Общероссийский математический портал

Б. И. Голубов, Об ограниченности операторов Харди и Харди–Литлвуда в пространствах $\operatorname{Re} H^1$ и ВМО, *Матем. сб.*, 1997, том 188, номер 7, 93–106

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm246>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.217.227

26 апреля 2023 г., 16:19:30

УДК 517.518.2

Б. И. Голубов

Об ограниченности операторов Харди и Харди–Литлвуда в пространствах $\operatorname{Re} H^1$ и ВМО

В работе доказано, что оператор Харди $\mathcal{H}$ ограничен в пространстве $\operatorname{Re} H^1$, а оператор Харди–Литлвуда $\mathcal{B}$ ограничен в пространстве ВМО функций ограниченной средней осцилляции на действительной оси $\mathbb{R}$. При этом пространство $\operatorname{Re} H^1$ изоморфно пространству Харди однозначных аналитических в верхней полуплоскости функций $F(z)$, удовлетворяющих условию (0.3). Оператор Харди–Литлвуда $\mathcal{B}$ задается на $\mathbb{R}$ равенством (0.2), а оператор Харди $\mathcal{H}$ задается на $\mathbb{R}_+$ равенством (0.1) и продолжается на $\mathbb{R}$ следующим образом. Если функция f четна (нечетна), то $\mathcal{H}f$ продолжается на $\mathbb{R}_-$ четным (нечетным) образом. Если же функция f произвольна, то $\mathcal{H}(f) = \mathcal{H}(f_+) + \mathcal{H}(f_-)$, где f_+ – четная, а f_- – нечетная составляющие функции f .

Библиография: 12 названий.

В данной работе оператором Харди называется оператор

$$\mathcal{H}(f)(x) = \int_x^{+\infty} \frac{f(t)}{t} dt, \quad x > 0, \quad (0.1)$$

а оператором Харди–Литлвуда – оператор

$$\mathcal{B}(f)(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt, \quad x > 0. \quad (0.2)$$

Эти операторы ограничены в пространстве $L^p(\mathbb{R}_+)$: первый – для $1 \leq p < \infty$, второй – для $1 < p \leq \infty$. Это следует из неравенств Харди

$$\|\mathcal{H}(f)\|_{L^p(\mathbb{R}_+)} \leq p \|f\|_{L^p(\mathbb{R}_+)}, \quad 1 \leq p < \infty,$$

и

$$\|\mathcal{B}(f)\|_{L^p(\mathbb{R}_+)} \leq \frac{p}{p-1} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}_+)}, \quad 1 < p \leq \infty$$

(см. [1, с. 289 и 294]). При этом Харди доказал, что постоянные p и $p/(p-1)$ в этих неравенствах являются наименьшими из возможных. Отсюда вытекает, что

$$\|\mathcal{H}\|_{L^p(\mathbb{R}_+) \rightarrow L^p(\mathbb{R}_+)} = p, \quad 1 \leq p < \infty,$$

а

$$\|\mathcal{B}\|_{L^p(\mathbb{R}_+) \rightarrow L^p(\mathbb{R}_+)} = \frac{p}{p-1}, \quad 1 < p \leq \infty.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-01-00332).

Легко видеть, что сопряженным к оператору $\mathcal{H}: L^p(\mathbb{R}_+) \rightarrow L^p(\mathbb{R}_+)$ является оператор $\mathcal{B}: L^{p'}(\mathbb{R}_+) \rightarrow L^{p'}(\mathbb{R}_+)$, где $1/p + 1/p' = 1$.

Условия ограниченности операторов (0.1) и (0.2) в симметрических пространствах измеримых функций приведены в книге [2].

В данной работе доказывается ограниченность операторов (0.1) и (0.2), продолженных на всю числовую ось, соответственно в пространствах $\text{Re } H^1$ и ВМО. Пространство Харди H^1 состоит из аналитических функций $F(z)$, регулярных в верхней полуплоскости $\text{Re } z > 0$ и удовлетворяющих условию

$$\|F\|_{H^1} \equiv \sup_{y>0} \int_{\mathbb{R}} |F(x+iy)| dx < \infty. \quad (0.3)$$

Это пространство полно относительно нормы (0.3). Известно, что для функций $F \in H^1$ почти всюду на действительной оси существует конечный предел

$$\lim_{y \rightarrow +0} F(x+iy) = f(x) + ig(x),$$

причем действительнзначные функции f и g принадлежат пространству $L(\mathbb{R})$. Более того, $g(x) = \tilde{f}(x)$, где $\tilde{f}(x)$ — преобразование Гильберта функции $f(x)$, которое, таким образом, также принадлежит пространству $L(\mathbb{R})$, если $F \in H^1$. Кроме того, известно, что всякая функция вида $f(x) + i\tilde{f}(x)$, где действительнзначная функция $f \in L(\mathbb{R})$ имеет преобразование Гильберта $\tilde{f}$, также принадлежащее $L(\mathbb{R})$, почти всюду на $\mathbb{R}$ совпадает с предельными значениями при $y \rightarrow +0$ некоторой функции $F(z) = F(x+iy) \in H^1$. При этом функция $F(z)$ определяется однозначно.

Пространство всех таких действительнзначных функций $f \in L(\mathbb{R})$, для которых $\tilde{f} \in L(\mathbb{R})$, обозначается через $\text{Re } H^1$. Пространство $\text{Re } H^1$ изоморфно пространству H^1 и является полным относительно нормы

$$\|f\|_{\text{Re } H^1} = \|f\|_{L(\mathbb{R})} + \|\tilde{f}\|_{L(\mathbb{R})}.$$

Через $\text{Re } H_+^1$ ($\text{Re } H_-^1$) обозначим подпространство четных (нечетных) функций из $\text{Re } H^1$.

Пространство ВМО состоит из функций $f \in L_{\text{loc}}(\mathbb{R})$, для которых

$$\|f\|_* \equiv \sup_{|I|>0} \frac{1}{|I|} \int_I |f(x) - f_I| dx < \infty, \quad (0.4)$$

где $I = (a, b)$, $|I| = b - a$, $f_I = \frac{1}{|I|} \int_I f(x) dx$.

Равенство (0.4) задает квазинорму в пространстве ВМО, поскольку из условия $\|f\|_* = 0$ следует, что $f(x) = \text{const}$ почти всюду в $\mathbb{R}$. В дальнейшем будем отождествлять друг с другом функции из ВМО, отличающиеся почти всюду на константу. Тогда ВМО будет банаховым пространством с нормой (0.4). Пространство ВМО является сопряженным к пространству $\text{Re } H^1$.

Все изложенные факты о пространствах H^1 , $\text{Re } H^1$ и ВМО можно найти, например, в книге [3] или [4].

Через ВМО_+ (ВМО_-) будем обозначать подпространство четных (нечетных) функций из ВМО .

При рассмотрении функций, заданных на всей числовой оси, операторы (0.1) и (0.2) естественно продолжить следующим образом. Если функция f четна (нечетна), то каждый из них продолжается на $\mathbb{R}_-$ четным (нечетным) образом. После этого произвольную функцию f , заданную на $\mathbb{R}$, представляем в виде $f(x) = f_+(x) + f_-(x)$, где

$$f_+(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x)), \quad f_-(x) = \frac{1}{2}(f(x) - f(-x)),$$

т.е. f_+ – четная, а f_- – нечетная составляющие функции f . По определению считаем

$$\mathcal{H}(f) = \mathcal{H}(f_+) + \mathcal{H}(f_-), \quad \mathcal{B}(f) = \mathcal{B}(f_+) + \mathcal{B}(f_-). \quad (0.5)$$

Заметим, что для оператора $\mathcal{B}$ его определение по формуле (0.5) получается из формулы (0.2), если в последней рассматривать произвольные $x \neq 0$. Тем не менее, его представление в виде (0.5) оказывается полезным при доказательстве некоторых утверждений.

Отметим, что в книге [4, с. 355] доказана ограниченность оператора $\mathcal{B}: \text{Re } H^1 \rightarrow L(\mathbb{R})$.

В данной работе показывается, что оператор Харди $\mathcal{H}$ ограничен в пространстве $\text{Re } H^1$, а оператор Харди–Литлвуда $\mathcal{B}$ ограничен в пространстве ВМО . При этом эти операторы определяются согласно формулам (0.5).

1. В этом пункте приводятся вспомогательные результаты.

ТЕОРЕМА А. Если $f \in L_{\text{loc}}^p(\mathbb{R}_+)$, $1 < p < \infty$, то для любого $b > 0$ справедливо неравенство

$$\left\{ \int_0^b \left(\frac{1}{x} \int_0^x |f(t)| dt \right)^p dx \right\}^{1/p} \leq \frac{p}{p-1} \left(\int_0^b |f(t)|^p dt \right)^{1/p}.$$

Эта теорема доказана Харди [1, с. 292].

ТЕОРЕМА В. Если $f \in \text{ВМО}$, то при любом $p \in (1, \infty)$ справедливо неравенство

$$\sup_{|I|>0} \left(\frac{1}{|I|} \int_I |f(x) - f_I|^p dx \right)^{1/p} \leq C_p \|f\|_*,$$

где постоянная $C_p > 0$ зависит лишь от p .

Эта теорема известна (см., например, [3, с. 234]).

Для $f \in L(\mathbb{R}_+)$ введем обозначения

$$\hat{f}_c(t) = \frac{2}{\pi} \int_{\mathbb{R}_+} f(x) \cos tx dx, \quad (1.1)$$

$$\hat{f}_s(t) = \frac{2}{\pi} \int_{\mathbb{R}_+} f(x) \sin tx dx, \quad (1.2)$$

т.е. $\hat{f}_c$ ($\hat{f}_s$) – это косинус-преобразование (синус-преобразование) Фурье функции f .

ТЕОРЕМА С. Если $f \in L^p(\mathbb{R}_+)$, то для $1 \leq p \leq 2$ и $t > 0$ справедливы равенства

$$\mathcal{B}(\hat{f}_c)(t) = \widehat{\mathcal{H}(f)}_c(t), \quad \mathcal{B}(\hat{f}_s)(t) = \widehat{\mathcal{H}(f)}_s(t), \quad (1.3)$$

где $\mathcal{H}(f)$ определяется равенством (0.1), а $\mathcal{B}(f)$ – равенством (0.2).

Для $p = 2$ теорема С доказана в книге Титчмарша (см. [5, с. 93]). Без формулировки условий, налагаемых на функцию f , формулы (1.3) на эвристическом уровне выведены Беллманом [6]. Подробное доказательство теоремы С приведено в работе автора [7]. Отметим, что теорема С является интегральным аналогом соответствующей теоремы Харди [8] для коэффициентов Фурье периодических функций.

Ниже при рассмотрении интегралов вида

$$\int_0^{+\infty} \varphi(t) e^{izt} dt, \quad \operatorname{Im} z > 0, \quad (1.4)$$

мы будем предполагать, что комплекснозначная функция φ ограничена и непрерывна на $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$. Легко видеть, что при этих условиях интеграл (1.4) в верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$ сходится к некоторой аналитической функции $F(z)$, причем в каждой полуплоскости $\operatorname{Im} z \geq y_0$ ($y_0 > 0$) сходимость является равномерной. При этом будем говорить, что интеграл (1.4) представляет функцию $F(z)$ в верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$.

Кроме того, будем называть пару (a, b) функций $a(t)$ и $b(t)$ CS -парой преобразований Фурье, если существует такая функция $f \in L(\mathbb{R})$, что для $t \geq 0$ справедливы равенства

$$a(t) = \hat{f}_c(t), \quad b(t) = \hat{f}_s(t), \quad (1.5)$$

где в отличие от формул (1.1), (1.2) предполагается, что

$$\hat{f}_c(t) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} f(x) \cos tx dx, \quad \hat{f}_s(t) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} f(x) \sin tx dx. \quad (1.5')$$

Мы надеемся, что эта двойственность в обозначениях не приведет к недоразумениям.

Отметим также, что функции a, b и f предполагаются действительными.

ТЕОРЕМА D. Для того чтобы обе пары (a, b) и $(-b, a)$ одновременно являлись CS -парами преобразований Фурье необходимо и достаточно, чтобы интеграл

$$F(z) = \int_0^{+\infty} (a(t) - ib(t)) e^{izt} dt. \quad (1.6)$$

представлял функцию из пространства H^1 в верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$.

Отметим, что подобная теорема для пространства H^2 содержится в книге Титчмарша (см. [5, с. 170]). Аналог теоремы D для рядов Фурье имеется в книге Н. К. Барри (см. [9, с. 542]). По-видимому, теорема D известна специалистам в области гармонического анализа, однако нам не удалось обнаружить ее в доступных нам монографиях. Поэтому для полноты изложения ниже проводится ее доказательство.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ D. *Необходимость.* Пусть (a, b) и $(-b, a)$ являются парами CS -преобразований Фурье. Тогда существуют такие функции $f, g \in L(\mathbb{R})$, что для $t \geq 0$ имеют место равенства (1.5), (1.5') и равенства

$$-b(t) = \hat{g}_c(t), \quad a(t) = \hat{g}_s(t). \quad (1.7)$$

Из (1.5) и (1.5') имеем

$$a(t) - ib(t) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} f(u) e^{-itu} du.$$

Подставляя в интеграл (1.6), получим

$$F(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \left\{ \int_{\mathbb{R}} f(u) e^{-itu} du \right\} e^{i(x+iy)t} dt, \quad y > 0.$$

Меняя порядок интегрирования, что возможно на основании теоремы Фубини, приходим к равенству

$$\begin{aligned} F(z) &= \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{y f(u) du}{(x-u)^2 + y^2} + \frac{i}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{(x-u) f(u) du}{(x-u)^2 + y^2} \\ &= (f * P_y)(x) + i(f * Q_y)(x), \quad y > 0, \end{aligned} \quad (1.8)$$

где

$$P_y(x) = \frac{1}{\pi} \frac{y}{x^2 + y^2}, \quad Q_y(x) = \frac{1}{\pi} \frac{x}{x^2 + y^2}$$

— соответственно ядро Пуассона и сопряженное ядро Пуассона.

Таким образом,

$$\operatorname{Re} F(z) = (f * P_y)(x), \quad \operatorname{Im} F(z) = (f * Q_y)(x). \quad (1.9)$$

Вводя обозначение

$$\Phi(z) = \int_0^{+\infty} (-b(t) - ia(t)) e^{izt} dt,$$

подставляя значения функций $a(t)$ и $b(t)$ из (1.5) и меняя порядок интегрирования, получим

$$\Phi(z) = (f * Q_y)(x) - i(f * P_y)(x), \quad y > 0.$$

С другой стороны, на основании равенств (1.7) подобно тому, как были получены равенства (1.9), приходим к равенствам

$$\operatorname{Re} \Phi(z) = (g * P_y)(x), \quad \operatorname{Im} \Phi(z) = (g * Q_y)(x), \quad y > 0.$$

Отсюда и из предыдущего равенства заключаем, что

$$(f * Q_y)(x) = (g * P_y)(x), \quad (f * P_y)(x) = -(g * Q_y)(x), \quad y > 0.$$

Поэтому

$$\|(f * Q_y)\|_{L(\mathbb{R})} = \|g * P_y\|_{L(\mathbb{R})} \leq \|g\|_{L(\mathbb{R})} \|P_y\|_{L(\mathbb{R})} = \|g\|_{L(\mathbb{R})},$$

так как $L(\mathbb{R})$ -норма ядра Пуассона P_y равна 1 при $y > 0$.

Тем самым,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |F(x + iy)| dx &\leq \|f * P_y\|_{L(\mathbb{R})} + \|f * Q_y\|_{L(\mathbb{R})} \\ &\leq \|f\|_{L(\mathbb{R})} + \|g\|_{L(\mathbb{R})} < +\infty, \quad y > 0. \end{aligned}$$

Отсюда, учитывая, что согласно (1.9) функция $F(z)$ регулярна в верхней полуплоскости, заключаем, что $F \in H^1$.

Достаточность. Пусть интеграл (1.6) представляет функцию $F \in H^1$. Напомним, что функции $a(t)$ и $b(t)$ предполагаются ограниченными и непрерывными в $\mathbb{R}_+$. Полагая

$$h(t) = \begin{cases} a(t) - ib(t), & t \geq 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases}$$

перепишем равенство (1.6) в виде

$$F(x + iy) = \int_{\mathbb{R}} h(t) e^{-yt} e^{ixt} dt, \quad y > 0.$$

Применяя формулу обращения преобразования Фурье, получим

$$e^{-yt} h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} F(u + iy) e^{-iut} du, \quad y > 0.$$

Отметим, что это равенство можно сначала понимать в смысле теории обобщенных функций. Но так как $F \in H^1$, а функция $h(t) e^{-yt} \in L(\mathbb{R})$, то полученное равенство справедливо для $t \in \mathbb{R}$. Учитывая определение функции $h(t)$, получаем

$$e^{-yt} [a(t) - ib(t)] = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} F(u + iy) e^{-iut} du, \quad t \geq 0, \quad (1.10)$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} F(u + iy) e^{-iut} du = 0, \quad t < 0. \quad (1.11)$$

Но для функции $F \in H^1$ почти всюду существует предел

$$\lim_{y \rightarrow +0} F(x + iy) \equiv f(x) + ig(x),$$

причем $f, g \in L(\mathbb{R})$. Более того, $g(x) = \tilde{f}(x) \equiv \lim_{y \rightarrow +0} (f * Q_y)(x)$ почти всюду и

$$\lim_{y \rightarrow +0} \|F(\cdot + iy) - f(\cdot) - i\tilde{f}(\cdot)\|_{L(\mathbb{R})} = 0$$

(см. [4, с. 233, 235]). Поэтому, переходя к пределу при $y \rightarrow +0$ в равенстве (1.10), получим

$$a(t) - ib(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} [f(u) + i\tilde{f}(u)] e^{-iut} du, \quad t \geq 0,$$

откуда следует, что для $t \geq 0$ справедливы равенства

$$a(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} [f(u) \cos tu + \tilde{f}(u) \sin tu] du, \quad (1.12)$$

$$-b(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} [\tilde{f}(u) \cos tu - f(u) \sin tu] du. \quad (1.13)$$

Переходя к пределу при $y \rightarrow +0$ в равенстве (1.11), получим

$$\int_{\mathbb{R}} [f(u) + i\tilde{f}(u)] e^{-iut} du = 0, \quad t < 0,$$

откуда следуют равенства

$$\begin{cases} \int_{\mathbb{R}} [f(u) \cos tu + \tilde{f}(u) \sin tu] du = 0, & t < 0, \\ \int_{\mathbb{R}} [\tilde{f}(u) \cos tu - f(u) \sin tu] du = 0, & t < 0. \end{cases} \quad (1.14)$$

Учитывая эти равенства, перепишем равенства (1.12) и (1.13) в виде

$$\begin{cases} a(t) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} f(u) \cos tu du, \\ b(t) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} f(u) \sin tu du, \end{cases} \quad t \geq 0. \quad (1.15)$$

Тем самым доказано, что (a, b) является парой CS -преобразований Фурье. Но равенства (1.15) на основании (1.14) можно переписать в виде

$$-b(t) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \tilde{f}(u) \cos tu du, \quad a(t) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \tilde{f}(u) \sin tu du, \quad t \geq 0.$$

Это означает, что $(-b, a)$ также является CS -парой преобразований Фурье, так как $\tilde{f} \in L(\mathbb{R})$. Таким образом, теорема D доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. При доказательстве достаточности условий теоремы D было установлено, что для функции $F \in H^1$ ее граничная функция $f(x) + i\tilde{f}(x)$ удовлетворяет условию

$$\int_{\mathbb{R}} (f(x) + i\tilde{f}(x)) e^{-itx} dx = 0, \quad t \leq 0.$$

Этот факт хорошо известен (см., например, [3, с. 69]).

2. Перейдем к основным результатам работы.

ТЕОРЕМА 1а. Если интеграл (1.6) представляет функцию $F \in H^1$ в верхней полуплоскости $\text{Im } z > 0$, то интеграл

$$\Phi(z) = \int_0^{+\infty} (A(t) - iB(t))e^{izt} dt, \quad (2.1)$$

где

$$A(t) = \frac{1}{t} \int_0^t a(u) du, \quad B(t) = \frac{1}{t} \int_0^t b(u) du, \quad (2.2)$$

также представляет функцию $\Phi \in H^1$ в той же полуплоскости. Более того, справедливо неравенство

$$\|\Phi\|_{H^1} \leq C \|F\|_{H^1}, \quad (2.3)$$

где $C > 0$ – абсолютная постоянная.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При доказательстве теоремы D было установлено, что если интеграл (1.6) представляет функцию $F \in H^1$ в верхней полуплоскости $\text{Im } z > 0$, то справедливы равенства (1.15), где $f(x) + i\tilde{f}(x)$ – граничная функция на действительной оси для функции $F(z)$, причем $f \in L(\mathbb{R})$ и $\tilde{f} \in L(\mathbb{R})$. Введем обозначения

$$f_+(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x)), \quad f_-(x) = \frac{1}{2}(f(x) - f(-x)), \quad (2.4)$$

т.е. f_+ – четная, а f_- – нечетная составляющие функции f . Из (1.15), учитывая обозначения (1.5'), легко следуют равенства

$$(f_+)^{\wedge}_c(t) = \hat{f}_c(t) = a(t), \quad (f_-)^{\wedge}_s(t) = \hat{f}_s(t) = b(t), \quad t \geq 0. \quad (2.5)$$

Отсюда, применяя теорему C для $p = 1$ и учитывая (2.2), получим

$$A(t) = \mathcal{H}(f_+)^{\wedge}_c(t), \quad B(t) = \mathcal{H}(f_-)^{\wedge}_s(t), \quad t \geq 0. \quad (2.6)$$

Но так как функция f в равенствах (1.15) принадлежит пространству $\text{Re } H^1$, то для ее преобразования Гильберта $\tilde{f}$ имеют место равенства (1.14), из которых получаем

$$a(t) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \tilde{f}(x) \sin tx dx, \quad b(t) = -\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \tilde{f}(x) \cos tx dx, \quad t \geq 0. \quad (2.7)$$

Введем обозначение $g(x) = \tilde{f}(x)$. Так как $g \in L(\mathbb{R})$, то из предыдущих равенств легко получаем

$$-b(t) = (g_+)^{\wedge}_c(t), \quad a(t) = (g_-)^{\wedge}_s(t), \quad t \geq 0,$$

где g_+ и g_- – соответственно четная и нечетная составляющие функции g . Снова применяя теорему C для $p = 1$ и учитывая (2.2), приходим к следующим равенствам

$$-B(t) = \mathcal{H}(g_+)^{\wedge}_c(t), \quad A(t) = \mathcal{H}(g_-)^{\wedge}_s(t), \quad t \geq 0. \quad (2.7')$$

Из равенств (2.6), учитывая четность функции $\mathcal{H}(f_+)$ и нечетность функции $\mathcal{H}(f_-)$, заключаем, что пара (A, B) является CS -парой преобразований Фурье функции $\mathcal{H}(f_+) + \mathcal{H}(f_-) \equiv \mathcal{H}(f)$. Аналогично, из равенств (2.7) следует, что пара $(-B, A)$ является CS -парой преобразований Фурье функции $\mathcal{H}(g_+) + \mathcal{H}(g_-) \equiv \mathcal{H}(g)$. Но так как $\mathcal{H}(f) \in L(\mathbb{R})$ и $\mathcal{H}(g) \in L(\mathbb{R})$ (это вытекает из упомянутого во введении неравенства Харди $\|\mathcal{H}(f)\|_{L(\mathbb{R}_+)} \leq \|f\|_{L(\mathbb{R}_+)}$), то на основании теоремы D заключаем, что интеграл (2.1) представляет функцию $\Phi \in H^1$ в верхней полуплоскости $\text{Im } z > 0$.

Осталось доказать неравенство (2.3). Но известно (см., например, [4, с. 235]), что справедливы неравенства

$$A\|f\|_{\text{Re } H^1} \leq \|F\|_{H^1} \leq B\|f\|_{\text{Re } H^1},$$

где $f(x) + i\tilde{f}(x)$ — граничная функция на действительной оси для функции $F \in H^1$, а постоянные $A > 0$ и $B > 0$ не зависят от F . Поэтому доказываемое неравенство (2.3) эквивалентно неравенству

$$\|\varphi\|_{\text{Re } H^1} \leq D\|f\|_{\text{Re } H^1}, \quad (2.8)$$

где $\varphi(x) + i\tilde{\varphi}(x)$ — граничная функция на действительной оси для функции $\Phi \in H^1$, которая представляется интегралом (2.1), а $D > 0$ — абсолютная постоянная.

Поскольку из представления (1.6) функции $F(z) \in H^1$ вытекают равенства (1.15), то из представления (2.1) следуют равенства

$$A(t) = \widehat{\varphi}_c(t), \quad B(t) = \widehat{\varphi}_s(t), \quad t \geq 0. \quad (2.9)$$

Пусть $\varphi(x) = \varphi_+(x) + \varphi_-(x)$, где φ_+ — четная, а φ_- — нечетная составляющие функции φ (см. (2.4)). Тогда $\widehat{\varphi}_c(t) = (\widehat{\varphi}_+)_c^\wedge(t)$, $(\varphi_-)_s^\wedge(t) = \widehat{\varphi}_s(t)$, $t \geq 0$, и из равенств (2.9), учитывая (2.6), получим

$$\mathcal{H}(f_+)_c^\wedge(t) = (\varphi_+)_c^\wedge(t), \quad \mathcal{H}(f_-)_s^\wedge(t) = (\varphi_-)_s^\wedge(t), \quad t \geq 0.$$

Следовательно, согласно теореме единственности для преобразований Фурье (см., например, [10, с. 19]) имеем

$$\mathcal{H}(f_+)(x) = \varphi_+(x), \quad \mathcal{H}(f_-)(x) = \varphi_-(x)$$

почти всюду на $\mathbb{R}$. Следовательно, почти всюду на $\mathbb{R}$ справедливо равенство

$$\varphi(x) = \mathcal{H}(f_+)(x) + \mathcal{H}(f_-)(x) \equiv \mathcal{H}(f)(x). \quad (2.10)$$

Из этого равенства, применяя упоминавшееся неравенство Харди к функциям $\mathcal{H}(f_+)$ и $\mathcal{H}(f_-)$, получим

$$\begin{aligned} \|\varphi\|_{L(\mathbb{R})} &\leq \|\mathcal{H}(f_+)\|_{L(\mathbb{R})} + \|\mathcal{H}(f_-)\|_{L(\mathbb{R})} \\ &\leq \|f_+\|_{L(\mathbb{R})} + \|f_-\|_{L(\mathbb{R})} \leq 2\|f\|_{L(\mathbb{R})}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Если равенства типа (2.7) записать для функции $h = \tilde{\varphi}$, то они примут вид

$$-B(t) = \hat{h}_c(t), \quad A(t) = \hat{h}_s(t), \quad t \geq 0.$$

Отсюда и из (2.7') подобно тому, как из (2.6) и (2.9) получено равенство (2.10), легко следует равенство

$$h(x) = \mathcal{H}(g_+)(x) + \mathcal{H}(g_-)(x) \equiv \mathcal{H}(g)(x)$$

почти всюду на $\mathbb{R}$. Из него, подобно неравенству (2.11), выводим неравенство

$$\|h\|_{L(\mathbb{R})} \leq 2\|g\|_{L(\mathbb{R})}. \quad (2.12)$$

Следовательно, учитывая, что $h = \tilde{\varphi}$, $g = \tilde{f}$, на основании (2.11) и (2.12), получим

$$\|\varphi\|_{\text{Re } H^1} = \|\varphi\|_{L(\mathbb{R})} + \|h\|_{L(\mathbb{R})} \leq 2(\|f\|_{L(\mathbb{R})} + \|g\|_{L(\mathbb{R})}) = 2\|f\|_{\text{Re } H^1}.$$

Итак, неравенство (2.8) доказано с константой $D = 2$. Тем самым, доказана и теорема 1а.

Поскольку при доказательстве теоремы 1а попутно установлено равенство (2.10), то доказанное с константой $D = 2$ неравенство (2.8) можно переписать в виде

$$\|\mathcal{H}(f)\|_{\text{Re } H^1} \leq 2\|f\|_{\text{Re } H^1}. \quad (2.13)$$

Учитывая тот факт, что пространства H^1 и $\text{Re } H^1$ изоморфны, заключаем, что неравенство (2.13) справедливо для любой функции $f \in \text{Re } H^1$. Тем самым, доказана

ТЕОРЕМА 1б. *Оператор Харди $\mathcal{H}$, определяемый равенством (0.5), ограничен в пространстве $\text{Re } H^1$, причем*

$$\|\mathcal{H}\|_{\text{Re } H^1 \rightarrow \text{Re } H^1} \leq 2.$$

ТЕОРЕМА 2. *Оператор Харди–Литлвуда*

$$\mathcal{B}(f)(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt \quad (2.14)$$

ограничен в пространстве ВМО функций ограниченной средней осцилляции на действительной оси.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко видеть, что оператор $\mathcal{B}$ переводит четные (нечетные) функции в четные (нечетные). Отметим также, что из условия $f \in \text{ВМО}$ следует, что $f_+ \in \text{ВМО}_+$ и $f_- \in \text{ВМО}_-$, причем $\|f_+\|_* \leq \|f\|_*$ и $\|f_-\|_* \leq \|f\|_*$, где четная составляющая f_+ и нечетная составляющая f_- функции f определяются равенствами (2.4). Следовательно, учитывая линейность оператора $\mathcal{B}$, для доказательства теоремы 2 достаточно доказать ограниченность оператора $\mathcal{B}$ в каждом из подпространств ВМО_+ и ВМО_- . Поскольку доказательство для обоих подпространств проводится аналогично, проведем его лишь для ВМО_+ .

Итак, нам надо доказать неравенство $\|\mathcal{B}(f)\|_* \leq C\|f\|_*$, где $C > 0$ – абсолютная постоянная, а f – произвольная функция из ВМО_+ . Учитывая определение (0.4) нормы в пространстве ВМО, для этого достаточно доказать неравенство $\|\mathcal{B}(f)\|_* \leq C\|f\|_*$, где норма $\|\cdot\|_*$ определяется равенством

$$\|f\|_* = \sup_{|I|>0} \inf_{c \in \mathbb{R}} \frac{1}{|I|} \int_I |f(x) - c| dx, \quad (2.15)$$

причем $I = (a, b)$, $|I| = b - a$. Эта редукция следует из того факта, что нормы (0.4) и (2.15) в пространстве ВМО эквивалентны, точнее, справедливы неравенства $\|f\|_* \leq \|f\|_* \leq 2\|f\|_*$ (см., например, [11, с. 200]).

Рассмотрим три различных случая расположения интервала $I = (a, b)$ на действительной оси.

1) Случай $I \subset (0, +\infty)$. Этот случай разобьем на три подслучая: 1а) $I = (0, b)$, где $b > 0$; 1б) $I = (a, b)$, где $0 < a < b$ и $b/a \equiv \lambda \leq 2$; 1в) $I = (a, b)$, где $0 < a < b$, $b/a \equiv \lambda > 2$.

В случае 1а), учитывая определение (2.14) оператора $\mathcal{B}$ и применяя неравенство Коши–Буняковского, получим

$$\begin{aligned} M((0, b)) &\equiv \frac{1}{b} \int_0^b |\mathcal{B}(f)(x) - f_{(0, b)}| dx \\ &\leq \frac{1}{b} \int_0^b \left(\frac{1}{x} \int_0^x |f(t) - f_{(0, b)}| dt \right) dx \\ &\leq \left(\frac{1}{b} \int_0^b \left\{ \frac{1}{x} \int_0^x |f(t) - f_{(0, b)}| dt \right\}^2 dx \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Отсюда, пользуясь сначала теоремой А для случая $p = 2$, а затем теоремой В также для случая $p = 2$, придем к неравенствам

$$M((0, b)) \leq 2 \left(\frac{1}{b} \int_0^b |f(x) - f_{(0, b)}|^2 dx \right)^{1/2} \leq 2C_2 \|f\|_*. \quad (2.16)$$

В случае 1б), учитывая неравенство $\frac{b}{a} \leq 2$ и определение (2.15) нормы $\|\cdot\|_*$, будем иметь

$$\begin{aligned} M(I) &\equiv \frac{1}{|I|} \int_I |\mathcal{B}(f)(x) - f_{(0, b)}| dx \leq \frac{1}{|I|} \int_a^b \left(\frac{1}{x} \int_0^x |f(t) - f_{(0, b)}| dt \right) dx \\ &\leq \frac{1}{a|I|} \int_a^b \left(\int_0^b |f(t) - f_{(0, b)}| dt \right) dx \\ &= \frac{b}{a} \cdot \frac{1}{b} \int_0^b |f(t) - f_{(0, b)}| dt \leq 2\|f\|_*. \end{aligned} \quad (2.17)$$

В случае 1в), применяя неравенство Коши–Буняковского, а затем теоремы А и В для случая $p = 2$, получим

$$\begin{aligned} M(I) &\leq \frac{1}{|I|} \int_a^b \left(\frac{1}{x} \int_0^x |f(t) - f_{(0,b)}| dt \right) dx \\ &\leq \frac{1}{|I|} \int_0^b \left(\frac{1}{x} \int_0^x |f(t) - f_{(0,b)}| dt \right) dx \\ &\leq \frac{\sqrt{b}}{|I|} \left(\int_0^b \left\{ \frac{1}{x} \int_0^x |f(t) - f_{(0,b)}| dt \right\}^2 dx \right)^{1/2} \\ &\leq \frac{2b}{|I|} \left(\frac{1}{b} \int_0^b |f(t) - f_{(0,b)}|^2 dt \right)^{1/2} \leq \frac{2b}{|I|} C_2 \|f\|_*. \end{aligned}$$

Но поскольку в рассматриваемом случае $\frac{b}{a} = \lambda > 2$, то $\frac{2b}{|I|} = \frac{2b}{b-a} = \frac{2\lambda}{\lambda-1} < 4$. Поэтому из предыдущих неравенств имеем

$$M(I) \leq 4C_2 \|f\|_*. \quad (2.18)$$

2) Случай $I \subset (-\infty, 0)$. Этот случай легко сводится к предыдущему, если учесть, что для $f \in \text{ВМО}_+$ функция $\mathcal{B}(f)$ четна. Надо рассмотреть три подслучая: 2а) $I = (a, 0)$, где $a < 0$; 2б) $I = (a, b)$, где $a < b < 0$ и $\frac{a}{b} \equiv \lambda \leq 2$; 2в) $I = (a, b)$, где $a < b < 0$ и $\frac{a}{b} \equiv \lambda > 2$. После этого на основании четности функций f и $\mathcal{B}(f)$ в случае 2а) справедливо неравенство

$$\widetilde{M}((a, 0)) \equiv \frac{1}{|a|} \int_a^0 |\mathcal{B}(f)(x) - f_{(a,0)}| dx \leq 2C_2 \|f\|_*, \quad (2.16')$$

в случае 2б) – неравенство

$$\widetilde{M}(I) \equiv \frac{1}{|I|} \int_I |\mathcal{B}(f)(x) - f_{(a,0)}| dx \leq 2\|f\|_*, \quad (2.17')$$

а в случае 2в) – неравенство

$$\widetilde{M}(I) \leq 4C_2 \|f\|_*. \quad (2.18')$$

3) Случай $I = (a, b)$, где $a < 0 < b$, т.е. $I \cap (-\infty, 0) \neq \emptyset$ и $I \cap (0, +\infty) \neq \emptyset$. Будем сначала предполагать, что $|a| \leq b$. Тогда $|I| = |a| + b$ и, пользуясь четностью функции $f \in \text{ВМО}_+$, получим

$$\begin{aligned} M(I) &\leq \frac{1}{|a|+b} \int_a^0 \left(\frac{1}{x} \int_0^x |f(t) - f_{(0,b)}| dt \right) dx \\ &\quad + \frac{1}{|a|+b} \int_0^b \left(\frac{1}{x} \int_0^x |f(t) - f_{(0,b)}| dt \right) dx \\ &\leq \frac{1}{b} \int_0^{|a|} \left(\frac{1}{|u|} \int_0^u |f(t) - f_{(0,b)}| dt \right) du \\ &\quad + \frac{1}{b} \int_0^b \left(\frac{1}{x} \int_0^x |f(t) - f_{(0,b)}| dt \right) dx \\ &\leq \frac{2}{b} \int_0^b \left(\frac{1}{x} \int_0^x |f(t) - f_{(0,b)}| dt \right) dx. \end{aligned}$$

Но последний член этих неравенств не превосходит $4C_2\|f\|_*$ (см. доказательство в случае 1а)). Таким образом, в случае 3) при условии $|a| \leq b$ справедливо неравенство (2.18).

Будем теперь считать, что $0 < b < |a|$, $a < 0$. Тогда, как и выше, получим

$$\begin{aligned}\widetilde{M}(I) &\leq \frac{1}{|a|+b} \int_a^0 \left(\frac{1}{x} \int_0^x |f(t) - f_{(a,0)}| dt \right) dx \\ &\quad + \frac{1}{|a|+b} \int_0^b \left(\frac{1}{x} \int_0^x |f(t) - f_{(a,0)}| dt \right) dx \\ &\leq \frac{1}{|a|} \int_0^{|a|} \left(\frac{1}{x} \int_0^x |f(t) - f_{(a,0)}| dt \right) dx \\ &\quad + \frac{1}{|a|} \int_a^0 \left(\frac{1}{x} \int_0^x |f(t) - f_{(a,0)}| dt \right) dx \\ &\leq \frac{2}{|a|} \int_0^{|a|} \left(\frac{1}{x} \int_0^x |f(t) - f_{(a,0)}| dt \right) dx.\end{aligned}$$

Но последний член этих неравенств, как показано выше, не превосходит $4C_2\|f\|_*$. Таким образом, в случае 3) при условии $b < |a|$ справедливо неравенство (2.18').

Так для любого интервала I , $0 < |I| < +\infty$, доказано одно из неравенств (2.16)–(2.18) или (2.16')–(2.18'). Учитывая неравенства

$$\|f\|^* \leq \|f\|_* \leq 2\|f\|^*,$$

отсюда заключаем, что

$$\|\mathcal{B}(f)\|^* \leq C\|f\|^*, \quad C = 4 \max(2C_2, 1).$$

Теорема 2 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В работе [12] доказана ограниченность в пространстве ВМО максимального оператора Харди–Литлвуда

$$\mathcal{B}^*(f)(x) = \sup_{I \ni x} \frac{1}{|I|} \int_I |f(t)| dt,$$

где точная верхняя грань берется по всем интервалам, содержащим точку x . Хотя справедливо неравенство $|\mathcal{B}(f)(x)| \leq \mathcal{B}^*(f)(x)$, тем не менее из этого результата формально нельзя вывести теорему 2.

Действительно, $\ln|x| \in \text{ВМО}$, однако $\chi_{(0,1)}(x) \ln|x| \notin \text{ВМО}$, где $\chi_{(0,1)}$ – характеристическая функция интервала $(0, 1)$. Этот пример показывает, что мажорируемая функция не обязана принадлежать пространству ВМО, если даже она измерима и имеет мажоранту из ВМО.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Пространство ВМО не инвариантно относительно оператора Харди. В этом легко убедиться на примере функции $f_0(x) = |\ln|x||$, которая принадлежит ВМО, однако $\mathcal{H}(f_0)(x) = +\infty$ для всех $x \in \mathbb{R}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Пространство $\operatorname{Re} H^1$ не инвариантно относительно оператора Беллмана $\mathcal{B}$, тем более, этот оператор не является ограниченным в указанном пространстве.

Действительно, если

$$a(x) = \begin{cases} 1/2, & 0 \leq x \leq 1, \\ -1/2, & 1 < x \leq 2, \\ 0, & x \notin [0, 2], \end{cases} \quad \text{то} \quad \mathcal{B}(a)(x) = \begin{cases} 1/2, & 0 < x \leq 1, \\ 1/x - 1/2, & 1 < x \leq 2, \\ 0, & x \notin [0, 2]. \end{cases}$$

Как известно (см. [4, с. 257]), $a \in \operatorname{Re} H^1$. Однако, поскольку $\int_{\mathbb{R}} \mathcal{B}(a)(x) dx = \ln 2 \neq 0$, то $\mathcal{B}(a) \notin \operatorname{Re} H^1$; условие $\int_{\mathbb{R}} f(x) dx = 0$ необходимо для принадлежности функции f пространству $\operatorname{Re} H^1$ (см. [4, с. 257, теорема 3.8]).

Список литературы

1. Харди Г. Г., Литлвуд Д. Е., Полиа Г. Неравенства. М.: ИЛ., 1948.
2. Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семёнов Е. М. Интерполяция линейных операторов. М.: Наука, 1978.
3. Гарнетт Дж. Ограниченные аналитические функции. М.: Мир, 1984.
4. Garsia-Cuerva Y., Rubio de Francia J. L. Weighted norm inequalities and related topics. New York–Oxford: North-Holland, 1985.
5. Титчмарш Е. Введение в теорию интегралов Фурье. М.-Л.: Гостехиздат, 1948.
6. Bellman R. A note on a theorem of Hardy on Fourier constants // Bull. Amer. Math. Soc. 1944. V. 50. P. 741–744.
7. Голубов Б. И. Об одной теореме Беллмана о коэффициентах Фурье // Матем. сб. 1994. Т. 185. № 11. С. 31–40.
8. Hardy G. H. Notes on some points in the integral calculus // Messenger of Math. 1928. V. 58. P. 50–52.
9. Бари Н. К. Тригонометрические ряды. М.: Физматгиз, 1961.
10. Стейн И., Вейс Г. Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. М.: Мир, 1974.
11. Torchinsky A. Real variable methods in harmonic analysis. New York–London–Toronto: Academic Press, 1986.
12. Bennett C., DeVore R. A., Sharpley R. Weak L^∞ and BMO // Ann. of Math. 1981. V. 113. P. 601–611.

Московский физико-технический институт

Поступила в редакцию
21.05.1996