Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. Е. Орел, Критерий траекторной эквивалентности интегрируемых гамильтоновых систем в окрестности эллиптических орбит. Траекторный инвариант задачи Лагранжа, *Матем. сб.*, 1997, том 188, номер 7, 139–160

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm249>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.239.49.27

26 апреля 2023 г., 15:48:27

УДК 514.745.82

О. Е. Орел

**Критерий траекторной эквивалентности
интегрируемых гамильтоновых систем
в окрестности эллиптических орбит.
Траекторный инвариант задачи Лагранжа**

В работе получен критерий непрерывной и гладкой траекторной эквивалентности интегрируемых гамильтоновых систем с n степенями свободы в окрестности компактных эллиптических орбит. Кроме того, построен полный гладкий траекторный инвариант невырожденной интегрируемой гамильтоновой системы с двумя степенями свободы в окрестности эллиптической особой точки и предложено правило вычисления этого траекторного инварианта. Траекторный инвариант вычислен для интегрируемых систем Лагранжа в динамике твердого тела. Тем самым в явном виде указано разбиение всех систем Лагранжа на классы траекторно эквивалентных в окрестности положений равновесия.

Библиография: 8 названий.

§ 1. Введение

Пусть M^4 – симплектическое многообразие, $\mathbf{v} = \text{sgrad } h$ – гамильтонова система на нем, интегрируемая по Лиувиллю при помощи дополнительного интеграла f . А. Т. Фоменко и А. В. Болсинов построили в [1] новый топологический инвариант, классифицирующий интегрируемые гамильтоновы системы (ИГС) с двумя степенями свободы на поверхностях постоянной энергии с точностью до траекторной эквивалентности. Напомним, что две гладкие динамические системы на многообразиях M и M' называются *непрерывно* (соответственно, *гладко*) *траекторно эквивалентными*, если существует гомеоморфизм (соответственно, диффеоморфизм) одного многообразия на другое, переводящий траектории первой системы в траектории второй с сохранением ориентации. При этом преобразование не обязано сохранять время вдоль траектории. В соответствии с теорией траекторной классификации каждой динамической системе, ограниченной на поверхность уровня гамильтониана $Q^3 = \{h = \text{const}\}$, сопоставляется инвариант $W^{*t}(Q^3)$ или *t-молекула*. Две интегрируемые системы траекторно эквивалентны тогда и только тогда, когда их *t*-молекулы совпадают.

Работа выполнена при поддержке Международного научного фонда (грант № a96-45) и INTAS-94-3666.

Общие идеи и подходы, развитые в [1], использованы в данной работе для траекторной классификации ИГС с произвольным числом степеней свободы, но рассматриваемых уже не на поверхности уровня гамильтониана, а в малой окрестности эллиптической особенности отображения момента.

Рассмотрим ИГС $\mathbf{v} = \text{sgrad } h$ с n степенями свободы, заданную на некотором симплектическом многообразии M^{2n} . Предположим, что эта система интегрируема по Лиувиллю при помощи интегралов $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_n)$, $f_1 = h$. Определим пуассоново действие группы $\mathbb{R}^n$ на многообразии M^{2n} как действие, порожденное сдвигами вдоль интегральных траекторий полей $\text{sgrad } f_i$, $i = 1, \dots, n$. Слоение M^{2n} на орбиты пуассонова действия называется *лиувиллевым слоением*. Если в некоторой точке компактной орбиты (а значит, и во всех ее точках) векторные поля $\text{sgrad } f_i$ линейно независимы, то по теореме Лиувилля эта орбита диффеоморфна n -мерному тору, причем потоки $\text{sgrad } f_i$ линеаризуются в некоторых координатах, определенных в окрестности тора. Орбиты пуассонова действия $O(x)$, проходящие через точку $x \in M^{2n}$, где поля $\text{sgrad } f_i$ линейно зависимы, называются *особыми*. Размерность (ранг) особой орбиты совпадает с рангом матрицы $\text{sgrad } \mathbf{f}$ (или, что то же самое, $d\mathbf{f}$).

Пусть даны две ИГС $\mathbf{v}$ и $\mathbf{v}'$ на многообразиях M и M' , соответственно. Рассмотрим особые орбиты пуассонова действия $O(x_0)$ и $O(x'_0)$ и связные компоненты множеств $U(x_0) = \mathbf{f}^{-1}(\mathbf{f}(O(x_0)))$ и $U'(x'_0) = (\mathbf{f}')^{-1}(\mathbf{f}'(O(x'_0)))$, содержащие эти орбиты. Интересен вопрос об исследовании траекторной эквивалентности этих систем в окрестностях $U(x_0)$ и $U'(x'_0)$. В настоящей работе получен критерий траекторной эквивалентности ИГС для случая, когда особая орбита пуассонова действия невырождена и имеет эллиптический тип (определение см. ниже).

ЗАМЕЧАНИЕ. В теории динамических систем известен классический результат о траекторной эквивалентности (даже сопряженности) гиперболических векторных полей в окрестности особых точек. Однако этот результат не работает в нашем случае, поскольку ИГС не являются гиперболическими. В частности, в эллиптической особой точке весь спектр векторного поля лежит в точности на мнимой оси.

Рассмотрим особую эллиптическую орбиту пуассонова действия O ранга k (это означает, что $\text{rk } d\mathbf{f}(x) = k$ для всех точек $x \in O$). Будем считать гамильтонову систему $\mathbf{v} = \text{sgrad } h$, а также функции $f_1, \dots, f_n$ ограниченными на некоторую окрестность $U(O) \subset M^{2n}$ этой орбиты, не содержащую орбит меньшей размерности. Будем считать функцию h принадлежащей классу гладкости $C^2(M^{2n})$, если мы говорим о непрерывном траекторном инварианте, и классу гладкости $C^4(M^{2n})$, если мы говорим о гладком инварианте. Будем предполагать, что в окрестности орбиты O все орбиты пуассонова действия компактны. Кроме того, мы будем рассматривать только нерезонансные системы, т.е. будем считать, что торы с иррациональной обмоткой всюду плотны в окрестности O . В таком случае лиувиллево слоение не зависит от выбора дополнительных интегралов $f_2, \dots, f_n$, а полностью определяется гамильтонианом, поскольку почти все слои могут быть охарактеризованы как замыкания траекторий. Поэтому лиувиллево слоение в данном случае можно определить независимым образом: скажем, что точки $x_1, x_2 \in M^{2n}$ эквивалентны, если $f(x_1) = f(x_2)$ для любого гладкого

дополнительного интеграла f гамильтоновой системы. Нетрудно проверить, что это действительно отношение эквивалентности. Тогда в качестве слоения Лиувилля можно взять разбиение M^{2n} на классы эквивалентности. Слоение Лиувилля окрестности орбиты O (точками которого являются указанные классы эквивалентности) обозначим через $B(U(O))$. *Типом* точки пространства $B(U(O))$ назовем размерность соответствующего слоя.

Пространство $B(U(O))$ n -мерно и, очевидно, диффеоморфно образу окрестности $U(O)$ при отображении момента $\mathbf{f}: U(O) \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\mathbf{f}(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$. В свою очередь, в соответствии с теоремой Элиассона [3], образ отображения момента $\mathbf{f}(U(O))$ диффеоморфен окрестности нуля множества $\{u_{k+1} \geq 0, \dots, u_n \geq 0\} \subset \mathbb{R}^n$. При этом внутренние точки этой области соответствуют неособым n -мерным лиувиллевым торами, а граничные – особым орбитам меньшей размерности; точка $(0, \dots, 0)$ соответствует k -мерной эллиптической орбите O . Напомним, что образ особых орбит при отображении $\mathbf{f}$ называется *бифуркационной диаграммой* и обозначается Σ .

На множестве неособых торов Лиувилля определена непрерывная (гладкая в случае $h \in C^4$) проективная функция вращения ρ , равная отношению частот квазипериодического движения по неособым торами Лиувилля: $\rho = (\alpha^1 : \dots : \alpha^n)$. Из невырожденности орбиты O следует, что координаты функции вращения не могут обращаться в нуль одновременно. Эта функция, однако, определена не однозначно, а с точностью до выбора базиса циклов на орбите O . По непрерывности функция ρ продолжается на всю область U . Поскольку эта функция зависит только от тора, то ее можно рассматривать как функцию, заданную на лиувиллевом слоении $B(U(O))$.

ТЕОРЕМА. *Две нерезонансные ИГС $\mathbf{v}$ и $\mathbf{v}'$ с n степенями свободы непрерывно (гладко) траекторно эквивалентны в $2n$ -мерной окрестности эллиптических орбит O и O' тогда и только тогда, когда существует гомеоморфизм (диффеоморфизм) φ n -мерных лиувиллевых слоений $B(U(O))$ и $B'(U'(O'))$, обладающий следующими свойствами:*

- 1) φ сохраняет тип точек $B(U(O))$ и $B'(U'(O'))$,
- 2) φ сохраняет функцию вращения, т.е. $\varphi^* \rho' = \rho$ при некотором выборе базисов циклов на орбитах O и O' .

Как уже отмечалось, в нерезонансном случае пространства $B(U(O))$ и $B'(U'(O'))$ определены инвариантно относительно выбора дополнительных интегралов $f_2, \dots, f_n$ и, следовательно, существование отображения φ определяется только гамильтонианом. Однако для практической проверки критерия траекторной эквивалентности удобнее перейти от отображений лиувиллевых слоений к отображениям, заданным на образах отображений моментов.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Две нерезонансные ИГС $\mathbf{v}$ и $\mathbf{v}'$ с n степенями свободы непрерывно (гладко) траекторно эквивалентны в окрестности эллиптических орбит O и O' тогда и только тогда, когда существует гомеоморфизм (диффеоморфизм) φ некоторой n -мерной окрестности точки $y_0 = \mathbf{f}(O)$ на*

n -мерную окрестность точки $y'_0 = f'(O')$, обладающий следующими свойствами:

- 1) φ сохраняет тип точек отображения момента;
- 2) φ сохраняет функцию вращения, т.е. $\varphi^* \rho' = \rho$ при некотором выборе базисов циклов на орбитах O и O' .

Для невырожденных нерезонансных ИГС с двумя степенями свободы в окрестности эллиптической особой точки (орбиты ранга 0) удастся построить полный удобно вычисляемый *гладкий* траекторный инвариант. Условие невырожденности будет сформулировано ниже, отметим только, что почти все ИГС (ограниченные на окрестность эллиптической невырожденной особой точки) являются невырожденными и нерезонансными. В данном случае функция вращения определена однозначно, поскольку базис циклов на 0-мерной орбите нулевой. Кроме того, в данном случае проективную функцию $\rho = (\alpha^1 : \alpha^2)$ можно представить как скалярную функцию двух аргументов (h, f) . Для этого рассмотрим предел функции ρ в точке y_0 : $\rho_0 = (\alpha_0^1 : \alpha_0^2)$. В силу невырожденности хотя бы одна из частот, скажем, α^1 отлична от нуля. Тогда положим $\rho = \frac{\alpha^2}{\alpha^1}$ — скалярная функция. В формулируемом следствии ρ именно такая функция.

СЛЕДСТВИЕ 2. *Полным гладким траекторным инвариантом невырожденной нерезонансной ИГС с двумя степенями свободы в окрестности эллиптической особой точки $O = x_0$ является тройка чисел (последние два определены с точностью до перестановки) $\text{Tr}(x_0) = (\rho(y_0), \text{sign}(\rho_1(y_0)), \text{sign}(\rho_2(y_0)))$, где $\rho(y_0)$ — предел функции вращения в точке y_0 , а $\rho_i(y_0)$ — производные функции ρ в точке y_0 по направлениям двух касательных l_1 и l_2 к бифуркационной диаграмме (рис. 1).*

Рис. 1

Это означает, что

- 1) две невырожденные нерезонансные ИГС с двумя степенями свободы траекторно эквивалентны в окрестностях эллиптических особых точек x_0 и x'_0 тогда и только тогда, когда тройки $\text{Tr}(x_0)$ и $\text{Tr}(x'_0)$ совпадают,

- 2) *любая тройка $T\Gamma = (\alpha, t_1, t_2)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $t_i \in \{+, -\}$, реализуется как гладкий траекторный инвариант некоторой невырожденной нерезонансной ИГС в окрестности эллиптической особой точки.*

Еще раз отметим, что несмотря на присутствие в формулировке конкретного интеграла f , от него здесь ничего не зависит, поскольку ни предел функции вращения в особой точке, ни знаки производных не меняются при диффеоморфизмах окрестности образа отображения момента (что как раз и соответствует другому выбору дополнительного интеграла).

В работе также предложено правило вычисления гладкого траекторного инварианта для невырожденных ИГС. Этот инвариант построен для задачи о сферическом маятнике и задачи Лагранжа тяжелого твердого тела.

Волчок Лагранжа – это вращающееся твердое тело, эллипсоид инерции которого является эллипсоидом вращения, а центр тяжести лежит на оси вращения. Задача о движении такого тела трехпараметрическая, параметры содержат информацию о соотношении между моментами инерции тела и коэффициенте линейного потенциала. Хорошо известно, что эта задача полностью интегрируема по Лиувиллю. Динамическая система Лагранжа, описывающая вращение волчка, зависит от трех параметров, характеризующих физические свойства волчка. При выполнении некоторого соотношения между параметрами (условия Маевского) вращение волчка с постоянной угловой скоростью вокруг вертикальной оси является невырожденным положением равновесия, или эллиптической особой точкой. В данной работе найден инвариант $T\Gamma$ этой особой точки в зависимости от параметров системы. Тем самым в явном виде указано разбиение всех систем Лагранжа на классы траекторно эквивалентных в окрестности положений равновесия.

Автор выражает благодарность А. Т. Фоменко и А. В. Болсинову за постановку задачи и постоянное внимание к работе, а также В. В. Козлову за полезные замечания.

§ 2. Основные определения

Пусть $x_0 \in M^{2n}$ – особая точка отображения момента, $\text{rk } F(x_0) = k$, и пусть S – множество симметричных билинейных форм на $T_{x_0}M^{2n}$. Зададим структуру алгебры Ли на S :

$$[A, B]_{ij} = A_{ik}\omega^{kl}B_{lj} - B_{ik}\omega^{kl}A_{lj},$$

где $A = (A_{ij}) \in S$, $B = (B_{ij}) \in S$ и $\omega^{kl}\omega_{li} = \delta_i^k$, $\omega = (\omega_{li})$ – симплектическая структура на M^{2n} . Тогда соответствие $\psi: A \rightarrow A\omega^{-1}$ устанавливает изоморфизм между алгебрами Ли S и $\mathfrak{sp}(2n, \mathbb{R})$. Пусть $\mathbf{g} = \{g \mid g = \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i, \lambda_i \in \mathbb{R}, dg(x_0) = 0\}$, где f_i – первые интегралы системы. Тогда $[d^2g_\alpha(x_0), d^2g_\beta(x_0)] = d^2\{g_\alpha, g_\beta\}(x_0) = 0$ при $g_\alpha, g_\beta \in \mathbf{g}$. Это означает, что подалгебра $K_{\mathbf{g}} = \{d^2g(x_0) \mid g \in \mathbf{g}\} \subset S$ коммутативна.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Особая точка x_0 называется *невырожденной особой точкой* отображения момента, если размерность алгебры $K_{\mathbf{g}}$ равна $n - k$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2. *Эллиптической особой точкой* называется невырожденная особая точка, в которой все матрицы подалгебры $\psi(K_{\mathbf{g}})$ имеют чисто мнимые собственные значения.

Рассмотрим орбиту $O(x_0)$ пуассонова действия $\Phi: \mathbb{R}^n \rightarrow M^{2n}$, порожденную образами точки x_0 при сдвигах вдоль траекторий $\text{sgrad } f_i, i = 1, \dots, n$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.3. Орбита пуассонова действия, все точки которой невырожденные и эллиптические, называется *эллиптической орбитой*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.4. Пусть (s_i, φ_i) – стандартные переменные “действие-угол” в окрестности некоторого тора Лиувилля T^n . Согласно теореме Лиувилля на данном торе в координатах (φ_i) векторное поле является постоянным. *Числом вращения* в координатах (φ_i) (или в циклах $\gamma_i = \{\varphi_j = \text{const}, j \neq i\}$) называется проективный вектор частот квазипериодического движения на лиувилевом торе:

$$\rho = (\dot{\varphi}_1 : \dot{\varphi}_2 : \dots : \dot{\varphi}_n).$$

Число вращения на торе, очевидно, определено неоднозначно и зависит от выбора базиса (γ_i) . Однако существуют правила, позволяющие частично избавиться от этой неоднозначности. В нашей задаче в окрестности эллиптической особой точки эти циклы следует выбирать следующим образом:

- 1) циклы должны непрерывно зависеть от тора;
- 2) циклы γ_i должны стягиваться в точку при приближении к i -му $(n-1)$ -мерному листу бифуркационной диаграммы (образу множества $\{u_i = 0\}$ – см. лемму 3.1).

Таким образом, мы однозначно (с точностью до изотопии) определили циклы $\gamma_i, i = k+1, \dots, n$. Выбор циклов $\gamma_i, i = 1, \dots, k$, неоднозначен, он полностью определяется выбором базиса циклов на орбите O .

Рассматривая все семейство неособых торов Лиувилля $\{T\}$ в окрестности эллиптической орбиты, получаем на этом семействе функцию вращения $\rho(T)$. Как будет показано ниже, эта функция непрерывная при $h \in C^2$ и гладкая при $h \in C^4$. По непрерывности функция ρ может быть продолжена и на особые орбиты пуассонова действия. Поскольку эта функция зависит только от тора, то ее можно рассматривать как функцию, заданную на слоении Лиувилля $B(U(O))$.

§ 3. Теорема о траекторной классификации

В этой главе будет доказана следующая

ТЕОРЕМА 3.1. *Две нерезонансные ИГС $\mathbf{v}$ и $\mathbf{v}'$ с n степенями свободы непрерывно (гладко) траекторно эквивалентны в $2n$ -мерной окрестности эллиптических орбит O и O' тогда и только тогда, когда существует гомеоморфизм (диффеоморфизм) φ n -мерных лиувилевых слоений $B(U(O))$ и $B'(U'(O'))$, обладающий следующими свойствами:*

- 1) φ сохраняет тип точек $B(U(O))$ и $B'(U'(O'))$,
- 2) φ сохраняет функцию вращения, т.е. $\varphi^* \rho' = \rho$ при некотором выборе базисов циклов на орбитах O и O' .

Прежде чем доказывать теорему, заменой координат приведем интегралы системы к “хорошему” виду.

ЛЕММА 3.1. 1) Пусть $\mathbf{v}$ – ИГС с n степенями свободы, $O(x_0)$ – эллиптическая орбита нуассонова действия, $\text{rk df}(x_0) = k$. Тогда в некоторой окрестности U орбиты $O(x_0)$ (U гомеоморфна $\mathbb{R}^n \times T^k \times \mathbb{R}^{n-k}$) существуют симплектические координаты $(p_1, \dots, p_n, q_1 \bmod 2\pi, \dots, q_k \bmod 2\pi, q_{k+1}, \dots, q_n)$ такие, что $p_i(O(x_0)) = q_j(O(x_0)) = 0$ при $i = 1, \dots, n$, $j = k+1, \dots, n$, а интегралы f_i имеют вид

$$f_i = f_i(u_1, \dots, u_n), \quad (3.1)$$

где $u_i = p_i$ при $i = 1, \dots, k$, $u_i = p_i^2 + q_i^2$ при $i = k+1, \dots, n$. При этом якобиан отображения $\det \partial \mathbf{f} / \partial \mathbf{u}$ отличен от нуля в точке $(0, \dots, 0)$.

2) Пусть в пространстве $M^{2n} = \mathbb{R}^n \times T^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ с координатами $(p_1, \dots, p_n, q_1 \bmod 2\pi, \dots, q_k \bmod 2\pi, q_{k+1}, \dots, q_n)$ задана симплектическая структура $\omega = \sum dp_i \wedge dq_i$. Тогда произвольная гладкая функция $h(\mathbf{u}) = h(u_1, \dots, u_n)$, $dh(0, \dots, 0) \neq 0$, где $u_i = p_i$ при $i = 1, \dots, k$, $u_i = p_i^2 + q_i^2$ при $i = k+1, \dots, n$, задает интегрируемую гамильтонову систему на M^{2n} . Орбита $(0, \dots, 0) \times T^k \times (0, \dots, 0)$ будет эллиптической орбитой этой системы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Представление (3.1) функций f_i в окрестности эллиптической орбиты было получено Элиассоном в [3]. Требование невырожденности особой точки равносильно тому, что якобиан $\det \partial \mathbf{f} / \partial \mathbf{u}$ отличен от нуля в точке $(0, \dots, 0)$.

2) Очевидно, функции u_i суть интегралы системы $\text{sgrad } h$, они почти всюду независимы. Поэтому данная система интегрируема по Лиувиллю. Из условия $dh(0, \dots, 0) \neq 0$ вытекает, что орбита $(0, \dots, 0) \times T^k \times (0, \dots, 0)$ – невырожденная эллиптическая орбита этой системы. Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ 3.1. Множество ростков ИГС в окрестностях эллиптических орбит ранга k находится во взаимно однозначном соответствии с множеством ростков функций $h(\mathbf{u})$ от n переменных, заданных в окрестности нуля области $\{u_{k+1} \geq 0, \dots, u_n \geq 0\} \subset \mathbb{R}^n$, с отличным от нуля дифференциалом $dh(0, \dots, 0)$.

Описанные в лемме симплектические координаты (p_i, q_i) назовем *правильными*. Для произвольной ИГС рассмотрим правильные координаты в окрестности эллиптической орбиты. Тогда гамильтонова система в новых координатах принимает вид

$$\begin{aligned} \dot{p}_i &= 0, & \dot{q}_i &= h_{u_i}(\mathbf{u}), & i &= 1, \dots, k, \\ \dot{p}_i &= -2q_i h_{u_i}(\mathbf{u}), & \dot{q}_i &= 2p_i h_{u_i}(\mathbf{u}), & i &= k+1, \dots, n. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Траектории системы находятся в явном виде:

$$\begin{aligned} p_i &= u_i, & q_i &= h_{u_i}(\mathbf{u})t + C_i \bmod 2\pi, & i &= 1, \dots, k, \\ p_i &= \sqrt{u_i} \cos(2h_{u_i}(\mathbf{u})t + D_i), & q_i &= \sqrt{u_i} \sin(2h_{u_i}(\mathbf{u})t + D_i), & i &= k+1, \dots, n, \end{aligned}$$

где C_i и D_i – некоторые постоянные, зависящие от начальной точки. Это означает, что движение по тору $\{\mathbf{u} = \text{const}\}$ раскладывается в сумму равномерных движений по окружностям $S_i = \{u_j = \text{const}, j \neq i\}$ с частотами $h_{u_i}(\mathbf{u})$ при $i = 1, \dots, k$ и $2h_{u_i}(\mathbf{u})$ при $i = k + 1, \dots, n$ соответственно. Число вращения на торе равно отношению этих частот:

$$\rho(\mathbf{u}) = h_{u_1}(\mathbf{u}) : \dots : h_{u_k}(\mathbf{u}) : 2h_{u_{k+1}}(\mathbf{u}) : \dots : 2h_{u_n}(\mathbf{u}). \quad (3.3)$$

В силу условия $dh(0, \dots, 0) \neq 0$ все компоненты этого вектора не обращаются в нуль одновременно.

ЗАМЕЧАНИЕ. В самом начале мы предположили, что функция h принадлежит классу гладкости C^2 . Это означает, что она принадлежит классу гладкости C^1 по переменным u_i , а функция вращения принадлежит классу C^0 . Если же функция h принадлежит классу гладкости C^4 , то функция вращения оказывается C^1 -гладкой. Только в последнем случае имеет смысл говорить о гладкой эквивалентности.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. В одну сторону доказательство очевидно: траекторный гомеоморфизм (диффеоморфизм) ИГС в окрестностях эллиптических орбит индуцирует гомеоморфизм (диффеоморфизм) лиувиллевых слоений, сохраняющий функцию вращения.

Докажем обратное утверждение. Пусть $\mathbf{v} = \text{sgrad } h$ и $\mathbf{v}' = \text{sgrad } h'$ – две нерезонансные ИГС. Ограничим каждую из них на окрестности $U(O)$ и $U'(O')$ соответствующих эллиптических орбит O и O' . Пусть существует указанный в условии гомеоморфизм (диффеоморфизм) лиувиллевых слоений $B(U(O))$ и $B'(U'(O'))$. Докажем, что этот гомеоморфизм (диффеоморфизм) продолжается до траекторного гомеоморфизма (диффеоморфизма) окрестностей $U(O)$ и $U'(O')$. Для этого в обеих системах перейдем к правильным координатам (p_i, q_i) и (p'_i, q'_i) . Как и раньше, обозначим $u_i = p_i, u'_i = p'_i$ при $i = 1, \dots, k, u_i = p_i^2 + q_i^2, u'_i = (p'_i)^2 + (q'_i)^2$ при $i = k + 1, \dots, n$. Из леммы 3.1 следует, что лиувиллевы слоения $B(U(O))$ и $B'(U'(O'))$ диффеоморфны соответственно окрестностям нулей областей $W = \{u_i \geq 0, i = k + 1, \dots, n\} \subset \mathbb{R}^n$ и $W' = \{u'_i \geq 0, i = k + 1, \dots, n\} \subset \mathbb{R}^n$. Тогда гомеоморфизм (диффеоморфизм) φ индуцирует гомеоморфизм (диффеоморфизм) областей W и W' , который мы обозначим той же буквой φ .

Будем считать, что при гомеоморфизме φ гиперплоскости $\{u_i = 0\}$ переходят в соответствующие гиперплоскости $\{u'_i = 0\}$ при $i = k + 1, \dots, n$. В противном случае нужно перенумеровать координаты. Пусть $\mathbf{u}' = \varphi(\mathbf{u})$. Построим следующее отображение окрестностей $U(O)$ и $U'(O')$:

$$\begin{aligned} p'_i &= u'_i, & q'_i &= q_i, & i &= 1, \dots, k, \\ p'_i &= p_i \sqrt{\frac{u'_i}{u_i}}, & q'_i &= q_i \sqrt{\frac{u'_i}{u_i}}, & i &= k + 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Очевидно, что такое отображение взаимно однозначно. Покажем, что оно дает траекторный гомеоморфизм (диффеоморфизм). Действительно, сделаем замену

времени:

$$t' = \frac{h_{u_i}(\mathbf{u})}{h'_{u'_i}(\mathbf{u}')} t.$$

Здесь коэффициент при t не зависит от номера i , так как проективные векторы вращения совпадают в данной точке. При такой замене траектории переходят в траектории:

$$\begin{aligned} p_i &= u_i & \mapsto p'_i &= u'_i, \\ q_i &= h_{u_i}(\mathbf{u})t + C_i \bmod 2\pi & \mapsto q'_i &= h'_{u'_i}(\mathbf{u}')t' + C_i \bmod 2\pi, \quad i = 1, \dots, k; \\ p_i &= \sqrt{u_i} \cos(2h_{u_i}(\mathbf{u})t + D_i) & \mapsto p'_i &= \sqrt{u'_i} \cos(2h'_{u'_i}(\mathbf{u}')t' + D_i), \\ q_i &= \sqrt{u_i} \sin(2h_{u_i}(\mathbf{u})t + D_i) & \mapsto q'_i &= \sqrt{u'_i} \sin(2h'_{u'_i}(\mathbf{u}')t' + D_i), \quad i = k+1, \dots, n. \end{aligned}$$

Непрерывность замены $(p_i, q_i) \mapsto (p'_i, q'_i)$ очевидна. Проверим ее гладкость для гладкого отображения φ . Легко видеть, что функции p'_i и q'_i непрерывно дифференцируемы по всем переменным p_i и q_i при $i = 1, \dots, k$. Проверим непрерывность частных производных p'_i и q'_i при $i = k+1, \dots, n$. Для этого нам потребуется следующая

ЛЕММА 3.2. *При $i = k+1, \dots, n$ имеют место равенства $u'_i = u_i \psi_i(\mathbf{u})$, где $\psi_i(\mathbf{u})$ — функции, непрерывные в области $W = \{u_i \geq 0, i = k+1, \dots, n\}$ и непрерывно дифференцируемые в $\dot{W} = \{u_i > 0\} \cap W$. При этом $\psi_i(0, \dots, 0) \neq 0$, $u_i \frac{\partial \psi_i}{\partial u_j}$ и $u_j \frac{\partial \psi_i}{\partial u_j}$ стремятся к нулю при $u_i \rightarrow 0$ для всех $j = k+1, \dots, n$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $\psi_i = \frac{u'_i}{u_i}$ в области $\dot{W}$. Функция ψ_i непрерывно дифференцируема в этой области, так как u'_i непрерывно дифференцируема. По определению производной $\frac{u'_i}{u_i} \Big|_{\mathbf{u}} \rightarrow \frac{\partial u'_i}{\partial u_i} \Big|_{\mathbf{u}^0}$ при $\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{u}^0 = (u_1^0, \dots, u_{i-1}^0, 0, u_{i+1}^0, \dots, u_n^0)$. Следовательно, функция ψ_i продолжается по непрерывности во всю область W . По условию отображение φ является диффеоморфизмом в окрестности нуля. Поскольку гиперплоскость $\{u_i = 0\}$ переходит в гиперплоскость $\{u'_i = 0\}$ при $i = k+1, \dots, n$, то якобиан отображения φ в нуле имеет вид

$$D\varphi = \begin{pmatrix} * & ** \\ 0 & A \end{pmatrix},$$

где $*$ и $**$ — некоторые $k \times k$ - и $k \times (n-k)$ -матрицы соответственно, 0 — нулевая $(n-k) \times k$ -матрица, а A — диагональная матрица с элементами $(\psi_i(0, \dots, 0))$ на диагонали. Следовательно, $(\psi_i(0, \dots, 0)) \neq 0$.

Чтобы доказать последнее утверждение, продифференцируем u'_i по u_i :

$$\frac{\partial u'_i}{\partial u_i} \Big|_{\mathbf{u}} = \psi_i(\mathbf{u}) + u_i \frac{\partial \psi_i(\mathbf{u})}{\partial u_i}.$$

Так как $\left. \frac{u'_i}{u_i} \right|_{\mathbf{u}} \rightarrow \left. \frac{\partial u'_i}{\partial u_i} \right|_{\mathbf{u}^0}$ при $\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{u}^0 = (u_1^0, \dots, u_{i-1}^0, 0, u_{i+1}^0, \dots, u_n^0)$, то $u_i \frac{\partial \psi_i}{\partial u_i} \rightarrow 0$ при $u_i \rightarrow 0$. Условия $u_i \frac{\partial \psi_i}{\partial u_j}$ и $u_j \frac{\partial \psi_i}{\partial u_j} \rightarrow 0$ при $u_i \rightarrow 0$ для $j \neq i$ следует из того, что $\frac{\partial u'_i}{\partial u_j}$ при $j \neq i$ обращается в нуль на гиперплоскости $\{u_i = 0\}$. Лемма доказана.

Продолжим доказательство теоремы. Рассмотрим, для определенности, функцию $p'_i = p_i \sqrt{\frac{u'_i}{u_i}} = p_i \sqrt{\psi_i}$, $i > k$. В соответствии с леммой 3.2 она непрерывна и имеет непрерывные частные производные по всем переменным всюду за исключением, быть может, гиперплоскости $\{u_i = 0\}$. Найдем пределы частных производных p'_i по всем переменным на этой гиперплоскости:

$$\frac{\partial p'_i}{\partial p_i} = \sqrt{\psi_i} + \frac{p_i^2 (\partial \psi_i) / (\partial u_i)}{\sqrt{\psi_i}}.$$

Поскольку $u_i \frac{\partial \psi_i}{\partial u_i} \rightarrow 0$ при $u_i \rightarrow 0$ и $\psi_i(0, \dots, 0) \neq 0$, то второе слагаемое стремится к нулю при подходе к гиперплоскости, а первое непрерывно. Аналогично,

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial p'_i}{\partial q_i} \right| &= \left| \frac{p_i q_i (\partial \psi_i) / (\partial u_i)}{\sqrt{\psi_i}} \right| \leq \frac{u_i (\partial \psi_i) / (\partial u_i)}{2\sqrt{\psi_i}} \rightarrow 0, & u_i \rightarrow 0, \\ \left| \frac{\partial p'_i}{\partial p_j} \right| &= \left| \frac{p_i p_j (\partial \psi_i) / (\partial u_j)}{\sqrt{\psi_i}} \right| \leq \frac{(u_i + u_j) (\partial \psi_i) / (\partial u_j)}{2\sqrt{\psi_i}} \rightarrow 0, & u_i \rightarrow 0, \\ \left| \frac{\partial p'_i}{\partial q_j} \right| &= \left| \frac{p_i q_j (\partial \psi_i) / (\partial u_j)}{\sqrt{\psi_i}} \right| \leq \frac{(u_i + u_j) (\partial \psi_i) / (\partial u_j)}{2\sqrt{\psi_i}} \rightarrow 0, & u_i \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Итак, все частные производные p'_i по p_i , q_i существуют и непрерывны в окрестности нуля. Аналогичное утверждение верно для q'_i . Кроме того, матрица Якоби в нуле имеет диагональный вид и все ее диагональные элементы отличны от нуля. Это доказывает, что построенное отображение $(p_i, q_i) \mapsto (p'_i, q'_i)$ является диффеоморфизмом. Теорема доказана.

Для практической проверки критерия траекторной эквивалентности удобнее перейти от отображений лиувиллевых слоений к отображениям, заданным на образах отображений моментов.

СЛЕДСТВИЕ 3.2. *Две нерезонансные ИГС $\mathbf{v}$ и $\mathbf{v}'$ с n степенями свободы непрерывно (гладко) траекторно эквивалентны в окрестности эллиптических орбит O и O' тогда и только тогда, когда существует гомеоморфизм (диффеоморфизм) φ некоторой n -мерной окрестности точки $y_0 = \mathbf{f}(O)$ на n -мерную окрестность точки $y'_0 = \mathbf{f}'(O')$, обладающий следующими свойствами:*

- 1) φ сохраняет тип точек отображения момента;
- 2) φ сохраняет функцию вращения, т.е. $\varphi^* \rho' = \rho$ при некотором выборе базисов циклов на орбитах O и O' .

Доказанная теорема упрощает задачу классификации ИГС в окрестности положения равновесия, однако в реальных физических задачах проверить существование требуемого преобразования, сохраняющего функцию вращения, достаточно сложно. Поэтому возникает желание построить легко вычисляемый траекторный инвариант, классифицирующий ИГС в окрестности эллиптической орбиты. Очевидно, предел функции вращения при стремлении к орбите является траекторным инвариантом, однако он не полон. Удастся построить лишь удобно вычисляемый полный *гладкий* траекторный инвариант, причем результат является содержательным лишь в случае ИГС с двумя степенями свободы. Кроме того, наиболее интересной является проблема о сравнении систем (с траекторной точки зрения) в окрестности *эллиптической особой точки* или в окрестности положения равновесия. Именно этот результат мы и сформулируем.

Итак, рассмотрим нерезонансную ИГС на многообразии M^4 и ограничим ее на окрестность эллиптической особой точки x_0 – эллиптической орбиты ранга 0. Введем правильные координаты (p_1, p_2, q_1, q_2) в окрестности точки x_0 . Пусть, как и раньше, $u_i = p_i^2 + q_i^2$. Рассмотрим проективный вектор вращения $\rho(u_1, u_2)$ в этой окрестности. Пусть, для определенности, $h_{u_2}(0, 0) \neq 0$. Тогда можно считать, что ρ – это просто функция, равная $\frac{h_{u_1}}{h_{u_2}}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. ИГС называется *невыврожденной* в эллиптической особой точке, если

$$\left. \frac{\partial \rho}{\partial u_1} \right|_{(0,0)} \neq 0, \quad \left. \frac{\partial \rho}{\partial u_2} \right|_{(0,0)} \neq 0.$$

Поясним, почему этот случай является общим. В соответствии со следствием 3.1, множество ростков ИГС в окрестностях эллиптических особых точек находится во взаимно однозначном соответствии с множеством ростков функций $h(u_1, u_2)$ от двух переменных, заданных в окрестности нуля, с отличным от нуля дифференциалом $dh(0, 0)$. Для произвольной функции h такого вида выпишем явный вид дифференциала функции вращения:

$$d\rho(u_1, u_2) = \left(\frac{h_{u_1 u_1} h_{u_2} - h_{u_1} h_{u_1 u_2}}{h_{u_2}^2}, \frac{h_{u_1 u_2} h_{u_2} - h_{u_1} h_{u_2 u_2}}{h_{u_2}^2} \right). \quad (3.4)$$

Условия $\left. \frac{\partial \rho}{\partial u_1} \right|_{(0,0)} \neq 0, \left. \frac{\partial \rho}{\partial u_2} \right|_{(0,0)} \neq 0$ эквивалентны следующим:

$$\left. \frac{h_{u_1}}{h_{u_2}} \right|_{(0,0)} \neq \left. \frac{h_{u_1 u_1}}{h_{u_1 u_2}} \right|_{(0,0)}, \quad \left. \frac{h_{u_1}}{h_{u_2}} \right|_{(0,0)} \neq \left. \frac{h_{u_1 u_2}}{h_{u_2 u_2}} \right|_{(0,0)}. \quad (3.5)$$

Очевидно, что это случай общего положения. Добавим, что все реальные физические задачи (в частности, задачи динамики твердого тела) являются гладкими и почти все они невырожденные.

СЛЕДСТВИЕ 3.3. Полным гладким траекторным инвариантом невырожденной нерезонансной ИГС с двумя степенями свободы в окрестности эллиптической особой точки $O = x_0$ является тройка чисел (последние два определены с точностью до перестановки) $\text{Tr}(x_0) = (\rho(y_0), \text{sign}(\rho_1(y_0)), \text{sign}(\rho_2(y_0)))$, где $\rho(y_0)$ – предел функции вращения в точке y_0 , а $\rho_i(y_0)$ – производные функции ρ в точке y_0 по направлениям двух касательных l_1 и l_2 к бифуркационной диаграмме.

Это означает, что

- 1) две невырожденные ИГС с двумя степенями свободы траекторно эквивалентны в окрестностях эллиптических особых точек x_0 и x'_0 тогда и только тогда, когда тройки $\text{Tr}(x_0)$ и $\text{Tr}(x'_0)$ совпадают;
- 2) любая тройка $\text{Tr} = (\alpha, t_1, t_2)$, $\alpha \in \mathbb{R}, t_i \in \{+, -\}$, реализуется как гладкий траекторный инвариант некоторой невырожденной ИГС в окрестности эллиптической особой точки.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть даны две ИГС $\mathbf{v}$ и $\mathbf{v}'$. Если эти системы гладко траекторно эквивалентны в окрестностях эллиптических особых точек x_0 и x'_0 , то по теореме 3.1 существует диффеоморфизм φ областей $\{u_1 \geq 0, u_2 \geq 0\}$ и $\{u'_1 \geq 0, u'_2 \geq 0\}$, сохраняющий функцию вращения. Поэтому $\rho(0, 0) = \rho'(0, 0)$, и знаки производных функций вращения по соответствующим координатам совпадают. В частности, если одна из них невырождена в особой точке, то и вторая невырождена. *Необходимость* доказана.

Докажем *достаточность*. Пусть у двух ИГС, невырожденных в окрестностях эллиптических особых точек x_0 и x'_0 , совпадают траекторные инварианты $\text{Tr}(x_0) = \text{Tr}(x'_0)$. Рассмотрим линейное преобразование φ_0 :

$$\begin{pmatrix} u'_1 \\ u'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{(\partial\rho)/(\partial u_1)(0,0)}{(\partial\rho')/(\partial u'_1)(0,0)} & 0 \\ 0 & \frac{(\partial\rho)/(\partial u_2)(0,0)}{(\partial\rho')/(\partial u'_2)(0,0)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix},$$

переводящее область $\{u_1 \geq 0, u_2 \geq 0\}$ в область $\{u'_1 \geq 0, u'_2 \geq 0\}$. Легко проверить, что $\varphi_0^* \rho' = \rho + o(u_1, u_2)$. Корректируя это преобразование $\varphi(u_1, u_2) = \varphi_0(u_1, u_2) + o(u_1, u_2)$ в классе C^1 , нетрудно добиться равенства $\varphi_0^* \rho' = \rho$.

Докажем теперь, что любой инвариант (α, t_1, t_2) , $t_i \in \{+, -\}$, реализуется как гладкий траекторный инвариант некоторой невырожденной ИГС в окрестности эллиптической особой точки. Известно (лемма 3.1), что произвольная функция $h(u_1, u_2)$, $dh(0, 0) \neq 0$, задает ИГС в области $\{u_1 \geq 0, u_2 \geq 0\} \subset \mathbb{R}^4$. Требуется подобрать такую функцию h , чтобы для функции вращения были выполнены следующие соотношения: $\rho(0, 0) = \alpha$, $\text{sign} \frac{\partial \rho}{\partial u_1}(0, 0) = t_1$, $\text{sign} \frac{\partial \rho}{\partial u_2}(0, 0) = t_2$. Для $\alpha \neq 0$ положим $h = \alpha u_1 + u_2 + t_1 u_1^2 - \alpha t_2 u_2^2$. Тогда из формул (3.3) и (3.4) находим: $\rho(0, 0) = \alpha$, $d\rho(0, 0) = (2t_1, 2\alpha^2 t_2)$. Для $\alpha = 0$ полагаем $h = u_2 + t_1 u_1^2 + t_2 u_1 u_2$. Тогда $\rho(0, 0) = 0$, $d\rho = (2t_1, t_2)$. Следствие доказано.

В следующих параграфах предлагается правило вычисления этого инварианта для всех ИГС в окрестности эллиптической особой точки.

**§ 4. Вычисление гладкого
траекторного инварианта в простейшем случае.
Траекторный инвариант сферического маятника**

Пусть гладкая интегрируемая гамильтонова система

$$\dot{p}_j = -\frac{\partial h}{\partial q_j}, \quad \dot{q}_j = \frac{\partial h}{\partial p_j}, \quad j = 1, 2,$$

задана в окрестности начала координат $x_0 = (0, 0, 0, 0)$ пространства $\mathbb{R}^4$. Гамильтониан $h(p, q) \in C^4(\mathbb{R}^4)$ и дополнительный интеграл $f(p, q)$ будем считать известными. Пусть известно также, что точка x_0 является невырожденной эллиптической особой точкой системы. Предъявим правило, следуя которому можно ответить на вопрос, находится ли эта система в общем положении в точке x_0 , и в случае положительного ответа вычислить для нее траекторный инвариант.

Напомним, что в соответствии с леммой 3.1 существуют правильные симплектические координаты (p, q) , в которых функции h и f принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} h &= \frac{1}{2}\alpha_1 u + \frac{1}{2}\alpha_2 v + \frac{1}{4}a_{11}u^2 + \frac{1}{2}a_{12}uv + \frac{1}{4}a_{22}v^2 + \dots, \\ f &= \frac{1}{2}\beta_1 u + \frac{1}{2}\beta_2 v + \frac{1}{4}b_{11}u^2 + \frac{1}{2}b_{12}uv + \frac{1}{4}b_{22}v^2 + \dots, \end{aligned} \quad (4.1)$$

где

$$u = p_1^2 + q_1^2, \quad v = p_2^2 + q_2^2.$$

Из этого представления и из формулы для дифференциала функции вращения видно, что нам требуется найти нормальную форму Биркгофа степени 4 с точностью до членов степени 5. В этом случае для вычисления траекторного инварианта нужно просто воспользоваться правилом Биркгофа [4], [5] приведения гамильтониана к нормальной форме.

ЗАМЕЧАНИЕ. В теореме Биркгофа требуется, чтобы частоты системы α_1, α_2 не удовлетворяли ни одному резонансному соотношению порядка 4 и меньше. В противном случае правило перестает работать. В нашем случае ситуация иная. Мы знаем, что система интегрируема, и имеем в своем распоряжении дополнительный интеграл. Более того, имеет место неравенство $\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 \neq 0$. Рассматривая линейные комбинации h и f , можно построить функцию с любыми частотами. Поэтому в нашей задаче проблемы резонансов не возникает.

Продemonстрируем работу этого правила на примере сферического маятника. Задача о движении сферического маятника в поле силы тяжести является самой простой и в то же время показательной задачей на вычисление траекторного инварианта в эллиптической особой точке, которая совпадает с положением равновесия системы.

Опишем динамику системы. Фазовое пространство системы — кокасательное расслоение к двумерной сфере T^*S^2 . Уравнения движения маятника в поле силы тяжести имеют, очевидно, два интеграла — это энергия h и угловой момент f . Рассмотрим в T^*S^2 координаты (x, y) , где x — координата точки на сфере, а y

– ее импульс. Эти координаты являются избыточными, так как удовлетворяют соотношениям $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$, $y_1x_1 + y_2x_2 + y_3x_3 = 0$. Интегралы в этих координатах записываются следующим образом:

$$h(x, y) = \frac{1}{2}(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) + x_3,$$

$$f(x, y) = y_1x_2 - y_2x_1.$$

Бифуркационная диаграмма для этой задачи построена в [6]. Легко проверяется, что точка $(0, 0, -1, 0, 0, 0)$ является эллиптической особой точкой этой системы. В окрестности этой точки в качестве локальных координат можно выбрать симплектические координаты (x_1, x_2, z_1, z_2) (координаты-импульсы). В них функция h принимает вид

$$h = \frac{1}{2}(z_1^2 + z_2^2) - \frac{1}{2}(z_1x_1 + z_2x_2)^2 - \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}$$

$$= -1 + \frac{1}{2}(z_1^2 + z_2^2) + \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) - \frac{1}{2}(z_1x_1 + z_2x_2)^2 + \frac{1}{8}(x_1^2 + x_2^2)^2 + \dots,$$

где многоточием обозначены члены более высокого порядка. Отсюда получаем $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$, $\rho(x_0) = 1$.

На первый взгляд кажется, что квадратичная часть гамильтониана уже приведена к нормальному виду. Однако это не так: дополнительный интеграл f не имеет в этих координатах нормальной формы. Это произошло потому, что частоты системы удовлетворяют резонансному соотношению 2-го порядка $\alpha_1 - \alpha_2 = 0$. Чтобы правильно выбрать координаты, приведем функцию f также к нормальному виду. Получаем замену:

$$y_1 = \frac{p_1 + p_2}{\sqrt{2}}, \quad x_1 = \frac{q_1 + q_2}{\sqrt{2}}, \quad y_2 = \frac{q_2 - q_1}{\sqrt{2}}, \quad x_2 = \frac{p_1 - p_2}{\sqrt{2}}.$$

Функции h и f в новых координатах принимают вид

$$h = -1 + \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2 + q_1^2 + q_2^2) - \frac{1}{2}(p_1q_2 + p_2q_1)^2$$

$$+ \frac{1}{32}((q_1 + q_2)^2 + (p_1 - p_2)^2)^2 + \dots,$$

$$f = \frac{1}{2}(p_1^2 + q_1^2) - \frac{1}{2}(p_2^2 + q_2^2).$$

Заметим, что функции h и f не содержат кубической части, т.е. оказываются приведенными к нормальной форме третьего порядка.

Далее, в соответствии с правилом Биркгофа следует привести наши функции к нормальной форме 4-й степени. Однако в нашей задаче этого можно не делать. Из правила Биркгофа следует, что нужные коэффициенты a_{11} , a_{12} и a_{22} можно определить уже сейчас. Для этого перейдем к комплексным координатам:

$z_l = p_l + iq_l$. Известно (Биркгоф), что коэффициент при $z_1^2 \bar{z}_1^2$ равен $\frac{1}{4}a_{11}$, коэффициент при $z_1 \bar{z}_1 z_2 \bar{z}_2$ равен $\frac{1}{2}a_{12}$, а коэффициент при $z_2^2 \bar{z}_2^2$ равен $\frac{1}{4}a_{22}$. В нашем случае получаем

$$a_{11} = a_{22} = \frac{1}{8}, \quad a_{12} = -\frac{1}{4},$$

откуда, используя формулу (3.4), немедленно находим знаки производной функции ρ по направлениям касательных к бифуркационной диаграмме: $\text{sign}(\rho_1) = -$, $\text{sign}(\rho_2) = +$. Итак, мы доказали следующее

УТВЕРЖДЕНИЕ 4.1. *Гладкий траекторный инвариант сферического маятника в особой точке равен $(1, -, +)$.*

§ 5. Правило вычисления гладкого траекторного инварианта в общем случае

Пусть в пространстве $\mathbb{R}^4$ в окрестности начала координат $x_0 = (0, 0, 0, 0)$ задана произвольная симплектическая структура $\omega = \sum_{i < j} \omega_{ij} dx^i \wedge dx^j$ и функция $h(x) \in C^4(\mathbb{R}^4)$. Предположим, что гамильтонова система

$$\dot{x} = \text{sgrad } h$$

интегрируема в этой окрестности при помощи дополнительного интеграла f , и точка x_0 является эллиптической особой точкой системы. Как и раньше, требуется предъявить правило, отвечающее на вопрос, находится ли эта система в общем положении в точке x_0 , и в случае положительного ответа вычисляющее для нее траекторный инвариант.

Мы могли бы попытаться построить сначала симплектические координаты, а затем воспользоваться предыдущей схемой. В некоторых задачах это действительно можно сделать. В общем случае найти симплектические координаты очень непросто. Однако заметим, что нам и не нужны в точности симплектические, а затем правильные координаты. Ведь для вычисления траекторного инварианта нужны только начальные коэффициенты ряда (4.1) при первых и вторых степенях переменных u и v . Поэтому достаточно найти лишь приближение правильных координат с точностью до членов второго порядка. Попытаемся реализовать эту идею в виде следующего правила.

Шаг 1. Построение первого приближения правильных координат.

УТВЕРЖДЕНИЕ 5.1. *Существует единственная с точностью до поворота в плоскостях (s_i, t_i) линейная замена координат $(x_1, x_2, x_3, x_4) \rightarrow (s_1, t_1, s_2, t_2)$ такая, что новые координаты являются первым приближением правильных координат (p, q) :*

$$\begin{aligned} p_i &= s_i + \text{члены более высокого порядка}, \\ q_i &= t_i + \text{члены более высокого порядка}. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Найдем собственные значения матрицы A линеаризованной системы $\dot{x} = \text{sgrad } h$ и матрицы B линеаризованной системы $\dot{x} = \text{sgrad } f$ и сделаем линейную замену переменных $(x) \rightarrow (\tilde{s}, \tilde{t})$, приводящую матрицы A и B к виду

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_1 & 0 & 0 \\ \alpha_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha_2 \\ 0 & 0 & \alpha_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -\beta_1 & 0 & 0 \\ \beta_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\beta_2 \\ 0 & 0 & \beta_2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Эта замена определена однозначно с точностью до поворотов и растяжений в плоскостях $(\tilde{s}_i, \tilde{t}_i)$. Коэффициенты растяжения легко вычислить, требуя чтобы гамильтониан и дополнительный интеграл в новых координатах (s_i, t_i) имели вид

$$\begin{aligned} h(s, t) &= \frac{1}{2}\alpha_1(s_1^2 + t_1^2) + \frac{1}{2}\alpha_2(s_2^2 + t_2^2) + \dots, \\ f(s, t) &= \frac{1}{2}\beta_1(s_1^2 + t_1^2) + \frac{1}{2}\beta_2(s_2^2 + t_2^2) + \dots. \end{aligned}$$

Поскольку правильные координаты (p, q) определены также с точностью до поворота, получаем требуемое утверждение.

Заметим, что симплектическая структура в особой точке x_0 в новых координатах имеет вид

$$\omega(x_0) = ds_1 \wedge dt_1 + ds_2 \wedge dt_2.$$

Одновременно с первым приближением мы получили предел функции вращения в особой точке x_0 :

$$\rho(x_0) = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}.$$

Далее нам будет удобно работать в комплексных координатах $z_l = s_l + it_l$. Введем обозначения, удобные для дальнейшего. Пусть построено k -е приближение правильных координат, где k равно 1 или 2. Тогда функции h и f с точностью до членов порядка $k + 3$ запишем в виде

$$\begin{aligned} h &= \frac{1}{2}\alpha_1 z_1 \bar{z}_1 + \frac{1}{2}\alpha_2 z_2 \bar{z}_2 + \sum_{m,n} D_{mn}^h z_1^{m_1} z_2^{m_2} \bar{z}_1^{n_1} \bar{z}_2^{n_2} + \dots, \\ f &= \frac{1}{2}\beta_1 z_1 \bar{z}_1 + \frac{1}{2}\beta_2 z_2 \bar{z}_2 + \sum_{m,n} D_{mn}^f z_1^{m_1} z_2^{m_2} \bar{z}_1^{n_1} \bar{z}_2^{n_2} + \dots, \end{aligned} \tag{5.1}$$

где суммирование ведется по всем (m, n) , удовлетворяющим $m_1 + m_2 + n_1 + n_2 = k + 2$, D_{mn}^h, D_{mn}^f — некоторые коэффициенты. Симплектическую структуру запи-

шем в виде

$$\begin{aligned}
\omega = & \frac{i}{2} \left(1 + \sum_{m,n} d_{mn}^{1\bar{1}} z_1^{m_1} z_2^{m_2} \bar{z}_1^{n_1} \bar{z}_2^{n_2} \right) dz_1 \wedge d\bar{z}_1 \\
& + \frac{i}{2} \left(1 + \sum_{m,n} d_{mn}^{2\bar{2}} z_1^{m_1} z_2^{m_2} \bar{z}_1^{n_1} \bar{z}_2^{n_2} \right) dz_2 \wedge d\bar{z}_2 \\
& + \frac{i}{2} \sum_{m,n} d_{mn}^{1\bar{2}} z_1^{m_1} z_2^{m_2} \bar{z}_1^{n_1} \bar{z}_2^{n_2} dz_1 \wedge dz_2 \\
& + \frac{i}{2} \sum_{m,n} d_{mn}^{1\bar{2}} z_1^{m_1} z_2^{m_2} \bar{z}_1^{n_1} \bar{z}_2^{n_2} dz_1 \wedge d\bar{z}_2 \\
& + \frac{i}{2} \sum_{m,n} d_{mn}^{2\bar{1}} z_1^{m_1} z_2^{m_2} \bar{z}_1^{n_1} \bar{z}_2^{n_2} dz_2 \wedge d\bar{z}_1 \\
& + \frac{i}{2} \sum_{m,n} d_{mn}^{2\bar{1}} z_1^{m_1} z_2^{m_2} \bar{z}_1^{n_1} \bar{z}_2^{n_2} d\bar{z}_1 \wedge d\bar{z}_2 + \dots
\end{aligned} \tag{5.2}$$

Здесь суммирование ведется по всем $m_1 + m_2 + n_1 + n_2 = k$, d_{mn} — некоторые коэффициенты. Заметим, что в силу вещественности формы $\bar{d}_{mn}^{1\bar{2}} = -d_{nm}^{1\bar{2}}$, $\bar{d}_{mn}^{1\bar{1}} = d_{nm}^{1\bar{1}}$, $\bar{d}_{mn}^{2\bar{1}} = d_{nm}^{2\bar{1}}$, $\bar{d}_{mn}^{2\bar{2}} = d_{nm}^{2\bar{2}}$.

Шаг 2. Построение второго приближения правильных координат.

УТВЕРЖДЕНИЕ 5.2. *Существует единственная замена координат вида*

$$z_l = w_l + \sum_{m,n} C_{mn}^l w_1^{m_1} w_2^{m_2} \bar{w}_1^{n_1} \bar{w}_2^{n_2} \tag{5.3}$$

такая, что координаты $(\operatorname{Re} w, \operatorname{Im} w)$ являются вторым приближением правильных координат. Суммирование здесь производится по всем (m, n) , удовлетворяющим $m_1 + m_2 + n_1 + n_2 = 2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сделаем указанную в условии леммы замену с некоторыми (пока неизвестными) коэффициентами C_{mn}^l . Подставив эту замену в выражения для h и f , получаем, что коэффициенты квадратичной части остались прежними, а коэффициенты кубической части изменились. Поскольку мы хотим избавиться от кубической части в гамильтониане и дополнительном интеграле, приравняем коэффициенты при кубических членах к нулю. Имеем следующую систему линейных уравнений на коэффициенты C_{mn}^l :

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \alpha_1 (\bar{C}_{n_1, n_2, m_1-1, m_2}^1 + C_{m_1, m_2, n_1-1, n_2}^1) \\
& + \frac{1}{2} \alpha_2 (\bar{C}_{n_1, n_2, m_1, m_2-1}^2 + C_{m_1, m_2, n_1, n_2-1}^2) + D_{mn}^h = 0, \\
& \frac{1}{2} \beta_1 (\bar{C}_{n_1, n_2, m_1-1, m_2}^1 + C_{m_1, m_2, n_1-1, n_2}^1) \\
& + \frac{1}{2} \beta_2 (\bar{C}_{n_1, n_2, m_1, m_2-1}^2 + C_{m_1, m_2, n_1, n_2-1}^2) + D_{mn}^f = 0,
\end{aligned} \tag{5.4}$$

соответственно. Члены с отрицательными индексами считаются равными нулю. Аналогично приравниваем к нулю линейные члены в симплектической структуре:

$$\begin{aligned}
(m_1 + 1)C_{m_1+1, m_2, n_1, n_2}^1 + (n_1 + 1)\bar{C}_{n_1+1, n_2, m_1, m_2}^1 + d_{mn}^{1\bar{1}} &= 0, \\
(n_1 + 1)C_{m_1, m_2, n_1+1, n_2}^2 - (n_2 + 1)C_{m_1, m_2, n_1, n_2+1}^1 + d_{mn}^{1\bar{2}} &= 0, \\
(m_2 + 1)C_{m_1, m_2+1, n_1, n_2}^1 + (n_1 + 1)\bar{C}_{n_1+1, n_2, m_1, m_2}^2 + d_{mn}^{2\bar{1}} &= 0, \\
(m_2 + 1)C_{m_1, m_2+1, n_1, n_2}^2 + (n_2 + 1)\bar{C}_{n_1, n_2+1, m_1, m_2}^2 + d_{mn}^{2\bar{2}} &= 0.
\end{aligned} \tag{5.5}$$

Система уравнений (5.4)+(5.5) обязана быть разрешимой, поскольку правильные координаты всегда существуют. Чтобы ответить на вопрос, сколько она имеет решений, найдем пространство решений однородной системы. Из системы (5.4) получаем:

$$\begin{aligned}
C_{2000}^1 + \bar{C}_{1010}^1 &= 0, & C_{1100}^1 + \bar{C}_{1001}^1 &= 0, \\
C_{0200}^2 + \bar{C}_{0101}^2 &= 0, & C_{1100}^2 + \bar{C}_{0110}^2 &= 0,
\end{aligned}$$

а все остальные коэффициенты равны нулю. Подставив эти выражения в систему (5.5), получаем, что и эти коэффициенты также равны нулю. Итак, однородная система уравнений имеет только нулевые решения. Следовательно, решение неоднородной системы единственно. Имея единственность, мы можем утверждать, что с помощью такой замены мы действительно получили второе приближение правильных координат. Утверждение доказано.

Шаг 3.

УТВЕРЖДЕНИЕ 5.3. Коэффициенты a_{ij} нормальной формы h могут быть найдены по следующим формулам:

$$\begin{aligned}
a_{11} &= -\alpha_1 d_{1010}^{1\bar{1}} + 4D_{2020}^h, \\
a_{12} &= -\alpha_1 d_{0101}^{1\bar{1}} - \alpha_2 d_{1010}^{2\bar{2}} + 2D_{1111}^h, \\
a_{22} &= -\alpha_2 d_{0101}^{2\bar{2}} + 4D_{0202}^h.
\end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сделаем замену вида (5.3), полагая $m_1 + m_2 + n_1 + n_2 = 3$, и попытаемся избавиться от квадратичных членов в симплектической структуре. Обнулим коэффициенты при $w_1 \bar{w}_1$ и $w_2 \bar{w}_2$ в членах $dw_1 \wedge d\bar{w}_1$ и $dw_2 \wedge d\bar{w}_2$. Получаем:

$$\begin{aligned}
2(C_{2010}^1 + \bar{C}_{2010}^1) &= -d_{1010}^{1\bar{1}}, & C_{1101}^1 + \bar{C}_{1101}^1 &= -d_{0101}^{1\bar{1}}, \\
2(C_{0201}^2 + \bar{C}_{0201}^2) &= -d_{0101}^{2\bar{2}}, & C_{1110}^2 + \bar{C}_{1110}^2 &= -d_{1010}^{2\bar{2}}.
\end{aligned}$$

Коэффициенты при $w_1^2 \bar{w}_1^2$, $w_1 w_2 \bar{w}_1 \bar{w}_2$ и $w_2^2 \bar{w}_2^2$ в гамильтониане после замены приобретают вид

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \alpha_1 (\bar{C}_{2010}^1 + C_{2010}^1) + D_{2020}^h, \\ & \frac{1}{2} \alpha_1 (\bar{C}_{1101}^1 + C_{1101}^1) + \frac{1}{2} \alpha_2 (\bar{C}_{1110}^2 + C_{1110}^2) + D_{1111}^h, \\ & \frac{1}{2} \alpha_2 (\bar{C}_{0201}^2 + C_{0201}^2) + D_{0202}^h, \end{aligned}$$

соответственно. Поскольку искомые числа $\frac{1}{4}a_{11}$, $\frac{1}{2}a_{12}$ и $\frac{1}{4}a_{22}$ суть коэффициенты при $w_1^2 \bar{w}_1^2$, $w_1 w_2 \bar{w}_1 \bar{w}_2$ и $w_2^2 \bar{w}_2^2$ в гамильтониане, утверждение доказано.

§ 6. Траекторный инвариант интегрируемой задачи Лагранжа

Рассмотрим задачу о движении тяжелого твердого тела в трехмерном евклидовом пространстве. Напомним, что движение твердого тела описывается системой уравнений

$$\begin{cases} \dot{s} = [s, \omega] + [r, u], \\ \dot{r} = [r, \omega]. \end{cases} \quad (6.1)$$

Здесь s — кинетический момент тела; ω — угловая скорость тела; r — единичный вектор, направленный по вертикальной оси; $u = mx$, где m — масса тела, а $x = (x_1, x_2, x_3)$ — радиус-вектор центра масс. Эта система, заданная в пространстве $\mathbb{R}^6 = \mathbb{R}^3(s) \times \mathbb{R}^3(r)$, имеет три интеграла

$$\begin{aligned} f_1 &= r_1^2 + r_2^2 + r_3^2, \\ f_2 &= s_1 r_1 + s_2 r_2 + s_3 r_3, \\ H &= \frac{1}{2} \langle s, h^{-1}(s) \rangle + m \langle x, r \rangle, \end{aligned}$$

где $h = \text{diag}(A, B, C)$, A, B, C — главные моменты инерции тела, а через $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначено стандартное скалярное произведение в пространстве $\mathbb{R}^3(s)$.

Как известно, можно задать симплектическую структуру на совместной поверхности уровня $M^4 = \{f_1 = 1, f_2 = g\}$ через структуру скобок Пуассона

$$\{s_i, s_j\} = \varepsilon_{ijk} s_k, \quad \{r_i, r_j\} = 0, \quad \{s_i, r_j\} = \varepsilon_{ijk} r_k.$$

При этом система (6.1) оказывается гамильтоновой на этом многообразии. Случай Лагранжа характеризуется тем, что $A = B > C$ и $x_1 = x_2 = 0$. Это означает, что эллипсоид инерции твердого тела является эллипсоидом вращения, а центр тяжести лежит на оси вращения. Система (6.1) в случае Лагранжа полностью интегрируема по Лиувиллю на M^4 . После линейной замены координат, сохраняющей пуассонову структуру, гамильтониан и дополнительный интеграл для случая волчка Лагранжа принимают вид ($\beta = C/A$, a — некоторый параметр)

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2} \left(s_1^2 + s_2^2 + \frac{s_3^2}{\beta} \right) + ar_3, \\ F &= s_3, \end{aligned}$$

а сама система записывается так:

$$\begin{aligned}\dot{s}_1 &= s_2 s_3 \left(1 - \frac{1}{\beta}\right) - ar_2, & \dot{r}_1 &= s_2 r_3 - \frac{s_3 r_2}{\beta}, \\ \dot{s}_2 &= -s_1 s_3 \left(1 - \frac{1}{\beta}\right) + ar_1, & \dot{r}_2 &= -s_1 r_3 + \frac{s_3 r_1}{\beta}, \\ \dot{s}_3 &= 0, & \dot{r}_3 &= s_1 r_2 - s_2 r_1.\end{aligned}$$

Динамика случая Лагранжа хорошо изучена еще в работах классиков; тонкий топологический и траекторный инварианты для этой задачи построены в работах [7], [8]. Хорошо известно, что при $g^2 - 4a > 0$ (условие Маевского) вращение волчка вокруг вертикальной оси является невырожденным положением равновесия, отвечающим эллиптической особой точке. В системе координат $\{s, r\}$ эта точка имеет координаты $(0, 0, g, 0, 0, 1)$.

Вычислим гладкий траекторный инвариант в окрестности этой точки. Отметим, что в фазовом пространстве M^4 можно ввести канонические координаты – углы Эйлера и соответствующие им импульсы. Однако, в рассматриваемой точке эти координаты вырождаются. Поэтому в малой окрестности этой точки в качестве локальных координат на M^4 мы вынуждены взять координаты (s_1, s_2, r_1, r_2) . Тогда другие две координаты выражаются через них следующим образом:

$$r_3 = \sqrt{1 - r_1^2 - r_2^2}, \quad s_3 = \frac{g - s_1 r_1 - s_2 r_2}{\sqrt{1 - r_1^2 - r_2^2}}.$$

Вычисляя матрицу линеаризованной системы, находим собственные значения $\pm i\alpha_1$ и $\pm i\alpha_2$, где

$$\alpha_1 = \frac{g + \sqrt{g^2 - 4a}}{2} - \frac{g}{\beta}, \quad \alpha_2 = -\frac{g - \sqrt{g^2 - 4a}}{2} + \frac{g}{\beta}.$$

С помощью линейной замены

$$\begin{aligned}s_1 &= \frac{1}{(g^2 - 4a)^{1/4}}(lv_1 + ku_2), & r_1 &= \frac{1}{(g^2 - 4a)^{1/4}}(v_1 + u_2), \\ s_2 &= \frac{1}{(g^2 - 4a)^{1/4}}(lu_1 + kv_2), & r_2 &= \frac{1}{(g^2 - 4a)^{1/4}}(u_1 + v_2),\end{aligned}$$

где

$$k = \frac{g - \sqrt{g^2 - 4a}}{2}, \quad l = \frac{g + \sqrt{g^2 - 4a}}{2}, \quad (6.2)$$

перейдем к первому приближению (u_1, u_2, v_1, v_2) правильных координат. Эти координаты являются, как нетрудно проверить, так же и вторым приближением правильных координат. Подставляя эту замену в выражение для функции H , находим

$$\begin{aligned}D_{2020} &= \frac{k^2}{2\beta(g^2 - 4a)} - \frac{a}{8(g^2 - 4a)}, \\ D_{0202} &= \frac{l^2}{2\beta(g^2 - 4a)} - \frac{a}{8(g^2 - 4a)}, \\ D_{1111} &= \frac{g^2 + 4a}{4\beta(g^2 - 4a)} - \frac{a}{2(g^2 - 4a)}.\end{aligned}$$

Симплектическая структура дает

$$d_{1010}^{1\bar{1}} = \frac{4l - 3g}{2(g^2 - 4a)}, \quad d_{0101}^{1\bar{1}} = -d_{1010}^{2\bar{2}} = -\frac{g}{2(g^2 - 4a)}, \quad d_{0101}^{2\bar{2}} = \frac{-4k + 3g}{2(g^2 - 4a)}.$$

Отсюда с помощью утверждения 5.3 находим коэффициенты a_{ij} :

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{(4l - 3g)(g/\beta - l) + 4k^2/\beta - a}{2(g^2 - 4a)}, \\ a_{12} &= \frac{(1 - 2/\beta)g^2 + (g^2 + 4a)/\beta - 2a}{2(g^2 - 4a)}, \\ a_{22} &= \frac{(4k - 3g)(g/\beta - k) + 4l^2/\beta - a}{2(g^2 - 4a)}. \end{aligned}$$

Таким образом, получаем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 6.1. *Гладкий траекторный инвариант эллиптической особой точки $(0, 0, g, 0, 0, 1)$ в задаче Лагранжа есть $(\rho_0, \text{sign}_1, \text{sign}_2)$, где*

$$\begin{aligned} \rho_0 &= \frac{(g + \sqrt{g^2 - 4a}) - 2g/\beta}{-g + \sqrt{g^2 - 4a} + 2g/\beta}, \\ \text{sign}_1 &= \text{sign} \left\{ \left(\frac{g}{\beta} - k \right) \left[(4l - 3g) \left(\frac{g}{\beta} - l \right) + \frac{4k^2}{\beta} - a \right] \right. \\ &\quad \left. - \left(l - \frac{g}{\beta} \right) \left[\left(1 - \frac{2}{\beta} \right) g^2 + \frac{g^2 + 4a}{\beta} - 2a \right] \right\}, \\ \text{sign}_2 &= \text{sign} \left\{ \left(\frac{g}{\beta} - k \right) \left[\left(1 - \frac{2}{\beta} \right) g^2 + \frac{g^2 + 4a}{2\beta} - a \right] \right. \\ &\quad \left. - \left(l - \frac{g}{\beta} \right) \left[(4k - 3g) \left(\frac{g}{\beta} - k \right) + \frac{4l^2}{\beta} - a \right] \right\}, \end{aligned}$$

где k и l вычисляются по формулам (6.2).

Итак, множество систем Лагранжа, невырожденных в эллиптической особой точке, — это множество P меры 1 в области $D = \{0 < \beta < 1, g^2 - 4a > 0\} \subset \mathbb{R}^3$. Действительно, вырожденные системы целиком лежат на двух гиперповерхностях $\{\text{sign}_1 = 0\} \cup \{\text{sign}_2 = 0\}$ и образуют поэтому множество меры нуль. Кроме того, область P оказывается расслоенной на двумерные поверхности уровня $\{\rho = \text{const}\}$ и рассеченной на четыре области постоянства знаков $(\text{sign}_1, \text{sign}_2)$. Тем самым, все системы Лагранжа разбиваются на классы траекторно эквивалентных систем, представляющие собой двумерные поверхности в D (быть может, с особенностями).

Список литературы

1. Болсинов А. В., Фоменко А. Т. Траекторная эквивалентность интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы. Теорема классификации I, II // Матем. сб. 1994. Т. 185. № 4, 5. С. 27–80, 27–78.
2. Bolsinov A. V. Methods of calculation of the Fomenko–Zieschang invariant // Adv. Sov. Math. 1991. V. 4. P. 147–184.
3. Eliasson L. H. Normal form for Hamiltonian systems with Poisson commuting integrals – elliptic case // Comm. Math. Helv. 1990. V. 65. P. 4–35.
4. Биркгоф Дж. Д. Динамические системы. М.–Л.: Гостехиздат, 1941.
5. Арнольд В. И. Математические методы классической механики. М.: Наука, 1974.
6. Duistermaat J. J. On global action-angle coordinates // Comm. Pure Appl. Math. 1980. V. 33. P. 687–706.
7. Oshemkov A. A. Fomenko invariants for the main integrable cases of the rigid body motion equation // Adv. Sov. Math. 1991. V. 6. P. 67–146.
8. Орел О. Е., Такашши Ш. Траекторная классификация интегрируемых задач Лагранжа и Горячева–Чаплыгина методами компьютерного анализа // Матем. сб. 1996. Т. 187. № 1. С. 95–112.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Поступила в редакцию
13.02.1997