Общероссийский математический портал

О. Г. Парфенов, Поперечники единичного шара H^∞ в весовых пространствах $L_q(\mu)$, *Матем. сб.*, 1997, том 188, номер 8, 149–157

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm250>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.89.56.158

26 апреля 2023 г., 16:51:21

УДК 517.51

О. Г. Парфёнов

Поперечники единичного шара H^∞ в весовых пространствах $L_q(\mu)$

Работа посвящена исследованию поперечников единичного шара класса Харди H^∞ в весовых пространствах $L_q(\mu)$. Приводятся точные оценки снизу указанных поперечников в терминах емкости носителя меры μ . Для лемнискат Бляшке получены точные значения поперечников. Для мер вида $d\mu = p dS$, dS – плоская мера Лебега, p – непрерывный положительный вес, найдена асимптотическая формула.

Библиография: 9 названий.

§ 1.

Работа является подробным изложением заметки автора [1] с некоторыми дополнениями.

Пусть $\mathbf{D}$ – единичный круг на комплексной плоскости $\mathbb{C}$, $\mathbf{T}$ – его граница; H^∞ – банахово пространство ограниченных аналитических в $\mathbf{D}$ функций с $\sup$ -нормой. Пусть μ – конечная борелевская мера в $\mathbf{D}$, $L_q(\mu)$ – обычное пространство Лебега. Работа посвящена исследованию наилучших приближений функций класса H^∞ в метрике $L_q(\mu)$, $1 \leq q \leq \infty$.

Напомним основные определения. Пусть X , Y – банаховы пространства, J – ограниченный линейный оператор из X в Y . Определим *линейный n -поперечник оператора J* :

$$\delta_n(J) = \inf_{P_n} \|J - P_n\|_{X \rightarrow Y}, \quad n = 0, 1, \dots,$$

P_n – произвольный линейный оператор из X в Y ранга не выше n . Далее, n -й *колмогоровский поперечник* определяется так:

$$d_n(J) = \inf_{L_n} \sup_{x \in BX} \inf_{y \in L_n} \|Jx - y\|_{X \rightarrow Y}, \quad n = 0, 1, \dots,$$

BX – единичный шар пространства X , L_n – произвольное n -мерное подпространство в Y . *Гельфандовский n -поперечник* определим так:

$$d^n(J) = \inf_{L_{-n}} \|J|_{L_{-n}}\|_{X \rightarrow Y},$$

L_{-n} – произвольное подпространство в X коразмерности n .

Фишер и Мичелли в [2] установили следующий результат.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 95-01-003448).

ТЕОРЕМА 1. Пусть K компакт в $\mathbf{D}$, μ – вероятностная мера на K . Пусть $J: H^\infty \rightarrow L_q(K, \mu)$ оператор вложения ($Jf = f|_K$). Тогда для любого n имеют место равенства

$$\delta_n(J) = d^n(J) = d_n(J) = \inf_{B_n} \|B_n\|_{L_q(K, \mu)}, \quad (1)$$

B_n – произвольное произведение Бляшке степени n

$$B_n(z) = \prod_{i=1}^n (z - z_i)(1 - z\bar{z}_i)^{-1}, \quad |z_i| < 1.$$

В работе [3] Фишера и Стесина была сделана попытка обобщить теорему 1 на случай оператора вложения $J: H^p \rightarrow L_q(K, \mu)$. Именно, речь шла о справедливости соотношений при всех n

$$\delta_n(J) = d^n(J) = d_n(J) = \inf_{B_n} \sup_{f \in BH^p} \|B_n f\|_{L_q(\mu)}. \quad (2)$$

Определение H^p см. в [2].

Проверка работы [3], проведенная Осипенко и независимо Вильдероттером, показала, что соотношения (2) верны при $p \geq q$. При $p < q$ и достаточно малом гиперболическом радиусе K

$$d^n(J) = \inf_{B_n} \sup_{f \in BH^p} \|B_n f\|_{L_q(\mu)}. \quad (3)$$

Отметим, что соответствующий гиперболический радиус компакта K зависит от отношения p/q и, в частности, при $q = \infty$ соотношение (3) не имеет места. Гельфандовские поперечники оператора вложения $J: H^2 \rightarrow L_\infty(T_r, m)$, m – мера Лебега на окружности T_r с центром в нуле и радиуса r , были найдены Осипенко и Стесиным в работе [4] (см. также [5]). В [2] также установлено асимптотическое соотношение для поперечников оператора вложения $J: H^p \rightarrow L_q(K, \mu)$

$$(p_n(J))^{1/n} \rightarrow \exp(-\text{сар}^{-1}(K, \mathbf{D})), \quad n \rightarrow \infty,$$

$\text{сар}(K, \mathbf{D})$ – гринова емкость K относительно $\mathbf{D}$ (см. ниже), $p_n(\cdot)$ – любой из поперечников δ_n, d_n, d^n .

Опишем кратко содержание работы. В §2 содержится оценка снизу поперечников по Колмогорову и по Гельфанду в терминах емкости. Для компактов вида $K = \{z \mid |B_m(z)| = r\}$, $r < 1$, B_m – произведение Бляшке, найдены точные значения поперечников. В §3 рассмотрены меры вида

$$d\mu(z) = p(z) d\nu(r) d\varphi, \quad z = re^{i\varphi},$$

p – непрерывный в $\mathbf{D}$ вес. Основные результаты работы обсуждались на семинаре по теории приближений профессора В.М. Тихомирова. Автор выражает искреннюю признательность всем участникам этого семинара и особенно В.М. Тихомирову.

§ 2.

Напомним определения некоторых понятий теории потенциала, которые нам понадобятся.

Пусть G область на комплексной плоскости $\mathbb{C}$. *Функцией Грина* области G , как известно, называется функция $g(z, w)$

$$\Delta_z g = \delta_w, \quad g|_{\partial G} = 0,$$

Δ_z — оператор Лапласа по переменной z , δ_w — мера Дирака в точке $w \in G$. Для $G = \mathbf{D}$ функция Грина имеет вид:

$$g(z, w) = \ln(|1 - z\bar{w}| |z - w|^{-1}).$$

С помощью функции Грина можно определить произведения Бляшке в области G . *Произведением Бляшке* называется функция

$$B_n(z) = \exp\left(-\sum_{k=1}^n (g(z, z_k) + i\tilde{g}(z, z_k))\right),$$

$\tilde{g}$ — функция, гармонически сопряженная к g .

В случае $\mathbf{D}$ получаем обычные произведения Бляшке. Для компакта K в $\mathbf{D}$ рассмотрим экстремальную задачу

$$\inf_{\mu \in W(K)} \sup_{t \in K} \int g(z, t) d\mu(z), \quad (4)$$

$W(K)$ — множество вероятностных борелевских мер на K . Приведем общие предположения на G , K существует решение задачи (4), называемое *равновесной мерой на K* (относительно G), $-\mu_0$. Мы всегда будем предполагать, что μ_0 существует. Величина, определяемая с помощью соотношения

$$\text{cap}^{-1}(K, G) = \sup_{t \in G} \int g(z, t) d\mu_0(z),$$

называется *емкостью K* (относительно G). Имеет место следующий аналог формулы Пуассона–Иенсена: для внутренних точек $t \in \text{Int } K$ имеет место равенство

$$\text{cap}^{-1}(K, G) = \int g(z, t) d\mu_0(z).$$

Отметим, что для всех $t \in G$ из определения меры μ_0 вытекает важная оценка

$$\int g(z, t) d\mu_0(z) \leq \text{cap}^{-1}(K, G). \quad (5)$$

Равновесную меру μ_0 и емкость $\text{cap}(K, G)$ можно найти, если известен равновесный потенциал h_0 :

$$\Delta h_0(z) = 0, \quad z \in G \setminus K, \quad h_0|_{\partial G} = 1, \quad h_0|_{\partial K} = 0.$$

Именно, положим

$$h^*(z) = \begin{cases} h_0(z), & z \in G \setminus K, \\ 1, & z \in \text{Int } K. \end{cases}$$

Тогда $\mu_0 = \Delta h_0^*$ (в смысле теории распределений). Далее,

$$\text{cap}(K, G) = \int_{\gamma} \frac{\partial h_0}{\partial n} ds,$$

γ – контур, разделяющий $\partial K, \partial G$. Теорию потенциала см., например, в книге [6].

Из определения равновесной меры получаем следующую лемму.

ЛЕММА 1. Для любого произведения Бляшке B_n , любой меры μ на K и любого $q > 0$ имеем

$$\begin{aligned} \int |B_n(z)|^q d\mu(z) &\geq G(\mu) \exp\left(-\frac{nq}{\text{cap}(K, G)}\right), \\ G(\mu) &= \exp\left(\int \ln\left(\frac{d\mu}{d\mu_0}\right) d\mu_0\right). \end{aligned} \quad (6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любого произведения Бляшке B_n , любой меры μ на K и любого $q > 0$ имеем

$$\begin{aligned} \int |B_n(z)|^q d\mu(z) &\geq G(\mu) \exp\left(\int \ln |B_n(z)|^q d\mu_0(z)\right) \\ &= G(\mu) \exp\left(-q \int \left(\sum_{k=1}^n g(z, z_k)\right) d\mu_0\right) \\ &\geq G(\mu) \exp(-nq \text{cap}^{-1}(K, G)). \end{aligned}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. При $q = 2$ и $\mu = \mu_0$ оценка (6) имеется в [2].

Из леммы 1 легко получаются оценки снизу для поперечников по Гельфанду и Колмогорову оператора вложения $J: H^p \rightarrow L_q(K, \mu)$. Напомним сначала два результата из работы [2]. Эти результаты явно не сформулированы в [2], но легко следуют из контекста этой работы.

ЛЕММА 2 [2]. Пусть L_{-n} – произвольное подпространство в H^p , $1 \leq p \leq \infty$, $\text{codim } L_{-n} = n$. Тогда найдется произведение Бляшке B_n степени n такое, что $B_n \in L_{-n}$.

ЛЕММА 3 [2]. Пусть L_n – произвольное подпространство в $L_q(\mu)$, $1 \leq q \leq \infty$, K – компакт в $\mathbf{D}$ и $\dim L_n = n$. Тогда найдется произведение Бляшке B_n степени n такое, что

$$\inf_{f \in L_n} \|f - B_n\|_{L_q(\mu)} = \|B_n\|_{L_q(\mu)}.$$

Из лемм 1, 2 и определения поперечника по Гельфанду получаем

$$d^n(J) \geq G^{1/q}(\mu) \exp\left(-\frac{n}{\text{cap}(K, \mathbf{D})}\right). \quad (7)$$

Аналогично, из лемм 1, 3 и определения поперечника по Колмогорову

$$d_n(J) \geq G^{1/q}(\mu) \exp\left(-\frac{n}{\text{cap}(K, \mathbf{D})}\right). \quad (8)$$

Оценки (7), (8) являются точными при $1 \leq q \leq p \leq \infty$ (см. результаты автора [7], относящиеся к случаю $K = T_r = \{z \mid |z| = r\}$).

Естественным обобщением окружности T_r являются лемнискаты Бляшке

$$K = K(B_m, r) = \{z \mid |B_m(z)| = r\}, \quad r < 1,$$

B_m – произведение Бляшке степени m . При малых r множество $K(B_m, r)$ распадается в объединение конечного числа замкнутых кривых (равное числу различных корней B_m). При $r \rightarrow 1$ множество K приближается к окружности $\mathbf{T}$. Легко заметить, что функция

$$F(z) = \frac{\ln |B_m(z)|}{\ln(r)}$$

является равновесным потенциалом компакта $K(B_m, r)$. Отсюда получим формулу для емкости

$$\text{cap}(K(B_m, r), \mathbf{D}) = \frac{m}{\ln(r^{-1})}. \quad (9)$$

Имеет место теорема

ТЕОРЕМА 2. Пусть $K = K(B_m, r)$, μ_0 – равновесная мера на K и J оператор вложения H^∞ в $L_q(K, \mu_0)$. Тогда

$$d^n(J) = r^{n/m}, \quad n = 0, m, 2m, \dots \quad (10)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оценка снизу следует из (7) и (9). Для доказательства оценки сверху применим теорему 1, полагая $B_n(z) = (B_m(z))^s$:

$$d^{ms}(J) \leq \left(\int |B_m(z)|^{sq} d\mu_0 \right)^{1/q} = r^s, \quad s = 0, 1, \dots$$

Далее, можно вычислить поперечники не только в случае равновесной меры μ_0 , но и для мер вида

$$d\mu(z) = |B_{N_0}(z)|^{-q} d\mu_0(z), \quad (11)$$

B_{N_0} – произведение Бляшке степени N_0 , все корни которого внутри лемнискаты $K(B_m, r)$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $K = K(B_m, r)$, μ – мера вида (11) и J – оператор вложения H^∞ в $L_q(K, \mu)$. Тогда

$$d^{mk+N_0}(J) = r^k, \quad k = 0, 1, \dots \quad (12)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оценка снизу опять следует из (7) и (9). Для доказательства оценки сверху применим теорему 1, полагая $B_n = B_{N_0} B_m^k$:

$$d^{mk+N_0}(J) \leq \left(\int |B_{N_0} B_m^k|^q d\mu_0 / |B_{N_0}|^q \right)^{1/q} = r^k.$$

Отметим также, что в случае лемнискаты Бляшке легко установить наличие сильной асимптотики поперечников по Гельфанду оператора вложения $J: H^p \rightarrow X(K)$, причем банахово пространство $X(K)$ идеально в обычном смысле (если f, g измеримые функции на K , $f \in X$ и $f \geq g$ почти всюду относительно μ_0 , то $g \in X$ и имеем оценку $\|g\| \leq \|f\|$).

ТЕОРЕМА 4. Пусть $J: H^p \rightarrow X(K)$ — оператор вложения, описанный выше. Тогда для любого $s = 0, 1, \dots, m-1$ существуют постоянные c_s такие, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} d^{mk+s}(J) \times r^{-k} = c_s, \quad s = 0, 1, \dots, m-1. \quad (13)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства достаточно установить, что последовательность $\{d^{mk+s} r^{-k}\}_k$ монотонно убывает. Для этого заметим, что для подпространства L , $\text{codim } L = n$, подпространство $B_m L$ имеет коразмерность $n+m$ и, следовательно,

$$d^{n+m}(J) \leq \inf_L \|J|_{B_m L}\| \leq r^k d^n(J).$$

К сожалению, даже в случае $J: H^\infty \rightarrow L_q(K, \mu_0)$ пока не ясно, как вычислить асимптотические коэффициенты $c_1, \dots, c_{m-1}$. (Теорема 2 дает значение $c_0 = 1$.) Отметим в этом случае оценку

$$r^{k+s/m} \leq d^{mk+s}(J) \leq r^k d^s(J). \quad (14)$$

При $s = 1, \dots, m-1$ имеем строгое неравенство

$$d^s(J) > r^{s/m}. \quad (15)$$

Действительно, можно считать сразу, что B_m — минимальное произведение Бляшке в представлении лемнискаты $K(B_m, r)$. Это означает, что не существует произведения Бляшке $B^\sim$ степени, меньшей чем m , причем

$$K = K(B_m, r) = \{z \mid |B^\sim(z)| = r^\sim\}.$$

Итак, допустим, что вместо (15) имеем

$$d^s(J) = r^{s/m}. \quad (16)$$

Пусть B_s соответствующее экстремальное произведение Бляшке. Тогда из (16) получим $|B_s(z)| = r^{s/m}$, $z \in \partial K$. Отсюда следует, что функция $F(z) = \ln |B_s(z)| / \ln(r)$ есть равновесный потенциал и, следовательно,

$$B_s(z) = (B_m(z))^{s/m}. \quad (17)$$

Равенство (17) невозможно в силу минимальности B_m .

§ 3.

Пусть μ – мера вида

$$d\mu(z) = p(z) dS(z) = p(z) r dr d\varphi, \quad z = re^{i\varphi},$$

p – непрерывный в $\overline{\mathbf{D}}$ вес. Рассмотрим оператор вложения J класса H^∞ в $L_q(\mu)$. Имеет место теорема

ТЕОРЕМА 5. *При условиях, указанных выше, имеет место асимптотическое соотношение*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d^n(J)(nq)^{1/q} = \frac{1}{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} (p(e^{it}))^{1/2} dt \right)^{2/q}. \quad (18)$$

Сначала докажем теорему 5 в случае единичного веса.

ЛЕММА 4. *Пусть μ – мера вида*

$$d\mu(z) = d\eta(r) \times d\varphi, \quad z = re^{i\varphi}.$$

Тогда для поперечников оператора вложения $J: H^\infty \rightarrow L_q(\mu)$ имеем

$$d^n(J) = \left(\int_0^1 t^{nq} d\eta(t) \right)^{1/q}. \quad (19)$$

В частности, для плоской меры Лебега получаем

$$d^n(J) = (nq + 2)^{-1/q}. \quad (20)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 4. По теореме 1 имеем

$$d^n(J) = \inf_{B_n} \left(\int |B_n|^q d\mu \right)^{1/q}.$$

Оценка снизу получается из неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим

$$d^n(J) \geq \left(\int_0^1 d\eta(t) \exp \left(\int_{|z|=t} \ln |B_n(te^{i\varphi})|^q d\varphi \right) \right)^{1/q} = \left(\int_0^1 t^{nq} d\eta(t) \right)^{1/q}.$$

Равенство в (19) получаем, полагая $B_n(z) = z^n$.

Переходим к доказательству теоремы 5. Основная идея такая же, как и в работе автора [9] – замена переменной. Сначала отметим, что поведение меры μ внутри $\mathbf{D}$ не влияет на асимптотику d^n -поперечников. Действительно, гельфандовские поперечники аддитивны

$$d^{n+m-1}(J_1 + J_2) \leq d^n(J_1) + d^m(J_2) \quad (21)$$

(см. [8, теорема 11.8.2]). Остается отметить, что для мер с носителем K внутри $\mathbf{D}$ имеем оценку: для некоторого ρ , $0 < \rho < 1$,

$$d^n(J: H^\infty \rightarrow L_q(K, \mu)) = O(\rho^n). \quad (22)$$

В качестве ρ можно взять $\max\{|z|, z \in K\}$.

Как и в работе [9], сначала рассмотрим вес вида

$$p(z) = \begin{cases} |F'(z)|^2, & z \in \mathbf{D} \setminus D_{\rho_0}, \quad D_{\rho_0} = \{z \mid |z| < \rho_0\}, \\ 0, & z \in D_{\rho_0}, \end{cases} \quad (23)$$

ρ_0 — положительно и $\rho_0 < 1$; F — конформное отображение области $\mathbf{D} \setminus g_1$ на область $\mathbf{D} \setminus g_2$; g_1, g_2 — односвязные области внутри $\mathbf{D}$. Для таких весов утверждение теоремы 5 принимает вид:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d^n(J)(nq)^{1/q} = 1.$$

Рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccc} H^\infty(\mathbf{D} \setminus g_1) & \longrightarrow & L_q(\mathbf{D}, p dS) \\ \pi \downarrow & & \uparrow \tau \\ H^\infty(\mathbf{D} \setminus g_2) & \xrightarrow{J^*} & L_q(\mathbf{D}, p^* dS) \end{array}$$

J^* — оператор вложения, $p^*(z) = 1$ в окрестности $\mathbf{T}$ и π, τ — операторы вида:

$$(\pi f)(z) = f(F^{-1}(z)), \quad (\tau g)(z) = g(F(z)).$$

В силу коммутативности диаграммы имеем $d^n(J) = d^n(J^*)$. Для J^* по лемме 4 и по замечанию о том, что поведение меры внутри $\mathbf{D}$ несущественно, получаем соотношение

$$\lim d^n(J^*)(nq)^{1/q} = 1, \quad n \rightarrow \infty,$$

что и доказывает теорему 5 для весов вида (23). Для завершения доказательства напомним лемму об аппроксимации непрерывных весов весами вида (23) [9].

ЛЕММА 5. Пусть p — непрерывный положительный вес в окрестности $\mathbf{T}$, причем

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (p(e^{it}))^{1/2} dt = 1. \quad (24)$$

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется положительный вес p^* вида (23) такой, что в некоторой окрестности $\mathbf{T}$ имеем $|p(z) - p^*(z)| < \varepsilon$.

Итак, если p положительный непрерывный вес и выполнено (24), то теорема 5 получается с помощью стандартных методов (например, на основе неравенства (21)). Теперь для любого веса $p(z)$ положим $p(z) = Cp^*(z)$, где

$$C = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (p(e^{it}))^{1/2} dt \right)^2.$$

Список литературы

1. Парфёнов О. Г. Поперечники единичного шара H^∞ в весовых пространствах $L_q(\mu)$ // Функци. анализ и его приложения. 1992. Т. 26. № 3. С. 85–87.
2. Fisher S., Micchelli C. The n -widths of sets of analytic functions // Duke Math. J. 1980. V. 47. № 4. P. 789–801.
3. Fisher S., Stessin M. I. The n -widths of unit ball of H^q // Preprint. Northwestern University. Evanston. 1990.
4. Осипенко К. Ю., Стесин М. И. О поперечниках класса H^2 в n -мерном шаре // УМН. 1990. Т. 45. № 5(275). С. 193–194.
5. Парфёнов О. Г. Поперечники по Гельфанду некоторых классов аналитических функций // Матем. сб. 1994. Т. 185. № 6. С. 105–112.
6. Ландкоф Н. С. Основы современной теории потенциала. М.: Наука, 1966.
7. Парфёнов О. Г. Поперечники по Гельфанду единичного шара класса Харди H^p в весовых пространствах // Матем. заметки. 1985. Т. 37. № 2. С. 171–175.
8. Пич А. Операторные идеалы. М.: Мир, 1982.
9. Парфёнов О. Г. Оценки сингулярных чисел оператора вложения Карлесона // Матем. сб. 1986. Т. 131. № 4. С. 501–518.

Псковский государственный
педагогический институт

Поступила в редакцию
16.04.1996