Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. Л. Замарашкин, Е. Е. Тыртышников, Распределение собственных и сингулярных чисел теплицевых матриц при ослабленных требованиях к производящей функции, *Матем. сб.*, 1997, том 188, номер 8, 83–92

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm251>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.187.69

26 апреля 2023 г., 16:40:27

УДК 512.64+517.5

Н. Л. Замарашкин, Е. Е. Тыртышников

Распределение собственных и сингулярных чисел теплицевых матриц при ослабленных требованиях к производящей функции

Предложен новый подход к изучению асимптотических распределений собственных и сингулярных чисел теплицевых матриц, использующий матричный признак равномерности. Получены теоремы типа Сеге для производящих функций из L_1 .

Библиография: 9 названий.

§ 1. Введение

Рассмотрим ряд Фурье

$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{ikx}$$

и теплицевы матрицы

$$A_n = [a_{k-l}], \quad 0 \leq k, l \leq n-1.$$

Классическая теорема Сеге (см. [1]) утверждает, что если $f(x) \in \mathbb{R}$ (в этом случае матрицы A_n эрмитовы), то при условии $f \in L_\infty$ собственные значения матриц A_n асимптотически распределены как значения производящей функции $f(x)$. Можно ли получить то же самое при ослабленных требованиях к f , например, для $f \in L_2$ или $f \in L_1$? Ответ на первый вопрос был дан в [2]; одна из целей данной работы – дать положительный ответ на второй вопрос.

Прежде всего, вспомним определение асимптотического распределения. По Вейлю последовательность кортежей $\{\lambda_{in}\}_{i=1}^n$ называется *распределенной как $f(x)$* , если

- 1) существуют числа m и M , $m \leq M$, такие, что $m \leq \lambda_{in} \leq M$ для всех i, n ;
- 2) для любой непрерывной на $[m, M]$ функции $F(x)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^n F(\lambda_{in})}{n} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(f(x)) dx. \quad (*)$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 97-01-00155).

Для $f \in L_2$ нельзя утверждать, что все собственные значения принадлежат конечному отрезку. Таким образом, необходимо начать с разумной модификации определения асимптотического распределения.

Примем определение, предложенное в [2]. Будем говорить, что последовательность кортежей $\{\lambda_{in}\}_{i=1}^n$ *распределена как $f(x)$* , если (*) выполняется для любой непрерывной функции $f(x)$ с компактным носителем.¹ При этом будем писать $\lambda_{in} \sim f(x)$. Если собственные значения матрицы A_n распределены как $f(x)$, то будем писать $\lambda(A_n) \sim f(x)$.

В работе [2] (см. также [4]) доказано, что если $f(x) \in \mathbb{R}$ и $f \in L_2$, то

$$\lambda(A_n) \sim f(x).$$

Там же доказано, что если $f(x) \in \mathbb{C}$ и $f \in L_2$, то сингулярные числа (несамосопряженных) матриц A_n распределены как $|f(x)|$:

$$\sigma(A_n) \sim |f(x)|$$

(для $f \in L_\infty$ это установлено в [5], [6]).

Можно ли то же самое получить для $f \in L_1$? Это, так сказать, формальная цель работы. Но так же, как и в работах [2], [4], есть и другой интерес: мы пытаемся, насколько возможно, все свести к легко проверяемым матричным соотношениям. В результате простота теории позволяет находить для нее все большее число приложений. В частности, к проблемам численного анализа (связанным, главным образом, с изучением сходимости итерационных методов типа метода минимальных невязок).

С точки зрения вышеозначенной формальной цели и в некоторой степени с точки зрения метода наши исследования следует сравнивать, прежде всего, с исследованиями, проведенными в главе 7 книги [1]. Обобщая определения Вейля, авторы вводят там функцию распределения, понятия канонического распределения и его плотности. При этом они ограничиваются, однако, изучением класса L_∞ . Новые свойства более общих определений оказались полезными лишь в эффектном (но очень специфическом в рамках книги) доказательстве аналога теоремы Сеге. Этот результат был вырван из общего стиля рассуждений и навел на мысль об утрате многих связей в случае $f \in L_1$. В настоящей работе, как нам кажется, удалось восстановить эти связи заново. Существенно новым элементом наших рассуждений являются матрицы “малоранговых поправок”. Именно с их помощью удается восстановить связь между последовательностью теплицевых матриц A_n , их оптимальными циркулянтами C_n и функцией $f \in L_1$. В итоге нам удалось существенно расширить границы сопутствующих результатов.

§ 2. Матричный признак равномерности

Пусть $f(x) \in \mathbb{R}$. Чтобы доказать, что $\lambda(A_n) \sim f(x)$, в [2] строится последовательность “простых” матриц C_n таких, что

$$\lambda(A_n) \sim \lambda(C_n) \tag{1}$$

¹Заметим, что данная модификация определения не единственно возможная (см. [3]).

и при этом

$$\lambda(C_n) \sim f(x). \quad (2)$$

Соотношение (1) (равнораспределенность) понимается в том смысле, что для любой непрерывной функции $F(x)$ с компактным носителем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^n (F(\lambda_i(A_n)) - F(\lambda_i(C_n)))}{n} = 0.$$

Чтобы получить это соотношение, мы будем использовать следующий *матричный признак равнораспределенности*.

ТЕОРЕМА 1 [7]. Пусть A_n , C_n и Δ_n – эрмитовы матрицы такие, что

$$\|A_n - C_n + \Delta_n\|_F^2 = o(n), \quad \text{rank } \Delta_n = o(n).$$

Тогда

$$\lambda(A_n) \sim \lambda(C_n).$$

В формулировке важную роль играет так называемая *фробениусова* норма матрицы: $\|A\|_F = (\sum |a_{ij}|^2)^{1/2}$.

Из теоремы 1 очевидно вытекает следующая (более удобная с технической точки зрения)

ТЕОРЕМА 2 [2]. Пусть A_n , C_n – эрмитовы матрицы и предположим, что для любого $\varepsilon > 0$ существуют эрмитовы матрицы $\Delta_n(\varepsilon)$ такие, что

$$\|A_n - C_n + \Delta_n(\varepsilon)\|_F^2 \leq \varepsilon n, \quad \text{rank } \Delta_n(\varepsilon) \leq \varepsilon n$$

для всех достаточно больших n . Тогда

$$\lambda(A_n) \sim \lambda(C_n).$$

В действительности условия теоремы 2 эквивалентны условиям теоремы 1. Возьмем $\varepsilon_k = 1/k$ и рассмотрим минимальное $N_k > N_{k-1}$ такое, что при всех $n \geq N_k$ выполняются неравенства теоремы 2 (полагаем $N_0 = 0$). Положим $\Delta_n = \Delta_n(\varepsilon_k)$, если $N_k \leq n \leq N_{k+1}$. Тогда, очевидно, $\varepsilon_{k(n)}n = o(n)$.

Все построения в [2]–[4] основаны на связи между теплицевыми и циркулянтными матрицами (матрица $C_n = [c_{kl}]$ называется *циркулянтной*, если $c_{kl} = c_{k-l \pmod n}$).

Для теплицевой матрицы A_n на роль “простой” матрицы можно взять ближайшую к ней по фробениусовой норме циркулянтную матрицу C_n . Матрица C_n (*оптимальный циркулянт*) определяется однозначно. При этом [2]

$$f \in L_2 \implies \|A_n - C_n\|_F^2 = o(n) \implies (1).$$

Утверждение доказывается элементарно (прямым вычислением). Несколько сложнее доказывается [2], что

$$f \in L_1 \implies \lambda(C_n) \sim f(x).$$

§ 3. От L_2 к L_1 : что мешает?

В случае $f \in L_1$ мы пока не умеем доказывать равномерность собственных значений теплицевых матриц A_n и циркулянтных матриц C_n .

УТВЕРЖДЕНИЕ. Для $f \in L_1$ нельзя утверждать, что $\|A_n - C_n\|_F^2 = o(n)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В 1923 году А. Н. Колмогоров [8] доказал следующую теорему: для любой последовательности $\{a'_k\}$, сходящейся к нулю, найдется такая последовательность $\{a''_k\}$, что

$$|a'_k| < a''_k$$

и при этом ряд

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a''_k \cos kx$$

есть ряд Фурье некоторой функции из L_1 .

Возьмем

$$a'_k = \frac{1}{k^\alpha}, \quad 0 < \alpha \leq \frac{1}{2}, \quad k = 1, 2, \dots$$

По теореме Колмогорова в L_1 содержится некоторая функция

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a''_k \cos kx, \quad a''_k > \frac{1}{k^\alpha}.$$

Определим $f(x)$ равенством

$$f(x) \equiv g\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - g\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{ikx}.$$

Функция $f(x)$ нечетная, поэтому $a_{-k} = -a_k$ при всех k . Но для нас более важно, что $|a_k| = a''_k$ при всех нечетных k и $a_k = 0$ при всех четных k .

Обозначим через $c_k^{(n)}$ элементы первого столбца оптимального циркулянта C_n . Легко показать, что

$$c_k^{(n)} = \frac{(n-k)a_k + ka_{k-n}}{n}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Таким образом, для произвольного нечетного $n = 2N + 1$ получаем

$$\begin{aligned} \|A_n - C_n\|_F^2 &= \sum_{k=-n+1}^{n-1} (n-k)|a_k - c_k^{(n)}|^2 \\ &\geq \sum_{l=0}^N (n-2l-1) \left(\frac{2l+1}{n} |a_{2l+1}| \right)^2 \\ &\geq \sum_{l=0}^N (n-2l-1) \left(\frac{2l+1}{n(2l+1)^\alpha} \right)^2 \\ &\geq 2 \sum_{l=0}^N (N-l) \frac{l^{2-2\alpha}}{n^2} \geq cN, \quad c > 0. \end{aligned}$$

Последнее неравенство вытекает из того, что

$$\sum_{k=1}^N k^{2-2\alpha} \geq cN^{3-2\alpha}$$

при некотором $c > 0$. Утверждение доказано.

Заметим, однако, что “мощь” теоремы 1 использована не в полной мере: вероятно, стоит попытаться найти подходящие матрицы Δ_n , чтобы удовлетворить ее условиям.

§ 4. Вспомогательные предложения

1) Ключевым является вполне элементарное

УТВЕРЖДЕНИЕ. Если c – первый столбец (любой) циркулянтной матрицы C_n , то

$$C_n = \frac{1}{n} F_n^* \text{diag}(F_n c) F_n,$$

где $F_n = [e^{\frac{2\pi i k l}{n}}]_{k,l=0}^{n-1}$ – матрица Фурье порядка n .

Таким образом, столбцы матрицы

$$P_n = [p_0^{(n)}, \dots, p_{n-1}^{(n)}] = \frac{1}{\sqrt{n}} F_n^*$$

образуют ортонормированную систему собственных векторов для C_n .

2) Если C_n – оптимальный циркулянт для теплицевой матрицы A_n , то [9]

$$(A_n p_k^{(n)}, p_k^{(n)}) = (C_n p_k^{(n)}, p_k^{(n)}), \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

То, что находится в правой части, – это полный набор собственных значений матрицы C_n .

3) Для любого вектора $p = [p_0, \dots, p_{n-1}]^T$

$$(A_n p, p) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) |p(e^{it})|^2 dt, \quad p(z) \equiv p_0 + p_1 z + \dots + p_{n-1} z^{n-1}.$$

4) Матрицы, порождаемые функциями $f(t)$ и $f(t + \tau)$, являются унитарно подобными:

$$A_n(f(t + \tau)) = U_n(\tau) A_n(f(t)) U_n^*(\tau), \quad C_n(f(t + \tau)) = U_n(\tau) C_n(f(t)) U_n^*(\tau),$$

где

$$U_n(\tau) = \text{diag}\{e^{i\tau m}\}_{m=0}^{n-1}.$$

Первое соотношение следует из того, что $a_m(f(t + \tau)) = e^{im\tau} a_m(f(t))$, второе – из формулы для элементов оптимального циркулянта: $\{C_n\}_{kl} = \frac{1}{n} \sum a_{r-s}$, где суммирование ведется по всем $0 \leq r, s \leq n-1$ таким, что $r-s = k-l \pmod{n}$.

5) Если имеют место расщепления

$$A_n(f(t)) = A_{1n}(f(t)) + A_{2n}(f(t)), \quad C_n(f(t)) = C_{1n}(f(t)) + C_{2n}(f(t)),$$

то при любом τ для матриц, порожденных функцией $f(t + \tau)$, имеют место аналогичные расщепления с сохранением рангов и любых унитарно инвариантных норм соответствующих компонент расщепления.

6) Суммируя геометрическую прогрессию, находим

$$|p_k^{(n)}(e^{it})|^2 = \frac{\sin^2\left(\frac{h_n k + t}{2}\right)n}{n \sin^2 \frac{h_n k + t}{2}}, \quad h_n = \frac{2\pi}{n}.$$

ЛЕММА 1. Пусть $0 < \delta < \pi$ и $b - a = 2\delta$. Обозначим через $\mu_n(a, b)$ число индексов $0 \leq k \leq n - 1$ таких, что

$$\max_{a \leq t \leq b} |p_k^{(n)}(e^{it})|^2 > \frac{c_1(\delta)}{n}, \quad c_1(\delta) = \frac{1}{\sin^2 \frac{\delta}{2}}.$$

Тогда для любого n найдется отрезок $[a, b]$ длины 2δ такой, что

$$\mu_n(a, b) \leq \delta c_2 n, \quad c_2 = \frac{4}{\pi}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для отрезка $[a, b] = [-\delta, \delta]$ число индексов k таких, что

$$\max_{-\delta \leq t \leq \delta} |p_k^{(n)}(e^{it})|^2 > \frac{c_1(\delta)}{n},$$

мажорируется числом индексов k таких, что

$$\min_{-\delta \leq t \leq \delta} \left| \sin \frac{h_n k + t}{2} \right| < \sin \frac{\delta}{2}.$$

Пусть $0 < \delta \leq \pi/2$. Тогда это те и только те k , для которых

$$2\pi m - \delta < h_n k + t < 2\pi m + \delta$$

при некотором $t \in [-\delta, \delta]$ и целом m . Далее, это те и только те k , для которых $2\pi m - 2\delta \leq h_n k \leq 2\pi m + 2\delta$, или, другими словами,

$$m - \frac{\delta}{\pi} \leq \frac{k}{n} \leq m + \frac{\delta}{\pi}$$

при $m = 0$ или 1 . Очевидно, если $\pi/(2\delta) \leq n$, то

$$\mu_n(a, b) \leq \frac{2\delta n}{\pi} + 1 \leq \frac{4\delta n}{\pi}.$$

В случае $\pi/2 < \delta < \pi$ оценка остается в силе. Если $n < \pi/(2\delta)$, то рассмотрим отрезок $[a, b] \subset [\pi/(2n), 3\pi/(2n)]$ и заметим, что

$$\max_{a \leq t \leq b} |p_k^{(n)}(e^{it})|^2 \leq \frac{1}{n \sin^2 \frac{\delta}{2}}$$

для любого $0 \leq k \leq n - 1$. Лемма доказана.

ЛЕММА 2. Предположим, что $f \in L_1$, $f(x) \geq 0$ и $\text{supp } f \subset [a, b] \subset [-\pi, \pi]$. Пусть $b - a = 2\delta$. Тогда для эрмитовых теплицевых матриц A_n и соответствующих оптимальных циркулянтов C_n существуют расщепления

$$A_n = A_{1n} + A_{2n}, \quad C_n = C_{1n} + C_{2n},$$

где

$$\max\{\|A_{1n}\|_2, \|C_{1n}\|_2\} \leq c_1(\delta)\|f\|_{L_1}, \quad \max\{\text{rank } A_{2n}, \text{rank } C_{2n}\} \leq 2\delta c_2 n.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу предложения 5 можно считать, что для каждого n отрезок $[a, b]$ длины 2δ – тот самый, для которого имеет место оценка леммы 1 для $\mu_n(a, b)$. Запишем (с точностью до перестановки столбцов)

$$P_n = [P_{1n}, P_{2n}].$$

Ко второй матрице в расщеплении отнесем векторы $p_k^{(n)}$ для тех k , которые были посчитаны в $\mu_n(a, b)$, и положим

$$A_{1n} = P_n \begin{bmatrix} P_{1n}^* A_n P_{1n} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} P_n^*, \quad A_{2n} = P_n \begin{bmatrix} 0 & P_{1n}^* A_n P_{2n} \\ P_{2n}^* A_n P_{1n} & P_{2n}^* A_n P_{2n} \end{bmatrix} P_n^*.$$

При сделанных предположениях матрица A_n эрмитова, а все ее собственные значения неотрицательны. Поэтому

$$\|A_{1n}\|_2 = \lambda_{\max}(P_{1n}^* A_n P_{1n}) \leq \operatorname{tr}(P_{1n}^* A_n P_{1n}) \leq c_1(\delta) \|f\|_{L_1}.$$

Для оптимальных циркулянтов C_n рассмотрим аналогичное расщепление. Оценка сверху для $\|C_{1n}\|_2$ будет такой же, поскольку в силу предложения 2

$$\operatorname{tr}(P_{1n}^* C_n P_{1n}) = \operatorname{tr}(P_{1n}^* A_n P_{1n}).$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 3. *Предположим, что $f \in L_1$, $f(x) \geq 0$ и $\operatorname{supp} f$ имеет лебегову меру δ . Тогда утверждения леммы 2 остаются в силе, причем константа c_2 та же, а $c_1(\delta)$ зависит от структуры носителя f .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Множество $\operatorname{supp} f$ меры δ можно покрыть счетной (а значит, и конечной) системой интервалов, для которых сумма длин не больше 2δ . Для каждого интервала применим лемму 2 и заметим, что интеграл от неотрицательной функции по $\operatorname{supp} f$ не превосходит суммы интегралов по всем этим интервалам. Лемма доказана.

§ 5. Распределение собственных значений

ЛЕММА 4. *Пусть $f \geq 0$ и $f \in L_1$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существуют эрмитовы матрицы $H_n(\varepsilon)$ такие, что*

$$\|A_n - C_n + H_n(\varepsilon)\|_F^2 \leq \varepsilon n, \quad \operatorname{rank} H_n(\varepsilon) \leq \varepsilon n$$

для всех достаточно больших n .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем $N > 0$ и рассмотрим срезку

$$f_N(x) = \begin{cases} f(x), & f(x) \leq N, \\ N, & f(x) > N. \end{cases}$$

Положим $r_N(x) = f(x) - f_N(x)$. Тогда

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|r_N\|_{L_1} = 0, \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \operatorname{mes} \operatorname{supp} r_N = 0.$$

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и зафиксируем $N' > 0$ такое, что

$$\text{mes supp } r_{N'} \leq \frac{\varepsilon}{2c_2}.$$

Теперь зафиксируем $N = N_\varepsilon \geq N'$ такое, что $c_1(\varepsilon)\|r_N\|_{L_1} \leq \varepsilon$. В то же время, из того, что $\text{supp } r_N \subset \text{supp } r_{N'}$, вытекает $\text{mes supp } r_N \leq \varepsilon/(2c_2)$. Согласно лемме 2 можно записать

$$A_n(r_N) = A_{1n}(r_N) + A_{2n}(r_N), \quad C_n(r_N) = C_{1n}(r_N) + C_{2n}(r_N),$$

где

$$\max\{\|A_{1n}(r_N)\|_2, \|C_{1n}(r_N)\|_2\} \leq \varepsilon, \quad \max\{\text{rank } A_{2n}(r_N), \text{rank } C_{2n}(r_N)\} \leq \varepsilon n.$$

Поскольку $f_N \in L_\infty$, имеем $\|A_n(f_N) - C_n(f_N)\|_F^2 \leq \varepsilon n$ при достаточно больших n [2]. Значит, если $\Delta_n(\varepsilon) \equiv C_{2n}(r_N) - A_{2n}(r_N)$, то

$$\begin{aligned} \|A_n(f) - C_n(f) + \Delta_n(\varepsilon)\|_F^2 &= \|(A_n(f_N) - C_n(f_N)) + (A_{1n}(r_N) - C_{1n}(r_N))\|_F^2 \\ &\leq 2\|A_n(f_N) - C_n(f_N)\|_F^2 + 2\|A_{1n}(r_N) - C_{1n}(r_N)\|_F^2 \\ &\leq (2\varepsilon + 4\varepsilon^2)n. \end{aligned}$$

При этом $\text{rank } \Delta_n(\varepsilon) \leq 2\varepsilon n$. В силу произвольности ε лемма доказана.

Постоянство знака функции $f(x)$ не является существенным.

ЛЕММА 5. Если $f(x) \in \mathbb{R}$ и $f \in L_1$, то утверждения леммы 4 остаются в силе.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $f(x) = f^+(x) - f^-(x)$, где $f^\pm(x) \geq 0$ и $f^\pm \in L_1$, то, очевидно,

$$A_n(f) = A_n(f^+) - A_n(f^-), \quad C_n(f) = C_n(f^+) - C_n(f^-).$$

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. В силу леммы 3 существуют эрмитовы матрицы H_n^+ и H_n^- такие, что

$$\begin{aligned} \|A_n(f^+) - C_n(f^+) + H_n^+\|_F^2 &\leq \varepsilon n, \quad \text{rank } H_n^+ \leq \varepsilon n; \\ \|A_n(f^-) - C_n(f^-) + H_n^-\|_F^2 &\leq \varepsilon n, \quad \text{rank } H_n^- \leq \varepsilon n. \end{aligned}$$

Следовательно, если $H_n \equiv H_n^+ - H_n^-$, то

$$\|A_n - C_n + H_n\|_F^2 \leq 4\varepsilon n, \quad \text{rank } H_n \leq 2\varepsilon n.$$

Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ. В условиях леммы 5 $\lambda(A_n) \sim \lambda(C_n)$.

Это вытекает из теоремы 2.

ТЕОРЕМА 3. Если $f(x) \in \mathbb{R}$ и $f \in L_1$, то $\lambda(A_n) \sim f(x)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу следствия леммы 5 $\lambda(A_n) \sim \lambda(C_n)$. Кроме того, если $f \in L_1$, то $\lambda(C_n) \sim f(x)$ [2]. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ. В условиях теоремы 3 $\sigma(A_n) \sim |f(x)|$.

Для доказательства достаточно заметить, что если $F(x)$ непрерывная функция с компактным носителем, то таковой будет также $F(|x|)$.

ТЕОРЕМА 4. Если $f(x), g(x) \in \mathbb{R}$ и $f, g \in L_1$, то $\lambda(A_n(f+g)) \sim f(x) + g(x)$.

Для доказательства нужно принять во внимание, что

$$\lambda(C_n(f+g)) \sim \lambda(C_n(f) + C_n(g)).$$

Кроме этого, потребуется несколько раз применить лемму 3 и теорему 2. Фактически это будет очевидная модификация доказательства теоремы 3.

§ 6. Распределение собственных векторов

Если $\|p\|_2 = 1$, то, как известно,

$$r(A, p) \equiv \|Ap - (Ap, p)p\|_2 = \min_{\lambda} \|Ap - \lambda p\|_2.$$

Поэтому кажется естественным ввести следующее определение.

Пусть имеется последовательность $n \times n$ -матриц M_n и последовательность нормированных базисов $\{q_k^{(n)}\}_{k=1}^n$, где $q_k^{(n)} \in \mathbb{C}^n$. Будем говорить, что собственные векторы матриц M_n *распределены как* $q_k^{(n)}$, если

$$r(M_n, q_k^{(n)}) \sim 0 \quad (**)$$

(другими словами, невязки имеют *кластер* в нуле).

Положим $Q_n = [q_1^{(n)}, \dots, q_n^{(n)}]$ и рассмотрим матрицы невязок

$$R_n = M_n Q_n - Q_n \operatorname{diag}(Q_n^* M_n Q_n).$$

Нетрудно показать, что если $R_n = [R_{1n}, R_{2n}]$ (с точностью до перестановки столбцов), где $\|R_{1n}\|_F^2 = o(n)$, $\operatorname{rank} R_{2n} = o(n)$, то выполняется (**).

Если $f \in L_2$, то собственные векторы теплицевых матриц A_n распределены как $p_k^{(n)}$ (т.е. как собственные векторы циркулянтных матриц). В самом деле, если $\Lambda_n = \operatorname{diag}(P_n^* A_n P_n)$, то

$$\|A_n P_n - P_n \Lambda_n\|_F^2 = \|A_n - P_n \Lambda_n P_n^*\|_F^2 = \|A_n - C_n\|_F^2 = o(n).$$

В случае $f \in L_1$ последнее не обязательно верно. Однако, утверждение о распределении собственных векторов матриц A_n остается в силе (мы покажем это в другой работе).

§ 7. Распределение сингулярных чисел

ТЕОРЕМА 5. Пусть $f(x) \in \mathbb{C}$ и $f \in L_1$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существуют матрицы $\Delta_n(\varepsilon)$ такие, что

$$\|A_n - C_n + \Delta_n(\varepsilon)\|_F^2 \leq \varepsilon n, \quad \operatorname{rank} \Delta_n(\varepsilon) \leq \varepsilon n$$

для всех достаточно больших n .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим эрмитовы разложения

$$A_n = A_{1n} + iA_{2n}, \quad A_{kn} = A_{kn}^*, \quad C_n = C_{1n} + iC_{2n}, \quad C_{kn} = C_{kn}^*.$$

Заметим, что C_{kn} суть оптимальные циркулянты для эрмитовых теплицевых матриц A_{kn} . Матрицы A_{1n} , C_{1n} и A_{2n} , C_{2n} порождаются функциями

$$\operatorname{Re} f(x) = \frac{f(x) + f^*(x)}{2} \quad \text{и} \quad \operatorname{Im} f(x) = -i \frac{f(x) - f^*(x)}{2},$$

соответственно. Поскольку $\operatorname{Re} f(x)$, $\operatorname{Im} f(x) \in \mathbb{R}$, в силу леммы 5 для любого $\varepsilon > 0$ существуют эрмитовы матрицы H_{kn} такие, что

$$\|A_{kn} - C_{kn} + H_{kn}(\varepsilon)\|_F^2 \leq \frac{1}{4}\varepsilon n, \quad \operatorname{rank} H_{kn}(\varepsilon) \leq \frac{1}{2}\varepsilon n, \quad k = 1, 2,$$

для всех достаточно больших n . Легко проверить, что выбор $\Delta_n = H_{1n} + iH_{2n}$ обеспечивает интересующие нас неравенства. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 6. Пусть $f(x) \in \mathbb{C}$ и $f \in L_1$. Тогда

$$\sigma(A_n) \sim |f(x)|, \quad \lambda\left(\frac{A_n + A_n^*}{2}\right) \sim \operatorname{Re} f(x), \quad \lambda\left(\frac{A_n - A_n^*}{2i}\right) \sim \operatorname{Im} f(x).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждения теоремы верны, если A_n заменить оптимальным циркулянтом C_n [2]. Далее, если в условиях теоремы 1 отказаться от требования эрмитовости матриц A_n , C_n и Δ_n , то будут иметь место соотношения [2], [3]

$$\sigma(A_n) \sim \sigma(C_n), \quad \lambda\left(\frac{A_n + A_n^*}{2}\right) \sim \lambda\left(\frac{C_n + C_n^*}{2}\right), \quad \lambda\left(\frac{A_n - A_n^*}{2i}\right) \sim \lambda\left(\frac{C_n - C_n^*}{2i}\right).$$

Поэтому интересующие нас утверждения сразу же вытекают из теоремы 5. Теорема доказана.

Список литературы

1. Grenander V., Szego G. Toeplitz Forms and Their Applications. Berkeley: Univ. of California Press, 1958.
2. Тыртышников Е. Е. Распределения и кластеры // Матричные методы и алгоритмы. М.: ИВМ РАН, 1993. С. 124–166.
3. Тыртышников Е. Е. Новые теоремы о распределении собственных и сингулярных чисел многоуровневых теплицевых матриц // Докл. АН. 1993. Т. 333. №3. С. 300–302.
4. Tyrtshnikov E. E. A unifying approach to some old and new theorems on distribution and clustering // Linear Algebra Appl. 1996. V. 232. P. 1–43.
5. Avram F. On bilinear forms on Gaussian random variables and Toeplitz matrices // Probab. Theory Related Fields. 1988. V. 79. P. 37–45.
6. Parter S. V. On the distribution of the singular values of Toeplitz matrices // Linear Algebra Appl. 1986. V. 80. P. 115–130.
7. Tyrtshnikov E. E. Influence of matrix operations on the distribution of eigenvalues and singular values of Toeplitz matrices // Linear Algebra Appl. 1994. V. 207. P. 225–249.
8. Колмогоров А. Н. О порядке убывания коэффициентов ряда Фурье–Лебега // Избранные труды. Математика и механика. М.: Наука, 1985. С. 12–14.
9. Тыртышников Е. Е. Теплицевы матрицы, некоторые их аналоги и приложения. М.: ОВМ АН СССР, 1989.