Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

К. А. Зубрилин, О наибольшем нильпотентном идеале в алгебрах, удовлетворяющих тождествам Капелли, *Матем. сб.*, 1997, том 188, номер 8, 93–102

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm253>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.187.58

26 апреля 2023 г., 03:06:10

УДК 512

К. А. Зубрилин

О наибольшем нильпотентном идеале в алгебрах, удовлетворяющих тождествам Капелли

Доказано, что во всякой конечно порожденной алгебре конечной сигнатуры над произвольным полем или нётеровым коммутативно-ассоциативным кольцом, удовлетворяющей тождествам Капелли некоторого порядка, существует наибольший нильпотентный идеал.

Библиография: 7 названий.

Говорят, что алгебра удовлетворяет *системе тождеств Капелли порядка n* , если всякий полином, полилинейный и кососимметричный по некоторым n своим переменным, является тождеством этой алгебры.

Тождества Капелли могут быть определены для произвольной сигнатуры, хотя первоначально тождества Капелли рассматривались только для ассоциативных алгебр [1].

Тождества Капелли, с одной стороны, являются естественным обобщением тождества коммутативности и тождества ассоциативности. Если бинарная алгебра удовлетворяет тождествам Капелли порядка 2, то эта алгебра коммутативна и ассоциативна. С другой стороны, выполнение тождеств Капелли может рассматриваться как обобщение свойства конечномерности алгебры, поскольку во всякой m -мерной алгебре выполняются тождества Капелли порядка $m + 1$.

Впервые тождества Капелли были введены в рассмотрение Ю. П. Размысловым в [1] в связи с решением проблемы радикала ассоциативной PI-алгебры.

Комбинаторные аспекты тождеств Капелли произвольной сигнатуры изучались Размысловым в [2]. В этой же работе была построена структурная теория алгебр произвольной конечной сигнатуры над полем нулевой характеристики, удовлетворяющих системе тождеств Капелли некоторого порядка.

Развитию структурной теории алгебр произвольной конечной сигнатуры над полем произвольной характеристики или нётеровым коммутативно-ассоциативным кольцом, удовлетворяющих системе тождеств Капелли некоторого порядка, посвящены работы [3]–[5]. В этих работах показано, что структурная теория таких алгебр является содержательной, и многие результаты о структуре ассоциативных PI-алгебр и конечномерных алгебр могут быть перенесены на случай алгебр произвольной конечной сигнатуры, удовлетворяющих тождествам Капелли некоторого порядка.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-01-01088).

В [1], [6], [7] было доказано, что радикал Джекобсона конечно порожденной PI-алгебры над произвольным нётеровым кольцом является нильпотентным идеалом. Поэтому в конечно порожденной ассоциативной PI-алгебре над произвольным нётеровым кольцом наибольший нильпотентный идеал существует и совпадает с радикалом Джекобсона.

Всякая конечномерная алгебра обладает наибольшим нильпотентным идеалом. Основным результатом данной статьи является

ТЕОРЕМА 1. *Пусть L – конечно порожденная алгебра конечной сигнатуры Ω над полем произвольной характеристики или произвольным нётеровым коммутативно-ассоциативным кольцом C , и C -алгебра L удовлетворяет тождествам Капелли некоторого порядка. Тогда в алгебре L существует наибольший нильпотентный идеал $N(L)$.*

При доказательстве этой теоремы существенно используются комбинаторные методы, развитые в [2]–[5].

Теорема 1 допускает обобщение на пары (представления) сигнатуры конечного типа, удовлетворяющие слабым тождествам Капелли. Класс представлений конечного типа достаточно широк и включает в себя представления алгебр Ли, (специальных) йордановых алгебр, лиевых и суперлиевых тройных систем в ассоциативных алгебрах [3].

ТЕОРЕМА 2. *Пусть (A, L) – конечно порожденная пара C -алгебр сигнатуры конечного типа (Ω, Ω') , удовлетворяющая слабым тождествам Капелли некоторого порядка, и C – произвольное поле или нётерово коммутативно-ассоциативное кольцо. Тогда в алгебре A существует наибольший нильпотентный идеал $N(A)$.*

Обозначения в статье согласованы с обозначениями в [2]–[5].

§ 1. Предварительные сведения и определения

В этом параграфе будут сформулированы основные результаты из [3]–[5], касающиеся комбинаторных свойств тождеств Капелли и структурных свойств алгебр, удовлетворяющих тождествам Капелли.

Пусть C – коммутативное и ассоциативное кольцо с единицей. Будем понимать под C -алгеброй сигнатуры Ω C -модуль A , на котором для каждого $\omega \in \Omega$ определена C -полилинейная операция с арностью $n = n(\omega)$

$$\omega: \underbrace{A \otimes_C A \otimes_C \cdots \otimes_C A}_{n \text{ раз}} \rightarrow A.$$

Для всякой C -алгебры A сигнатуры Ω обозначим через $D(A)$ ассоциативную C -алгебру, которая порождена в $\text{End}_C A$ единичным оператором и всеми элементами вида $f(\hat{x}_0, x_1, \dots, x_q)|_{x_1=v_1, \dots, x_q=v_q}$, где $f(x_0, \dots, x_q)$ – полином из абсолютно свободной C -алгебры сигнатуры Ω , который линеен по x_0 , и по определению $f(\hat{x}_0, v_1, \dots, v_q) \times v = f(v, v_1, \dots, v_q)$ для всех $v \in A$. Если A – бинарная алгебра, то алгебра $D(A)$ называется алгеброй левых и правых умножений, ассоциированной с алгеброй A .

Алгебра A обладает канонической структурой левого $D(A)$ -модуля. Эта структура задается естественным вложением алгебры $D(A)$ в алгебру $\text{End}_C A$. Идеалами алгебры A называют подмодули $D(A)$ -модуля A .

Дополнительно будем предполагать, что среди сигнатурных операций алгебры A имеется операция, арность которой ≥ 2 .

Будем говорить, что идеал I алгебры A сигнатуры Ω является *произведением идеалов* $I_1, \dots, I_q$ алгебры A , если идеал I порожден элементами вида

$$g|_{x_1=v_1, \dots, x_q=v_q, \dots, x_r=v_r},$$

где $g(x_1, \dots, x_q, \dots, x_r)$ — полином из абсолютно свободной C -алгебры сигнатуры Ω , полилинейный по $x_1, \dots, x_q$, зависящий, быть может, от других переменных x_i , $q < i$. Кроме того, $v_i \in I_i$, $1 \leq i \leq q$, и $v_i \in A$, если $i > q$. Будем писать в этом случае, что $I = (I_1 \cdot \dots \cdot I_q)$. Определенное таким образом произведение идеалов является коммутативным.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Идеал I алгебры A сигнатуры Ω называется *нильпотентным класса n* , если

$$\underbrace{(I \cdot \dots \cdot I)}_{n \text{ раз}} \neq (0), \quad \underbrace{(I \cdot \dots \cdot I)}_{n+1 \text{ раз}} = (0).$$

Отметим, что сумма двух или любого конечного числа nilпотентных идеалов является nilпотентным идеалом, поскольку идеал $\sum_{i=1}^m I_i$, где I_i , $1 \leq i \leq m$, — nilпотентный идеал класса n_i алгебры A сигнатуры Ω , nilпотентен в алгебре A класса не выше $\sum_{i=1}^m n_i$.

Здесь мы напомним некоторые определения и результаты из работ [2]–[5].

ЛЕММА 1. Для всякой алгебры L сигнатуры Ω и множества переменных $x_1, x_2, \dots$ существует алгебра $\bar{L}$ той же сигнатуры Ω такая, что

- а) алгебра L является подалгеброй алгебры $\bar{L}$, и алгебра $\bar{L}$ порождена алгеброй L и элементами $x_1, x_2, \dots$;
- б) любое отображение множества $\{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ в алгебру $\bar{L}$ однозначно продолжается до гомоморфизма алгебры $\bar{L}$ в себя, тождественного на L ;
- в) элемент $f(x_1, \dots, x_q) \in \bar{L}$, который является полиномом сигнатуры Ω от $x_1, \dots, x_q$ и, возможно, от элементов алгебры L , равен нулю тогда и только тогда, когда $f(v_1, \dots, v_q) = 0$ в L для любых $v_1, \dots, v_q \in L$.

Алгебра $\bar{L}$ определена однозначно и является факторалгеброй свободного произведения свободной алгебры сигнатуры Ω со свободными образующими $x_1, x_2, \dots$ и алгебры L по идеалу обобщенных тождеств алгебры L .

Очевидно, что множества тождеств алгебры L и $\bar{L}$ совпадают, т.е. $\text{var } L = \text{var } \bar{L}$.

Элементы алгебры $\bar{L}$ можно рассматривать как полиномы сигнатуры Ω от переменных типа x (x_i , $i \in \mathbb{N}$) с коэффициентами из алгебры L .

Пусть в алгебре L выполняются тождества Капелли порядка $n + 1$.

Следующая лемма, доказанная в [4], представляет обобщение тождества Гамильтона–Кэли.

ЛЕММА 2 (о тождестве Гамильтона–Кэли). Пусть $f(x_1, \dots, x_n, x_{n+1})$ – полином из $\overline{L}$, полилинейный по $x_1, \dots, x_n, x_{n+1}$, кососимметричный по $x_1, \dots, x_n$ и зависящий, быть может, от других переменных типа x , a – произвольный элемент из $D(\overline{L})$. Тогда в $\overline{L}$

$$\sum_{q=0}^n (-1)^q \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_q \leq n} f|_{x_{j_1}=a \times x_{j_1}, \dots, x_{j_q}=a \times x_{j_q}, x_{n+1}=a^{n-q} \times x_{n+1}} = 0.$$

В лемме 3 из [4] доказано тождество, показывающее, что можно переставлять два набора из n “кососимметричных” переменных.

ЛЕММА 3. Пусть $f(x_1, \dots, x_{2n})$ – полином сигнатуры Ω , который полилинеен по переменным $x_1, \dots, x_{2n}$, кососимметричен по переменным $x_1, \dots, x_n$ и по переменным $x_{n+1}, \dots, x_{2n}$, зависит, быть может, от других переменных типа x . Тогда в алгебре $\overline{L}$ выполняется равенство

$$f(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{2n}) - f(x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{2n}, x_1, x_2, \dots, x_n) = 0.$$

В [5] доказана

ТЕОРЕМА 3. Пусть конечно порожденная C -алгебра L конечной сигнатуры удовлетворяет системе тождеств Капелли порядка $n+1$. Тогда существуют такие коммутативная и ассоциативная C -алгебра Φ с единицей и идеал J Φ -алгебры $\Phi \otimes_C L$, что идеал $J \cap L$ алгебры L нильпотентен класса не выше n , и в C -алгебре Φ существует такая конечно порожденная C -подалгебра Φ' , что Φ' -модуль $\Phi' \cdot (L/L \cap J)$ конечно порожден.

Там же показано, что в качестве Φ можно взять кольцо полиномов $C[\sigma_q(a) \mid a \in D(L), 1 \leq q \leq n]$, где $\sigma_q(a)$, $a \in D(L)$, $1 \leq q \leq n$, являются свободными коммутирующими переменными. Будем считать, что $\sigma_0(a) = 1_C$ для всех $a \in D(L)$. В качестве J можно взять идеал Φ -алгебры $\Phi \otimes_C L$, порожденный элементами вида

$$\sum_{q=0}^n (-1)^q \sigma_q(a) \otimes a^{n-q} \times v,$$

где $v \in L$, $a \in D(L)$.

Пусть B_n – идеал алгебры $\overline{L}$, порожденный элементами вида

$$f|_{x_1=w_1, \dots, x_n=w_n, x_{n+1}=w_{n+1}, \dots},$$

где f – произвольный элемент алгебры $\overline{L}$, который полилинеен и кососимметричен по переменным $x_1, \dots, x_n$, возможно, зависит от других переменных типа x , а $w_1, \dots, w_n, w_{n+1}, \dots$ – произвольные элементы из алгебры $\overline{L}$. Из определения идеала B_n следует, что алгебра $\overline{L}/B_n$ удовлетворяет системе тождеств Капелли порядка n .

Пусть идеал W_n алгебры $\overline{L}$ – это наименьший идеал алгебры $\overline{L}$ среди тех идеалов, которые

- 1) содержат все элементы вида $d_n(x_1, \dots, x_n)$, где $d_n(x_1, \dots, x_n)$ – элемент алгебры $\overline{L}$, полилинейный и кососимметричный по переменным $x_1, \dots, x_n$, зависящий, быть может, от других переменных типа x ;
- 2) замкнуты относительно всех гомоморфизмов алгебры $\overline{L}$ в себя, которые являются тождественным отображением на L и переводят переменные типа x в переменные типа x .

Отметим, что идеал W_n содержит все элементы алгебры $\overline{L}$, полилинейные и кососимметричные по n переменным типа x , и $W_n \subset B_n$.

Обозначим буквой F кольцо полиномов $C[\sigma_q(a) \mid a \in D(\overline{L}), 1 \leq q \leq n]$, где $\sigma_q(a)$, $a \in D(\overline{L})$, $1 \leq q \leq n$, являются свободными коммутирующими переменными. Будем считать, что $\sigma_0(a) = 1_C$ для всех $a \in D(\overline{L})$.

Пусть $\overline{J}$ – идеал F -алгебры $F \otimes_C \overline{L}$, порожденный элементами вида

$$\sum_{q=0}^n (-1)^q \sigma_q(a) \otimes a^{n-q} \times v,$$

где $v \in \overline{L}$, $a \in D(\overline{L})$.

Тогда $\Phi \hookrightarrow F$, $J \hookrightarrow \overline{J}$.

Лемма 4 из [5], хотя и техническая по своему характеру, представляет самостоятельный интерес. Здесь показано, как для каждого $b \in D(\overline{L})$ построить отображение $\varphi(b) \in \text{End}_{D(\overline{L})} F \otimes_C W_n$, задающее структуру $C[\sigma_p(b) \mid 1 \leq p \leq n]$ -модуля на W_n .

ЛЕММА 4. Для всякого элемента b алгебры $D(\overline{L})$ существует такой элемент $\varphi(b)$ из $\text{End}_{D(\overline{L})} F \otimes_C W_n$ – алгебры всех эндоморфизмов $D(\overline{L})$ -модуля $F \otimes_C W_n$, что

- 1) $\varphi(b)|_{F(b) \otimes_C W_n} = \text{id}$, где $F(b) = C[\sigma_p(a) \mid a \in D(\overline{L}), a \neq b, 0 \leq p \leq n]$, т.е. $F(b)$ – это C -подалгебра алгебры F , которая состоит из элементов, не зависящих от $\sigma_p(b)$, $1 \leq p \leq n$;
- 2) отображение $\varphi(b)$ задает на W_n структуру модуля над $C[\sigma_p(b) \mid 0 \leq p \leq n]$ следующим образом: $f \cdot d = \varphi(b)(f \otimes d)$, где $f \in C[\sigma_p(b) \mid 0 \leq p \leq n]$, $d \in W_n$ (здесь предполагается, что $W_n \hookrightarrow F \otimes_C W_n$ посредством $d \rightarrow 1 \otimes d$);
- 3) если $f_1 \in F(b)$, $f_2 \in C[\sigma_p(b) \mid 0 \leq p \leq n]$, то $\varphi(b)(f_1 f_2 \otimes d) = f_1 \otimes f_2 \cdot d$, где $d \in W_n$;
- 4) если полином $g(x_0, x_1, \dots, x_r)$ сигнатуры Ω полилинеен по переменным $x_0, x_1, \dots, x_n$, кососимметричен по переменным $x_1, \dots, x_n$ и зависит, быть может, от других переменных типа x , то

$$\varphi(b) \left(\sum_{j=0}^n (-1)^j \sigma_j(b) \otimes g(b^{n-j} \times v, x_1, \dots, x_r) \right) = 0$$

в идеале W_n , где $v \in \overline{L}$.

Из условий 1)–3) получаем, что для задания эндоморфизма $\varphi(b)$ достаточно определить на W_n структуру модуля над $C[\sigma_p(b) \mid 0 \leq p \leq n]$, причем действие алгебры $C[\sigma_p(b) \mid 0 \leq p \leq n]$ на W_n должно коммутировать с действием алгебры $D(\overline{L})$.

В [5] показано, что такое действие элементов $\sigma_p(b)$, $0 \leq p \leq n$, на элементы $d_n(x_1, \dots, x_n)$ идеала W_n , которые полилинейны и кососимметричны по переменным $x_1, \dots, x_n$, можно задать следующим образом:

$$\sigma_p(b) \cdot d_n(x_1, \dots, x_n) = \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_p \leq n} d_n|_{x_{j_1}=b \times x_{j_1}, \dots, x_{j_p}=b \times x_{j_p}},$$

где $1 \leq p \leq n$, $\sigma_0(b)|_{W_n} = \text{id}$.

На остальные элементы идеала W_n действие элементов $\sigma_p(b)$, $0 \leq p \leq n$, продолжается посредством специализации переменных типа x в переменные типа x . Корректность определения действия следует из леммы 3, выполнение условия 4) – из леммы 2.

§ 2. Доказательство основной теоремы 1

В этом параграфе будет доказана лемма 5 и основная теорема 1.

ЛЕММА 5. Пусть в алгебре L конечной сигнатуры Ω над нётеровым коммутативно-ассоциативным кольцом C выполняются тождества Капелли порядка $n+1$. Тогда $(W_n \cdot \overline{J}) \cap \overline{L} = (0)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $d \in (W_n \cdot \overline{J}) \cap \overline{L}$. Тогда для любого $b \in D(\overline{L})$ получаем, что $\varphi(b)(d) = d$.

Для всякого $b \in D(\overline{L})$ определим $\overline{J}(b)$ – идеал F -алгебры $F \otimes_C \overline{L}$, порожденный элементами вида

$$\sum_{q=0}^n (-1)^q \sigma_q(b) \otimes b^{n-q} \times v,$$

где $v \in \overline{L}$, а b – фиксированный элемент из $D(\overline{L})$. Тогда

$$d \in \sum_{i=1}^r (W_n \cdot \overline{J}(b_i))$$

для некоторых $b_1, \dots, b_r \in D(\overline{L})$. Из условия 4) леммы 4 получаем, что для $\psi = \varphi(b_1) \cdots \varphi(b_r)$ верно

$$\psi(d) = 0.$$

Таким образом, $d = \psi(d) = 0$. Поэтому $d = 0$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 1 будет проведено индукцией по порядку тождеств Капелли.

База индукции. Утверждение теоремы 1 верно для алгебр, удовлетворяющих тождествам Капелли порядка 2.

Доказательство базы индукции. Пусть в конечно порожденной алгебре L конечной сигнатуры Ω над произвольным полем или нётеровым коммутативно-ассоциативным кольцом C выполняются тождества Капелли порядка 2. Тогда $B_1 = \bar{L}$, $x_1 \in W_1$.

Пусть $N_0 \subset N_1 \subset \dots \subset N_t \subset \dots$ – бесконечная строго возрастающая цепочка нильпотентных идеалов алгебры L . Докажем, что идеал $\tilde{N} = \bigcup_{t=0}^{\infty} N_t$ – нильпотентный идеал алгебры L .

Из теоремы 3 следует, что для некоторого m

$$\Phi' \otimes_C \tilde{N} \subseteq \Phi' \otimes_C N_m + J$$

(из нётеровости Φ' -модуля $\Phi' \cdot (L/L \cap J)$). Обозначим через $\bar{N}_m$ идеал в $\bar{L}$, порожденный N_m . Пусть q – класс нильпотентности идеала N_m . Тогда q также и класс нильпотентности идеала $\bar{N}_m$.

Пусть $f(x_1, \dots, x_{q+2}, \dots)$ – моном из $\bar{L}$, полилинейный по $x_1, \dots, x_{q+2}$, зависящий, быть может, от других переменных типа x .

Пусть $v_1, \dots, v_{q+2} \in \tilde{N}$. Тогда $v_i = v'_i + h_i$, где $v'_i \in \Phi' \otimes_C N_m$, $h_i \in J$, $1 \leq i \leq q+2$. Тогда

$$f|_{x_2=v_2, \dots, x_{q+2}=v_{q+2}} \in (\Phi' \otimes_C \underbrace{(\bar{N}_m \cdot \dots \cdot \bar{N}_m)}_{q+1 \text{ раз}} + (W_1 \cdot J)) \cap \bar{L}.$$

Так как идеал $\bar{N}_m$ нильпотентен класса q , получаем

$$\underbrace{(\bar{N}_m \cdot \dots \cdot \bar{N}_m)}_{q+1 \text{ раз}} = (0).$$

Из леммы 5 получаем, что $(W_1 \cdot J) \cap \bar{L} = (0)$. Поэтому

$$f|_{x_2=v_2, \dots, x_{q+2}=v_{q+2}} = 0$$

в $\bar{L}$, а значит, и

$$f|_{x_1=v_1, x_2=v_2, \dots, x_{q+2}=v_{q+2}} = 0$$

в $\bar{L}$.

Это означает, что идеал $\tilde{N}$ алгебры L нильпотентен класса не выше $q+1$. По лемме Порна среди нильпотентных идеалов алгебры L существует наибольший. Основание индукции доказано.

Шаг индукции. Пусть утверждение теоремы 1 верно для всех алгебр, удовлетворяющих тождествам Капелли порядка n , и в конечно порожденной алгебре L конечной сигнатуры Ω над произвольным полем или нётеровым коммутативно-ассоциативным кольцом C выполняются тождества Капелли порядка $n+1$.

По предположению индукции в алгебре $L/L \cap B_n$ существует наибольший нильпотентный идеал $N(L/L \cap B_n)$. Пусть r класс нильпотентности этого идеала.

Пусть $N_0 \subset N_1 \subset \dots \subset N_t \subset \dots$ – бесконечная строго возрастающая цепочка нильпотентных идеалов алгебры L . Докажем, что идеал $\tilde{N} = \bigcup_{t=0}^{\infty} N_t$ – нильпотентный идеал алгебры L .

Из теоремы 3 следует, что для некоторого m

$$\Phi' \otimes_C \tilde{N} \subseteq \Phi' \otimes_C N_m + J$$

(из нётеровости Φ' -модуля $\Phi' \cdot (L/L \cap J)$). Обозначим через $\overline{N}_m$ идеал в $\overline{L}$, порожденный N_m . Пусть q – класс нильпотентности идеала N_m . Тогда q также и класс нильпотентности идеала $\overline{N}_m$.

Из индуктивного предположения получаем, что

$$\underbrace{(\tilde{N} \cdot \dots \cdot \tilde{N})}_{r+1 \text{ раз}} \subseteq L \cap B_n.$$

Пусть $f(x_1, \dots, x_l, \dots)$ – моном из $\overline{L}$, полилинейный по всем своим переменным типа x , среди которых имеются $x_1, \dots, x_l$, зависящий, быть может, от других переменных типа x . Докажем, что существует достаточно большое l , что для всякого такого монома

$$f(x_1, \dots, x_l, \dots) \Big|_{x_1=v_1, \dots, x_l=v_l} = 0$$

в $\overline{L}$, где $v_1, \dots, v_l \in \tilde{N}$.

Существует достаточно большое l , что всякий такой моном f после перенумерации переменных $x_1, \dots, x_l$ имеет вид

$$f_1(f_2(x_1, \dots, x_s, \dots), x_{s+1}, \dots, x_l, \dots),$$

где $r+1 \leq s \leq l$, $l-s \geq q+1$, и $f_2(x_1, \dots, x_s, \dots)$ – моном из $\overline{L}$, полилинейный по $x_1, \dots, x_s$, зависящий, быть может, от других переменных типа x , $f_1(t, x_{s+1}, \dots, x_l, \dots)$ – моном из $\overline{L}$, полилинейный по $t, x_{s+1}, \dots, x_l$, зависящий, быть может, от других переменных типа x , а t – некоторая переменная типа x .

В качестве l можно взять $k \cdot r + q + 1$, где k – максимальная “арность” операции из Ω . Отметим, что l зависит только от r, q и максимальной “арности” операции из Ω , но не зависит от числа порождающих алгебры L , мощности сигнатуры Ω , порядка тождеств Капелли $n+1$.

Пусть $v_1, \dots, v_l \in \tilde{N}$, а $v_{l+1}, \dots \in L$. Тогда $v_i = v'_i + h_i$, где $v'_i \in \Phi' \otimes_C N_m$, $h_i \in J$, $s+1 \leq i \leq l$. Тогда

$$\overline{f} = f_2 \Big|_{x_1=v_1, \dots, x_s=v_s, x_{l+1}=v_{l+1}, \dots} \in B_n \cap L.$$

Тогда элемент $\overline{f}$ из алгебры L может быть представлен в виде C -линейной комбинации элементов вида $g(t_1, \dots, t_n) \Big|_{t_1=w_1, \dots, t_n=w_n}$, где полином $g(t_1, \dots, t_n)$ из алгебры $\overline{L}$ полилинеен и кососимметричен по переменным $t_1, \dots, t_n$, переменные $t_1, \dots, t_n$ являются переменными типа x , т.е. $g(t_1, \dots, t_n) \in W_n$, элементы $w_1, \dots, w_n$ лежат в алгебре L .

Будем считать, что среди переменных $t_1, \dots, t_n$ нет переменных, от которых зависит моном f .

Поэтому

$$f|_{x_1=v_1, \dots, x_s=v_s, x_{l+1}=v_{l+1}, \dots} = (f_1|_{t=\bar{f}})|_{x_{l+1}=v_{l+1}, \dots}$$

может быть представлен в виде C -линейной комбинации элементов вида

$$((f_1|_{t=g})|_{x_{l+1}=v_{l+1}, \dots})|_{t_1=w_1, \dots, t_n=w_n},$$

где полином $g(t_1, \dots, t_n)$ из алгебры $\bar{L}$ полилинеен и кососимметричен по переменным $t_1, \dots, t_n$, переменные $t_1, \dots, t_n$ являются переменными типа x , т.е. $g(t_1, \dots, t_n) \in W_n$, элементы $w_1, \dots, w_n$ лежат в алгебре L .

Подставим в полином $f_1|_{t=g}$ вместо переменных $x_{s+1}, \dots, x_l$ элементы $v_{s+1}, \dots, v_l$ из $\tilde{N}$. Поскольку $v_i = v'_i + h_i$, где $v'_i \in \Phi' \otimes_C N_m$, $h_i \in J$, $s+1 \leq i \leq l$, получим, что

$$f_1|_{t=g, x_{s+1}=v_{s+1}, \dots, x_l=v_l} \in (\Phi' \otimes_C \underbrace{(\bar{N}_m \cdot \dots \cdot \bar{N}_m)}_{q+1 \text{ раз}} + (W_n \cdot J)) \cap \bar{L}.$$

Так как идеал $\bar{N}_m$ нильпотентен класса q , получим

$$\underbrace{(\bar{N}_m \cdot \dots \cdot \bar{N}_m)}_{q+1 \text{ раз}} = (0).$$

Из леммы 5 $(W_n \cdot J) \cap \bar{L} = (0)$. Поэтому

$$\begin{aligned} f_1|_{t=g, x_{s+1}=v_{s+1}, \dots, x_l=v_l} &= 0, \\ (f_1|_{t=g, x_{s+1}=v_{s+1}, \dots, x_l=v_l, \dots})|_{t_1=w_1, \dots, t_n=w_n} &= 0, \\ f_1|_{t=\bar{f}, x_{s+1}=v_{s+1}, \dots, x_l=v_l} &= 0, \\ f|_{x_1=v_1, \dots, x_l=v_l} &= 0. \end{aligned}$$

Таким образом, доказано, что идеал $\tilde{N}$ нильпотентен класса меньше l . По лемме Цорна среди нильпотентных идеалов алгебры L существует наибольший.

Теорема 1 доказана.

Список литературы

1. *Размыслов Ю. П.* О радикале Джекобсона в PI-алгебрах // Алгебра и логика. 1974. Т. 13. №3. С. 337–360.
2. *Размыслов Ю. П.* Алгебры, удовлетворяющие тождественным соотношениям типа Капелли // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1981. Т. 45. №1. С. 143–166.
3. *Razmyslov Yu. P., Zubrilin K. A.* Capelli identities and representations of finite type // Comm. Algebra. 1994. V. 22 (14). P. 5733–5744.
4. *Зубрилин К. А.* Алгебры, удовлетворяющие тождествам Капелли // Матем. сб. 1995. Т. 186. №3. С. 53–64.
5. *Зубрилин К. А.* О классе нильпотентности препятствия для представимости алгебр, удовлетворяющих тождествам Капелли // Фундамент. и прикл. матем. 1995. Т. 1. №2. С. 409–430.
6. *Кемер А. Р.* Тождества Капелли и нильпотентность радикала Джекобсона конечно порожденной PI-алгебры // Докл. АН СССР. 1980. Т. 245. №4. С. 793–799.
7. *Braun A.* The Jacobson radical in a finitely generated P.I. algebra // Bull. Amer. Math. Soc. 1982. V. 7. №2. P. 385–386.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Поступила в редакцию
08.10.1996