Общероссийский математический портал

М. А. Олшанецкий, В. К. Рогов, q -интегральные представления модифицированных q -функций Бесселя и q -функций Макдональда, *Матем. сб.*, 1997, том 188, номер 8, 125–148

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm248>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.89.56.158

26 апреля 2023 г., 15:25:44

УДК 517.58

М. А. Ольшанецкий, В.-Б. К. Рогов

 **q -интегральные представления модифицированных
 q -функций Бесселя и q -функций Макдональда**

q -аналоги модифицированной функции Бесселя определяются как решения некоторых разностных уравнений второго порядка. Здесь мы даем ряд их интегральных представлений, используя интеграл Джексона.

Библиография: 12 названий.

§ 1. Введение

В этой работе мы продолжаем исследования модифицированных q -функций Бесселя (q -МФБ) и q -функций Макдональда (q -ФМ), введенных в [1]. Хотя эти функции могут быть выражены через q -функции Бесселя (q -ФБ) Джексона [2] (как и их классические аналоги), они интересны сами по себе. Классические функции Бесселя возникают как матричные элементы неприводимых представлений группы движений евклидовых пространств [3]. Аналогично этому различного рода базисные функции Бесселя связаны с представлениями квантовой аффинной группы [4]–[6]. Классические МФБ и ФМ связаны с моделью Уиттекера неприводимых унитарных представлений основной серии вещественной простой расщепимой группы Ли $G = \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ [7], [8]. В частности, функции Макдональда являются функциями Уиттекера, построенными по этим представлениям. q -ФМ, которые мы здесь рассматриваем, можно интерпретировать как функции Уиттекера для квантовой группы Лорентца [9].

Суть настоящей работы – построение аналогов интегральных представлений q -МФБ и q -ФМ обоих родов, которые имеют хорошо известные классические формы. Хотя существует теоретико-групповая интерпретация некоторых из этих представлений, наше построение является чисто аналитическим, лежащим вне групповых методов. К теоретико-групповой выводу мы вернемся в отдельной публикации.

Работа первого автора выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-02-18046), грантами INTAS-94-2317 и научной школы 96-15-96455.

Работа второго автора выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 97-01-00747) и фонда НИОКР МПС РФ.

§ 2. Предварительные соотношения

Джексоновский q -интеграл определяется как отображение алгебры функций одной переменной в множество числовых рядов

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 f(x) d_q x &= (1-q) \sum_{m=0}^{\infty} q^m (f(q^m) + f(-q^m)), \\ \int_0^{\infty} f(x) d_q x &= (1-q) \sum_{m=-\infty}^{\infty} q^m f(q^m), \\ \int_{-\infty}^{\infty} f(x) d_q x &= (1-q) \sum_{m=-\infty}^{\infty} q^m (f(q^m) + f(-q^m)).\end{aligned}$$

Определим разностный оператор

$$\partial_x f(x) = \frac{x^{-1}}{1-q} (f(x) - f(qx)). \quad (2.1)$$

Справедливы следующие формулы q -интегрирования по частям:

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 \varphi(x) \partial_x \psi(x) d_q x &= \varphi(1) \psi(1) - \varphi(-1) \psi(-1) \\ &\quad - \int_{-1}^1 \partial_x \varphi(x) \psi(qx) d_q x,\end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} \varphi(x) \partial_x \psi(x) d_q x &= \lim_{m \rightarrow \infty} (\varphi(q^{-m}) \psi(q^{-m}) - \varphi(q^m) \psi(q^m)) \\ &\quad - \int_0^{\infty} \partial_x \varphi(x) \psi(qx) d_q x,\end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) \partial_x \psi(x) d_q x &= \lim_{m \rightarrow \infty} (\varphi(q^{-m}) \psi(q^{-m}) + \varphi(-q^{-m}) \psi(-q^{-m})) \\ &\quad - \int_{-\infty}^{\infty} \partial_x \varphi(x) \psi(qx) d_q x.\end{aligned} \quad (2.4)$$

Две последние формулы дают регуляризацию расходящихся q -интегралов.

Пусть z и s некоммутирующие переменные и

$$zs = qsz. \quad (2.5)$$

Рассмотрим функцию

$$f(x) = \sum_r a_r x^r. \quad (2.6)$$

Правило q -интегрирования в некоммутативном случае:

$$\begin{aligned}\int f(zs) d_q s &= \int \sum_r a_r (zs)^r d_q s = \int \sum_r a_r q^{-r(r-1)/2} z^r s^r d_q s, \\ \int d_q z f(zs) &= \int d_q z \sum_r a_r (zs)^r = \int d_q z \sum_r a_r q^{-r(r-1)/2} z^r s^r.\end{aligned}$$

Определим преобразование $\ddagger f \ddagger$ для функции f , зависящей от некоммутирующих переменных s и z (2.5). Если мы имеем функцию вида (2.6) и все мономы упорядочены, мы будем писать

$$f(zs) = \sum_r a_r (zs)^r \mapsto \ddagger f(zs) \ddagger = \sum_r a_r z^r s^r.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Функция $f(z)$ называется *абсолютно q -интегрируемой*, если ряд

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} q^m f(q^m)$$

абсолютно сходится.

Отсюда следует, что

$$\lim_{m \rightarrow \pm\infty} q^m |f(q^m)| = 0.$$

Пусть [10]

$$(a, q)_n = \begin{cases} 1 & \text{при } n = 0, \\ (1-a)(1-aq) \cdots (1-aq^{n-1}) & \text{при } n \geq 1, \end{cases} \quad (2.7)$$

$$(a, q)_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} (a, q)_n, \quad (a_1, \dots, a_k, q)_\infty = (a_1, q)_\infty \cdots (a_k, q)_\infty$$

и

$$\Gamma_q(\nu) = \frac{(q, q)_\infty}{(q^\nu, q)_\infty} (1-q)^{1-\nu}$$

— q -гамма-функция. Рассмотрим q -экспоненты

$$e_q\left(\frac{1-q^2}{2}x\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-q^2)^n x^n}{(q, q)_n 2^n}, \quad |x| < \frac{2}{1-q^2}, \quad (2.8)$$

$$E_q\left(\frac{1-q^2}{2}x\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n(n-1)/2} (1-q^2)^n x^n}{(q, q)_n 2^n}. \quad (2.9)$$

Заметим, что

$$e_q\left(\frac{1-q^2}{2}x\right) = \frac{1}{\left(\frac{1-q^2}{2}x, q\right)_\infty}, \quad E_q\left(\frac{1-q^2}{2}x\right) = \left(-\frac{1-q^2}{2}x, q\right)_\infty \quad (2.10)$$

и

$$e_q(q)E_q(q^{-1}) = \frac{1}{(q, q)_\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{q^{k(k+1)/2}}{(q, q)_k}. \quad (2.11)$$

Рассмотрим также базисный гипергеометрический ряд

$${}_0\Phi_1\left(-; 0; q, \frac{1-q^2}{2}x\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n(n-1)/2} (1-q^2)^n x^n}{(q, q)_n 2^n}.$$

Отсюда сразу же имеем

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. *Справедливы следующие соотношения:*

$${}_0\Phi_1\left(-; 0; q, \frac{1-q^2}{2}zs\right) = \dagger E_q\left(\frac{1-q^2}{2}zs\right) \dagger, \quad (2.12)$$

$$E_q\left(\frac{1-q^2}{2}zs\right) = \dagger e_q\left(\frac{1-q^2}{2}zs\right) \dagger. \quad (2.13)$$

Теперь рассмотрим q -функции Бесселя [2]

$$J_\nu^{(1)}((1-q^2)x; q^2) = \frac{1}{\Gamma_{q^2}(\nu+1)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (1-q^2)^{2n} x^{\nu+2n}}{(q^2, q^2)_n (q^{2\nu+2}, q^2)_n 2^{\nu+2n}}, \quad (2.14)$$

$$J_\nu^{(2)}((1-q^2)x; q^2) = \frac{1}{\Gamma_{q^2}(\nu+1)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n q^{2n(\nu+n)} (1-q^2)^{2n} x^{\nu+2n}}{(q^2, q^2)_n (q^{2\nu+2}, q^2)_n 2^{\nu+2n}} \quad (2.15)$$

и базисный гипергеометрический ряд [10]

$$\begin{aligned} {}_0\Phi_3\left(-; 0, 0, q^{2\nu+2}; q^2, -\left(\frac{1-q^2}{2}q^{2\nu+2}x\right)^2\right) \\ = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n q^{4n(\nu+n)} (1-q^2)^{2n} x^{2n}}{(q^2, q^2)_n (q^{2\nu+2}, q^2)_n 2^{2n}}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Исходя из (2.5), мы положим для любых ν и μ

$$z^\nu s^\mu = q^{\nu\mu} s^\mu z^\nu. \quad (2.17)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2. *Справедливы следующие равенства:*

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Gamma_{q^2}(\nu+1)} \left(q^{-1/2} \frac{zs}{2}\right)^\nu {}_0\Phi_3\left(-; 0, 0, q^{2\nu+2}; q^2, -\left(\frac{1-q^2}{2}q^{2(\nu+1)-1/2}zs\right)^2\right) \\ = q^{-\nu^2/2} \dagger J_\nu^{(2)}((1-q^2)zs; q^2) \dagger, \end{aligned} \quad (2.18)$$

$$J_\nu^{(2)}((1-q^2)q^{-1/2}zs; q^2) = q^{-\nu^2/2} \dagger J_\nu^{(1)}((1-q^2)zs; q^2) \dagger. \quad (2.19)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Эти формулы вытекают из (2.14)–(2.17).

В некоммутативном случае мы определим разностный оператор, подобный оператору (2.1),

$$\partial_s f(zs) = \frac{s^{-1}}{1-q} (f(zs) - f(qzs)).$$

Тогда

$$\frac{1}{1-q} (f(zs) - f(qzs)) s^{-1} = \partial_s f(q^{-1}zs).$$

Как следует из (2.1) и (2.8), (2.9) для любого a

$$\frac{2\partial_z}{1+q} \dagger e_q \left(\frac{1-q^2}{2} a z s \right) \dagger = a \dagger e_q \left(\frac{1-q^2}{2} a z s \right) \dagger s, \quad (2.20)$$

$$\frac{2\partial_s}{1+q} \dagger e_q \left(\frac{1-q^2}{2} a z s \right) \dagger = a q z \dagger e_q \left(\frac{1-q^2}{2} a q z s \right) \dagger, \quad (2.21)$$

$$\frac{2\partial_z}{1+q} \dagger E_q \left(\frac{1-q^2}{2} a z s \right) \dagger = a \dagger E_q \left(\frac{1-q^2}{2} a q z s \right) \dagger s, \quad (2.22)$$

$$\frac{2\partial_s}{1+q} \dagger E_q \left(\frac{1-q^2}{2} a z s \right) \dagger = a q z \dagger E_q \left(\frac{1-q^2}{2} a q^2 z s \right) \dagger. \quad (2.23)$$

Точно так же из (2.1) и (2.14), (2.15)

$$\begin{aligned} \frac{2\partial_z}{1+q} \left(\left(\frac{z}{2} \right)^{-\nu} \dagger J_{\nu}^{(1)}((1-q^2) a z s; q^2) \dagger \right) \\ = -a \left(\frac{z}{2} \right)^{-\nu} \dagger J_{\nu+1}^{(1)}((1-q^2) a z s; q^2) \dagger s, \end{aligned} \quad (2.24)$$

$$\begin{aligned} \frac{2\partial_s}{1+q} \left(\dagger J_{\nu}^{(1)}((1-q^2) a z s; q^2) \dagger \left(\frac{s}{2} \right)^{-\nu} \right) \\ = -a q z \dagger J_{\nu+1}^{(1)}((1-q^2) a q z s; q^2) \dagger \left(\frac{s}{2} \right)^{-\nu}, \end{aligned} \quad (2.25)$$

$$\begin{aligned} \frac{2\partial_z}{1+q} \left(\left(\frac{z}{2} \right)^{\nu} \dagger J_{\nu}^{(1)}((1-q^2) a z s; q^2) \dagger \right) \\ = a \left(\frac{z}{2} \right)^{\nu} \dagger J_{\nu-1}^{(1)}((1-q^2) a z s; q^2) \dagger s, \end{aligned} \quad (2.26)$$

$$\begin{aligned} \frac{2\partial_z}{1+q} \left(\left(\frac{z}{2} \right)^{-\nu} \dagger J_{\nu}^{(2)}((1-q^2) a z s; q^2) \dagger \right) \\ = -a q^{\nu+1} \left(\frac{z}{2} \right)^{-\nu} \dagger J_{\nu+1}^{(2)}((1-q^2) a q z s; q^2) \dagger s, \end{aligned} \quad (2.27)$$

$$\begin{aligned} \frac{2\partial_s}{1+q} \left(\dagger J_{\nu}^{(2)}((1-q^2) a z s; q^2) \dagger \left(\frac{s}{2} \right)^{-\nu} \right) \\ = -a q^{\nu+2} z \dagger J_{\nu+1}^{(2)}((1-q^2) a q^2 z s; q^2) \dagger \left(\frac{s}{2} \right)^{-\nu}, \end{aligned} \quad (2.28)$$

$$\begin{aligned} \frac{2\partial_z}{1+q} \left(\left(\frac{z}{2} \right)^{\nu} \dagger J_{\nu}^{(2)}((1-q^2) a z s; q^2) \dagger \right) \\ = a q^{-\nu+1} \left(\frac{z}{2} \right)^{\nu} \dagger J_{\nu-1}^{(2)}((1-q^2) a q z s; q^2) \dagger s. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Рассмотрим полные эллиптические интегралы:

$$\mathbf{K}(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\alpha}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \alpha}}, \quad \mathbf{K}'(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\alpha}{\sqrt{\cos^2 \alpha + k^2 \sin^2 \alpha}}$$

и пусть

$$\ln q = -\frac{\pi \mathbf{K}'(k)}{\mathbf{K}(k)}. \quad (2.30)$$

Тогда [11, 5.3.6.1]

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_\nu &= (1-q) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{q^{m-\nu+1/2} + q^{-m+\nu-1/2}} \\ &= \frac{1-q}{\pi} \mathbf{K}(k) \operatorname{dn} \left(\frac{2 \ln q^{-\nu+1/2}}{\pi} \mathbf{K}'(k) \right), \end{aligned} \quad (2.31)$$

где

$$\operatorname{dn} u = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}, \quad u = \int_0^\varphi \frac{d\alpha}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha}}$$

($\operatorname{dn} u$ — эллиптическая функция Якоби). Если $u = 0$, то $\varphi = 0$ и $\operatorname{dn} u = 1$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3. *Для любого ν*

$$\lim_{q \rightarrow 1-0} \mathbf{Q}_\nu = \frac{\pi}{2}. \quad (2.32)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $\mathbf{K}'(k) > 0$ для любого k , из (2.30) следует, что при $q \rightarrow 1-0$ $\mathbf{K}(k) \rightarrow \infty$ и, следовательно, $\lim_{q \rightarrow 1-0} k = 1-0$. В этом случае $\mathbf{K}'(1) = \pi/2$ и $\operatorname{dn} u = 1$. Теперь из (2.31) мы имеем

$$\lim_{q \rightarrow 1-0} \mathbf{Q}_\nu = - \lim_{q \rightarrow 1-0} \frac{1-q}{\ln q} \mathbf{K}'(k) \operatorname{dn} \left(\frac{2 \ln q^{-\nu+1/2}}{\pi} \mathbf{K}'(k) \right) = \frac{\pi}{2}.$$

§ 3. Некоторые свойства q -биномиальной формулы

Существует q -аналог классической биномиальной формулы [10]

$$\begin{aligned} (1-z)^{-a} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k}{k!} z^k, \quad (a)_k = \frac{\Gamma(a+k)}{\Gamma(a)}, \quad |z| < 1, \\ \frac{(q^\alpha z, q)_\infty}{(z, q)_\infty} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(q^\alpha, q)_k}{(q, q)_k} z^k, \quad |z| < 1. \end{aligned}$$

Нам понадобятся два обобщения этого q -бинома

$$r(a, b, z, q) = \frac{(az, q)_\infty}{(bz, q)_\infty}, \quad (3.1)$$

$$R(a, b, \gamma, z, q^2) = \frac{(az^2, q^2)_\infty}{(bz^2, q^2)_\infty} z^\gamma. \quad (3.2)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. *Функция $r(a, b, z, q)$ (3.1) удовлетворяет разностному уравнению*

$$z(br(a, b, z, q) - ar(a, b, qz, q)) = r(a, b, z, q) - r(a, b, qz, q). \quad (3.3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (3.3) следует, что

$$\frac{r(a, b, z, q)}{r(a, b, qz, q)} = \frac{1 - az}{1 - bz}.$$

Теперь утверждение предложения следует из (2.7).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2. *Функция $R(a, b, \gamma, z, q^2)$ (3.2) удовлетворяет разностному уравнению*

$$z^2 (bq^\gamma R(a, b, \gamma, z, q^2) - aR(a, b, \gamma, qz, q^2)) = q^\gamma R(a, b, \gamma, z, q^2) - R(a, b, \gamma, qz, q^2). \quad (3.4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем $z^{-\gamma} R(a, b, \gamma, z, q^2) = r(a, b, z^2, q^2)$ и подставим эту функцию в (3.3). Тогда уравнение

$$\begin{aligned} z^2 (bz^{-\gamma} R(a, b, \gamma, z, q^2) - aq^{-\gamma} z^{-\gamma} R(a, b, \gamma, qz, q^2)) \\ = z^{-\gamma} R(a, b, \gamma, z, q^2) - q^{-\gamma} z^{-\gamma} R(a, b, \gamma, qz, q^2). \end{aligned}$$

приводит нас к (3.4).

ЛЕММА 3.1. *Если $|a| < |b|$, функция $r(a, b, z, q)$ может быть представлена в виде суммы простейших дробей*

$$\frac{(az, q)_\infty}{(bz, q)_\infty} = \frac{1}{(q, q)_\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k q^{k(k+1)/2} (a/bq^{-k}, q)_\infty}{(q, q)_k (1 - zbq^k)}. \quad (3.5)$$

При этом ряд (3.5) сходится абсолютно для любого $z \neq b^{-1}q^{-k}$, $k = 0, 1, \dots$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$r_n(a, b, z, q) = \frac{(az, q)_n}{(bz, q)_n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n + \sum_{k=0}^n \frac{c_{k,n}}{1 - zbq^k}.$$

Тогда

$$c_{k,n} = \lim_{z \rightarrow b^{-1}q^{-k}} (1 - zbq^k) r_n(a, b, z, q) = \frac{(-1)^k q^{k(k+1)/2} (a/bq^{-k}, q)_n}{(q, q)_k (q, q)_{n-k}}$$

и

$$r_n(a, b, z, q) = \left(\frac{a}{b}\right)^n + \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k q^{k(k+1)/2} (a/bq^{-k}, q)_n}{(q, q)_k (1 - zbq^k)} \frac{1}{(q, q)_{n-k}}.$$

Так как $\lim_{n \rightarrow \infty} (a/b)^n = 0$ и $1/(q, q)_{n-k} < 1/(q, q)_\infty$, мы получаем

$$r(a, b, z, q) = \lim_{n \rightarrow \infty} r_n(a, b, z, q) = \frac{1}{(q, q)_\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k q^{k(k+1)/2} (a/bq^{-k}, q)_\infty}{(q, q)_k (1 - zbq^k)}.$$

Применяя признак сходимости Даламбера, мы имеем

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{q^{(k+1)(k+2)/2} (a/bq^{-k-1}, q)_\infty (q, q)_k (1 - zbq^k)}{(q, q)_{k+1} (1 - zbq^{k+1}) q^{k(k+1)/2} (a/bq^{-k}, q)_\infty} \right| \\ = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| q^{k+1} - \frac{a}{b} \right| = \left| \frac{a}{b} \right| < 1. \end{aligned}$$

Следовательно, (3.5) сходится абсолютно для любых $|a| < |b|$ и $r(a, b, z, q)$ является мероморфной функцией с простыми полюсами в точках $z = b^{-1}q^{-k}$, $k = 0, 1, \dots$.

Нетрудно получить

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Если $0 < |a| < |b|$, то

$$\frac{(az, q)_\infty}{(bz, q)_\infty} = \frac{(a/b, q)_\infty}{(q, q)_\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(b/aq, q)_k (a/b)^k}{(q, q)_k (1 - zbq^k)}. \quad (3.6)$$

Если $a = 0$, то

$$\frac{1}{(bz, q)_\infty} = \frac{1}{(q, q)_\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k q^{k(k+1)/2}}{(q, q)_k (1 - zbq^k)}. \quad (3.7)$$

Положим в (3.2) $a = \varepsilon q^{2\alpha}$, $b = \varepsilon q^{2\beta}$, $\varepsilon = \pm 1$. Тогда из (3.6) мы имеем

СЛЕДСТВИЕ 3.1. *Справедливо равенство*

$$z^\gamma \frac{(\varepsilon q^{2\alpha} z^2, q^2)_\infty}{(\varepsilon q^{2\beta} z^2, q^2)_\infty} = z^\gamma \frac{(q^{2(\alpha-\beta)}, q^2)_\infty}{(q^2, q^2)_\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(q^{2(\beta-\alpha+1)}, q^2)_k q^{2(\alpha-\beta)k}}{(q^2, q^2)_k (1 - \varepsilon z^2 q^{2(\beta+k)})}. \quad (3.8)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2. Как следует из [10, 1.3.2],

$$\frac{(\varepsilon q^{2\alpha} z^2, q^2)_\infty}{(\varepsilon q^{2\beta} z^2, q^2)_\infty} = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k q^{2\beta k} \frac{(q^{2(\alpha-\beta)}, q^2)_k}{(q^2, q^2)_k} z^{2k}. \quad (3.9)$$

Этот ряд сходится в области $|z| < q^{-\beta/2}$.

Из леммы 3.1 вытекает, что если $\gamma = 0$, то (3.8) является мероморфной функцией с простыми полюсами $z = \pm \sqrt{\varepsilon} q^{-\beta-k}$, $k = 0, 1, \dots$, и, следовательно, она является аналитическим продолжением (3.9).

СЛЕДСТВИЕ 3.2. *Для любого вещественного $s \neq 0$*

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left| e_q \left(i \frac{1-q^2}{2} q^{-m} s \right) \right| = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Учитывая (2.10), лемму 3.1 при $a = 0$, $b = i \frac{1-q^2}{2} q^{-m}$ и очевидное неравенство при $k \geq 0$

$$\frac{1}{1 + s^2 \left(\frac{1-q^2}{2} \right)^2 q^{-2m+2k}} \leq \frac{q^{-2k}}{1 + s^2 \left(\frac{1-q^2}{2} \right)^2 q^{-2m}}, \quad (3.10)$$

мы имеем

$$\begin{aligned} \left| e_q \left(i \frac{1-q^2}{2} q^{-m} s \right) \right| &\leq \frac{1}{(q, q)_\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left| \frac{q^{k(k+1)/2}}{(q, q)_k \left(1 - i \frac{1-q^2}{2} s q^{-m+k} \right)} \right| \\ &\leq \left(1 + s^2 \left(\frac{1-q^2}{2} \right)^2 q^{-2m} \right)^{-1/2} \frac{1}{(q, q)_\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{q^{k(k-1)/2} q^{-k}}{(q, q)_k} \\ &= \left(1 + s^2 \left(\frac{1-q^2}{2} \right)^2 q^{-2m} \right)^{-1/2} E_q(q^{-1}) e_q(q). \end{aligned}$$

Имеется два вида q -тригонометрических функций:

$$\begin{aligned} \cos_q z &= \frac{1}{2} (e_q(iz) + e_q(-iz)), \quad \sin_q z = \frac{1}{2i} (e_q(iz) - e_q(-iz)), \\ \text{Cos}_q z &= \frac{1}{2} (E_q(iz) + E_q(-iz)), \quad \text{Sin}_q z = \frac{1}{2i} (E_q(iz) - E_q(-iz)). \end{aligned}$$

СЛЕДСТВИЕ 3.3. Для вещественного $s \neq 0$ и целого m

$$\left| \cos_q \left(\frac{1-q^2}{2} q^{-m} s \right) \right| \leq \frac{E_q(q^{-1}) e_q(q)}{1 + \left(\frac{1-q^2}{2} \right)^2 q^{-2m} s^2}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $a = 0$, $b = \pm i \frac{1-q^2}{2} q^{-m}$, то из (3.7)

$$\cos_q \left(\frac{1-q^2}{2} q^{-m} s \right) = \frac{1}{(q, q)_\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k q^{k(k+1)/2}}{(q, q)_k \left(1 + \left(\frac{1-q^2}{2} \right)^2 q^{-2m+2k} s^2 \right)}.$$

Используя (3.10), мы можем записать

$$\left| \cos_q \left(\frac{1-q^2}{2} q^{-m} s \right) \right| \leq \frac{1}{(q, q)_\infty \left(1 + \left(\frac{1-q^2}{2} \right)^2 q^{-2m} s^2 \right)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{q^{k(k+1)/2} q^{-2k}}{(q, q)_k}.$$

Тогда утверждение следствия вытекает из (2.11).

СЛЕДСТВИЕ 3.4. Если $\alpha > \beta + 1$ и вещественное $z \neq 0$, то

$$\frac{(-q^{2\alpha} z^2, q^2)_\infty}{(-q^{2\beta} z^2, q^2)_\infty} \leq \frac{C_{\alpha, \beta}}{1 + z^2 q^{2\beta}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как для любого $k \geq 0$

$$\frac{1}{1 + z^2 q^{2\beta+2k}} \leq \frac{q^{-2k}}{1 + z^2 q^{2\beta}},$$

мы из (3.8) имеем

$$\frac{(-q^{2\alpha} z^2, q^2)_\infty}{(-q^{2\beta} z^2, q^2)_\infty} \leq \frac{(q^{2(\alpha-\beta)}, q^2)_\infty}{(q^2, q^2)_\infty (1 + z^2 q^{2\beta})} \sum_{k=0}^{\infty} \left| \frac{(q^{2(\beta-\alpha+1)}, q^2)_k q^{2(\alpha-\beta-1)k}}{(q^2, q^2)_k} \right|.$$

Ряд в правой части сходится по признаку Даламбера и дает свой вклад в константу $C_{\alpha, \beta}$.

СЛЕДСТВИЕ 3.5. Если $\alpha > \beta + \frac{1}{2}$, то

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{(-q^{2(\alpha-m)}, q^2)_\infty}{(-q^{2(\beta-m)}, q^2)_\infty} = 0. \quad (3.11)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $z = q^{-2m}$, $\gamma = 0$, $\varepsilon = -1$ из (3.8) мы имеем

$$\frac{(-q^{2(\alpha-m)}, q^2)_\infty}{(-q^{2(\beta-m)}, q^2)_\infty} = \frac{(q^{2(\alpha-\beta)}, q^2)_\infty}{(q^2, q^2)_\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(q^{2(\beta-\alpha+1)}, q^2)_k q^{2(\alpha-\beta)k}}{(q^2, q^2)_k (1 + q^{2(\beta-m+k)})}.$$

Очевидно,

$$\frac{1}{1 + q^{2(\beta-m+k)}} = \frac{q^{m-k-\beta}}{q^{m-k-\beta} + q^{\beta+k-m}} \leq \frac{q^{m-k-\beta}}{2}.$$

Таким образом,

$$\left| \frac{(-q^{2(\alpha-m)}, q^2)_\infty}{(-q^{2(\beta-m)}, q^2)_\infty} \right| \leq \frac{q^{m-\beta}}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \left| \frac{(q^{2(\beta-\alpha+1)}, q^2)_k q^{2(\alpha-\beta-1/2)k}}{(q^2, q^2)_k} \right|.$$

Ряд в правой части сходится. В силу присутствия множителя q^m мы приходим к (3.11).

ЗАМЕЧАНИЕ 3.3. Пусть в (3.2) и (3.4) $a = \varepsilon q^{2\alpha}$, $b = \varepsilon q^{2\beta}$. Тогда, если $q \rightarrow 1-0$, разностное уравнение (3.4) переходит в дифференциальное уравнение

$$z(1 - \varepsilon z^2)R'(z) - (\gamma + \varepsilon(2\alpha - 2\beta - \gamma)z^2)R(z) = 0 \quad (3.12)$$

с решением

$$R(z) = Cz^\gamma (1 - \varepsilon z^2)^{\beta-\alpha}.$$

§ 4. Представление в виде интеграла Джексона модифицированных q -функций Бесселя

Напомним, что модифицированная q -функция Бесселя первого рода [1]

$$I_\nu^{(1)}((1 - q^2)s; q^2) = \frac{1}{\Gamma_{q^2}(\nu + 1)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1 - q^2)^{2n} s^{\nu+2n}}{(q^2, q^2)_n (q^{2\nu+2}, q^2)_n 2^{\nu+2n}}, \quad (4.1)$$

$$|s| < \frac{1}{1 - q^2},$$

удовлетворяет разностному уравнению

$$\left(1 - \left(\frac{1 - q^2}{2}\right)^2 q^{-2} s^2\right) f_\nu(q^{-1}s) - (q^{-\nu} + q^\nu) f_\nu(s) + f_\nu(qs) = 0, \quad (4.2)$$

а модифицированная q -функция Бесселя второго рода

$$I_\nu^{(2)}((1 - q^2)s; q^2) = \frac{1}{\Gamma_{q^2}(\nu + 1)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{2n(\nu+n)} (1 - q^2)^{2n} s^{\nu+2n}}{(q^2, q^2)_n (q^{2\nu+2}, q^2)_n 2^{\nu+2n}} \quad (4.3)$$

удовлетворяет разностному уравнению

$$f_\nu(q^{-1}s) - (q^{-\nu} + q^\nu)f_\nu(s) + \left(1 - \left(\frac{1-q^2}{2}\right)^2 s^2\right)f_\nu(qs) = 0. \quad (4.4)$$

q -функция Макдональда (q -ФМ) для нецелых ν определяется равенством [1]

$$\begin{aligned} K_\nu^{(j)}((1-q^2)s; q^2) &= \frac{1}{2}q^{-\nu^2+\nu}\Gamma_{q^2}(\nu)\Gamma_{q^2}(1-\nu) \\ &\times \left(\sqrt{\frac{a_\nu}{a_{-\nu}}} I_\nu^{(j)}((1-q^2)s; q^2) - \sqrt{\frac{a_{-\nu}}{a_\nu}} I_\nu^{(j)}((1-q^2)s; q^2) \right), \end{aligned} \quad (4.5)$$

где

$$a_\nu = \sqrt{\frac{2}{1-q^2}} e_q(-1) \frac{I_\nu^{(2)}(2; q^2)}{{}_2\Phi_1(q^{\nu+1/2}, q^{-\nu+1/2}; -q; q, q)}, \quad (4.6)$$

$$a_\nu a_{-\nu} = \frac{q^{-\nu+1/2}}{2\Gamma_{q^2}(\nu)\Gamma_{q^2}(1-\nu)\sin \nu\pi}. \quad (4.7)$$

Если ν является целым n , функции $K_n^{(j)}$ определяется предельным переходом при $\nu \rightarrow n$ в (4.5).

Функции (4.5) удовлетворяют уравнениям (4.2) и (4.4) при $j = 1$ и $j = 2$, соответственно.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1. *Модифицированная q -функция Бесселя (q -МФБ) $I_\nu^{(1)}$ при $\nu > 0$ может быть представлена в виде q -интеграла*

$$\begin{aligned} I_\nu^{(1)}((1-q^2)s; q^2) &= \frac{1+q}{2\Gamma_{q^2}(\nu+1/2)\Gamma_{q^2}(1/2)} \\ &\times \int_{-1}^1 d_q z \frac{(q^2 z^2, q^2)_\infty}{(q^{2\nu+1} z^2, q^2)_\infty} E_q\left(\frac{1-q^2}{2}zs\right) \left(\frac{s}{2}\right)^\nu. \end{aligned} \quad (4.8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим сходящийся q -интеграл

$$S_1^{(1)}(s) = \int_{-1}^1 d_q z f_\nu^{(1)}(z) E_q\left(\frac{1-q^2}{2}zs\right) \quad (4.9)$$

и потребуем, чтобы функция $S_1^{(1)}(s)(s/2)^\nu$ удовлетворяла уравнению (4.2). Тогда $S_1^{(1)}(s)$ будет удовлетворять уравнению

$$\left(1 - \left(\frac{1-q^2}{2}\right)^2 q^{-2}s^2\right)q^{-\nu}S_1^{(1)}(q^{-1}s) - (q^{-\nu} + q^\nu)S_1^{(1)}(s) + q^\nu S_1^{(1)}(qs) = 0$$

или

$$\begin{aligned} S_1^{(1)}(q^{-1}s) - S_1^{(1)}(s) - q^{2\nu}(S_1^{(1)}(s) - S_1^{(1)}(qs)) \\ = \left(\frac{1-q^2}{2}\right)^2 q^{-2} S_1^{(1)}(q^{-1}s) s^2. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Подставляя (4.9) в (4.10), умножая его на $2s^{-1}/(1-q^2)$ справа и меняя его местами с E_q , мы получаем

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 d_q z f_\nu^{(1)}(z) \frac{2s^{-1}}{1-q^2} \left(E_q \left(\frac{1-q^2}{2} q^{-2} z s \right) - E_q \left(\frac{1-q^2}{2} q^{-1} z s \right) \right) \\ - q^{2\nu} \int_{-1}^1 d_q z f_\nu^{(1)}(z) \frac{2s^{-1}}{1-q^2} \left(E_q \left(\frac{1-q^2}{2} q^{-1} z s \right) - E_q \left(\frac{1-q^2}{2} z s \right) \right) \\ = \frac{1-q^2}{2} q^{-2} \int_{-1}^1 d_q z f_\nu^{(1)}(z) E_q \left(\frac{1-q^2}{2} q^{-1} z s \right) s. \end{aligned}$$

В силу (2.13), (2.20) и (2.21) это равенство можно переписать в виде

$$\begin{aligned} q^{-1} \int_{-1}^1 d_q z f_\nu^{(1)}(z) z \ddagger e_q \left(\frac{1-q^2}{2} q^{-1} z s \right) \ddagger - q^{2\nu} \int_{-1}^1 d_q z f_\nu^{(1)}(z) z \ddagger e_q \left(\frac{1-q^2}{2} z s \right) \ddagger \\ = \frac{1-q^2}{2} q^{-2} \int_{-1}^1 d_q z f_\nu^{(1)}(z) \ddagger e_q \left(\frac{1-q^2}{2} q^{-1} z s \right) \ddagger s \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 d_q z f_\nu^{(1)}(z) z^{-2\nu+1} \frac{2z^{-1}}{1-q^2} \\ \times \left(z^{2\nu+1} \ddagger e_q \left(\frac{1-q^2}{2} q^{-1} z s \right) \ddagger - q^{2\nu+1} z^{2\nu+1} \ddagger e_q \left(\frac{1-q^2}{2} z s \right) \ddagger \right) \\ = \int_{-1}^1 d_q z f_\nu^{(1)}(z) \frac{2\partial_z}{1+q} \ddagger e_q \left(\frac{1-q^2}{2} q^{-1} z s \right) \ddagger. \end{aligned}$$

Используя формулу q -интегрирования по частям (2.2), мы получаем

$$\begin{aligned} - \int_{-1}^1 d_q z \partial_z (f_\nu^{(1)}(z) z^{-2\nu+1}) q^{2\nu+1} z^{2\nu+1} \ddagger e_q \left(\frac{1-q^2}{2} z s \right) \ddagger \\ = - \int_{-1}^1 d_q z \partial_z f_\nu^{(1)}(z) \ddagger e_q \left(\frac{1-q^2}{2} z s \right) \ddagger. \end{aligned}$$

Таким образом, мы приходим к разностному уравнению для $f_\nu^{(1)}(z)$

$$q^{2\nu+1} z^2 (f_\nu^{(1)}(z) - q^{-2\nu+1} f_\nu^{(1)}(qz)) = f_\nu^{(1)}(z) - f_\nu^{(1)}(qz). \quad (4.11)$$

Это уравнение есть ни что иное как (3.4) при $a = q^2$, $b = q^{2\nu+1}$, $\gamma = 0$, и, следовательно, из предложения 3.2

$$f_\nu^{(1)}(z) = \frac{(q^2 z^2, q^2)_\infty}{(q^{2\nu+1} z^2, q^2)_\infty}. \quad (4.12)$$

Функция $S_1^{(1)}(s)(s/2)^\nu$ является решением уравнения (4.2) и, значит, (см. [1]) может быть представлена в виде

$$S_1^{(1)}(s) \left(\frac{s}{2} \right)^\nu = AI_\nu^{(1)}((1 - q^2)s; q^2) + BK_\nu^{(1)}((1 - q^2)s; q^2).$$

Умножая обе части этого равенства на $(s/2)^\nu$ и полагая $s = 0$, из (4.1) и (4.5) мы получаем $B = 0$. Умножая теперь его на $(s/2)^{-\nu}$ и полагая $s = 0$, мы приходим к равенству

$$\int_{-1}^1 d_q z f_\nu^{(1)}(z) = A \frac{1}{\Gamma_{q^2}(\nu + 1)}.$$

Для вычисления q -интеграла в левой части мы воспользуемся его очевидным свойством

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 f(x^2) d_q x &= 2(1 - q) \sum_{m=0}^{\infty} q^m f(q^{2m}) \\ &= \frac{2(1 - q^2)}{1 + q} \sum_{m=0}^{\infty} q^{2m} f(q^{2m}) q^{-m} \\ &= \frac{2}{1 + q} \int_0^1 f(x) x^{-1/2} d_{q^2} x. \end{aligned}$$

Тогда из [10, 1.11.7]

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{(q^2 z^2, q^2)_\infty}{(q^{2\nu+1} z^2, q^2)_\infty} d_q z &= \frac{2}{1 + q} \int_0^1 \frac{(q^2 z, q^2)_\infty}{(q^{2\nu+1} z, q^2)_\infty} z^{-1/2} d_{q^2} z \\ &= \frac{2}{1 + q} B_{q^2} \left(\nu + \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right), \end{aligned}$$

где

$$B_q(\nu; \mu) = \frac{\Gamma_q(\nu) \Gamma_q(\mu)}{\Gamma_q(\nu + \mu)}$$

— q -бета-функция. Следовательно,

$$A = \frac{2}{1 + q} B_{q^2} \left(\nu + \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) \Gamma_{q^2}(\nu + 1) = \frac{2}{1 + q} \Gamma_{q^2} \left(\nu + \frac{1}{2} \right) \Gamma_{q^2} \left(\frac{1}{2} \right) \quad (4.13)$$

и мы имеем (4.8).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.2. q -МФБ $I_\nu^{(2)}((1-q^2)s; q^2)$ при $\nu > 0$ допускает следующее q -интегральное представление:

$$\begin{aligned} I_\nu^{(2)}((1-q^2)s; q^2) &= \frac{1+q}{2\Gamma_{q^2}(\nu+1/2)\Gamma_{q^2}(1/2)} \\ &\times \int_{-1}^1 d_q z \frac{(q^2 z^2, q^2)_\infty}{(q^{2\nu+1} z^2, q^2)_\infty} \\ &\times {}_0\Phi_1\left(-; 0; q, \frac{1-q^2}{2} q^{\nu+1/2} z s\right) \left(\frac{s}{2}\right)^\nu. \end{aligned} \quad (4.14)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим сходящийся q -интеграл

$$S_1^{(2)}(s) = \int_{-1}^1 d_q z f_\nu^{(2)}(z) {}_0\Phi_1\left(-; 0; q, \frac{1-q^2}{2} q^{\nu+1/2} z s\right) \quad (4.15)$$

и потребуем, чтобы функция $S_1^{(2)}(s)(s/2)^\nu$ удовлетворяла уравнению (4.4). Тогда $S_1^{(2)}(s)$ будет удовлетворять уравнению

$$q^{-\nu} S_1^{(2)}(q^{-1}s) - (q^{-\nu} + q^\nu) S_1^{(2)}(s) + \left(1 - \left(\frac{1-q^2}{2}\right)^2 s^2\right) q^\nu S_1^{(2)}(qs) = 0$$

или

$$q^{-2\nu} (S_1^{(2)}(q^{-1}s) - S_1^{(2)}(s)) - (S_1^{(2)}(s) - S_1^{(2)}(qs)) = \left(\frac{1-q^2}{2}\right)^2 S_1^{(2)}(qs) s^2.$$

Дальнейшие рассуждения те же, что и в доказательстве предложения 4.1. Здесь мы используем (2.12), (2.22) и (2.23) и получаем разностное уравнение для $f_\nu^{(2)}(z)$, совпадающее с (4.11), и, следовательно,

$$f_\nu^{(2)}(z) = \frac{(q^2 z^2, q^2)_\infty}{(q^{2\nu+1} z^2, q^2)_\infty}.$$

Так как функция $S_1^{(2)}(s)(s/2)^\nu$ является решением уравнения (4.4), она может быть представлена в виде

$$S_1^{(2)}(s) \left(\frac{s}{2}\right)^\nu = A I_\nu^{(2)}((1-q^2)s; q^2) + B K_\nu^{(2)}((1-q^2)s; q^2).$$

Так же, как и в предложении 4.1, из (4.3) и (4.5) мы получаем $B = 0$ и

$$A = \Gamma_{q^2}(\nu+1) \int_{-1}^1 \frac{(q^2 z^2, q^2)_\infty}{(q^{2\nu+1} z^2, q^2)_\infty} d_q z = \frac{2}{1+q} \Gamma_{q^2}\left(\nu + \frac{1}{2}\right) \Gamma_{q^2}\left(\frac{1}{2}\right),$$

откуда и следует (4.14).

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1. Если $q \rightarrow 1-0$, уравнение (4.11) переходит в дифференциальное уравнение (см. замечание 3.3)

$$(1 - z^2)f'_\nu(z) + (2\nu - 1)zf_\nu(z) = 0.$$

Решением этого уравнения является функция

$$f_\nu(z) = C(1 - z^2)^{\nu-1/2},$$

которая приводит к классическому интегральному представлению модифицированной функции Бесселя [12, 7.12.10]

$$I_\nu(s) = \frac{(s/2)^\nu}{\Gamma(\nu + 1/2)\Gamma(1/2)} \int_{-1}^1 (1 - z^2)^{\nu-1/2} e^{zs} dz.$$

Из соотношения

$$I_\nu^{(j)}((1 - q^2)s; q^2) = e^{-i\nu\pi/2} J_\nu^{(j)}((1 - q^2)e^{i\pi/2}s; q^2), \quad j = 1, 2,$$

и представлений (4.8) и (4.14) сразу же получаем

СЛЕДСТВИЕ 4.1. *Справедливы следующие равенства:*

$$\begin{aligned} J_\nu^{(1)}((1 - q^2)s; q^2) &= \frac{(1 + q)}{2\Gamma_{q^2}(\nu + 1/2)\Gamma_{q^2}(1/2)} \\ &\quad \times \int_{-1}^1 d_q z \frac{(q^2 z^2, q^2)_\infty}{(q^{2\nu+1} z^2, q^2)_\infty} E_q\left(-i \frac{1 - q^2}{2} z s\right) \left(\frac{s}{2}\right)^\nu, \\ J_\nu^{(2)}((1 - q^2)s; q^2) &= \frac{(1 + q)}{2\Gamma_{q^2}(\nu + 1/2)\Gamma_{q^2}(1/2)} \\ &\quad \times \int_{-1}^1 d_q z \frac{(q^2 z^2, q^2)_\infty}{(q^{2\nu+1} z^2, q^2)_\infty} \\ &\quad \times {}_0\Phi_1\left(-; 0; q, -i \frac{1 - q^2}{2} q^{\nu+1/2} z s\right) \left(\frac{s}{2}\right)^\nu. \end{aligned} \quad (4.16)$$

§ 5. Представление q -функций

Макдональда в виде q -интеграла Фурье

Здесь мы будем рассматривать q -ФМ (4.5). Мы также будем пользоваться формулами [1]:

$$\begin{aligned} I_\nu^{(2)}((1 - q^2)s; q^2) &= \frac{a_\nu}{\sqrt{z}} \left(E_q\left(\frac{1 - q^2}{2}s\right) \Phi_\nu(s) \right. \\ &\quad \left. + i e^{i\nu\pi} E_q\left(-\frac{1 - q^2}{2}s\right) \Phi_\nu(-s) \right), \end{aligned} \quad (5.1)$$

$$K_\nu^{(2)}((1 - q^2)s; q^2) = \frac{q^{-\nu^2+1/2}}{2\sqrt{a_\nu a_{-\nu}s}} E_q\left(-\frac{1 - q^2}{2}s\right) \Phi_\nu(-s), \quad (5.2)$$

где

$$\Phi_\nu(s) = {}_2\Phi_1\left(q^{\nu+1/2}, q^{-\nu+1/2}; -q; q, \frac{2q}{(1-q^2)s}\right).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.1. q -ФМ $K_\nu^{(1)}((1-q^2)s; q^2)$ при $\nu > 0$ может быть представлена в виде q -интеграла

$$K_\nu^{(1)}((1-q^2)s; q^2) = \frac{q^{-\nu^2+1/2}\Gamma_{q^2}(\nu+1/2)\Gamma_{q^2}(1/2)}{4\mathbf{Q}_\nu} \sqrt{\frac{a_\nu}{a_{-\nu}}} \times \int_{-\infty}^{\infty} d_q z \frac{(-q^2 z^2, q^2)_\infty}{(-q^{-2\nu+1} z^2, q^2)_\infty} E_q\left(i \frac{1-q^2}{2} z s\right) \left(\frac{s}{2}\right)^{-\nu}, \quad (5.3)$$

где $\mathbf{Q}_\nu$ определяется формулой (2.31).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим q -интеграл

$$S_2^{(1)}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} d_q z h_\nu^{(1)}(z) E_q\left(i \frac{1-q^2}{2} z s\right), \quad (5.4)$$

и пусть он абсолютно сходится вместе со своей q -производной. В соответствии с (2.1) и (2.13) это значит, что

$$\lim_{m \rightarrow \pm\infty} q^m \left| h_\nu^{(1)}(q^m) \frac{2\partial_s}{1+q} e_q\left(i \frac{1-q^2}{2} q^{m-1} s\right) \right| = 0.$$

Из (2.21) следует, что

$$\lim_{m \rightarrow \pm\infty} q^{2m} \left| h_\nu^{(1)}(q^m) e_q\left(i \frac{1-q^2}{2} q^m s\right) \right| = 0. \quad (5.5)$$

Проводя те же рассуждения, что и в доказательстве предложения 4.1, мы приходим к разностному уравнению для $h_\nu^{(1)}(z)$

$$z^2(-q^{-2\nu+1} h_\nu^{(1)}(z) + q^2 h_\nu^{(1)}(qz)) = h_\nu^{(1)}(z) - h_\nu^{(1)}(qz). \quad (5.6)$$

Очевидно, (5.6) есть уравнение (3.4) при $a = -q^2$, $b = -q^{-2\nu+1}$, $\gamma = 0$, и, следовательно,

$$h_\nu^{(1)}(z) = \frac{(-q^2 z^2, q^2)_\infty}{(-q^{-2\nu+1} z^2, q^2)_\infty}. \quad (5.7)$$

Из следствий 3.2 и 3.4 вытекает, что требование (5.5) выполнено. Тогда

$$S_2^{(1)}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} d_q z \frac{(-q^2 z^2, q^2)_\infty}{(-q^{-2\nu+1} z^2, q^2)_\infty} E_q\left(i \frac{1-q^2}{2} z s\right).$$

Так как функция $S_2^{(1)}(s)(s/2)^{-\nu}$ удовлетворяет уравнению (4.2), она может быть представлена в виде

$$\int_{-\infty}^{\infty} d_q z \frac{(-q^2 z^2, q^2)_{\infty}}{(-q^{-2\nu+1} z^2, q^2)_{\infty}} E_q \left(i \frac{1-q^2}{2} z s \right) \left(\frac{s}{2} \right)^{-\nu} \\ = AI_{\nu}^{(1)}((1-q^2)s; q^2) + BK_{\nu}^{(1)}((1-q^2)s; q^2)$$

или

$$(1-q) \sum_{m=-\infty}^{\infty} q^m \frac{(-q^{2m+2}, q^2)_{\infty}}{(-q^{-2\nu+2m+1}, q^2)_{\infty}} \cos_q \left(\frac{1-q^2}{2} q^m s \right) \left(\frac{s}{2} \right)^{-\nu} \\ = AI_{\nu}^{(1)}((1-q^2)s; q^2) + BK_{\nu}^{(1)}((1-q^2)s; q^2). \quad (5.8)$$

Как вытекает из следствия 3.3, функция в левой части является голоморфной в области $\operatorname{Re} s > 0$, а функция $I_{\nu}^{(1)}((1-q^2)s; q^2)$ имеет простые полюсы в точках $s = \pm \frac{2q^{-r}}{1-q^2}$, $r = 0, 1, \dots$ (см. [1]). Следовательно, $A = 0$. Умножая (5.8) на $(s/2)^{\nu}$ и полагая $s = 0$, мы имеем

$$B = 8a_{-\nu} \sqrt{a_{\nu} a_{-\nu}} q^{\nu^2-1/2} \sin \nu \pi \Gamma_{q^2}(-\nu+1)(1-q) \sum_{m=-\infty}^{\infty} q^m \frac{(-q^{2m+2}, q^2)_{\infty}}{(-q^{-2\nu+2m+1}, q^2)_{\infty}}.$$

Подсчитаем последнюю сумму. Из следствия 3.1 при $\alpha = m+1$, $\beta = -\nu + m + \frac{1}{2}$, $\varepsilon = -1$, $\gamma = 0$ вытекает

$$\frac{(-q^{2m+2}, q^2)_{\infty}}{(-q^{-2\nu+2m+1}, q^2)_{\infty}} = \frac{(q^{2\nu+1}, q^2)_{\infty}}{(q^2, q^2)_{\infty}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{q^{(2\nu+1)k} (q^{-2\nu+1}, q^2)_k}{(q^2, q^2)_k (1 + q^{-2\nu+2m+2k+1})},$$

причем этот ряд равномерно сходится на вещественной оси.

Значит,

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} q^m \frac{(-q^{2m+2}, q^2)_{\infty}}{(-q^{-2\nu+2m+1}, q^2)_{\infty}} \\ = \frac{(q^{2\nu+1}, q^2)_{\infty}}{(q^2, q^2)_{\infty}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} q^m \sum_{k=0}^{\infty} \frac{q^{(2\nu+1)k} (q^{-2\nu+1}, q^2)_k}{(q^2, q^2)_k (1 + q^{-2\nu+2m+2k+1})} \\ = \frac{q^{\nu-1/2} (q^{2\nu+1}, q^2)_{\infty}}{(q^2, q^2)_{\infty}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{q^{2\nu k} (q^{-2\nu+1}, q^2)_k}{(q^2, q^2)_k} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{q^{\nu-m-1/2} + q^{-\nu+m+1/2}}.$$

Тогда, используя (2.7), (2.31) и (4.6), (4.7), мы получаем

$$B = \frac{4q^{\nu^2+1/2} \mathbf{Q}_{\nu}}{\Gamma_{q^2}(\nu+1/2) \Gamma_{q^2}(1/2)} \sqrt{\frac{a_{-\nu}}{a_{\nu}}}$$

и (5.3).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.2. q -ФМ $K_\nu^{(2)}((1-q^2)s; q^2)$ при $\nu > \frac{3}{2}$ может быть представлена в виде q -интеграла

$$\begin{aligned} K_\nu^{(2)}((1-q^2)s; q^2) &= \frac{q^{-\nu^2+\nu}\Gamma_{q^2}(\nu+1/2)\Gamma_{q^2}(1/2)}{4\mathbf{Q}_{1/2}} \sqrt{\frac{a_\nu}{a_{-\nu}}} \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} d_q z \frac{(-q^{2\nu+1}z^2, q^2)_\infty}{(-z^2, q^2)_\infty} \\ &\times {}_0\Phi_1\left(-; 0; q, i\frac{1-q^2}{2}zs\right) \left(\frac{s}{2}\right)^{-\nu}, \end{aligned} \quad (5.9)$$

где $\mathbf{Q}_{1/2}$ определяется формулой (2.31).

Доказательство проводится по той же схеме, что и доказательство предложения 4.1. При этом используется поведение функций $I_\nu^{(2)}$ и $K_\nu^{(2)}$ при $s \rightarrow \infty$, вытекающее из (5.1) и (5.2).

ЗАМЕЧАНИЕ 5.1. При $q \rightarrow 1-0$ уравнение (5.6) переходит в дифференциальное уравнение

$$(z^2+1)h'_\nu(z) = -(2\nu+1)zh_\nu(z),$$

решением которого является функция

$$h_\nu(z) = C(z^2+1)^{-\nu-1/2}.$$

Используя предложение 2.3, мы получаем классическое интегральное представление функции Макдональда (интеграл Фурье) [12, 7.12.27]

$$K_\nu(s) = \frac{\Gamma(\nu+1/2)(s/2)^{-\nu}}{2\Gamma(1/2)} \int_{-\infty}^{\infty} (z^2+1)^{-\nu-1/2} e^{izs} dz.$$

§6. Представление q -функции Макдональда в виде q -интеграла Бесселя

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.1. q -ФМ $K_\nu^{(1)}((1-q^2)s; q^2)$ при $\nu > \frac{1}{2}$ может быть представлена в виде q -интеграла

$$\begin{aligned} K_\nu^{(1)}((1-q^2)s; q^2) &= \frac{1}{2}q^{-\nu^2-\nu}(1+q)\Gamma_{q^2}(\nu+1)\sqrt{\frac{a_\nu}{a_{-\nu}}} \\ &\times \int_0^\infty d_q z \frac{(-q^2z^2, q^2)_\infty}{(-q^{-2\nu}z^2, q^2)_\infty} z \\ &\times J_0^{(2)}((1-q^2)q^{-1/2}zs; q^2) \left(\frac{s}{2}\right)^{-\nu}. \end{aligned} \quad (6.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим q -интеграл

$$S_3^{(1)}(s) = \int_0^\infty d_q z g_\nu^{(1)}(z) J_0^{(2)}((1-q^2)q^{-1/2}zs; q^2), \quad (6.2)$$

и пусть этот q -интеграл сходится абсолютно вместе со своей q -производной. В соответствии с (2.1) и (2.2) это означает, что

$$\lim_{m \rightarrow \pm\infty} q^m \left| h_\nu^{(1)}(q^m) \frac{2\partial_s}{1+q} J_0^{(1)}((1-q^2)q^{m-1}s, q^2) \right| = 0.$$

Из (2.25) следует, что

$$\lim_{m \rightarrow \pm\infty} q^{2m} |h_\nu^{(1)}(q^m) J_1^{(1)}((1-q^2)q^m s)| = 0. \quad (6.3)$$

Проводя рассуждения, аналогичные рассуждениям в доказательстве предложения 4.1, и используя формулы (2.26)–(2.28), мы получаем для функции $g_\nu^{(1)}(z)$ разностное уравнение

$$z^2 (q^{-2\nu+1} g_\nu^{(1)}(z) - q^2 g_\nu^{(1)}(qz)) = -q g_\nu^{(1)}(z) + g_\nu^{(1)}(qz). \quad (6.4)$$

Но (6.4) есть ни что иное как уравнение (3.4) при $a = -q^2$, $b = -q^{-2\nu}$, $\gamma = 1$, и, следовательно,

$$g_\nu^{(1)}(z) = \frac{(-q^2 z^2, q^2)_\infty}{(-q^{-2\nu} z^2, q^2)_\infty} z. \quad (6.5)$$

Так как функция $S_3^{(1)}(s)(s/2)^{-\nu}$ удовлетворяет уравнению (4.2), она может быть представлена в виде

$$\begin{aligned} \int_0^\infty d_q z \frac{(-q^2 z^2, q^2)_\infty}{(-q^{-2\nu} z^2, q^2)_\infty} z J_0^{(2)}((1-q^2)q^{-1/2}zs; q^2) \left(\frac{s}{2}\right)^{-\nu} \\ = A I_\nu^{(1)}((1-q^2)s; q^2) + B K_\nu^{(1)}((1-q^2)s; q^2). \end{aligned} \quad (6.6)$$

Функция $I_\nu^{(1)}((1-q^2)s; q^2)$ является мероморфной функцией с простыми полюсами $s = \pm \frac{2q^{-r}}{1-q^2}$, $r = 0, 1, \dots$. Функция $K_\nu^{(1)}((1-q^2)s; q^2)$ и левая часть (6.6) суть голоморфные функции в области $\operatorname{Re} s > 0$. Значит, $A = 0$. Умножая (6.6) на $(s/2)^\nu$ и полагая $s = 0$, мы получаем

$$\int_0^\infty d_q z \frac{(-q^2 z^2, q^2)_\infty}{(-q^{-2\nu} z^2, q^2)_\infty} z = B \frac{q^{-\nu+1/2}}{4a_\nu \sqrt{a_\nu a_{-\nu}} \sin \nu \pi \Gamma_{q^2}(-\nu+1)}.$$

Перепишем q -интеграл с помощью (2.10) в виде

$$\begin{aligned} \int_0^\infty d_q z \frac{(-q^2 z^2, q^2)_\infty}{(-q^{-2\nu} z^2, q^2)_\infty} z &= \frac{1}{1+q} \int_0^\infty d_{q^2} z \frac{(-q^2 z, q^2)_\infty}{(-q^{-2\nu} z, q^2)_\infty} \\ &= \frac{1}{1+q} \int_0^\infty d_{q^2} z E_{q^2}(q^2 z) e_{q^2}(-q^{-2\nu} z). \end{aligned}$$

Определим

$$D_z f(z) = \frac{f(z) - f(q^2 z)}{(1 - q^2)z}.$$

Тогда

$$D_z E_{q^2}(z) = \frac{1}{1 - q^2} E_{q^2}(q^2 z), \quad D_z e_{q^2}(-q^{-2\nu} z) = -\frac{q^{-2\nu}}{1 - q^2} e_{q^2}(-q^{-2\nu} z).$$

Благодаря (2.3) мы имеем

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty d_{q^2} z E_{q^2}(q^2 z) e_{q^2}(-q^{-2\nu} z) \\ &= (1 - q^2) \int_0^\infty d_{q^2} z D_z E_{q^2}(z) e_{q^2}(-q^{-2\nu} z) \\ &= (1 - q^2) \lim_{m \rightarrow \infty} (E_{q^2}(q^{-2m}) e_{q^2}(-q^{-2\nu-2m}) - E_{q^2}(q^{2m}) e_{q^2}(-q^{-2\nu+2m})) \\ &\quad - (1 - q^2) \int_0^\infty d_{q^2} z E_{q^2}(q^2 z) D_z e_{q^2}(-q^{-2\nu} z) \\ &= (1 - q^2) \left(\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{(-q^{-2m}, q^2)_\infty}{(-q^{-2\nu-2m}, q^2)_\infty} - 1 \right) \\ &\quad + q^{-2\nu} \int_0^\infty d_{q^2} z E_{q^2}(q^2 z) e_{q^2}(-q^{-2\nu} z). \end{aligned}$$

В силу следствия 3.5 при $\alpha = 0$, $\beta = -\nu$ предел в правой части равен нулю, и мы получаем

$$\int_0^\infty d_{q^2} z E_{q^2}(q^2 z) e_{q^2}(-q^{-2\nu} z) = -\frac{1 - q^2}{1 - q^{-2\nu}}.$$

Следовательно,

$$\int_0^\infty d_q z \frac{(-q^2 z^2, q^2)_\infty}{(-q^{-2\nu} z^2, q^2)_\infty} z = -\frac{1 - q}{1 - q^{-2\nu}}$$

и

$$\begin{aligned} B &= -\frac{1 - q}{1 - q^{-2\nu}} 4q^{\nu^2-1/2} a_{-\nu} \sqrt{a_\nu a_{-\nu}} \sin \nu \pi \Gamma_{q^2}(-\nu + 1) \\ &= \frac{2q^{\nu^2+\nu}}{(1 + q) \Gamma_{q^2}(\nu + 1)} \sqrt{\frac{a_\nu}{a_{-\nu}}}. \end{aligned}$$

Тогда из (6.6) следует (6.1).

Аналогичным образом доказывается

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.2. *q -ФМ $K_\nu^{(2)}((1 - q^2)s; q^2)$ при $\nu > \frac{3}{2}$ может быть представлена в виде q -интеграла*

$$\begin{aligned} K_\nu^{(2)}((1 - q^2)s; q^2) &= \frac{1}{2} q^{-\nu^2+\nu} (1 + q) \Gamma_{q^2}(\nu + 1) \sqrt{\frac{a_\nu}{a_{-\nu}}} \\ &\quad \times \int_0^\infty d_q z \frac{(-q^{2\nu+2} z^2, q^2)_\infty}{(-z^2, q^2)_\infty} z \\ &\quad \times {}_0\Phi_3\left(-; 0, 0, q^2; q^2, -\left(\frac{1 - q^2}{2} q^{3/2} z s\right)^2\right) \left(\frac{s}{2}\right)^{-\nu}. \end{aligned} \tag{6.7}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 6.1. При $q \rightarrow 1-0$ уравнение (6.4) переходит в дифференциальное уравнение

$$z(1+z^2)g'_\nu(z) - (1-(2\nu+1)z^2)g_\nu(z) = 0.$$

Решением этого уравнения является функция

$$g_\nu(z) = Cz(1+z^2)^{-\nu-1},$$

и, таким образом, мы приходим к классическому интегральному представлению функции Макдональда [12]

$$K_\nu(s) = \Gamma(\nu+1) \left(\frac{s}{2}\right)^{-\nu} \int_0^\infty (1+z^2)^{-\nu-1} z J_0(zs) dz.$$

§ 7. Представление q -ФМ в виде двойного q -интеграла

Здесь мы объединим результаты §§ 4, 5.

Введем новую переменную ζ с коммутационными соотношениями:

$$\zeta z = z\zeta, \quad \zeta s = qs\zeta. \quad (7.1)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.1. q -ФМ $K_\nu^{(1)}((1-q^2)s; q^2)$ при $\nu > \frac{1}{2}$ может быть представлена в виде двойного q -интеграла

$$\begin{aligned} K_\nu^{(1)}((1-q^2)s; q^2) &= \frac{q^{-\nu^2-\nu}(1+q)^2\Gamma_{q^2}(\nu+1)}{4(\Gamma_{q^2}(1/2))^2} \sqrt{\frac{a_\nu}{a_{-\nu}}} \\ &\times \int_0^\infty d_q z \int_{-1}^1 d_q \zeta \frac{(-q^2 z^2, q^2 \zeta^2, q^2)_\infty}{(-q^{-2\nu} z^2, q \zeta^2, q^2)_\infty} z \\ &\times {}_0\Phi_1\left(-; 0; q, -i\frac{1-q^2}{2}q^{1/2}\zeta zs\right) \left(\frac{s}{2}\right)^{-\nu}. \end{aligned} \quad (7.2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Этот результат следует из (4.12) и (6.1). Как видно из (7.1), результат q -интегрирования не зависит от порядка интегрирования

$$\begin{aligned} K_\nu^{(1)}((1-q^2)s; q^2) &= \frac{q^{-\nu^2-\nu}(1+q)^2\Gamma_{q^2}(\nu+1)}{4(\Gamma_{q^2}(1/2))^2} \sqrt{\frac{a_\nu}{a_{-\nu}}} \\ &\times \int_0^\infty d_q z \int_{-1}^1 d_q \zeta \frac{(-q^2 z^2, q^2 \zeta^2, q^2)_\infty}{(-q^{-2\nu} z^2, q \zeta^2, q^2)_\infty} z \\ &\times {}_1E_q\left(-i\frac{1-q^2}{2}q^{1/2}\zeta zs\right) \left(\frac{s}{2}\right)^{-\nu} \\ &= \frac{q^{-\nu^2-\nu}(1-q^2)^2\Gamma_{q^2}(\nu+1)}{2(\Gamma_{q^2}(1/2))^2} \sqrt{\frac{a_\nu}{a_{-\nu}}} \\ &\times \sum_{m=-\infty}^\infty q^{2m} \sum_{l=0}^\infty \frac{(-q^{2m+2}, q^{2l+2}, q^2)_\infty}{(-q^{2m-2\nu}, q^{2l+1}, q^2)_\infty} \\ &\times \text{Cos}_q\left(\frac{1-q^2}{2}q^{m+l+1/2}s\right) \left(\frac{s}{2}\right)^{-\nu}. \end{aligned}$$

Внутренний ряд сходится равномерно по m , и мы можем поменять порядок суммирования.

ЗАМЕЧАНИЕ 7.1. Если $q \rightarrow 1 - 0$, представление (7.2) принимает вид

$$K_\nu(s) = \frac{1}{\pi} \Gamma(\nu + 1) \left(\frac{s}{2}\right)^{-\nu} \int_0^\infty (1 + z^2)^{-\nu-1} z dz \int_{-1}^1 (1 - \zeta^2)^{-1/2} e^{-i\zeta z s} d\zeta. \quad (7.3)$$

Положим $\zeta = \cos \varphi$ в (7.3). Тогда

$$K_\nu(s) = \frac{1}{\pi} \Gamma(\nu + 1) \left(\frac{s}{2}\right)^{-\nu} \int_0^\infty (1 + z^2)^{-\nu-1} z dz \int_0^\pi e^{-i z s \cos \varphi} d\varphi. \quad (7.4)$$

Известно, что через ФМ выражается двумерное преобразование Фурье функции $f(x, y) = (1 + x^2 + y^2)^{-\nu-1}$:

$$\iint (1 + x^2 + y^2)^{-\nu-1} e^{-i(x\xi + y\eta)} dx dy = \frac{2^{-\nu}\pi}{\Gamma(\nu + 1)} K_\nu(\sqrt{\xi^2 + \eta^2}) (\xi^2 + \eta^2)^{\nu/2}.$$

Замена переменных $x = z \cos \alpha$, $y = z \sin \alpha$, $\xi = s \cos \beta$, $\eta = s \sin \beta$ и $\alpha - \beta = \varphi$ приводит к (7.4).

Таким образом, (7.2) можно рассматривать как q -аналог преобразования Фурье функции

$$f(z, \zeta) = \frac{(-q^2 z^2, q^2 \zeta^2, q^2)_\infty}{(-q^{-2\nu} z^2, q \zeta^2, q^2)_\infty}$$

на квантовой плоскости в полярной системе координат (7.1).

§ 8. Случай коммутирующих переменных

В этом параграфе мы будем считать, что

$$zs = sz, \quad \zeta s = s\zeta, \quad z\zeta = \zeta z. \quad (8.1)$$

Тогда мы будем иметь q -интегральные представления, которые дадим без доказательства,

$$\begin{aligned} I_\nu^{(1)}((1 - q^2)s; q^2) &= \frac{(1 + q)(s/2)^\nu}{2\Gamma_{q^2}(\nu + 1/2)\Gamma_{q^2}(1/2)} \\ &\times \int_{-1}^1 \frac{(q^2 z^2, q^2)_\infty}{(q^{2\nu+1} z^2, q^2)_\infty} e_q\left(\frac{1 - q^2}{2} z s\right) d_q z, \end{aligned} \quad (8.2)$$

$$\begin{aligned} I_\nu^{(2)}((1 - q^2)s; q^2) &= \frac{(1 + q)(s/2)^\nu}{2\Gamma_{q^2}(\nu + 1/2)\Gamma_{q^2}(1/2)} \\ &\times \int_{-1}^1 \frac{(q^2 z^2, q^2)_\infty}{(q^{2\nu+1} z^2, q^2)_\infty} E_q\left(\frac{1 - q^2}{2} q^{\nu+1/2} z s\right) d_q z, \end{aligned} \quad (8.3)$$

$$\begin{aligned} K_\nu^{(1)}((1 - q^2)s; q^2) &= \frac{q^{-\nu^2+1/2}\Gamma_{q^2}(\nu + 1/2)\Gamma_{q^2}(1/2)}{4\mathbf{Q}_\nu} \sqrt{\frac{a_\nu}{a_{-\nu}}} \left(\frac{s}{2}\right)^{-\nu} \\ &\times \int_{-\infty}^\infty \frac{(-q^2 z^2, q^2)_\infty}{(-q^{-2\nu+1} z^2, q^2)_\infty} e_q\left(i \frac{1 - q^2}{2} z s\right) d_q z, \end{aligned} \quad (8.4)$$

$$K_{\nu}^{(2)}((1-q^2)s; q^2) = \frac{q^{-\nu^2+\nu}\Gamma_{q^2}(\nu+1/2)\Gamma_{q^2}(1/2)}{4\mathbf{Q}_{1/2}} \sqrt{\frac{a_{\nu}}{a_{-\nu}}} \left(\frac{s}{2}\right)^{-\nu} \times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(-q^{2\nu+1}z^2, q^2)_{\infty}}{(-z^2, q^2)_{\infty}} E_q\left(i\frac{1-q^2}{2}zs\right) d_q z, \quad (8.5)$$

$$K_{\nu}^{(1)}((1-q^2)s; q^2) = \frac{1}{2}q^{-\nu^2-\nu}(1+q)\Gamma_{q^2}(\nu+1)\sqrt{\frac{a_{\nu}}{a_{-\nu}}} \left(\frac{s}{2}\right)^{-\nu} \times \int_0^{\infty} \frac{(-q^{2\nu+1}z^2, q^2)_{\infty}}{(-q^{-2\nu+1}z^2, q^2)_{\infty}} zJ_0^{(1)}((1-q^2)zs; q^2) d_q z, \quad (8.6)$$

$$K_{\nu}^{(2)}((1-q^2)s; q^2) = \frac{1}{2}q^{-\nu^2+\nu}(1+q)\Gamma_{q^2}(\nu+1)\sqrt{\frac{a_{\nu}}{a_{-\nu}}} \left(\frac{s}{2}\right)^{-\nu} \times \int_0^{\infty} \frac{(-q^{2\nu+2}z^2, q^2)_{\infty}}{(-z^2, q^2)_{\infty}} zJ_0^{(2)}((1-q^2)zs; q^2) d_q z, \quad (8.7)$$

$$K_{\nu}^{(1)}((1-q^2)s; q^2) = \frac{q^{-\nu^2-\nu}(1+q)^2\Gamma_{q^2}(\nu+1)}{4\Gamma_{q^2}^2(1/2)} \sqrt{\frac{a_{\nu}}{a_{-\nu}}} \left(\frac{s}{2}\right)^{-\nu} \times \int_0^{\infty} z d_q z \int_{-1}^1 \frac{(-q^{2\nu+2}z^2, q^2\zeta^2, q^2)_{\infty}}{(-q^{-2\nu}z^2, q\zeta^2, q^2)_{\infty}} e_q\left(-i\frac{1-q^2}{2}z\zeta s\right) d_q \zeta, \quad (8.8)$$

$$K_{\nu}^{(2)}((1-q^2)s; q^2) = \frac{q^{-\nu^2+\nu}(1+q)^2\Gamma_{q^2}(\nu+1)}{4(\Gamma_{q^2}(1/2)^2)} \sqrt{\frac{a_{\nu}}{a_{-\nu}}} \left(\frac{s}{2}\right)^{-\nu} \times \int_0^{\infty} z d_q z \int_{-1}^1 \frac{(-q^{2\nu+2}z^2, q^2\zeta^2, q^2)_{\infty}}{(-z^2, q\zeta^2, q^2)_{\infty}} E_q\left(-i\frac{1-q^2}{2}q^{1/2}z\zeta s\right) d_q \zeta. \quad (8.9)$$

Список литературы

1. Олшанецкий М. А., Rogov В.-Б. К. Модифицированные q -функции Бекселя и q -функции Макдональда // Матем. сб. 1996. Т. 187. №10. С. 109–128.
2. Jackson F. H. The application of basic numbers to Bessel's and Legendre's functions // Proc. London Math. Soc. (2). 1905. V. 2. P. 192–220.
3. Виленкин Н. Я. Специальные функции и теория представлений групп. М.: Наука, 1991.
4. Ваксман Л., Корогодский Л. Алгебра ограниченных функций на квантовой группе движений плоскости и q -аналоги функций Бесселя // Докл. АН СССР. 1989. Т. 304. №5. С. 1036–1040.
5. Floreanini R., Vinet L. Addition formulas for q -Bessel functions // J. Math. Phys. 1992. V. 33. P. 2984–2988.
6. Koelink H. T. The quantum group of plane motions and the Hahn–Exton q -Bessel function // Duke Math. J. 1994. V. 76. P. 483–508.
7. Jacquet H. P. B. Fonctions de Whittaker associees aux groupes de Chevalley // Bull. Soc. Math. France. 1967. V. 95. P. 243–309.
8. Hashizume M. Whittaker functions on semisimple Lie groups // Hiroshima Math. J. 1982. V. 12. P. 259–293.
9. Olshansky M., Rogov V. Liouville quantum mechanics on a lattice from geometry of quantum Lorentz group // J. Phys. A. 1994. V. 27. P. 4669–4683.
10. Гаспер Дж., Рахман М. Базисные гипергеометрические ряды. М.: Мир, 1993.

11. *Брычков А., Прудников Ю., Марычев О.* Интегралы и ряды. Т. 1. М.: Наука, 1986.
12. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Т. 2. М.: Наука, 1966.

Институт теоретической и экспериментальной физики;
Московский институт инженеров транспорта
E-mail: `olshanet@heron.itep.ru`; `m10106@sucemi.bitnet`

Поступила в редакцию
20.08.1996