Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Корниенко, К спектрам иррегулярных операторных уравнений первого порядка, *Матем. сб.*, 1997, том 188, номер 8, 103–124

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm247>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.97.219

26 апреля 2023 г., 14:42:00

УДК 517.95

В. В. Корниенко

К спектрам иррегулярных операторных уравнений первого порядка

Изучено распределение на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ спектра $\sigma L = P\sigma L \cup C\sigma L \cup R\sigma L$ оператора $L = L(\mu, \alpha, a, A)$, порожденного замыканием в $H = \mathcal{L}_2(0, b) \otimes \mathfrak{H}$ операции $t^\alpha a D_t + A$, первоначально заданной на гладких функциях $u(t): [0, b] \rightarrow \mathfrak{H}$, удовлетворяющих условию $\mu u(0) - u(b) = 0$, где $\alpha \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{C}$, $D_t \equiv d/dt$, A – модельный оператор, действующий в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$, $\mu \in \overline{\mathbb{C}}$.

Приведены условия (критерии) на параметр α , при выполнении которых собственные функции оператора $L: H \rightarrow H$ образуют полную и минимальную систему, а также базис (Рисса) в гильбертовом пространстве H .

Библиография: 10 названий.

§ 1. Постановка задачи

В настоящей работе исследуются вопросы спектральной теории для оператора L , порожденного замыканием (см. §3) операции $L(D_t, A) = t^\alpha a D_t + A$ – левой части уравнения

$$t^\alpha a D_t u + Au = \lambda u + f, \quad (1)$$

первоначально заданной на гладких функциях $u: \mathbb{R} \rightarrow \mathfrak{H}$, удовлетворяющих условию

$$\mu u(0) - u(b) = 0 \quad (2)$$

и принадлежащих при всех $t \in \overline{V}_t$, $V_t = (0, b)$, $0 < b < +\infty$, области определения замкнутого, вообще говоря, неограниченного, оператора A , т.е. $\forall t \in \overline{V}_t \ (u(t) \in \mathfrak{D}(A))$.

Здесь $\alpha \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{C}$, $D_t \equiv d/dt$, оператор A , коммутирующий с D_t , действует в некотором комплексном гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ и удовлетворяет определенным требованиям, формулируемым в терминах спектральной теории операторов, $\lambda \in \mathbb{C}$, λ – спектральный параметр, $\mu \in \overline{\mathbb{C}}$.

Рассматриваемое уравнение (1), являющееся как сильно ($\alpha > 0$), так и слабо ($\alpha < 0$) иррегулярным [1], дает простейшую ситуацию вырождения типа уравнения. Примером вырождающегося дифференциального уравнения в частных производных, попадающего в поле наших исследований, может служить уравнение

$$t^\alpha \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} + \Delta_x u(t, x) = \lambda u(t, x) + f(t, x),$$

где Δ_x – самосопряженный полуограниченный эллиптический оператор, порожденный регулярной краевой задачей в ограниченной области Ω с достаточно гладкой границей, $(t, x) \in \overline{V}$, $V = V_t \times \Omega$.

Исследованию корректных краевых задач для вырождающихся уравнений (и уравнений смешанного типа) посвящены многочисленные работы. Однако вопросы спектральной теории для уравнений вышеназванных типов начали изучаться сравнительно недавно и, как оказалось, требуют специфичных методов исследования. В предлагаемой работе в простейшей ситуации предпринята попытка разобраться с некоторыми из таких вопросов.

Отметим, что регулярный случай ($\alpha = 0$), достаточно полно исследован в [2]. При изучении иррегулярного случая мы, желая наблюдать картину изменения спектральных свойств оператора $L = L(\mu, \alpha, a, A)$, порожденного рассматриваемой задачей, в зависимости от значений “параметров” μ, α, a и A , исследуем в первую очередь для него вопросы уже имеющие ответы для регулярного случая, не затрагивая при этом явно сортировки операторов A по классам (см. [2]), отвечающим за те или иные спектральные свойства оператора L .

Используемая нами методика изучения уравнения (1) позволяет рассмотреть сначала одномерный случай, т.е. случай в котором A — умножение на константу $A(s) \in \mathbb{C}$, где s — “номер”, приписываемый “проекции” уравнения (1) в соответствующее подпространство H_s (см. п. 3.1). Техника перехода к дифференциально-операторному уравнению, развитая в [2] и использованная, например, в [3], [4] при изучении соответствующих вопросов для дифференциально-операторных уравнений, меняющих тип, позволяет рассмотреть в дальнейшем общее уравнение (1), т.е. уравнение в котором A является M -оператором [2, гл. I, §3]. Важную роль при этом играют свойства семейства $v_s, s \in S$, решений $v = v_s$ (индекс s в дальнейшем явно не указывается) уравнения

$$t^\alpha a D_t v + A(s)v = \lambda v + g, \quad (3)$$

где S — набор индексов, нумерующих “проекции” (см. п. 3.1). Указанное семейство будем называть *фундаментальной системой решений операторного уравнения* (1).

Характер граничных условий по t (при $t = 0, b$), присоединяемых к вырождающемуся дифференциально — операторному уравнению второго порядка по t

$$-D_t t^\alpha D_t u - D_t A u - P u = f$$

и обеспечивающих существование и единственность решения при любых правых частях, изучался в [5]. Вырождающиеся дифференциально-операторные уравнения более высокого порядка по t исследовались, например, в [6].

Перейдем непосредственно к изложению результатов.

§ 2. Одномерный случай

2.1. Структура фундаментальной системы решений. Итак, приступим к изучению уравнения (3). Пусть $H_t \equiv H(V_t)$ — гильбертово пространство комплекснозначных функций $v: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ с интегрируемым квадратом над V_t , $\mathfrak{D}_t$ — линейное многообразие гладких функций из H_t , удовлетворяющих условию (2), т.е.

$$\mathfrak{D}_t = \{v : (v \in C^1(V_t) \cap C(\overline{V_t})) \wedge (\mu v(0) - v(b) = 0)\}. \quad (4)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Элемент $v \in H_t$ называется (*обобщенным*) *решением уравнения (3)*, если существует последовательность $\{v_k\}_{k=1}^\infty$ функций $v_k = v_k(t)$ из $\mathfrak{D}_t$ (см. (4)) такая, что

$$v_k \xrightarrow{H_t} v, \quad t^\alpha a D_t v_k + A(s) v_k \xrightarrow{H_t} \lambda v + g, \quad k \rightarrow \infty.$$

Вполне очевидно, что определение решения уравнения (3) породило замкнутый оператор $L_s: H_t \rightarrow H_t$. Изучим его спектр [2, гл. I, § 2] и свойства системы собственных функций (коротко: свойства ССФ оператора L_s). С этой целью выпишем формулу

$$\begin{aligned} v(t) &= \int_0^b G(\tau, t, \varrho) g(\tau) d\tau, \\ G(\tau, t, \varrho) &= \frac{\exp\{\varrho J(\tau, t)\}}{a \Delta(\varrho) \tau^\alpha} \begin{cases} \exp\{\varrho J(0, b)\}, & \text{если } 0 \leq \tau \leq t \leq b, \\ \mu, & \text{если } t \leq \tau \leq b, \end{cases} \\ \varrho &= \frac{\lambda - A(s)}{a}, \quad J(\tau, t) = \int_\tau^t \frac{d\xi}{\xi^\alpha}, \quad \Delta(\varrho) = \mu - \exp\{\varrho J(0, b)\}, \end{aligned} \quad (5)$$

позволяющую, по меньшей мере формально, представить решение уравнения (3).

Как видно из (5) (наличие, например, τ^α в знаменателе функции Грина оператора L_s), в отличие от регулярного случая для иррегулярного возможно несовпадение спектра σL_s оператора L_s с его точечным спектром $P\sigma L_s$, т.е., вообще говоря, $\sigma L_s \neq P\sigma L_s$. В частности, не пустыми множествами могут оказаться как непрерывный $C\sigma L_s$, так и остаточный $R\sigma L_s$ спектры оператора L_s . Кроме того, собственные значения оператора L_s возможно (в зависимости от μ и α) и не являются нулями знаменателя функции Грина. Ясно, что отмеченные наблюдения требуют специальных исследований.

Пусть $P, Q \subset \mathbb{C}$. По определению $P + Q = \{z : \exists p \in P, \exists q \in Q (z = p + q)\}$. Аналогично определяются $P - Q, P \cdot Q, P/Q (\forall q \in Q (q \neq 0))$. Введем также в обиход подмножества $\mathbb{C}_+, \mathbb{C}_-$ комплексной плоскости $\mathbb{C}: \mathbb{C}_+ \stackrel{\text{def}}{=} \{z : \operatorname{Re} z > 0\}, \mathbb{C}_- \stackrel{\text{def}}{=} \{z : \operatorname{Re} z < 0\}$, используемые ниже для описания спектра σL_s оператора $L_s = L_s(\mu, \alpha, a)$. Кроме того, в дальнейшем часто будем пользоваться символами математической логики: $\wedge$ – конъюнкция (“и”), $\vee$ – дизъюнкция (“или”), $\implies$ – импликация (“влечет”), $\iff$ – эквивалентно, перечисленных в порядке приоритетов, приписанных им в исчислении высказываний.

Удобно результаты проведенных исследований сформулировать как единое целое.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Функциональная зависимость спектра σL_s (резольвентного множества ρL_s) оператора $L_s = L_s(\mu, \alpha, a)$ от параметров μ, α, a устанавливается следующими высказываниями:*

$$(\rho L_s = \mathbb{C}) \iff (\mu = \infty) \wedge \left(\alpha < \frac{1}{2}\right) \vee (\mu = 0) \wedge (\alpha < 1);$$

$$\begin{aligned} (\rho L_s = \mathbb{C} \setminus P\sigma L_s) &\wedge \left(P\sigma L_s = a \cdot \frac{\ln |\mu| + i \arg \mu + i 2\pi \cdot \mathbb{Z}}{J(0, b)} + A(s)\right) \\ &\iff (\mu \neq 0, \infty) \wedge \left(\alpha < \frac{1}{2}\right); \end{aligned}$$

$$\left(\rho L_s = a \cdot \left(\mathbb{C}_+ - \frac{1}{2}\right) + A(s)\right) \wedge (R\sigma L_s = \mathbb{C} \setminus \rho L_s) \iff (\mu \neq 1, \infty) \wedge (\alpha = 1);$$

$$\begin{aligned} &(\rho L_s = a \cdot \mathbb{C}_+ + A(s)) \wedge (C\sigma L_s = \overline{\rho L_s} \setminus \rho L_s) \wedge (R\sigma L_s = \mathbb{C} \setminus \overline{\rho L_s}) \\ &\iff (\mu \neq 1, \infty) \wedge (\alpha > 1); \end{aligned}$$

$$\begin{cases} (\rho L_s = \mathbb{C} \setminus \overline{P\sigma L_s}) \wedge (C\sigma L_s = \overline{P\sigma L_s} \setminus P\sigma L_s) \\ P\sigma L_s = a \cdot \left(\mathbb{C}_+ - \frac{1}{2}\right) + A(s) \end{cases} \iff (\mu = \infty) \wedge (\alpha = 1);$$

$$(\rho L_s = \mathbb{C} \setminus P\sigma L_s) \wedge (P\sigma L_s = a \cdot (\mathbb{C} \setminus \mathbb{C}_-) + A(s)) \iff (\mu = \infty) \wedge (\alpha > 1);$$

$$\begin{cases} \left(\rho L_s = \left(a \cdot \left(\mathbb{C}_+ - \frac{1}{2}\right) + A(s)\right) \setminus A(s)\right) \wedge (P\sigma L_s = A(s)) \\ R\sigma L_s = \mathbb{C} \setminus \rho L_s \setminus P\sigma L_s \end{cases} \iff (\mu = 1) \wedge (\alpha = 1);$$

$$\begin{cases} (\rho L_s = a \cdot \mathbb{C}_+ + A(s)) \wedge (P\sigma L_s = A(s)) \\ (C\sigma L_s = \overline{\rho L_s} \setminus \rho L_s \setminus P\sigma L_s) \wedge (R\sigma L_s = \mathbb{C} \setminus \overline{\rho L_s}) \end{cases} \iff (\mu = 1) \wedge (\alpha > 1);$$

$$(C\sigma L_s = \mathbb{C}) \iff (\mu = \infty) \wedge \left(\frac{1}{2} \leq \alpha < 1\right);$$

$$\begin{aligned} &(C\sigma L_s = \mathbb{C} \setminus P\sigma L_s) \wedge \left(P\sigma L_s = a \cdot \frac{\ln |\mu| + i \arg \mu + i 2\pi \cdot \mathbb{Z}}{J(0, b)} + A(s)\right) \\ &\iff (\mu \neq 0, \infty) \wedge \left(\frac{1}{2} \leq \alpha < 1\right). \end{aligned}$$

Тем не менее изучение проведем раздельно как для задачи Коши (“прямой” при $\mu = \infty^1$ и “обратной” при $\mu = 0$), так и для нелокальной задачи ($\mu \neq 0, \infty$).

2.2. “Прямая” задача Коши; спектр оператора $L_s = L_s(\mu, \alpha, a)$, $\mu = \infty$. Обозначим символом $C[\dot{0}, b]$ подмножество $C[0, b]$, состоящее из функций, финитных в окрестности точки $t = 0$ (равных нулю локально при $t \rightarrow +0$), т.е.

$$C[\dot{0}, b] = \{v : (v \in C[0, b]) \wedge (\exists \varepsilon_v \in (0, b) \forall t (t \in (0, \varepsilon_v) \Rightarrow v(t) = 0))\}.$$

Пусть $\alpha \geq 1$. Тогда число $\lambda = \lambda_{\varrho, s}$,

$$\lambda_{\varrho, s} = a\varrho + A(s), \tag{6}$$

где $\operatorname{Re} \varrho > -\frac{1}{2}$, если $\alpha = 1$, $\operatorname{Re} \varrho \geq 0$, если $\alpha > 1$, является собственным значением оператора L_s . Соответствующая $\lambda_{\varrho, s}$ собственная функция $v_{\varrho} = v_{\varrho}(t)$,

$$v_{\varrho}(t) = \exp\{-\varrho J(t, b)\}, \tag{7}$$

¹Запись $\mu = \infty$ используется для обозначения граничного условия $u(0) = 0$ в (2) и, естественно, условия $v(0) = 0$ в (4).

допускает представление вида: $v_\rho(t) = (t/b)^\rho$, если $\alpha = 1$.² Причем, если $\operatorname{Re} \rho > 0$, то (7) является “классической” собственной функцией [8, §2], т.е. $v_\rho(t) \in \mathfrak{D}_t$. Следовательно, при $\mu = \infty$ имеем

$$P\sigma L_s \supset P_s = P_s(\infty, \alpha, a) = \begin{cases} a \cdot (\mathbb{C}_+ - \frac{1}{2}) + A(s), & \text{если } \alpha = 1, \\ a \cdot (\mathbb{C} \setminus \mathbb{C}_-) + A(s), & \text{если } \alpha > 1. \end{cases}$$

Пусть $(\alpha < 1) \wedge (\lambda \in \mathbb{C}) \vee (\alpha \geq 1) \wedge (\lambda \notin P_s)$. Если правая часть уравнения (3), т.е. g , принадлежит классу $C[\dot{0}, b]$, то решение $v = v(t)$,

$$v(t) = \int_0^t \frac{\exp\{\rho J(\tau, t)\}}{a\tau^\alpha} g(\tau) d\tau, \quad (8)$$

уравнения (3) принадлежит тому же классу. Точнее, $v \in \mathfrak{D}_t \cap C[\dot{0}, b]$. Следовательно, оператор $(L_s - \lambda)^{-1}$ существует, множество $\mathfrak{D}((L_s - \lambda)^{-1})$ плотно в H_t и справедливо равенство $P\sigma L_s = P_s$ (при $\alpha \geq 1$). Кроме того, из (8) вытекает, что, например, функции вида

$$h(t) = \begin{cases} \varphi(t), & \text{если } \varepsilon \leq t \leq b, \\ 0, & \text{если } 0 \leq t < \varepsilon, \end{cases} \quad (9)$$

где $\varphi(t) \in C[\varepsilon, b]$, принадлежат области определения $\mathfrak{D}((L_s - \lambda)^{-1})$ оператора $(L_s - \lambda)^{-1}$.

Пусть $(\alpha < \frac{1}{2}) \wedge (\lambda \in \mathbb{C})$. Используя представление (8) (которое формально можно вывести из (5), полагая $\mu = \infty$), легко получить неравенство

$$|v(t)|^2 \leq C \sup_{\tau} \exp\{2 \operatorname{Re} \rho J(\tau, t)\} \|g\|_t^2, \quad (10)$$

выступающее гарантом достаточности условия $\alpha < \frac{1}{2}$ для равенства $\rho L_s = \mathbb{C}$. В неравенстве (10) постоянная C не зависит от $s \in S$, $0 \leq \tau \leq t \leq b$. Кроме того, как в (10), так и в дальнейшем $\|\cdot\|_t = \sqrt{(\cdot, \cdot)_t}$, $(\cdot, \cdot)_t$ — скалярное произведение в H_t .

Пусть теперь $(\frac{1}{2} \leq \alpha < 1) \wedge (\lambda \in \mathbb{C})$. Если правая часть уравнения (3) имеет вид (9), где $\varphi(t) = t^{\alpha-1} \exp\{\rho J(b, t)\}$, то решение $v = v(t)$ уравнения (3) имеет такой же вид, т.е.

$$\begin{aligned} g(t) &= \begin{cases} t^{\alpha-1} \exp\{\rho J(b, t)\}, & \varepsilon \leq t \leq b, \\ 0, & 0 \leq t < \varepsilon, \end{cases} \\ \Rightarrow v(t) &= \frac{1}{a} \begin{cases} \ln\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) \exp\{\rho J(b, t)\}, & \varepsilon \leq t \leq b, \\ 0, & 0 \leq t < \varepsilon. \end{cases} \end{aligned}$$

С помощью элементарных подсчетов легко убедиться в том, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{\|v\|_t}{\|g\|_t} = +\infty, \quad (11)$$

² Отметим, что вопрос о справедливости граничных условий для сильного решения изучался в [7].

т.е. оператор $(L_s - \lambda)^{-1}$ неограничен и, следовательно, $\lambda = a\rho + A(s) \in C\sigma L_s$. Действительно, для любого числа ε , удовлетворяющего условию $0 < \varepsilon < b/2$, справедливы неравенства

$$\begin{aligned} \|v\|_t^2 &\geq \frac{b}{2|a|^2} \min_{\varepsilon \leq t \leq b} \exp\{2 \operatorname{Re} \varrho J(b, t)\} \ln^2 \frac{b}{2\varepsilon}, \\ \max_{\varepsilon \leq t \leq b} \exp\{2 \operatorname{Re} \varrho J(b, t)\} \int_{\varepsilon}^b \frac{dt}{t^{2(1-\alpha)}} &\geq \|g\|_t^2, \end{aligned} \quad (12)$$

из которых вытекает равенство (11).

Случай $(\alpha = 1) \wedge (\lambda \in \overline{P}_s \setminus P_s)$ разбирается аналогично предшествующему. Именно, по формуле (8) для $g(t) = h(t)$ (см. (9)), где $\varphi(t) = (t/b)^\varrho$, найдем решение $v = v(t)$ уравнения (3). Для построенной пары v и g справедливо равенство (11). Откуда $\lambda \in C\sigma L_s$.

Пусть $(\alpha \geq 1) \wedge (\lambda \notin \overline{P}_s)$. Воспользуемся неравенством Коши–Буняковского, а также методом интегрирования по частям ($\alpha > 1$) при оценке нормы решения (8) уравнения (3). Получим

$$\|v\|_t \leq \frac{2}{|2\varrho_1 + 1|} \|g\|_t, \quad \alpha = 1; \quad \|v\|_t \leq \frac{\sqrt{C(\varrho)}}{|\varrho_1|} \|g\|_t, \quad \alpha > 1.$$

Здесь $\varrho_1 = \operatorname{Re} \varrho$, $\varrho = (\lambda - A(s))/a$, $C(\varrho) = \begin{cases} C_1, & \text{если } \varrho_1 \leq -1, \\ C_2(-\varrho_1)^{1-m}, & \text{если } -1 < \varrho_1 < 0, \end{cases}$ $m = m(\alpha) = \min\{n : (n \in \mathbb{N}) \wedge (n - (n-2)\alpha < 1)\}$, C_1, C_2 – некоторые постоянные, не зависящие от ϱ . Отметим, что $m \geq 3$, причем $m = 3$ при $\alpha > 2$. Из полученных неравенств вытекает вложение $\mathbb{C} \setminus \overline{P}_s \subset \rho L_s$.

Следовательно, нами доказано следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Для оператора $L_s = L_s(\mu, \alpha, a)$, $\mu = \infty$, справедливы следующие высказывания:

$$\begin{aligned} \left(\alpha < \frac{1}{2}\right) &\implies (\rho L_s = \mathbb{C}); \\ \left(\frac{1}{2} \leq \alpha < 1\right) &\implies (C\sigma L_s = \mathbb{C}); \\ (\alpha = 1) &\implies \begin{cases} (\rho L_s = \mathbb{C} \setminus \overline{P\sigma L_s}) \wedge (C\sigma L_s = \overline{P\sigma L_s} \setminus P\sigma L_s), \\ P\sigma L_s = a \cdot \left(\mathbb{C}_+ - \frac{1}{2}\right) + A(s); \end{cases} \\ (\alpha > 1) &\implies (\rho L_s = \mathbb{C} \setminus P\sigma L_s) \wedge (P\sigma L_s = a \cdot (\mathbb{C} \setminus \mathbb{C}_-) + A(s)). \end{aligned}$$

Отметим отсутствие единственности решения “прямой” задачи Коши при $\alpha \geq 1$, вызванного появлением точечного спектра.

2.3. “Обратная” задача Коши; спектр оператора $L_s = L_s(\mu, \alpha, a)$, $\mu = 0$. Не симметричное вхождение множителя t^α в рассматриваемое уравнение естественно влечет за собой различие в свойствах “симметричных” задач Коши. Точнее, справедливо

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Для оператора $L_s = L_s(\mu, \alpha, a)$, $\mu = 0$, справедливы следующие высказывания:

$$\begin{aligned} (\alpha < 1) &\implies (\rho L_s = \mathbb{C}); \\ (\alpha = 1) &\implies \left(\rho L_s = a \cdot \left(\mathbb{C}_+ - \frac{1}{2} \right) + A(s) \right) \wedge (R\sigma L_s = \mathbb{C} \setminus \rho L_s); \\ (\alpha > 1) &\implies (\rho L_s = a \cdot \mathbb{C}_+ + A(s)) \wedge (C\sigma L_s = \overline{\rho L_s} \setminus \rho L_s) \wedge (R\sigma L_s = \mathbb{C} \setminus \overline{\rho L_s}). \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $(\alpha < 1) \wedge (\lambda \in \mathbb{C})$. Используя представление (5) решения $v = v(t)$ уравнения (3) получаем неравенство

$$|v(t)|^2 \leq \frac{1}{|a|^2 t^\alpha} \int_t^b \frac{\exp\{2 \operatorname{Re} \varrho J(\tau, t)\}}{\tau^\alpha} d\tau \|g\|_t^2,$$

справедливое $\forall t, 0 < t \leq b$. Откуда следует необходимое нам неравенство

$$|v(t)|^2 \leq \frac{C}{t^\alpha} \sup_\tau \exp\{2 \operatorname{Re} \varrho J(\tau, t)\} \|g\|_t^2, \quad (13)$$

где постоянная C не зависит от s , $0 < t \leq \tau \leq b$. Следовательно, $\lambda \in \rho L_s$.

Пусть теперь $(\alpha \geq 1) \wedge (\lambda \in \rho_s)$, где

$$\rho_s = \rho_s(\mu, \alpha, a) = \begin{cases} a \cdot \left(\mathbb{C}_+ - \frac{1}{2} \right) + A(s), & \text{если } \alpha = 1, \\ a \cdot \mathbb{C}_+ + A(s), & \text{если } \alpha > 1, \end{cases} \quad \mu \neq \infty.$$

Решение $v = v(t)$ уравнения (3) при $g \in C[0, b]$ имеет вид

$$v(t) = -\exp\{\varrho J(b, t)\} \int_t^b \frac{\exp\{\varrho J(\tau, b)\}}{a\tau^\alpha} g(\tau) d\tau, \quad 0 < t \leq b. \quad (14)$$

Если $\operatorname{Re} \varrho > 0$, то в (14) можно считать $v(0) = 0$.³ Разделяя действительные и мнимые части уравнения (3): $v = v_1 + iv_2$, $g = g_1 + ig_2$, $\varrho = \varrho_1 + i\varrho_2$, $a = a_1 + ia_2$, получаем систему

$$\begin{cases} t^\alpha D_t v_1 - \varrho_1 v_1 + \varrho_2 v_2 = \frac{a_1 g_1 + a_2 g_2}{|a|^2}, \\ t^\alpha D_t v_2 - \varrho_2 v_1 - \varrho_1 v_2 = \frac{a_1 g_2 - a_2 g_1}{|a|^2}. \end{cases}$$

Откуда после очевидных преобразований получаем равенство

$$-\int_0^b \left(\frac{\alpha}{2} t^{\alpha-1} + \varrho_1 \right) |v(t)|^2 dt = \operatorname{Re} \int_0^b \frac{g(t) \overline{v(t)}}{a} dt.$$

Следовательно,

$$\|v\|_t \leq \frac{C(\alpha)}{|a|} \|g\|_t, \quad C(\alpha) = \begin{cases} \frac{2}{2\varrho_1 + 1}, & \text{если } \alpha = 1, \\ \frac{1}{\varrho_1}, & \text{если } \alpha > 1, \end{cases} \quad (15)$$

т.е. $(\alpha \geq 1) \wedge (\lambda \in a \cdot \mathbb{C}_+ + A(s)) \implies (\lambda \in \rho L_s)$.

³ Другими словами, мы имеем дело с задачей Коши–Дирихле ($u(b) = u(0) = 0$) для операции $L(D_t, A)$.

Пусть $(\alpha = 1) \wedge (-\frac{1}{2} < \operatorname{Re} \varrho \leq 0)$. Покажем, что $\lambda = a\varrho + A(s) \in \rho L_s$. Выберем произвольное положительное число ε . Пусть $\lambda_0 = a(\varepsilon + i\varrho_2) + A(s)$, где $\varrho_2 = \operatorname{Im} \varrho$; $\lambda' = \lambda - \lambda_0 = a(\varrho_1 - \varepsilon)$, где $\varrho_1 = \operatorname{Re} \varrho$. По доказанному $\lambda_0 \in \rho L_s$. Уравнение $L_s v - \lambda v = g$ эквивалентно уравнению $(1 - \lambda'(L_s - \lambda_0)^{-1})v = (L_s - \lambda_0)^{-1}g$. Так как (в силу неравенства (15))

$$|\lambda'| \|(L_s - \lambda_0)^{-1}\| \leq 1 - \frac{1 + 2\varrho_1}{1 + 2\varepsilon} < 1,$$

то оператор $1 - \lambda'(L_s - \lambda_0)^{-1}$ имеет ограниченный обратный. Следовательно, $\lambda \in \rho L_s$ и $(L_s - \lambda)^{-1} = (1 - \lambda'(L_s - \lambda_0)^{-1})^{-1}(L_s - \lambda_0)^{-1}$. Кроме того, и в этом случае справедливо неравенство (15), т.е. $\|(L_s - \lambda)^{-1}\| \leq C(\alpha)/|a|$. Таким образом, вложение $\rho_s \subset \rho L_s$ нами полностью доказано.

Если $(\alpha > 1) \wedge (\lambda \in \bar{\rho}_s \setminus \rho_s)$, то для $g \in C[\dot{0}, b]$ решение $v = v(t)$ уравнения (3) представимо в виде (14). Полагая в (14)

$$g(t) = \frac{\exp\{\varrho J(b, t)\}}{t^{1/2-\delta}} \cdot h(t)$$

(см. (9)), где

$$\varphi(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } 2\varepsilon \leq t \leq b, \\ \frac{t-\varepsilon}{\varepsilon}, & \text{если } \varepsilon \leq t \leq 2\varepsilon, \end{cases} \quad 0 < \delta < \alpha - 1,$$

найдем решение $v = v(t)$ уравнения (3). Для построенной пары v и g справедливо равенство (11), т.е. $\lambda \in C\sigma L_s$.

Пусть наконец $(\alpha = 1) \wedge (\lambda \notin \rho_s) \vee (\alpha > 1) \wedge (\lambda \notin \bar{\rho}_s)$. В этом случае “решение”, предоставленное формулой (14), например, при $g \in C[\dot{0}, b]$, пространству H_t не принадлежит. Множество $C[\dot{0}, b]$ плотно в H_t . Поэтому $\lambda \in R\sigma L_s$.⁴ Доказательство закончено.

2.4. Нелокальная задача; спектр оператора $L_s = L_s(\mu, \alpha, a)$, $\mu \neq 0, \infty$. Хорошо известна [2] “посредническая” роль нелокальной задачи между “прямой” и “обратной” задачами Коши. Это же свойство, как показывает нижеследующее предложение, сохраняется и в иррегулярном случае.

⁴Нетрудно, конечно, построить элемент, ортогональный множеству значений $\Re(L_s - \lambda)$ оператора $(L_s - \lambda)$. Таким элементом при $\operatorname{Re} \varrho < -\frac{1}{2}$, если $\alpha = 1$, $\operatorname{Re} \varrho < 0$, если $\alpha > 1$, может служить, например, функция $(b/t)^\alpha \exp\{\bar{\varrho} J(t, b)\}$ ($\alpha \geq 1$), представимая в виде $(b/t)^{\bar{\varrho}+1}$, если $\alpha = 1$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Для оператора $L_s = L_s(\mu, \alpha, a)$, $\mu \neq 0, \infty$, справедливы следующие высказывания:

$$\begin{aligned} \left(\alpha < \frac{1}{2}\right) &\implies (\rho L_s = \mathbb{C} \setminus P\sigma L_s) \\ &\quad \wedge \left(P\sigma L_s = a \cdot \frac{\ln |\mu| + i \arg \mu + i2\pi \cdot \mathbb{Z}}{J(0, b)} + A(s)\right); \\ \left(\frac{1}{2} \leq \alpha < 1\right) &\implies (C\sigma L_s = \mathbb{C} \setminus P\sigma L_s) \\ &\quad \wedge \left(P\sigma L_s = a \cdot \frac{\ln |\mu| + i \arg \mu + i2\pi \cdot \mathbb{Z}}{J(0, b)} + A(s)\right); \\ (\alpha = 1) \wedge (\mu \neq 1) &\implies \left(\rho L_s = a \cdot \left(\mathbb{C}_+ - \frac{1}{2}\right) + A(s)\right) \wedge (R\sigma L_s = \mathbb{C} \setminus \rho L_s); \\ (\alpha > 1) \wedge (\mu \neq 1) &\implies \left(\rho L_s = a \cdot \mathbb{C}_+ + A(s)\right) \\ &\quad \wedge (C\sigma L_s = \overline{\rho L_s} \setminus \rho L_s) \wedge (R\sigma L_s = \mathbb{C} \setminus \overline{\rho L_s}); \\ (\alpha = 1) \wedge (\mu = 1) &\implies \begin{cases} \left(\rho L_s = \left(a \cdot \left(\mathbb{C}_+ - \frac{1}{2}\right) + A(s)\right) \setminus A(s)\right) \wedge (P\sigma L_s = A(s)), \\ R\sigma L_s = \mathbb{C} \setminus \rho L_s \setminus P\sigma L_s; \end{cases} \\ (\alpha > 1) \wedge (\mu = 1) &\implies \begin{cases} \left(\rho L_s = a \cdot \mathbb{C}_+ + A(s)\right) \wedge (P\sigma L_s = A(s)), \\ (C\sigma L_s = \overline{\rho L_s} \setminus \rho L_s \setminus P\sigma L_s) \wedge (R\sigma L_s = \mathbb{C} \setminus \overline{\rho L_s}). \end{cases} \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть α — произвольное действительное число, т.е. $\alpha \in \mathbb{R}$. Тогда собственному значению $\lambda = \lambda_{k,s}$,

$$\lambda_{k,s} = a\varrho_k + A(s), \quad \varrho_k = \frac{\ln |\mu| + i \arg \mu + i2\pi k}{J(0, b)}, \quad (16)$$

где $k \in \mathbb{Z}$, если $\alpha < 1$, $k = 0$, если $\alpha \geq 1$ и $\mu = 1$, соответствует собственная функция $v_k = v_k(t)$,

$$v_k(t) = \exp\{-\varrho_k J(t, b)\}. \quad (17)$$

Следовательно, при $\mu \neq 0, \infty$

$$\begin{aligned} P\sigma L_s \supset P_s &= P_s(\mu, \alpha, a) \\ &= \begin{cases} a \cdot \frac{\ln |\mu| + i \arg \mu + i2\pi \cdot \mathbb{Z}}{J(0, b)} + A(s), & \text{если } (\mu \neq 0, \infty) \wedge (\alpha < 1), \\ A(s), & \text{если } (\mu = 1) \wedge (\alpha \geq 1). \end{cases} \end{aligned}$$

Пусть $(\alpha < \frac{1}{2}) \wedge (\lambda \notin P_s)$. Для доказательства включения $\lambda \in \rho L_s$ (необходимого для доказательства включения $\lambda \in \rho L$ (см. п. 3.3)) и оценки нормы $\|(L_s - \lambda)^{-1}\|$ резольвенты $(L_s - \lambda)^{-1}$ оператора L_s нам понадобится, по меньшей мере, формальная классификация⁵ операторов L_s , $s \in S$, в соответствии с расположением точечного спектра $P\sigma L_s$ каждого из них относительно точки $\lambda \in \mathbb{C}$.

⁵Проводимая классификация вполне условна и, естественно, зависит от используемых приемов доказательства. Принципиально иной метод доказательства включения $\lambda \in \rho L$ в случае $\alpha = 0$ приведен в [2].

Пусть $r_s = \min_k |(\lambda - \lambda_{k,s})/a|$, где $\lambda_{k,s} \in P_s$. Откуда $r_s = \min_k |\varrho - \varrho_k|$, где $\varrho = (\lambda - A(s))/a$. Выберем $\lambda_{n,s} \in P_s$ так, чтобы $r_s = |(\lambda - \lambda_{n,s})/a|$, т.е. $r_s = |\varrho - \varrho_n|$. Пусть также $z_{n,s} = (\lambda - \lambda_{n,s})/a$. Из расположения на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ точек $\lambda_{k,s}$ множества P_s и определения числа $z_{n,s}$ вытекает неравенство

$$|\operatorname{Im}(z_{n,s})| \leq \frac{\pi}{J(0,b)}, \quad (18)$$

не зависящее от $s \in S$ и $\lambda \in \mathbb{C}$. Кроме того, число ϱ , фигурирующее в формуле (5), удобно представить в виде суммы: $\varrho = \varrho_n + z_{n,s}$. Это представление будет использовано ниже при оценке функции Грина (см. (5)) оператора L_s . Удобно также полосу $\{z : |\operatorname{Im} z| < \pi/J(0,b)\} \subset \mathbb{C}$ разбить на части $\mathfrak{C}_j$, $j = 1, 2, 3, 4$:

$$\begin{aligned} \mathfrak{C}_1 &= \{z : J(0,b)|z| < 1\}; \\ \mathfrak{C}_2 &= \{z : (J(0,b)|z| \geq 1) \wedge (J(0,b)|\operatorname{Im} z| \leq \pi) \wedge (\pi|\operatorname{Re} z| \leq |\operatorname{Im} z|)\}; \\ \mathfrak{C}_3 &= \{z : (J(0,b)|z| \geq 1) \wedge (J(0,b)|\operatorname{Im} z| \leq \pi) \wedge (\pi\operatorname{Re} z > |\operatorname{Im} z|)\}; \\ \mathfrak{C}_4 &= \{z : (J(0,b)|z| \geq 1) \wedge (J(0,b)|\operatorname{Im} z| \leq \pi) \wedge (\pi\operatorname{Re} z < -|\operatorname{Im} z|)\}. \end{aligned}$$

В силу неравенства (18) число $z_{n,s}$ принадлежит одному и только одному из построенных множеств $\mathfrak{C}_j$, $j = 1, 2, 3, 4$.

Возвращаясь к классификации, отметим, что норма $\|(L_s - \lambda)^{-1}\|$ резольвенты $(L_s - \lambda)^{-1}$ оператора L_s зависит от того, какому из множеств $\lambda - a\mathfrak{C}_j$, $j = 1, 2, 3, 4$, принадлежит собственное значение $\lambda_{n,s} = a\varrho_n + A(s)$, местоположение которого относительно этих множеств, в свою очередь, определяется значением $A(s)$ (т.е. к какому классу следует отнести оператор L_s). Рассмотрим перечисленные случаи.

Если $z_{n,s} \in \mathfrak{C}_1$, то справедливы неравенства

$$\begin{aligned} |\Delta(\varrho)| &= |\mu| |\exp\{z_{n,s}J(0,b)\} - 1| \geq \frac{|\mu|r_s J(0,b)}{3\sqrt{2}}, \\ |\exp\{\varrho J(\tau,t)\}| &= |\exp\{z_{n,s}J(\tau,t)\} \exp\{\varrho_n J(\tau,t)\}| \leq 3|\mu|^{J(\tau,t)/J(0,b)}. \end{aligned} \quad (19)$$

Следовательно, из представления (5) решения уравнения (1) получим следующую оценку резольвенты⁶

$$\|(L_s - \lambda)^{-1}\| \leq R_j(s). \quad (20)$$

Здесь $j = 1$, $R_1(s) = M_1/r_s$, M_1 — некоторая постоянная, не зависящая от $s \in S$.

Если $z_{n,s} \in \mathfrak{C}_2$, то, используя теорему Руше и теорему Вейерштрасса (о непрерывных функциях), легко получить неравенство $|\Delta(\varrho)| \geq m$, где постоянная m не зависит от местоположения точки $z_{n,s}$ внутри $\mathfrak{C}_2$, т.е. от $s \in S$. Кроме того, справедливо неравенство (19). Следовательно, и в этом случае имеет место неравенство (20), в котором $j = 2$, $R_2(s) = M_2$, M_2 — некоторая постоянная, не зависящая от $s \in S$.

⁶ Желая исследовать, например, дифференциальные свойства решений операторного уравнения (1) (см. [2], [9]) нам, конечно, понадобилась бы более точная оценка резольвенты, чем оценка (20). Тем не менее для наших целей указанная точность вполне достаточна.

Схема доказательства и оценка (20) в случаях, когда $z_{n,s} \in \mathfrak{C}_3$ либо $z_{n,s} \in \mathfrak{C}_4$ одинаковы. Поэтому рассмотрим один из них. Пусть, например, $z_{n,s} \in \mathfrak{C}_3$. Тогда справедливы следующие неравенства:

$$|\Delta(\varrho)| \geq |\mu| \left(1 - \exp \left\{ -\frac{1}{\sqrt{1+\pi^2}} \right\} \right) \exp \{ \operatorname{Re} z_{n,s} J(0, b) \}, \quad (21)$$

$$|\exp \{ \varrho J(\tau, t) \}| \leq \exp \{ \operatorname{Re} z_{n,s} J(\tau, t) \} |\mu|^{J(\tau, t)/J(0, b)}. \quad (22)$$

Для решения $v = v(t)$ уравнения (1) будем иметь

$$|v(t)|^2 \leq \frac{2|\mu|^2}{|a\Delta(\varrho)|^2} \left| \int_0^t \frac{\exp \{ \varrho J(\tau, t) \}}{\tau^\alpha} g(\tau) d\tau \right|^2 + \frac{2 \exp \{ 2 \operatorname{Re} \varrho J(0, b) \}}{|a\Delta(\varrho)|^2} \left| \int_t^b \frac{\exp \{ \varrho J(\tau, t) \}}{\tau^\alpha} g(\tau) d\tau \right|^2.$$

Используя неравенство Коши–Буняковского, оценки (21), (22) и определение нормы, получаем неравенство (20), в котором $j = 3$, $R_3(s) = M_3$, M_3 – некоторая постоянная, не зависящая от $s \in S$.

Если $(\frac{1}{2} \leq \alpha < 1) \wedge (\lambda \notin P_s)$, то поступая так же, как и при доказательстве формулы (12), получаем $\forall \varepsilon, 0 < \varepsilon \ll b/2$, где $\ll$ – знак “достаточной малости”, неравенства

$$\|v\|_t^2 \geq C_1 (\ln b - \ln 2\varepsilon)^2 > 0, \quad C_2 \int_\varepsilon^b \frac{dt}{t^{2(1-\alpha)}} \geq \|g\|_t^2,$$

в которых C_1, C_2 – некоторые постоянные, не зависящие от ε . Откуда следует равенство (11), т.е. $\lambda \in C\sigma L_s$.

В случае $(\alpha \geq 1) \wedge (\lambda \notin P_s)$ рассуждения аналогичны соответствующей ситуации для “обратной” задачи Коши. Доказательство закончено.

2.5. Свойства ССФ оператора $L_s = L_s(\mu, \alpha, a)$, $\mu \neq 0, \infty$. При изучении свойств ССФ оператора L_s естественно ограничиться неконтиуальными и нетривиальными случаями, т.е. считать, что $\alpha < 1$. При описании свойств ССФ оператора L_s будем пользоваться понятиями монографии [10].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. *Собственные функции $v_k(t)$, $k \in \mathbb{Z}$, оператора $L_s: H_t \rightarrow H_t$, $L_s = L_s(\mu, \alpha, a)$, $\mu \neq 0, \infty$, $\alpha < 1$, представимые в виде (17), образуют:*

- а) полную систему в H_t ;
- б) минимальную систему в H_t тогда и только тогда, когда $\alpha < \frac{1}{2}$;
- в) гильбертову систему в H_t тогда и только тогда, когда $0 \leq \alpha < \frac{1}{2}$;
- г) бесселеву систему в H_t тогда и только тогда, когда $\alpha \leq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим биортонормированную систему $\{v_k, w_k\}$, $k \in \mathbb{Z}$, функций $v_k = v_k(t)$, $w_k = w_k(t)$, где

$$\begin{aligned} v_k(t) &= \exp\left\{\frac{\ln|\mu| + i \arg \mu}{J(0, b)} J(0, t)\right\} \mathbf{v}_k(t), \\ w_k(t) &= \exp\left\{\frac{-\ln|\mu| + i \arg \mu}{J(0, b)} J(0, t)\right\} \mathbf{w}_k(t), \\ \mathbf{v}_k(t) &= \sqrt{\frac{1}{b}} \exp\left\{ik \frac{2\pi}{J(0, b)} J(0, t)\right\}, \quad \mathbf{w}_k(t) = \mathbf{v}_k(t) D_t \beta(t), \\ \beta(t) &= x(0, t), \quad x(\tau, t) = \frac{b}{J(0, b)} J(\tau, t). \end{aligned}$$

Выпишем частичную сумму

$$g_n = \mathcal{S}_n(g) = \sum_{k=-n}^n (g, \mathbf{w}_k)_t \mathbf{v}_k$$

биортогонального разложения функции $g = g(t)$ по системе $\{\mathbf{v}_k\}$, $\mathbf{v}_k = \mathbf{v}_k(t)$, $k \in \mathbb{Z}$. После несложных преобразований получим следующее интегральное представление для $g_n = g_n(t)$:

$$g_n(t) = \frac{1}{b} \int_0^b H(\tau, t) g(\tau) d\tau, \quad H(\tau, t) = -\frac{\sin\left\{\frac{(2n+1)\pi}{b} x(\tau, t)\right\}}{\sin\left\{\frac{\pi}{b} x(\tau, t)\right\}} D_\tau x(\tau, t). \quad (23)$$

Пусть теперь $g \in C[\dot{0}, b]$. Полагая $h = g \circ \beta^{-1}$, где $\beta^{-1} = \beta^{-1}(t)$ — функция обратная $\beta = \beta(t)$, легко заметить, что $h \in H_t$. Продолжим функцию $h = h(t)$ периодически с периодом равным b на $\mathbb{R}$. Сделав в (23) замену переменного $x = -x(\tau, t)$, получим представление $g_n = \mathcal{S}_n(g)$ в виде интеграла Дирихле:

$$\begin{aligned} g_n(t) &= \frac{1}{b} \int_{-\beta(t)}^{b-\beta(t)} \frac{\sin\left\{\frac{(2n+1)\pi}{b} x\right\}}{\sin\left\{\frac{\pi}{b} x\right\}} h(\beta(t) + x) dx \\ &= \frac{1}{b} \int_0^b \frac{\sin\left\{\frac{(2n+1)\pi}{b} x\right\}}{\sin\left\{\frac{\pi}{b} x\right\}} h(\beta(t) + x) dx. \end{aligned} \quad (24)$$

Тригонометрическая система функций

$$\sqrt{\frac{1}{b}}, \sqrt{\frac{2}{b}} \cos\left\{n \frac{2\pi}{b} t\right\}, \sqrt{\frac{2}{b}} \sin\left\{n \frac{2\pi}{b} t\right\}, \quad \text{где } n = 1, 2, 3, \dots, \quad (25)$$

образует полную ортонормированную систему в H_t . Следовательно, (в случае $g \in C[\dot{0}, b]$) предел последовательности (24) существует и равен g , точнее,

$$g_n \xrightarrow{H_t} h \circ \beta = g, \quad n \rightarrow \infty. \quad (26)$$

Тем самым доказано, что функции $\{\mathbf{v}_k(t)\}$, $k \in \mathbb{Z}$, а вместе с ними и функции $\{v_k(t)\}$, $k \in \mathbb{Z}$, образуют полную систему в H_t .

Критерий минимальности в H_t системы функций $\{v_k(t)\}$, $k \in \mathbb{Z}$, вытекает из структуры биортогональной к ней системы функций $\{w_k(t)\}$, $k \in \mathbb{Z}$. Осталось заметить, что оператор $B: H_t \rightarrow H_t$, $Bv = v \circ \beta$, $\beta = \beta(t)$, преобразует ортонормированный базис

$$e_k = \sqrt{\frac{1}{b}} \exp\left\{ik \frac{2\pi}{b} t\right\}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

в систему $\{v_k\}$, $k \in \mathbb{Z}$, функций $v_k = v_k(t)$: $v_k = B e_k$. Доказательство закончено.

Дальнейшее изучение свойств системы собственных функций оператора L_s естественно провести как в пространстве H_t над областью “меньших размеров”, так и для более “слабых норм”, оставаясь при этом в рамках пространства H_t .

Обозначим $H_t^\varepsilon = H(V_t^\varepsilon)$, где $V_t^\varepsilon = (\varepsilon, b)$, $0 < \varepsilon < b$. Обозначим также символом v^ε элемент пространства H_t , полученный из элемента $v \in H_t^\varepsilon$ продолжением нулем за пределы компакта $\overline{V_t^\varepsilon}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. 1) Для любого числа ε , удовлетворяющего условию $0 < \varepsilon < b$, и для любого элемента $v \in H_t^\varepsilon$ справедливо равенство

$$v = \sum_k (v^\varepsilon, w_k)_t v_k, \quad (27)$$

понимаемое как равенство в H_t^ε .

2) Для любого числа ε , удовлетворяющего условию $0 < \varepsilon < b$, собственные функции $v_k = v_k(t)$, $k \in \mathbb{Z}$, оператора $L_s: H_t \rightarrow H_t$, $L_s = L_s(\mu, \alpha, a)$, $\mu \neq 0, \infty$, $\alpha < 1$, минимальной системы в H_t^ε не образуют.

3) Для любого элемента $g \in H_t$ справедливо равенство

$$g = \sum_k (g, w_k)_t v_k, \quad (28)$$

понимаемое как равенство в H_t , если $\alpha \leq 0$, и как равенство в $\mathcal{L}_p = \mathcal{L}_p(V_t)$, если $0 \leq \alpha < \frac{1}{2}$, где $1 < p \leq 2(1 - \alpha)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Для оператора $\mathcal{B}: H_t^{\beta(\varepsilon)} \rightarrow H_t^\varepsilon$, $\mathcal{B}v = v \circ \beta$, справедливо неравенство

$$\sqrt{\frac{1}{1-\alpha}} \left(\frac{\varepsilon}{b}\right)^{\alpha/2} \|v\|_{t, \beta(\varepsilon)} \leq \|\mathcal{B}v\|_{t, \varepsilon} \leq \sqrt{\frac{1}{1-\alpha}} \|v\|_{t, \beta(\varepsilon)},$$

где $\|\cdot\|_{t, \beta(\varepsilon)}$, $\|\cdot\|_{t, \varepsilon}$ — нормы в пространствах $H_t^{\beta(\varepsilon)}$, H_t^ε , соответственно. Отсюда следует, что операторы $\mathcal{B}$ и $\mathcal{B}^{-1}: H_t^\varepsilon \rightarrow H_t^{\beta(\varepsilon)}$, $\mathcal{B}^{-1}v = v \circ \beta^{-1}$, ограничены. Пусть $v \in H_t^\varepsilon$. Тогда элемент $\mathcal{B}^{-1}v \in H_t^{\beta(\varepsilon)}$ и, следовательно, для элемента $(\mathcal{B}^{-1}v)^{\beta(\varepsilon)} \in H_t$ справедливо представление в виде ряда Фурье

$$(\mathcal{B}^{-1}v)^{\beta(\varepsilon)} = \sum_k ((\mathcal{B}^{-1}v)^{\beta(\varepsilon)}, e_k)_t e_k = \sum_k (v^\varepsilon, w_k)_t e_k. \quad (29)$$

Более того, в равенстве (29) элементы e_k можно заменить элементами $e_k^{\beta(\varepsilon)}$. Откуда, учитывая ограниченность оператора $\mathcal{B}$, последовательно получаем

$$\mathcal{B}^{-1}v = \sum_k (v^\varepsilon, w_k)_t e_k, \quad v = \sum_k (v^\varepsilon, w_k)_t v_k,$$

где равенства понимаются как равенства в пространствах $H_t^{\beta(\varepsilon)}$ и H_t^ε , соответственно. Следовательно, равенство (27) доказано.

2) Достаточно доказать, что свойством минимальности не обладает система $\{v_k\}$, $k \in \mathbb{Z}$, состоящая из функций $v_k = v_k(t)$.

Предположим противное. Пусть $\{\mathfrak{k}_k\}$, $k \in \mathbb{Z}$, — совокупность элементов H_t^ε , образующая с исходной системой $\{v_k\}$, $k \in \mathbb{Z}$, биортонормированную систему в H_t^ε . Так как система $\{v_k\}$, $k \in \mathbb{Z}$, полна в H_t и, следовательно, в H_t^ε , то совокупность $\{\mathfrak{k}_k\}$, $k \in \mathbb{Z}$, определяется единственным образом. Найдем представление $\mathfrak{k}_k$. Имеем

$$1 = \int_\varepsilon^b v_k(t) \overline{\mathfrak{k}_k(t)} dt = \sqrt{\frac{1}{b}} \int_{\beta(\varepsilon)}^b \frac{\exp\left\{ik \frac{2\pi}{b-\beta(\varepsilon)} t\right\}}{\exp\left\{ik \frac{2\pi}{b-\beta(\varepsilon)} \frac{\beta(\varepsilon)}{b} t\right\}} D_t \beta^{-1}(t) (\mathfrak{k}_k \circ \beta^{-1})(t) dt.$$

Откуда, учитывая, что набор

$$\left\{ \sqrt{\frac{1}{b-\beta(\varepsilon)}} \exp\left\{ik \frac{2\pi}{b-\beta(\varepsilon)} t\right\} \right\}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

образует полную ортонормированную систему в $H_t^{\beta(\varepsilon)}$, получаем

$$\sqrt{\frac{1}{b}} (\mathfrak{k}_k \circ \beta^{-1})(t) D_t \beta^{-1}(t) \exp\left\{ik \frac{2\pi}{b-\beta(\varepsilon)} \frac{\beta(\varepsilon)}{b} t\right\} = \frac{1}{b-\beta(\varepsilon)} \exp\left\{ik \frac{2\pi}{b-\beta(\varepsilon)} t\right\},$$

т. е.

$$\mathfrak{k}_k(t) = \frac{b}{b-\beta(\varepsilon)} w_k(t).$$

Используя полученное представление, а также учитывая неравенство $b-\beta(\varepsilon) > 0$, имеем

$$0 = \int_\varepsilon^b v_k(t) \overline{\mathfrak{k}_{k-1}(t)} dt = \frac{b}{i2\pi} \cdot \frac{1}{b-\beta(\varepsilon)} \left(1 - \exp\left\{i \frac{2\pi}{b} \beta(\varepsilon)\right\}\right) \neq 0.$$

Противоречие.

3) Как и ранее, достаточно показать справедливость равенства (28) для биортонормированной системы $\{v_k, w_k\}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Пусть $g \in H_t$. Тогда, как легко видеть, $g \circ \beta^{-1} \in H_t$, если $\alpha \leq 0$, и $g \circ \beta^{-1} \in \mathcal{L}_p$, если $0 \leq \alpha < \frac{1}{2}$, где $\mathcal{L}_p = \mathcal{L}_p(V_t)$, $1 < p \leq 2(1-\alpha)$. Так как тригонометрическая система функций (25) образует базис в пространстве $\mathcal{L}_p$, $p > 1$, то в силу представления (24), справедливого и для рассматриваемого случая, получаем равенство (26), если $\alpha \leq 0$, и

$$g_n \xrightarrow{\mathcal{L}_p} h \circ \beta = g, \quad n \rightarrow \infty,$$

если $0 \leq \alpha < \frac{1}{2}$. Доказательство закончено.

Из предложений 5 и 6 немедленно вытекает

СЛЕДСТВИЕ 1. Система $\{v_k\}$, $k \in \mathbb{Z}$, собственных функций $v_k = v_k(t)$ оператора L_s образует базис в H_t при $\alpha \leq 0$, являющийся базисом Рисса в H_t тогда и только тогда, когда $\alpha = 0$.

§3. Общий случай

3.1. Операторные уравнения и модельные операторы. Приступим к изучению операторного или, как еще говорят, дифференциально-операторного уравнения (1).

Пусть A – модельный оператор, действующий в $\mathfrak{H}$, т.е. линейный, замкнутый, вообще говоря, неограниченный оператор с плотной в $\mathfrak{H}$ областью определения, система $\{\varphi_s\}$, $s \in S$, собственных элементов φ_s которого образует базис Рисса в $\mathfrak{H}$ [8, §5].

Пусть также $H = H_t \otimes \mathfrak{H}$, $\mathfrak{D}$ – линейное многообразие, состоящее из функций $u: \mathbb{R} \rightarrow \mathfrak{H}$, $u(t) = \sum_s v_s(t) \varphi_s$,⁷ где $v_s(t)$ из $\mathfrak{D}_t$ и суммирование проводится для конечного набора индексов $s \in S$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Элемент $u \in H$ называется (*обобщенным*) *решением уравнения* (1), если существует последовательность $\{u_k\}_{k=1}^\infty$ функций $u_k = u_k(t)$ из $\mathfrak{D}$ такая, что

$$u_k \xrightarrow{H} u, \quad t^\alpha a D_t u_k + A u_k \xrightarrow{H} \lambda u + f, \quad k \rightarrow \infty.$$

Изучим функциональную зависимость спектра и свойств ССФ оператора $L: H \rightarrow H$, $L = L(\mu, \alpha, a, A)$, порожденного введенным определением, от “параметров” μ, α, a, A .

Обозначим символом $\hat{L}_s$ сужение (“проекцию”) оператора L на подпространство $H_s = H_t \otimes \varphi_s$ пространства H . Отметим, что H_s – инвариантное подпространство оператора $\hat{L}_s$.

Поскольку основным объектом, интересующим нас, является граничная задача, в дальнейшем роль $\mathfrak{H}$ будет играть пространство $H_x = H(V_x)$, где V_x – ограниченная область пространства переменных $x \in \mathbb{R}_x^n \equiv \mathbb{R}^n$. Более того, при переходе к изучению операторного уравнения (1) удобно считать, что A принадлежит специальному классу модельных операторов, а именно, A является П-оператором. Опишем интересующий нас класс операторов.

3.2. П-операторы. Обозначим символом V_x n -мерный куб с ребром 2π из пространства $\mathbb{R}_x^n$, $H_x = H(V_x)$ – гильбертово пространство комплекснозначных функций $w: \mathbb{R}_x^n \rightarrow \mathbb{C}$ с интегрируемым квадратом над V_x , $\mathcal{P}^\infty$ – линейное многообразие гладких ($\mathcal{P}^\infty \subset C^\infty(\overline{V_x})$) периодических по всем переменным $(x_1, \dots, x_n) \in \overline{V_x}$ комплекснозначных функций, плотное в H_x , $S = \{s : s = (s_1, \dots, s_n), s_k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$. Полиному $A(s)$ с постоянными комплексными коэффициентами

$$A(s) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha s^\alpha, \quad a_\alpha = a_{\alpha_1 \dots \alpha_n} \in \mathbb{C}, \quad s^\alpha = s_1^{\alpha_1} \dots s_n^{\alpha_n},$$

$\alpha_k = 0, 1, 2, \dots$, $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$, поставим в соответствие дифференциальную операцию $A(-iD_x)$ таким образом, что будет выполняться равенство

$$A(-iD_x) \exp(is \cdot x) = A(s) \exp(is \cdot x), \quad s \cdot x = s_1 x_1 + \dots + s_n x_n.$$

⁷Функция $u(t)$ (так же, как и операция $L(D_t, A)$) в формализме тензорных произведений [2, гл. IV, §1] требует записи $u(t) = \sum_s v_s(t) \otimes \varphi_s$ ($L(D_t, A) = t^\alpha a D_t \otimes I + I \otimes A$), которой, ради простоты, мы не следуем.

Под оператором $A: H_x \rightarrow H_x$ понимается замыкание в H_x первоначально заданной на функциях из $\mathcal{P}^\infty$ операции $A(-iD_x)$. Совокупность экспонент $\{\exp(is \cdot x)\}$, $s \in S$, образует, очевидно, ортогональный базис и является одновременно набором собственных элементов оператора A , соответствующих набору собственных чисел $A(S) = \{A(s), s \in S\}$.

Оператор, построенный описанным способом, называется *П-оператором*.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1 [2]. *Спектр σA оператора A совпадает с $\overline{A(S)}$ – замыканием на $\mathbb{C}$ множества $A(S)$, образующего точечный спектр $P\sigma A$ оператора A . При этом непрерывный $C\sigma A$ совпадает с разностью $\overline{A(S)} \setminus A(S)$.*

3.3. Операционное исчисление для оператора L . Введенное пространство H_x будет играть роль пространства $\mathfrak{H}$. Пространство $H = H_t \otimes H_x$ можно рассматривать как гильбертово пространство комплекснозначных функций $u: \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^n \rightarrow \mathbb{C}$ с интегрируемым квадратом над $V = V_t \times V_x$. Оператор L можно рассматривать как замыкание в H на множестве функций $u = u(t, x)$ из $\mathfrak{D}$, $\varphi_s = \varphi_s(x) = \exp(is \cdot x)$, операции $t^\alpha a D_t + A(-iD_x)$, т.е. u принадлежит области определения $\mathfrak{D}(L)$ (замкнутого) оператора $L: H \rightarrow H$ и $Lu = \lambda u + f$, если существует последовательность $\{u_k\}_{k=1}^\infty$ функций $u_k = u_k(t, x)$ из $\mathfrak{D}$ такая, что

$$u_k \xrightarrow{H} u, \quad t^\alpha a D_t u_k + A(-iD_x) u_k \xrightarrow{H} \lambda u + f, \quad k \rightarrow \infty.$$

Пусть $u \in \mathfrak{D}$ и $u = v(t) \cdot \varphi_s(x)$, т.е. $u \in H_s \cap \mathfrak{D}$. Тогда имеем

$$Lu = \widehat{L}_s u = \varphi_s \cdot L_s v, \quad \|\widehat{L}_s u\| = \|L_s v\|_t \cdot \|\varphi_s\|_x,$$

где $v = v(t)$ и нормы берутся в пространствах H , H_t и H_x , соответственно. Следовательно, операторы $\widehat{L}_s$ в рамках наших исследований можно заменить операторами L_s и наоборот. Этим мы воспользуемся при изучении спектральных свойств оператора L . А именно, справедлива

ТЕОРЕМА 1. *Резольвентные множества операторов L и L_s , $s \in S$, связаны между собой следующим образом:*

$$(\lambda \in \rho L) \iff \left(\lambda \in \bigcap_s \rho L_s \right) \wedge \left(\sup_s \|(L_s - \lambda)^{-1}\| < +\infty \right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. *Необходимость* вытекает из определения операторов $\widehat{L}_s: \widehat{L}_s \subset L$, $s \in S$, и установленной взаимозаменяемости операторов $\widehat{L}_s$ и L_s .

Достаточность. Для произвольного элемента $f \in H$ его представление в виде ряда $f = \sum_s \widehat{f}_s$, $\widehat{f}_s \in H_s$, единственно. Из неравенства

$$\|u\|^2 = \sum_s \|(\widehat{L}_s - \lambda)^{-1} \widehat{f}_s\|^2 \leq \sup_s \|(L_s - \lambda)^{-1}\|^2 \cdot \|f\|^2$$

следует, что элемент $u = \sum_s (\widehat{L}_s - \lambda)^{-1} \widehat{f}_s$ является единственным решением уравнения $Lu = \lambda u + f$. Доказательство закончено.

Из доказанного немедленно вытекает

СЛЕДСТВИЕ 2. Если $\lambda \in \rho L$, то решение u уравнения (1) может быть представлено в виде ряда

$$u = \sum_s (\widehat{L}_s - \lambda)^{-1} \widehat{f}_s = \sum_s (L_s - \lambda)^{-1} f_s \cdot \varphi_s, \quad (30)$$

где $\widehat{f}_s$ – “проекция” элемента f в H_s : $\widehat{f}_s = f_s \cdot \varphi_s$, $f_s \in H_t$, $f_s = (f, \varphi_s^*)_x$, $\{\varphi_s, \varphi_s^*\}_{s \in S}$ – биортогональная система функций в H_x .

Отметим, что представление элемента $(L_s - \lambda)^{-1} f_s$ в (30) можно получить из формулы (5), где вместо $g(t)$ надо подставить $f_s = f_s(t)$.

СЛЕДСТВИЕ 3. Справедливы следующие высказывания:

$$\begin{aligned} (\lambda \in P\sigma L) &\iff (\exists s \in S (\lambda \in P\sigma L_s)); \\ (\lambda \in C\sigma L) &\iff (\forall s \in S (\lambda \in \rho L_s)) \wedge \left(\sup_s \|(L_s - \lambda)^{-1}\| = +\infty \right) \\ &\quad \vee (\forall s \in S (\lambda \notin P\sigma L_s \wedge \lambda \notin R\sigma L_s)) \wedge (\exists s \in S (\lambda \in C\sigma L_s)). \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. *Необходимость.* Если $\lambda \in P\sigma L$, то из единственности разложения $u = \sum_s \widehat{u}_s$, $\widehat{u}_s \in H_s$, справедливого для любого $u \in H$, вытекает, что $\exists s \in S (\lambda \in P\sigma \widehat{L}_s)$. В силу сделанного ранее замечания $\lambda \in P\sigma L_s$. Если $\lambda \in C\sigma L$, то оператор $(\widehat{L}_s - \lambda)^{-1}$ существует при любом $s \in S$. Откуда

$$(\forall s \in S (\lambda \in \rho L_s)) \vee (\forall s \in S (\lambda \notin P\sigma L_s \wedge \lambda \notin R\sigma L_s)) \wedge (\exists s \in S (\lambda \in C\sigma L_s)).$$

Если $\sup_s \|(L_s - \lambda)^{-1}\| < +\infty$, то из теоремы 1 имеем $\lambda \notin C\sigma L$.

Достаточность немедленно вытекает из определения операторов $\widehat{L}_s$: $\widehat{L}_s \subset L$, $s \in S$, и установленной взаимозаменяемости операторов $\widehat{L}_s$ и L_s . Доказательство закончено.

3.4. Спектр оператора $L = L(\mu, \alpha, a, A)$. Принимая во внимание теорему 1, ее следствия, а также значение множеств ρ_s, P_s для описания спектральных свойств оператора L (в одномерном случае), вполне естественно ввести следующие подмножества $\mathbb{C}$ ⁸

$$\rho \stackrel{\text{def}}{=} \bigcap_s \rho_s, \quad P \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_s P_s.$$

Вводимые обозначения (названия) этих множеств вполне объясняются той ролью, которую они будут играть при исследовании спектра оператора L . При этом, как и ранее, изучение спектра оператора $L = L(\mu, \alpha, a, A)$ начнем со случая $\mu = \infty$, т.е. с “прямой” задачи Коши для операции $L(D_t, A)$.

⁸ Отметим, что $\rho = \emptyset$, если $\sup_s \operatorname{Re} \frac{A(s)}{a} = +\infty$, $P = \mathbb{C}$, если $\inf_s \operatorname{Re} \frac{A(s)}{a} = -\infty$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Для оператора $L = L(\mu, \alpha, a, A)$, $\mu = \infty$, справедливы следующие высказывания:

$$\begin{aligned} (\rho L = \mathbb{C}) &\iff \left(\alpha < \frac{1}{2}\right) \wedge \left(\inf_s \operatorname{Re} \frac{A(s)}{a} > -\infty\right); \\ (C\sigma L = \mathbb{C}) &\iff \left(\alpha < \frac{1}{2}\right) \wedge \left(\inf_s \operatorname{Re} \frac{A(s)}{a} = -\infty\right) \vee \left(\frac{1}{2} \leq \alpha < 1\right); \\ (\rho L = \mathbb{C} \setminus \overline{P\sigma L}) \wedge (C\sigma L = \overline{P\sigma L} \setminus P\sigma L) \wedge (P\sigma L = a \cdot (\mathbb{C}_+ - \frac{1}{2}) + A(S)) &\iff (\alpha = 1); \\ (\rho L = \mathbb{C} \setminus \overline{P\sigma L}) \wedge (C\sigma L = \overline{P\sigma L} \setminus P\sigma L) \wedge (P\sigma L = a \cdot (\mathbb{C} \setminus \mathbb{C}_-) + A(S)) &\iff (\alpha > 1). \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$\left(\alpha < \frac{1}{2}\right) \wedge \left(\inf_s \operatorname{Re} \frac{A(s)}{a} > -\infty\right) \wedge (\lambda \in \mathbb{C}).$$

Тогда из (10) получаем неравенство $\|(L_s - \lambda)^{-1}\| \leq C$, где постоянная C не зависит от $s \in S$. Следовательно, в силу теоремы 1 справедливо включение $\lambda \in \rho L$.

Пусть теперь

$$\left(\alpha < \frac{1}{2}\right) \wedge \left(\inf_s \operatorname{Re} \frac{A(s)}{a} = -\infty\right) \wedge (\lambda \in \mathbb{C}).$$

Полагая в (8) $g(t) = 1$, получаем $\sup_s \|(L_s - \lambda)^{-1}\| = +\infty$. Откуда в силу следствия 3 $\lambda \in C\sigma L$.

Если $(\alpha \geq 1) \wedge (\lambda \in P)$, то собственному значению $\lambda = \lambda_{\varrho, s}$, которое может быть представлено в виде (6), соответствует собственная функция $u_{\varrho, s} = u_{\varrho, s}(t, x)$,

$$u_{\varrho, s}(t, x) = v_{\varrho}(t) \cdot \varphi_s(x),$$

где $v_{\varrho}(t)$ может быть представлена в виде (7).

Доказательство оставшихся высказываний также вытекает из п. 2.2, теоремы 1 и ее следствий. Доказательство закончено.

Таким образом “прямая” задача Коши для операции $L(D_t, A)$ регулярна (при $\alpha < \frac{1}{2}$), если спектр оператора A располагается в полуплоскости, определяемой числом a (например, при $a > 0$ в правой полуплоскости, если двигаться по прямой перпендикулярной оси Ox в направлении, определяемом осью Oy).

Перенесем результаты проведенных исследований на некоторые конкретные дифференциальные операции в частных производных классических типов. Условимся при этом (как и в [2]) рассматриваемую задачу для операции $L(D_t, A)$ называть *регулярной* (в широком смысле), если $0 \in \rho L$ ($\rho L \neq \emptyset$), т.е. нуль принадлежит резольвентному множеству соответствующего оператора.

ПРИМЕР 1. “Прямая” задача Коши для операции $-t^\alpha D_t + D_x^2$ – “прямой теплопроводности” и гиперболической операции $-t^\alpha D_t + D_x$ – регулярна (т.е. $0 \in \rho L$), а точнее, резольвентное множество соответствующего оператора совпадает с $\mathbb{C}$, если $\alpha < \frac{1}{2}$, и не регулярна, если $\alpha \geq \frac{1}{2}$. В то же время для операции $t^\alpha D_t + D_x^2$ – “обратной теплопроводности” и эллиптической “неположительной” операции

$it^\alpha D_t + D_x$ не регулярна $\forall \alpha, \alpha \in \mathbb{R}$, даже в широком смысле, т.е. резольвентное множество соответствующего оператора пусто при любом $\alpha \in \mathbb{R}$.

Отметим, что собственные значения $\lambda_{\varrho, s}$ каждой из рассмотренных задач имеют (при $\alpha \geq 1$) либо конечную, равную $2|s| + 1$ (например, в случае “прямой теплопроводности”), либо бесконечную кратность (например, в случае “обратной теплопроводности”). Кроме того, точечный спектр каждой из рассмотренных задач либо заполняет всю плоскость $\mathbb{C}$ (например, в случае эллиптической “неположительной” операции), либо только полуплоскость (например, в случае гиперболической операции).

При переходе к симметричной задаче, т.е. к “обратной” задаче Коши для операции $L(D_t, A)$, условия на расположение спектра оператора A , гарантирующие ее регулярность, должны, естественно, симметрично поменяться. А точнее, имеет место

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. Для оператора $L = L(\mu, \alpha, a, A)$, $\mu = 0$, справедливы следующие высказывания:

$$\begin{aligned} (\rho L = \mathbb{C}) &\iff (\alpha < 1) \wedge \left(\sup_s \operatorname{Re} \frac{A(s)}{a} < +\infty \right); \\ (C\sigma L = \mathbb{C}) &\iff (\alpha < 1) \wedge \left(\sup_s \operatorname{Re} \frac{A(s)}{a} = +\infty \right); \\ \left(\rho L = \bigcap_s \left(a \cdot \left(\mathbb{C}_+ - \frac{1}{2} \right) + A(s) \right) \right) \wedge (R\sigma L = \mathbb{C} \setminus \rho L) &\iff (\alpha = 1); \\ \left(\rho L = \bigcap_s (a \cdot \mathbb{C}_+ + A(s)) \right) \wedge (C\sigma L = \overline{\rho L} \setminus \rho L) \wedge (R\sigma L = \mathbb{C} \setminus \overline{\rho L}) &\iff (\alpha > 1). \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО первых двух высказываний, использующее теорему 1, неравенство (13) и представление (14) решения уравнения (3), без особого труда может быть получено так же, как и в аналогичной ситуации для “прямой” задачи Коши.

Если $(\alpha = 1) \wedge (\lambda \notin \rho) \vee (\alpha > 1) \wedge (\lambda \notin \overline{\rho})$, то $\exists s \in S$ ($\lambda \notin \rho_s$), т.е. $\lambda \in R\sigma L_s$ и, следовательно, $\lambda \in R\sigma L$.

Если $(\alpha \geq 1) \wedge (\lambda \in \rho)$, то, пользуясь неравенством (15) и теоремой 1, получаем включение $\lambda \in \rho L$.

В случае $(\alpha > 1) \wedge (\lambda \in \overline{\rho} \setminus \rho)$ включение $\lambda \in C\sigma L$ вытекает из п. 2.3 и следствия 3. Доказательство закончено.

ПРИМЕР 2. Возвращаясь к операциям примера 1 будем иметь: “обратная” задача Коши для операции “обратной теплопроводности” и гиперболической операции регулярна, если $\alpha \leq 1$. В то же время для “прямой теплопроводности” и эллиптической “неположительной” операции не регулярна $\forall \alpha, \alpha \in \mathbb{R}$, даже в широком смысле.

Отметим, что точечный спектр каждой из рассмотренных задач пуст. Однако остаточный спектр при $\alpha \geq 1$ является не пустым множеством. Более того, либо он заполняет всю плоскость $\mathbb{C}$ (например, в случае “прямой теплопроводности”), либо – только полуплоскость (например, в случае гиперболической операции).

Итак, B -свойство (см. [2]) оператора A , оставаясь (в сильно иррегулярном случае) необходимым для регулярности либо “прямой”, либо “обратной” задачи Коши для операции $L(D_t, A)$, достаточным, например, при $\alpha \geq 1$, уже не является.

Аналогичные явления, связанные с сильной иррегулярностью, наблюдаются и у нелокальной задачи для операции $L(D_t, A)$. Например, при $\alpha \geq 1$ по существу мы имеем дело уже не с нелокальной задачей (и не с “обратной” задачей Коши), а с задачей Коши–Дирихле ($u(b) = u(0) = 0$) для операции $L(D_t, A)$. Эта “перепреопределенность” в граничных условиях, естественно, сказывается и на качестве спектра. Точнее, имеет место

УТВЕРЖДЕНИЕ 4. Для оператора $L = L(\mu, \alpha, a, A)$, $\mu \neq 0, \infty$, справедливы следующие высказывания:

$$\begin{aligned}
 (\rho L = \mathbb{C} \setminus \overline{P\sigma L}) \wedge (C\sigma L = \overline{P\sigma L} \setminus P\sigma L) \\
 \wedge \left(P\sigma L = a \frac{\ln |\mu| + i \arg \mu + i2\pi \cdot \mathbb{Z}}{J(0, b)} + A(S) \right) &\iff \left(\alpha < \frac{1}{2} \right); \\
 (C\sigma L = \mathbb{C} \setminus P\sigma L) \\
 \wedge \left(P\sigma L_s = a \frac{\ln |\mu| + i \arg \mu + i2\pi \cdot \mathbb{Z}}{J(0, b)} + A(S) \right) &\iff \left(\frac{1}{2} \leq \alpha < 1 \right); \\
 (\rho L = \rho) \wedge (R\sigma L = \mathbb{C} \setminus \rho L) &\iff (\alpha = 1) \wedge (\mu \neq 1); \\
 (\rho L = \rho) \wedge (C\sigma L = \overline{\rho L} \setminus \rho L) \wedge (R\sigma L = \mathbb{C} \setminus \overline{\rho L}) &\iff (\alpha > 1) \wedge (\mu \neq 1); \\
 (\rho L = \rho \setminus P\sigma L) \wedge (P\sigma L = A(S)) \\
 \wedge (R\sigma L = \mathbb{C} \setminus \rho L \setminus P\sigma L) &\iff (\alpha = 1) \wedge (\mu = 1); \\
 (\rho L = \rho) \wedge (P\sigma L = A(S)) \wedge (C\sigma L = \overline{\rho L} \setminus \rho L \setminus P\sigma L) \\
 \wedge (R\sigma L = \mathbb{C} \setminus \overline{\rho L}) &\iff (\alpha > 1) \wedge (\mu = 1).
 \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\lambda \in P$, то собственному значению $\lambda = \lambda_{k,s}$, которое может быть представлено в виде (16), соответствует собственная функция $u_{k,s} = u_{k,s}(t, x)$,

$$u_{k,s}(t, x) = v_k(t) \cdot \varphi_s(x), \quad (31)$$

где $v_k(t)$ может быть представлена в виде (17), т.е. $P \subset P\sigma L$.

Пусть $(\alpha < \frac{1}{2}) \wedge (\lambda \notin \overline{P})$. Обозначим

$$r = \inf_{k,s} \left| \frac{\lambda - \lambda_{k,s}}{a} \right|,$$

где $\lambda_{k,s} \in P$. Очевидно, что $r > 0$. Кроме того, $\forall s \in S$ ($r_s \geq r$) (см. п. 2.2). Следовательно, используя оценку (20) резольвенты $(L_s - \lambda)^{-1}$ оператора $L_s = L_s(\mu, \alpha, a)$, получаем включение $\lambda \in \rho L$.

Пусть теперь $(\alpha < \frac{1}{2}) \wedge (\lambda \in \overline{P} \setminus P)$. В таком случае λ принадлежит резольвентному множеству каждого из операторов L_s , т.е. $\forall s \in S$ ($\lambda \in \rho L_s$). Если $\sup_s \|(L_s - \lambda)^{-1}\| < +\infty$, то $\lambda \in \rho L$ и, следовательно, ρL не является открытым

множеством. Полученное противоречие показывает, что $\sup_s \|(L_s - \lambda)^{-1}\| = +\infty$, т.е. $\lambda \in C\sigma L$.

Оставшиеся случаи исследуются так же, как и соответствующие утверждения для “прямой” и “обратной” задач Коши. Доказательство закончено.

Отметим, что при $\alpha \geq 1$ задача Коши–Дирихле для операции $L(D_t, A)$ может оказаться регулярной (в широком смысле).

ПРИМЕР 3. Рассмотрим снова операции примера 1, где будем считать $\alpha \geq 1$. Задача Коши–Дирихле для операции “обратной теплопроводности” и гиперболической операции регулярна при $\alpha = 1$ и регулярна в широком смысле при $\alpha \geq 1$. В то же время для “прямой теплопроводности” и эллиптической “неположительной” операции не регулярна даже в широком смысле, о чем, впрочем, было уже сказано в примере 2.

На этом изучение спектра оператора L закончим. Рассмотрим свойства его ССФ.

3.5. Свойства ССФ оператора $L = L(\mu, \alpha, a, A)$. Как и в одномерном случае вполне естественно ограничиться изучением свойств ССФ оператора $L = L(\mu, \alpha, a, A)$ для значений μ , не равных 0 и ∞ , т.е. свойств ССФ оператора $L: H \rightarrow H$, порожденного нелокальной задачей для операции $L(D_t, A)$, причем только в случае $\alpha < 1$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 5. *Собственные функции $u_{k,s} = u_{k,s}(t, x)$, $(k, s) \in \mathbb{Z} \times S$, оператора $L: H \rightarrow H$, $L = L(\mu, \alpha, a, A)$, $\mu \neq 0, \infty$, которые могут быть представлены в виде (31), образуют:*

- а) полную систему в H ;
- б) минимальную систему в H тогда и только тогда, когда $\alpha < \frac{1}{2}$;
- в) базис в H при $\alpha \leq 0$;
- г) гильбертову систему в H тогда и только тогда, когда $0 \leq \alpha < \frac{1}{2}$;
- д) бесселеву систему в H тогда и только тогда, когда $\alpha \leq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем пользоваться обозначениями, введенными в п. 2.5. Введем с помощью функции $\omega: \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^n \rightarrow \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^n$, $\omega(t, x) = (\beta(t), x)$, оператор $\mathfrak{B}: H \rightarrow H$, $\mathfrak{B}u = u \circ \omega$, зависящий от параметра α , т.е. $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}(\alpha)$. Обозначим $\psi_{k,s} = \mathfrak{B}e_{k,s}$, где $e_{k,s} = e_k \varphi_s / \|\varphi_s\|_x$. Заметим, что $u_{k,s} = \|\varphi_s\|_x \psi_{k,s}$.

Пусть $0 < \alpha < 1$. Легко видеть, что $(0 \in \rho \mathfrak{B}^{-1} \cap C\sigma \mathfrak{B}) \iff (0 < \alpha < 1)$. Пусть $u \in \mathfrak{R}(\mathfrak{B})$. Тогда $\mathfrak{B}^{-1}u = \sum_{k,s} (\mathfrak{B}^{-1}u, e_{k,s}) e_{k,s}$. Откуда $u = \sum_{k,s} (u, \chi_{k,s}) \psi_{k,s}$, где $\{\psi_{k,s}, \chi_{k,s}\}$, $(k, s) \in \mathbb{Z} \times S$, – биортонормированная система элементов. Так как множество $\mathfrak{R}(\mathfrak{B})$ плотно в H , то полнота ССФ оператора L в случае $0 < \alpha < 1$ доказана.

Если $\alpha < 0$, то доказательство того, что система $\{\psi_{k,s}\}$, $(k, s) \in \mathbb{Z} \times S$, образует базис в H может быть проведено так же, как, например, в [1].

Так как $\forall (k, s) \in \mathbb{Z} \times S (\chi_{k,s} \in H \iff \alpha < \frac{1}{2})$, то критерий минимальности в H ССФ оператора L вполне очевиден [10, гл. VIII, §1].

Осталось заметить, что $(0 \in \rho \mathfrak{B} \cap C\sigma \mathfrak{B}^{-1}) \iff (\alpha < 0)$. Доказательство закончено.

Отметим, что теперь точно так же, как это проделано в п. 2.5 для одномерного случая, могут быть изучены как свойства ССФ оператора L в пространстве $H^\varepsilon = H^\varepsilon_t \otimes \mathfrak{H}$, так и сходимость в соответствующей метрике биортогонального разложения функции $f \in H$ по ССФ оператора L . Например, легко показать, что для любого числа ε , удовлетворяющего условию $0 < \varepsilon < b$, ССФ оператора L базиса в H^ε не образует. На этом мы останавливаться не будем.

Отметим также, что проведенные рассуждения нетрудно перенести на случай, когда a принадлежит тому же классу операторов, что и A , т.е. является M -оператором, причем операторы $a, A: \mathfrak{H} \rightarrow \mathfrak{H}$ должны, естественно, обладать общей полной ССФ, образующей базис Рисса в $\mathfrak{H}$.

В заключение автор выражает глубокую благодарность профессору А. А. Дезину и профессору В. К. Романко за внимание к работе.

Список литературы

1. Дезин А. А. О слабой и сильной иррегулярности // Дифференц. уравнения. 1981. Т. 17. № 10. С. 1851–1858.
2. Дезин А. А. Общие вопросы теории граничных задач. М.: Наука, 1980.
3. Романко В. К. О собственных значениях краевых задач для некоторых уравнений, меняющих тип // Дифференц. уравнения. 1983. Т. 19. № 10. С. 1759–1764.
4. Корниенко В. В. К спектрам сильно иррегулярных уравнений // Дифференц. уравнения. 1995. Т. 31. № 11. С. 1907–1912.
5. Дезин А. А. Вырождающиеся операторные уравнения // Матем. сб. 1981. Т. 115 (157). № 3 (7). С. 323–336.
6. Тепоян Л. П. Вырождающиеся дифференциально-операторные уравнения четвертого порядка // Дисс. . . . канд. физ.-матем. наук. М.: МИАН, 1986.
7. Кислов Н. В. Неоднородные граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений // Дисс. . . . докт. физ.-матем. наук. М.: МЭИ, 1988.
8. Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969.
9. Корниенко В. В. О гладкости решений иррегулярных уравнений // Дифференц. уравнения. 1989. Т. 25. № 9. С. 1572–1577.
10. Качмаж С., Штейнгауз Г. Теория ортогональных рядов. М.: Физматгиз, 1958.

Самаркандский государственный
университет им. А. Навои, Узбекистан

Поступила в редакцию
13.05.1996 и 11.02.1997