий геодезических потоков можно ограничиться рассмотрением однородных полей.

Если u – поле симметрий, то операторы L_v и L_u коммутируют. Вычислим коммутатор $[L_u, L_v]$ и приравняем нулю коэффициенты при $\frac{\partial}{\partial q_1}, \frac{\partial}{\partial q_2}$ и $\frac{\partial}{\partial p_1}, \frac{\partial}{\partial p_2}$. В результате получим следующие соотношения:

$$p_1 \sum Q_k \frac{\partial \Lambda}{\partial q_k} - \Lambda \sum p_k \frac{\partial Q_1}{\partial q_k} + \frac{1}{2} (p_1^2 + p_2^2) \sum \frac{\partial \Lambda}{\partial q_k} \frac{\partial Q_1}{\partial p_k} + P_1 \Lambda = 0, \quad (1.5)$$

$$p_2 \sum Q_k \frac{\partial \Lambda}{\partial q_k} - \Lambda \sum p_k \frac{\partial Q_2}{\partial q_k} + \frac{1}{2} (p_1^2 + p_2^2) \sum \frac{\partial \Lambda}{\partial q_k} \frac{\partial Q_2}{\partial p_k} + P_2 \Lambda = 0, \quad (1.6)$$

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} (p_1^2 + p_2^2) \left(Q_1 \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial q_1^2} + Q_2 \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial q_1 \partial q_2} \right) - \frac{\partial \Lambda}{\partial q_1} \sum P_k p_k - \Lambda \sum p_k \frac{\partial P_1}{\partial q_k} \\ + \frac{1}{2} (p_1^2 + p_2^2) \sum \frac{\partial \Lambda}{\partial q_k} \frac{\partial P_1}{\partial p_k} = 0, \end{aligned} \quad (1.7)$$

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} (p_1^2 + p_2^2) \left(Q_1 \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial q_1 \partial q_2} + Q_2 \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial q_2^2} \right) - \frac{\partial \Lambda}{\partial q_2} \sum P_k p_k - \Lambda \sum p_k \frac{\partial P_2}{\partial q_k} \\ + \frac{1}{2} (p_1^2 + p_2^2) \sum \frac{\partial \Lambda}{\partial q_k} \frac{\partial P_2}{\partial p_k} = 0. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Индекс суммирования k принимает значения 1 и 2.

Пусть F – однородный полином от p_1 и p_2 . Через F^* обозначим его значение при $p_1 = 1, p_2 = i$ (i – мнимая единица). Для краткости $\left(\frac{\partial F}{\partial p_k}\right)^*$ будем обозначать $\frac{\partial F^*}{\partial p_k}$, где $k = 1, 2$.

В работе [1] были получены следующие основные соотношения для компонент Q_k, P_k поля симметрий u :

$$Q_1^* + iQ_2^* = c_1 + ic_2, \quad (1.9)$$

$$\frac{\partial Q_1^* M}{\partial q_1} + \frac{\partial Q_2^* M}{\partial q_2} = 0, \quad (1.10)$$

$$\frac{\partial Q_1^*}{\partial p_2} - \frac{\partial Q_2^*}{\partial p_1} = (c_3 + ic_4)\Lambda, \quad (1.11)$$

где $c_1, \dots, c_4$ – вещественные постоянные. Там же получены еще два соотношения:

$$P_1^* = P_2^* = 0, \quad (1.12)$$

$$\frac{\partial Q_1^*}{\partial q_1} + \frac{\partial Q_2^*}{\partial q_2} + \frac{\partial P_1^*}{\partial p_1} + \frac{\partial P_2^*}{\partial p_2} = 0. \quad (1.13)$$

Из соотношения (1.12) следует, что однородный полином P_i представим в виде:

$$P_i = (p_1^2 + p_2^2)K_i, \quad i = 1, 2, \quad (1.14)$$

где K_i – полиномы по импульсам степени $n - 2$ (см. [1], [3]). С учетом этого перепишем соотношение (1.13):

$$\frac{1}{2} \frac{\partial Q_1^*}{\partial q_1} + \frac{1}{2} \frac{\partial Q_2^*}{\partial q_2} + K_1^* + iK_2^* = 0. \quad (1.15)$$

Формулы (1.5)–(1.15) используются ниже для анализа условий существования полей симметрий третьей и четвертой степеней.

2. Основные результаты

В работе [1] указана структура полей симметрий первой и второй степени. Любое поле симметрий первой степени – гамильтоново и этот гамильтониан есть линейный интеграл по импульсам.

Любое поле симметрий второй степени гамильтоново, если гауссова кривизна метрики на торе не равна тождественно нулю, т.е. если $\Lambda \neq \text{const}$. Этот гамильтониан есть квадратичный интеграл, независимый от интеграла энергии H .

В работе [4] установлено, что любое поле симметрий может быть представлено в виде суммы двух полей симметрий, одно из которых является гамильтоновым.

Этот гамильтониан является интегралом динамической системы (1.4). В обозначениях нашей работы, новый гамильтониан имеет следующий вид:

$$F = Q_1 p_1 + Q_2 p_2.$$

ТЕОРЕМА 1 [4]. *Если векторное поле (1.2) допускает полиномиальное поле симметрий и степени n , то функция F является полиномиальным интегралом степени n по импульсам.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вычислим производную функции F в силу уравнений (1.2):

$$\dot{F} = (Q_1 p_1 + Q_2 p_2) = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) \sum Q_k \frac{\partial \Lambda}{\partial q_k} + P_1 \Lambda p_1 + P_2 \Lambda p_2, \quad (2.1)$$

где индекс суммирования k принимает значения 1 и 2. При выводе (2.1) были учтены соотношения (1.5) и (1.6).

Заметим, что $\dot{F}$ можно переписать так

$$L_v F = \dot{F} = Q_1 \frac{\partial H}{\partial q_1} + Q_2 \frac{\partial H}{\partial q_2} + P_1 \frac{\partial H}{\partial p_1} + P_2 \frac{\partial H}{\partial p_2} = L_u H.$$

Так как конфигурационное пространство компактно, то поле симметрий u лежит в касательной плоскости к изоэнергетической поверхности $H = \text{const}$. Следовательно, $L_u H = 0$ и теорема доказана.

Согласно (1.9) имеем $F^* = c_1 + i c_2$. Тогда интеграл F можно представить в виде [2], [3]:

$$F = c_1 p_1^n + c_2 p_1^{n-1} p_2 + G H,$$

где G — полином степени $n - 2$ по импульсам.

Введем полиномиальную функцию степени $n - 2$:

$$r = \frac{\partial Q_1}{\partial p_2} - \frac{\partial Q_2}{\partial p_1}. \quad (2.2)$$

Так как Q_1 и Q_2 — однородные многочлены по импульсам степени $n - 1$, то по теореме Эйлера

$$\frac{\partial Q_k}{\partial p_1} p_1 + \frac{\partial Q_k}{\partial p_2} p_2 = (n - 1) Q_k, \quad k = 1, 2.$$

Используя выражение (2.2) и теорему Эйлера, получаем равенство

$$\begin{aligned} Q_1 &= \frac{1}{n} \frac{\partial F}{\partial p_1} + Q_1 - \frac{1}{n} \frac{\partial F}{\partial p_1} = \frac{1}{n} \frac{\partial F}{\partial p_1} + \frac{n-1}{n} Q_1 - \frac{1}{n} \left(\frac{\partial Q_1}{\partial p_1} p_1 + \frac{\partial Q_2}{\partial p_1} p_2 \right) \\ &= \frac{1}{n} \frac{\partial F}{\partial p_1} + \frac{1}{n} \left(\frac{\partial Q_1}{\partial p_1} p_1 + \frac{\partial Q_1}{\partial p_2} p_2 \right) - \frac{1}{n} \left(\frac{\partial Q_1}{\partial p_1} p_1 + \frac{\partial Q_2}{\partial p_1} p_2 \right) = \frac{1}{n} \frac{\partial F}{\partial p_1} + \frac{r}{n} p_2, \end{aligned}$$

и можно представить Q_2 так:

$$Q_2 = \frac{1}{n} \frac{\partial F}{\partial p_2} - \frac{r}{n} p_1.$$

Таким образом, мы представили векторное поле симметрий u в виде суммы двух полей $u = \frac{1}{n} u_1 + \frac{1}{n} u_2$, где поле $u_1 = u_F$ — гамильтоново векторное поле с гамильтонианом F . Так как F является интегралом динамической системы (1.2), то u_1 есть поле симметрий. Следовательно, поле u_2 является полем симметрий с оператором дифференцирования

$$L_{u_2} = Q'_1 \frac{\partial}{\partial q_1} + Q'_2 \frac{\partial}{\partial q_2} + P'_1 \frac{\partial}{\partial p_1} + P'_2 \frac{\partial}{\partial p_2},$$

где $Q'_1 = rp_2$, $Q'_2 = -rp_1$.

Покажем, что поле u_2 является негамильтоновым полем симметрий. Действительно,

$$\frac{\partial Q'_1}{\partial p_2} - \frac{\partial Q'_2}{\partial p_1} = 2r + \frac{\partial r}{\partial p_2} p_2 + \frac{\partial r}{\partial p_1} p_1 = nr \neq 0,$$

так как $r \neq 0$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Поле симметрий u является гамильтоновым тогда и только тогда, когда $r \equiv 0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, если поле u — гамильтоново, то из (2.2) следует, что $r = 0$. Если $r = 0$, то рассмотрим поле симметрий u_2 с оператором дифференцирования

$$L_{u_2} = P'_1 \frac{\partial}{\partial p_1} + P'_2 \frac{\partial}{\partial p_2}.$$

Согласно (1.5) и (1.6) $P'_1 = P'_2 = 0$. Следовательно, $u_2 \equiv 0$. Что и требовалось.

Для негамильтоновых полей симметрий третьей и четвертой степени справедливы следующие утверждения.

ТЕОРЕМА 2. *Если гамильтоново поле (1.2) с гамильтонианом (1.3) допускает негамильтоново поле симметрий третьей степени по импульсам, то существует линейный интеграл по импульсам.*

ТЕОРЕМА 3. *Если гамильтоново поле (1.2) с гамильтонианом (1.3) допускает негамильтоново поле симметрий четвертой степени по импульсам, то существует квадратичный интеграл по импульсам, независимый от интеграла энергии.*

Остальная часть данной работы посвящена доказательству теорем 2 и 3.

3. Вспомогательные утверждения

Согласно (1.11) полином r представим в виде [2], [3]:

$$r = \Lambda c_3 p_1^{n-2} + \Lambda c_4 p_1^{n-3} p_2 + D(p_1^2 + p_2^2), \quad (3.1)$$

где D — однородный полином степени $n - 4$ по импульсам. Для удобства компоненты Q'_k, P'_k поля u_2 будем обозначать далее Q_k, P_k . Эти компоненты, очевидно, удовлетворяют уравнениям (1.5)–(1.15).

Воспользуемся (1.14): $P_j = K_j(p_1^2 + p_2^2)$. Найдем выражения для полиномов K_1, K_2 степени $n - 2$. Для этого воспользуемся уравнениями (1.5) и (1.6).

Вспоминая, что $M = 1/\Lambda$ и умножая уравнение (1.5) на M^2 , получим

$$-p_1 \frac{\partial Q_1 M}{\partial q_1} - p_1 Q_2 \frac{\partial M}{\partial q_2} - M p_2 \frac{\partial Q_1}{\partial q_2} + (p_1^2 + p_2^2) \left(-\frac{1}{2} \sum \frac{\partial M}{\partial q_k} \frac{\partial Q_1}{\partial p_k} + K_1 M \right) = 0.$$

Воспользуемся очевидными преобразованиями:

$$-p_1 Q_2 \frac{\partial M}{\partial q_2} = -p_1 \frac{\partial Q_2 M}{\partial q_2} + p_1 \frac{\partial Q_2}{\partial q_2} M, \quad p_1 M \frac{\partial Q_2}{\partial q_2} - p_2 M \frac{\partial Q_1}{\partial q_2} = -(p_1^2 + p_2^2) M \frac{\partial r}{\partial q_2}.$$

С учетом этих формул первоначальное уравнение принимает следующий вид:

$$-p_1 \frac{\partial Q_1 M}{\partial q_1} - p_1 \frac{\partial Q_2 M}{\partial q_2} + (p_1^2 + p_2^2) \left(-M \frac{\partial r}{\partial q_2} - \frac{1}{2} \sum \frac{\partial M}{\partial q_k} \frac{\partial Q_1}{\partial p_k} + K_1 M \right) = 0.$$

С учетом (3.1) получаем

$$K_1 M = p_1 p_2 \frac{\partial D M}{\partial q_1} - p_1^2 \frac{\partial D M}{\partial q_2} + M \frac{\partial r}{\partial q_2} + \frac{1}{2} \frac{\partial M}{\partial q_1} \frac{\partial Q_1}{\partial p_1} + \frac{1}{2} \frac{\partial M}{\partial q_2} \frac{\partial Q_1}{\partial p_2}. \quad (3.2)$$

Аналогично,

$$K_2 M = p_2^2 \frac{\partial D M}{\partial q_1} - p_1 p_2 \frac{\partial D M}{\partial q_2} - M \frac{\partial r}{\partial q_1} + \frac{1}{2} \frac{\partial M}{\partial q_1} \frac{\partial Q_2}{\partial p_1} + \frac{1}{2} \frac{\partial M}{\partial q_2} \frac{\partial Q_2}{\partial p_2}. \quad (3.3)$$

Справедливы формулы

$$\frac{\partial Q_1}{\partial p_1} = (n-2)c_3 \Lambda p_1^{n-3} p_2 + (n-3)c_4 \Lambda p_1^{n-4} p_2^2 + 2p_1 p_2 D + \frac{\partial D}{\partial p_1} p_2 (p_1^2 + p_2^2), \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial Q_1}{\partial p_2} = c_3 \Lambda p_1^{n-2} + 2c_4 \Lambda p_1^{n-3} p_2 + D(p_1^2 + p_2^2) + 2p_2^2 D + \frac{\partial D}{\partial p_2} p_2 (p_1^2 + p_2^2). \quad (3.5)$$

Подставим в уравнение (3.2) $p_1 = 1, p_2 = i$ и воспользуемся (3.4) и (3.5):

$$\begin{aligned} K_1^* M &= i \frac{\partial D^* M}{\partial q_1} - \frac{\partial D^* M}{\partial q_2} + M \frac{\partial r^*}{\partial q_2} \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\partial M}{\partial q_1} ((n-2)c_3 \Lambda i - (n-3)c_4 \Lambda + 2iD^*) + \frac{1}{2} \frac{\partial M}{\partial q_2} (c_3 \Lambda + 2c_4 \Lambda i - 2D^*). \end{aligned}$$

Используя соотношение (1.11), получим

$$M \frac{\partial r^*}{\partial q_2} = -c_3 \Lambda \frac{\partial M}{\partial q_2} - i c_4 \Lambda \frac{\partial M}{\partial q_2}.$$

В итоге получим

$$\begin{aligned} K_1^* M &= i \frac{\partial D^* M}{\partial q_1} + i D^* \frac{\partial M}{\partial q_1} - \frac{\partial D^* M}{\partial q_2} - D^* \frac{\partial M}{\partial q_2} \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{\partial M}{\partial q_1} ((n-2)c_3 \Lambda i - (n-3)c_4 \Lambda) - \frac{1}{2} c_3 \Lambda \frac{\partial M}{\partial q_2}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Аналогично,

$$\begin{aligned} K_2^* M &= -\frac{\partial D^* M}{\partial q_1} - D^* \frac{\partial M}{\partial q_1} - i \frac{\partial D^* M}{\partial q_2} - i D^* \frac{\partial M}{\partial q_2} \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{\partial M}{\partial q_1} (-(n-3)c_3 \Lambda - (n-4)c_4 \Lambda i) - \frac{1}{2} c_4 \Lambda \frac{\partial M}{\partial q_2}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Из (3.6) и (3.7) вытекает равенство

$$K_1^* + i K_2^* = \frac{1}{2} \frac{\partial \Lambda}{\partial q_1} (-i c_3 + c_4) + \frac{1}{2} \frac{\partial \Lambda}{\partial q_2} (c_3 + i c_4). \quad (3.8)$$

ЛЕММА 1. *Справедливо равенство*

$$\frac{\partial D^* M^2}{\partial q_1} + i \frac{\partial D^* M^2}{\partial q_2} + \frac{(n-3)}{2} c_3 \frac{\partial M}{\partial q_1} + \frac{(n-4)}{2} i c_4 \frac{\partial M}{\partial q_1} + \frac{1}{2} i c_3 \frac{\partial M}{\partial q_2} = 0. \quad (3.9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся соотношением (1.14):

$$\frac{\partial P_i}{\partial q_j} = (p_1^2 + p_2^2) \frac{\partial K_i}{\partial q_j}, \quad \frac{\partial P_i}{\partial p_j} = (p_1^2 + p_2^2) \frac{\partial K_i}{\partial p_j} + 2 p_j K_i. \quad (3.10)$$

Подставляя (3.10) и (1.14) в (1.7) и сокращая на $(p_1^2 + p_2^2)$, получим

$$\begin{aligned} \Lambda \frac{\partial K_1}{\partial q_1} p_1 + \Lambda \frac{\partial K_1}{\partial q_2} p_2 + \frac{\partial \Lambda}{\partial q_1} K_2 p_2 - \frac{\partial \Lambda}{\partial q_2} K_1 p_2 - \frac{1}{2} \frac{\partial \Lambda}{\partial q_1} \frac{\partial K_1}{\partial p_1} (p_1^2 + p_2^2) \\ - \frac{1}{2} \frac{\partial \Lambda}{\partial q_2} \frac{\partial K_1}{\partial p_2} (p_1^2 + p_2^2) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial q_1^2} Q_1 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial q_1 \partial q_2} Q_2 = 0. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Полагая в (3.11), умноженном на M^2 , $p_1 = 1$, $p_2 = i$, приходим к равенству

$$M \frac{\partial K_1^*}{\partial q_1} + i \frac{\partial K_1^* M}{\partial q_2} - i K_2^* \frac{\partial M}{\partial q_1} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial q_1^2} Q_1^* M^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial q_1 \partial q_2} Q_2^* M^2 = 0.$$

Так как $Q_1^* = ir^*$, $Q_2^* = -r^*$, где $r^* = \Lambda(c_3 + ic_4)$, и используя (3.8), получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial K_1^* M}{\partial q_1} + i \frac{\partial K_1^* M}{\partial q_2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial M}{\partial q_1} \frac{\partial \Lambda}{\partial q_1} + \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial q_1^2} M \right) (ic_3 - c_4) \\ - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial M}{\partial q_1} \frac{\partial \Lambda}{\partial q_2} + \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial q_1 \partial q_2} M \right) (c_3 + ic_4) = 0. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Поскольку $M = 1/\Lambda$, то

$$\begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial q_1} \frac{\partial \Lambda}{\partial q_1} + M \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial q_1^2} = \frac{\partial}{\partial q_1} \left(M \frac{\partial \Lambda}{\partial q_1} \right) = \frac{\partial^2 \ln \Lambda}{\partial q_1^2} = -\frac{\partial^2 \ln M}{\partial q_1^2}, \\ \frac{\partial M}{\partial q_1} \frac{\partial \Lambda}{\partial q_2} + M \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial q_1 \partial q_2} = \frac{\partial}{\partial q_1} \left(M \frac{\partial \Lambda}{\partial q_2} \right) = \frac{\partial^2 \ln \Lambda}{\partial q_1 \partial q_2} = -\frac{\partial^2 \ln M}{\partial q_1 \partial q_2}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Используя (3.13), преобразуем (3.12):

$$\frac{\partial}{\partial q_1} \left[K_1^* M - \frac{1}{2} (ic_3 - c_4) \frac{\partial \ln M}{\partial q_1} \right] + i \frac{\partial}{\partial q_2} \left[K_1^* M - \frac{1}{2} (ic_3 - c_4) \frac{\partial \ln M}{\partial q_2} \right] = 0.$$

Следовательно, по теореме Коши–Римана

$$K_1^* M - \frac{1}{2} (ic_3 - c_4) \frac{\partial \ln M}{\partial q_1}$$

— голоморфная функция от $q_1 + iq_2$. Ввиду ограниченности она постоянна. Значит,

$$K_1^* M - \frac{1}{2} (ic_3 - c_4) \frac{\partial \ln M}{\partial q_1} = \delta_1 + i\delta_2, \quad (3.14)$$

где δ_1, δ_2 — некоторые вещественные постоянные. Умножим уравнение (3.14) на M , подставим вместо $K_1^* M^2$ его выражение из (3.6), умноженное на M . В результате получим

$$i \frac{\partial D^* M^2}{\partial q_1} - \frac{\partial D^* M^2}{\partial q_2} - \frac{1}{2} c_3 \frac{\partial M}{\partial q_2} + \frac{1}{2} \frac{\partial M}{\partial q_1} ((n-3)c_3 i - (n-4)c_4) = (\delta_1 + i\delta_2) M. \quad (3.15)$$

Усредняя по тору, приходим к равенству

$$(\delta_1 + i\delta_2) \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} M dq_1 dq_2 = 0.$$

Следовательно,

$$\delta_1 + i\delta_2 = 0.$$

Что и требовалось.

Аналогично выводится равенство

$$K_2^* M^2 - \frac{1}{2} (ic_3 - c_4) \frac{\partial M}{\partial q_2} = 0. \quad (3.16)$$

ЛЕММА 2. *Полиномиальные компоненты поля симметрий u_2 , K_1 и K_2 имеют вид*

$$K_1 = \frac{1}{2}c_4 \frac{\partial \Lambda}{\partial q_1} p_1^{n-2} - \frac{1}{2}c_3 \frac{\partial \Lambda}{\partial q_1} p_1^{n-3} p_2 + A(p_1^2 + p_2^2), \quad (3.17)$$

$$K_2 = \frac{1}{2}c_4 \frac{\partial \Lambda}{\partial q_2} p_1^{n-2} - \frac{1}{2}c_3 \frac{\partial \Lambda}{\partial q_2} p_1^{n-3} p_2 + B(p_1^2 + p_2^2), \quad (3.18)$$

где A, B – однородные полиномы степени $n - 4$ по импульсам p_1 и p_2 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, если мы сократим уравнение (3.16) на M^2 , где $M = 1/\Lambda$, то получим

$$K_2^* = \frac{1}{2}c_4 \frac{\partial \Lambda}{\partial q_2} - \frac{1}{2}ic_3 \frac{\partial \Lambda}{\partial q_2}.$$

Воспользуемся результатом работы [2]: найдется многочлен B по импульсам степени $n - 4$ такой, что верно представление (3.18). Аналогично выводится (3.17).

ЛЕММА 3. *Справедливы следующие равенства*

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial q_1} \left(A^* M^2 - \frac{1}{2} i D^* M \frac{\partial M}{\partial q_1} \right) + i \frac{\partial}{\partial q_2} \left(A^* M^2 - \frac{1}{2} i D^* M \frac{\partial M}{\partial q_1} \right) \\ - \frac{1}{2} c_4 \frac{\partial^2 M}{\partial q_1^2} + \frac{1}{2} c_3 \frac{\partial^2 M}{\partial q_1 \partial q_2} = 0, \end{aligned} \quad (3.19)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial q_1} \left(B^* M^2 - \frac{1}{2} i D^* M \frac{\partial M}{\partial q_2} \right) + i \frac{\partial}{\partial q_2} \left(B^* M^2 - \frac{1}{2} i D^* M \frac{\partial M}{\partial q_2} \right) \\ - \frac{1}{2} c_4 \frac{\partial^2 M}{\partial q_1 \partial q_2} + \frac{1}{2} c_3 \frac{\partial^2 M}{\partial q_2^2} = 0. \end{aligned} \quad (3.20)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем равенство (3.19). Воспользуемся представлением (3.17) и укажем явно выражения для $\frac{\partial K_1}{\partial p_1}, \frac{\partial K_1}{\partial p_2}$:

$$\frac{\partial K_1}{\partial p_1} = \frac{(n-2)}{2} c_4 \frac{\partial \Lambda}{\partial q_1} p_1^{n-3} - \frac{(n-3)}{2} c_3 \frac{\partial \Lambda}{\partial q_1} p_1^{n-4} p_2 + 2p_1 A + \frac{\partial A}{\partial p_1} (p_1^2 + p_2^2), \quad (3.21)$$

$$\frac{\partial K_1}{\partial p_2} = -\frac{1}{2} c_3 \frac{\partial \Lambda}{\partial q_1} p_1^{n-3} + 2p_2 A + \frac{\partial A}{\partial p_2} (p_1^2 + p_2^2). \quad (3.22)$$

Из уравнения (3.11), умноженного на M^2 , получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial K_1 M}{\partial q_1} p_1 + \frac{\partial K_1 M}{\partial q_2} p_2 - \frac{\partial M}{\partial q_1} (K_1 p_1 + K_2 p_2) + \frac{1}{2} \frac{\partial M}{\partial q_1} \frac{\partial K_1}{\partial p_1} (p_1^2 + p_2^2) \\ + \frac{1}{2} \frac{\partial M}{\partial q_2} \frac{\partial K_1}{\partial p_2} (p_1^2 + p_2^2) + \frac{1}{2} Q_1 M^2 \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial q_1^2} + \frac{1}{2} Q_2 M^2 \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial q_1 \partial q_2} = 0. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Из уравнений (3.2) и (3.3) можно получить равенство

$$K_1 p_1 + K_2 p_2 = -\frac{1}{2} M \left(Q_1 \frac{\partial \Lambda}{\partial q_1} + Q_2 \frac{\partial \Lambda}{\partial q_2} \right). \quad (3.24)$$

С помощью соотношений (3.13) и (3.24) уравнение (3.23) приводится к следующему виду:

$$\begin{aligned} \frac{\partial K_1 M}{\partial q_1} p_1 + \frac{\partial K_1 M}{\partial q_2} p_2 + \frac{1}{2} \frac{\partial M}{\partial q_1} \frac{\partial K_1}{\partial p_1} (p_1^2 + p_2^2) + \frac{1}{2} \frac{\partial M}{\partial q_2} \frac{\partial K_1}{\partial p_2} (p_1^2 + p_2^2) \\ - \frac{1}{2} Q_1 M \frac{\partial^2 \ln M}{\partial q_1^2} - \frac{1}{2} Q_2 M \frac{\partial^2 \ln M}{\partial q_1 \partial q_2} = 0. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Перепишем это уравнение так, чтобы можно было выделить $(p_1^2 + p_2^2)$:

$$\begin{aligned} (p_1^2 + p_2^2) \left[\frac{\partial A M}{\partial q_1} p_1 + \frac{\partial A M}{\partial q_2} p_2 + \frac{1}{2} \frac{\partial M}{\partial q_1} \frac{\partial K_1}{\partial p_1} + \frac{1}{2} \frac{\partial M}{\partial q_2} \frac{\partial K_1}{\partial p_2} \right. \\ \left. - \frac{1}{2} D p_2 M \frac{\partial^2 \ln M}{\partial q_1^2} + \frac{1}{2} D p_1 M \frac{\partial^2 \ln M}{\partial q_1 \partial q_2} \right] + g = 0. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Учитывая (3.17), получаем формулу для $K_1 M$:

$$K_1 M = -\frac{1}{2} c_4 \frac{\partial \ln M}{\partial q_1} p_1^{n-2} + \frac{1}{2} c_3 \frac{\partial \ln M}{\partial q_1} p_1^{n-3} p_2 + A M (p_1^2 + p_2^2).$$

Посчитаем выражение g :

$$\begin{aligned} g = -\frac{1}{2} c_4 \frac{\partial^2 \ln M}{\partial q_1^2} p_1^{n-1} + \frac{1}{2} c_3 \frac{\partial^2 \ln M}{\partial q_1^2} p_1^{n-2} p_2 - \frac{1}{2} c_4 \frac{\partial^2 \ln M}{\partial q_1 \partial q_2} p_1^{n-2} p_2 \\ + \frac{1}{2} c_3 \frac{\partial^2 \ln M}{\partial q_1 \partial q_2} p_1^{n-3} p_2^2 - \frac{1}{2} c_3 \frac{\partial^2 \ln M}{\partial q_1^2} p_1^{n-2} p_2 \\ - \frac{1}{2} c_4 \frac{\partial^2 \ln M}{\partial q_1^2} p_1^{n-3} p_2^2 + \frac{1}{2} (c_3 p_1^{n-1} + c_4 p_1^{n-2} p_2) \frac{\partial^2 \ln M}{\partial q_1 \partial q_2}. \end{aligned}$$

Откуда после несложных преобразований получаем равенство

$$g = (p_1^2 + p_2^2) p_1^{n-3} \left(-\frac{1}{2} c_4 \frac{\partial^2 \ln M}{\partial q_1^2} + \frac{1}{2} c_3 \frac{\partial^2 \ln M}{\partial q_1 \partial q_2} \right). \quad (3.27)$$

Учитывая полученное соотношение (3.27), сократим уравнение (3.26) на $(p_1^2 + p_2^2)$ и подставим $p_1 = 1, p_2 = i$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial A^* M}{\partial q_1} + i \frac{\partial A^* M}{\partial q_2} + \frac{1}{2} \frac{\partial M}{\partial q_1} \frac{\partial K_1^*}{\partial p_1} + \frac{1}{2} \frac{\partial M}{\partial q_2} \frac{\partial K_1^*}{\partial p_2} - \frac{1}{2} i D^* M \frac{\partial^2 \ln M}{\partial q_1^2} \\ + \frac{1}{2} D^* M \frac{\partial^2 \ln M}{\partial q_1 \partial q_2} - \frac{1}{2} c_4 \frac{\partial^2 \ln M}{\partial q_1^2} + \frac{1}{2} c_3 \frac{\partial^2 \ln M}{\partial q_1 \partial q_2} = 0. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Умножим уравнение (3.28) на M и, используя выражения (3.21) и (3.22), получаем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial A^* M^2}{\partial q_1} + i \frac{\partial A^* M^2}{\partial q_2} + \frac{1}{2} \frac{\partial M}{\partial q_1} \left(-\frac{(n-2)}{2} c_4 \frac{\partial \ln M}{\partial q_1} + \frac{(n-3)}{2} i c_3 \frac{\partial \ln M}{\partial q_1} \right) \\ + \frac{1}{4} c_3 \frac{\partial M}{\partial q_2} \frac{\partial \ln M}{\partial q_1} - \frac{1}{2} i D^* M^2 \frac{\partial^2 \ln M}{\partial q_1^2} \\ + \frac{1}{2} D^* M^2 \frac{\partial^2 \ln M}{\partial q_1 \partial q_2} - \frac{1}{2} c_4 M \frac{\partial^2 \ln M}{\partial q_1^2} + \frac{1}{2} c_3 M \frac{\partial^2 \ln M}{\partial q_1 \partial q_2} = 0. \end{aligned}$$

Используя

$$\begin{aligned} M \frac{\partial^2 \ln M}{\partial q_1^2} &= \frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{\partial M}{\partial q_1} \right) - \frac{\partial M}{\partial q_1} \frac{\partial \ln M}{\partial q_1}, \\ M \frac{\partial^2 \ln M}{\partial q_1 \partial q_2} &= \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{\partial M}{\partial q_1} \right) - \frac{\partial M}{\partial q_2} \frac{\partial \ln M}{\partial q_1}, \\ D^* M^2 \frac{\partial^2 \ln M}{\partial q_1^2} &= \frac{\partial}{\partial q_1} \left(D^* M^2 \frac{\partial \ln M}{\partial q_1} \right) - \frac{\partial D^* M^2}{\partial q_1} \frac{\partial \ln M}{\partial q_1}, \\ D^* M^2 \frac{\partial^2 \ln M}{\partial q_1 \partial q_2} &= \frac{\partial}{\partial q_2} \left(D^* M^2 \frac{\partial \ln M}{\partial q_1} \right) - \frac{\partial D^* M^2}{\partial q_2} \frac{\partial \ln M}{\partial q_1}, \end{aligned}$$

преобразуем полученное уравнение:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial q_1} \left(A^* M^2 - \frac{1}{2} i D^* M \frac{\partial M}{\partial q_1} \right) + i \frac{\partial}{\partial q_2} \left(A^* M^2 - \frac{1}{2} i D^* M \frac{\partial M}{\partial q_1} \right) - \frac{1}{2} c_4 \frac{\partial^2 M}{\partial q_1^2} + \frac{1}{2} c_3 \frac{\partial^2 M}{\partial q_1 \partial q_2} \\ + \frac{1}{2} i \frac{\partial \ln M}{\partial q_1} \left(\frac{\partial D^* M^2}{\partial q_1} + i \frac{\partial D^* M^2}{\partial q_2} + \frac{(n-3)}{2} c_3 \frac{\partial M}{\partial q_1} + \frac{(n-4)}{2} i c_4 \frac{\partial M}{\partial q_1} + \frac{1}{2} i c_3 \frac{\partial M}{\partial q_2} \right) = 0. \end{aligned}$$

С учетом леммы 1 и равенства (3.9) мы получаем равенство (3.19). Равенство (3.20) выводится аналогично. Лемма доказана.

Отметим, что равенства (3.19) и (3.20) зависимы (точнее, это одно и то же) и на практике следует использовать только одно из них.

ЛЕММА 4. *Справедливо равенство*

$$\frac{\partial}{\partial q_2} \left(A^* M^2 - \frac{1}{2} i D^* M \frac{\partial M}{\partial q_1} \right) = \frac{\partial}{\partial q_1} \left(B^* M^2 - \frac{1}{2} i D^* M \frac{\partial M}{\partial q_2} \right). \quad (3.29)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим комплекснозначную функцию на $\mathbb{T}^2$:

$$f = \frac{\partial}{\partial q_2} \left(A^* M^2 - \frac{1}{2} i D^* M \frac{\partial M}{\partial q_1} \right) - \frac{\partial}{\partial q_1} \left(B^* M^2 - \frac{1}{2} i D^* M \frac{\partial M}{\partial q_2} \right). \quad (3.30)$$

Продифференцируем уравнение (3.19) по q_2 , а уравнение (3.20) по q_1 , и вычтем из первого уравнения второе, получаем

$$\frac{\partial f}{\partial q_1} + i \frac{\partial f}{\partial q_2} = 0.$$

Следовательно, по теореме Коши–Римана, f – голоморфная функция от $q_1 + iq_2$. Ввиду ограниченности она постоянна, т.е. $f = \gamma_1 + i\gamma_2$, где γ_1, γ_2 – вещественные постоянные. Усредняя по тору $\mathbb{T}^2$ и учитывая (3.30), приходим к равенству

$$\gamma_1 + i\gamma_2 = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f dq_1 dq_2 = 0.$$

Таким образом, $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$. Что и требовалось.

4. Поля симметрий третьей степени

Поскольку $n = 3$, то полином r из (3.1) имеет вид

$$r = \Lambda c_3 p_1 + \Lambda c_4 p_2. \quad (4.1)$$

В этом случае $D \equiv 0$. Воспользуемся леммой 1:

$$c_4 \frac{\partial M}{\partial q_1} - c_3 \frac{\partial M}{\partial q_2} = 0. \quad (4.2)$$

Так как поле $u_2 \neq 0$, то $c_3^2 + c_4^2 \neq 0$.

Если отношение c_4/c_3 иррационально, то $M \equiv \text{const}$. Тогда гауссова кривизна равна нулю и мы имеем случай плоского тора $\mathbb{T}^2$. Пусть $c_4/c_3 = k/l$, где k, l – взаимно простые числа. В этом случае M есть функция только от переменной

$$\varphi_2 = lq_1 + kq_2. \quad (4.3)$$

По теореме Безу найдутся два целых числа t, s таких, что

$$kt + ls = 1.$$

Положим

$$\varphi_1 = tq_1 - sq_2. \quad (4.4)$$

Соотношения (4.3) и (4.4) задают автоморфизм двумерного тора. Распиряя это преобразование до канонического, приходим к случаю, когда гамильтониан H не зависит от угловой координаты φ_1 . Таким образом, любое поле симметрий третьей степени представимо в виде суммы двух полей симметрий

$$u = \frac{1}{3}u_1 + \frac{1}{3}u_2,$$

где поле симметрий u_1 является гамильтоновым с гамильтонианом F , который есть интеграл 3-й степени по импульсам. Тогда F есть функция от интеграла первой степени λp_1 , где λ – вещественная постоянная, и интеграла H , точнее,

$$F = c_1 p_1^3 + \lambda p_1 H,$$

где c_1 – вещественная постоянная. Следовательно, оператор дифференцирования L_u поля симметрий 3-ей степени по импульсам имеет следующий вид:

$$L_u = \left(\frac{1}{3} \frac{\partial F}{\partial p_1} + \frac{1}{3} c_4 \Lambda p_2^2 \right) \frac{\partial}{\partial q_1} + \left(\frac{1}{3} \frac{\partial F}{\partial p_2} - \frac{1}{3} c_4 \Lambda p_1 p_2 \right) \frac{\partial}{\partial q_2} + \left(-\frac{1}{3} \frac{\partial F}{\partial q_2} + \frac{1}{6} c_4 \frac{\partial \Lambda}{\partial q_2} p_1 (p_1^2 + p_2^2) \right) \frac{\partial}{\partial p_2},$$

где Λ – функция от q_2 .

5. Поля симметрий четвертой степени

В случае $n = 4$ полином r имеет вид

$$r = \Lambda c_3 p_1^2 + \Lambda c_4 p_1 p_2 + d_1 (p_1^2 + p_2^2). \quad (5.1)$$

Здесь полином D является функцией d_1 от q_1, q_2 и $D^* = d_1$.

Равенство (3.9) из леммы 1 дает два уравнения для неизвестной функции d_1 :

$$\frac{\partial d_1 M^2}{\partial q_1} + \frac{1}{2} c_3 \frac{\partial M}{\partial q_1} = 0, \quad (5.2)$$

$$\frac{\partial d_1 M^2}{\partial q_2} + \frac{1}{2} c_3 \frac{\partial M}{\partial q_2} = 0. \quad (5.3)$$

Из (5.2) и (5.3) вытекает равенство

$$d_1 M^2 + \frac{1}{2} c_3 M = c_5,$$

где c_5 – вещественная постоянная. Отсюда

$$d_1 = -\frac{1}{2} c_3 \Lambda + c_5 \Lambda^2. \quad (5.4)$$

Мы выразили функцию d_1 через функцию Λ ; теперь осталось найти Λ . Из (3.17) и (3.18) вытекает, что полиномы A и B являются функциями a_1 и b_1 , соответственно, и $A^* = a_1, B^* = b_1$. Найдем функции $a_1 M^2$ и $b_1 M^2$ из уравнений (3.2) и (3.3):

$$\begin{aligned} a_1 M^2 &= \frac{1}{2} c_4 \frac{\partial M}{\partial q_1} + \frac{\partial d_1 M^2}{\partial q_2} - \frac{1}{2} d_1 M \frac{\partial M}{\partial q_2} \\ &= \frac{1}{2} c_4 \frac{\partial M}{\partial q_1} - \frac{1}{4} c_3 \frac{\partial M}{\partial q_2} - \frac{1}{2} c_5 \frac{\partial \ln M}{\partial q_2}, \end{aligned} \quad (5.5)$$

$$b_1 M^2 = \frac{1}{2} d_1 M \frac{\partial M}{\partial q_1} = -\frac{1}{4} c_3 \frac{\partial M}{\partial q_1} + \frac{1}{2} c_5 \frac{\partial \ln M}{\partial q_1}. \quad (5.6)$$

Далее используем равенство (3.29) и следующие соотношения

$$a_1 M^2 - \frac{1}{2} i d_1 M \frac{\partial M}{\partial q_1} = \frac{1}{2} c_4 \frac{\partial M}{\partial q_1} - \frac{1}{4} c_3 \frac{\partial M}{\partial q_2} - \frac{1}{2} c_5 \frac{\partial \ln M}{\partial q_2} + i \left(\frac{1}{4} c_3 \frac{\partial M}{\partial q_1} - \frac{1}{2} c_5 \frac{\partial \ln M}{\partial q_1} \right), \quad (5.7)$$

$$b_1 M^2 - \frac{1}{2} i d_1 M \frac{\partial M}{\partial q_2} = -\frac{1}{4} c_3 \frac{\partial M}{\partial q_1} + \frac{1}{2} c_5 \frac{\partial \ln M}{\partial q_1} + i \left(\frac{1}{4} c_3 \frac{\partial M}{\partial q_2} - \frac{1}{2} c_5 \frac{\partial \ln M}{\partial q_2} \right). \quad (5.8)$$

Подставим в равенство (3.29) выражения (5.7) и (5.8), имеем два соотношения на действительную и мнимую части. Мнимая часть тождественно равна нулю. Приравнявая нулю вещественную часть, получаем уравнение на конформный множитель

$$2c_4 \frac{\partial^2 M}{\partial q_1 \partial q_2} = c_3 \left(\frac{\partial^2 M}{\partial q_2^2} - \frac{\partial^2 M}{\partial q_1^2} \right) + 2c_5 \Delta \ln M, \quad (5.9)$$

где Δ – оператор Лапласа.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Если гауссова кривизна метрики на торе не равна тождественно нулю, то конформный множитель метрики удовлетворяет уравнению*

$$2c_4 \frac{\partial^2 M}{\partial q_1 \partial q_2} = c_3 \left(\frac{\partial^2 M}{\partial q_2^2} - \frac{\partial^2 M}{\partial q_1^2} \right). \quad (5.10)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Аналитический критерий евклидовости метрики (1.1) на торе состоит в том, что $M = \text{const}$ – случай плоского тора. Заметим, что если выполнено уравнение (5.10), то из уравнения (5.9) следует, что $c_5 = 0$ в случае $M \neq \text{const}$.

Предположим, что $M \neq \text{const}$. Введем положительный параметр, умножая гамильтониан H из (1.2) на $c_0 > 0$:

$$H = \frac{c_0}{2M} (p_1^2 + p_2^2).$$

Воспользуемся тривиальным соотношением $[u_2, c_0 v_H] = [c_0 u_2, v_H] = 0$. С одной стороны, компоненты векторного поля симметрий u_2 мы умножили на c_0 . Тогда получаем уравнение (5.9).

С другой стороны, первоначальный конформный множитель M мы разделили на c_0 . В этом случае уравнение (5.9) имеет вид

$$2 \frac{c_4}{c_0} \frac{\partial^2 M}{\partial q_1 \partial q_2} + \frac{c_3}{c_0} \left(\frac{\partial^2 M}{\partial q_1^2} - \frac{\partial^2 M}{\partial q_2^2} \right) = 2c_5 \Delta \ln M. \quad (5.11)$$

Умножим уравнение (5.11) на c_0 и вычтем (5.9):

$$2c_5(c_0 - 1) \Delta \ln M = 0.$$

Так как мы рассматриваем случай $M \neq \text{const}$ и $c_0 > 0$ произвольно, то $c_5 = 0$. Предложение доказано.

Уравнение (5.10) исследовалось в работах [1] и [5] в связи с задачей о наличии квадратичного интеграла. Показано, что в этом случае можно перейти к разделяющимся угловым переменным.

Будем считать, что

$$M = F(q_1) + G(q_2), \quad (5.12)$$

где F, G — 2π -периодические функции. Уравнение (5.10) дает нам, что

$$-c_3(F'' - G'') = 0.$$

Здесь штрих обозначает производную функции одной переменной. Поскольку функции F и G периодичны и хотя бы одна из них не постоянна, то, очевидно, $c_3 = 0$. Из выражения (5.4) получаем, что $d_1 \equiv 0$. Из выражений (5.5) и (5.6) находим, что

$$a_1 = -\frac{1}{2}c_4 \frac{\partial \Lambda}{\partial q_1}, \quad b_1 = 0.$$

Тогда оператор дифференцирования L_{u_2} поля симметрий 4-й степени по импульсам имеет вид:

$$L_{u_2} = c_4 \Lambda p_1 p_2^2 \frac{\partial}{\partial q_1} - c_4 \Lambda p_1^2 p_2 \frac{\partial}{\partial q_2} - \frac{1}{2} c_4 \frac{\partial \Lambda}{\partial q_1} p_2^2 (p_1^2 + p_2^2) \frac{\partial}{\partial p_1} + \frac{1}{2} c_4 \frac{\partial \Lambda}{\partial q_2} p_1^2 (p_1^2 + p_2^2) \frac{\partial}{\partial p_2},$$

где $\Lambda = 1/M$, где $M = F(q_1) + G(q_2)$. Заметим, что если $F(q_1) = 0$, т.е. Λ не зависит от угловой координаты q_1 , то поле симметрий 4-й степени по импульсам u_2 есть произведение поля симметрий 3-й степени на линейный интеграл p_1 .

С учетом положения (5.12) гамильтониан (1.2) будет иметь вид

$$H = \frac{p_1^2 + p_2^2}{2(F(q_1) + G(q_2))}. \quad (5.13)$$

Функция (5.13) — гамильтониан лиувиллевой системы с торическим конфигурационным пространством. Переменные q_1 и q_2 разделяются: уравнения Гамильтона (1.2) с гамильтонианом (5.13) допускают два квадратичных интеграла

$$\Phi_1 = \frac{p_1^2}{2} - HF, \quad \Phi_2 = \frac{p_2^2}{2} - HG. \quad (5.14)$$

Так как $\Phi_1 + \Phi_2 = 0$, то эти интегралы зависимы. Однако, каждый из них независим от интеграла энергии H .

В силу (5.13) интеграл 4-й степени по импульсам F есть функция от интегралов 2-й степени (5.13) и (5.14).

Автор выражает благодарность профессору В. В. Козлову за внимание и помощь в работе.

Список литературы

1. *Козлов В. В., Денисова Н. В.* Симметрии и топология динамических систем с двумя степенями свободы // Матем. сб. 1993. Т. 184 (226). № 9. С. 125–148.
2. *Козлов В. В., Денисова Н. В.* Полиномиальные интегралы геодезических потоков на двумерном торе // Матем. сб. 1994. Т. 185. № 12. С. 49–64.
3. *Колокольцов В. Н.* Геодезические потоки на двумерных многообразиях с дополнительным полиномиальным по скоростям первым интегралом // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1982. Т. 46. № 5. С. 994–1010.
4. *Bolotin S. V., Kozlov V. V.* Symmetry fields of geodesic flows // Russian Journal of Mathematical Physics. 1995. V. 3. № 3. P. 279–295.
5. *Kozlov V. V.* Integrable and Non-Integrable Hamiltonian Systems // Sov. Sci. Rev. C. Math. Phys. 1989. V. 8. P. 1–81.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Поступила в редакцию
24.10.1996