Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Э. Б. Винберг, Группы, задаваемые периодическими попарными соотношениями,
Матем. сб., 1997, том 188, номер 9, 3–12

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm254>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.209.158.208

26 апреля 2023 г., 15:41:04

УДК 512.04

Э. Б. Винберг

Группы, задаваемые периодическими попарными соотношениями

Класс групп, задаваемый периодическими попарными соотношениями, включает в себя группы Кокстера и обобщенные треугольные группы. Для этого класса в статье доказываются обобщения некоторых теорем, известных для групп Кокстера и обобщенных треугольных групп.

Библиография: 16 названий.

Пусть Γ – группа, порожденная элементами $x_1, \dots, x_n$ с определяющими соотношениями

$$w_i(x_1, \dots, x_n)^{k_i} = e \quad (i = 1, \dots, m),$$

где $w_1, \dots, w_m$ – некоторые слова от n букв. Говорят, что группа Γ *не сжимается* (в англоязычной литературе – *does not collapse*), если

$$\text{ord } w_i(x_1, \dots, x_n) = k_i$$

для любого i .

Гомоморфизм $\varphi: \Gamma \rightarrow G$ называется *специальным*, если

$$\text{ord } w_i(\varphi(x_1), \dots, \varphi(x_n)) = k_i$$

для любого i . Очевидно, что если группа Γ допускает специальный гомоморфизм в какую-либо группу, то она не сжимается.

По лемме Сельберга [1] всякая конечнопорожденная линейная группа над полем нулевой характеристики обладает подгруппой конечного индекса без кручения. Поэтому если группа Γ допускает специальное линейное представление (т.е. специальный гомоморфизм в группу $\text{GL}_n(\mathbb{C})$), то она допускает специальный гомоморфизм в конечную группу.

ТЕОРЕМА 1. Пусть группа Γ допускает специальный гомоморфизм в конечную группу. Если $\frac{1}{k_1} + \dots + \frac{1}{k_m} \leq n - 1$, то в Γ имеется подгруппа конечного индекса, гомоморфно отображающаяся на бесконечную циклическую группу; если же $\frac{1}{k_1} + \dots + \frac{1}{k_m} < n - 1$, то в Γ имеется подгруппа конечного индекса, гомоморфно отображающаяся на свободную группу ранга 2.

Заметим, что если группа Γ конечна и не сжимается, то ее тождественное отображение в себя является специальным гомоморфизмом в конечную группу. Поэтому из сформулированной теоремы вытекает

СЛЕДСТВИЕ. Если группа Γ не сжимается и $\frac{1}{k_1} + \dots + \frac{1}{k_m} \leq n - 1$, то Γ бесконечна.

Последнее утверждение, насколько мне известно, было впервые доказано в общем виде в работе Томаса [2]. В специальном случае обобщенных треугольных групп приведенная выше теорема была доказана в работе Баумслага, Моргана и Шейлена [3]. Ее доказательство в общем виде будет дано в п. 1 настоящей работы.

Применение теоремы 1 упирается в построение специальных гомоморфизмов. Кроме того, такие гомоморфизмы могут дать важную информацию о группе Γ и безотносительно к этой теореме, тем более что ее условия отнюдь не являются необходимыми для бесконечности группы.

Классическими примерами групп, для которых известно существование специальных (и к тому же точных) линейных представлений, являются *треугольные группы*

$$T(k, l, m) = \langle x, y \mid x^k = y^l = (xy)^m = e \rangle \quad (k, l, m \geq 2)$$

и группы Кокстера

$$\langle x_1, \dots, x_n \mid x_i^2 = e \ (1 \leq i \leq n), \ (x_i x_j)^{k_{ij}} = e \ (1 \leq i < j \leq n) \rangle \quad (k_{ij} \geq 2).$$

В этих примерах можно допустить, что некоторые показатели равны ∞ , что означает просто отсутствие соответствующего соотношения.

Геометрическое представление треугольных групп как дискретных групп движений сферы, евклидовой плоскости или плоскости Лобачевского и, тем самым, их точное линейное представление было получено Диком и Пуанкаре в конце прошлого века. Специальное линейное представление любой группы Кокстера было построено самим Кокстером [4] в 1935 г. Как доказал Титс [5], это представление является точным. Отметим, что теория треугольных групп вкладывается в теорию групп Кокстера, так как треугольные группы – это не что иное, как четные (т.е. образованные словами четной длины) подгруппы в группах Кокстера с тремя образующими.

В случае $k_{ij} = \infty$ элемент $x_i x_j$ группы Кокстера при упомянутом выше линейном представлении переходит в унитарный оператор, отличный от единицы.

Треугольная группа $T(k, l, m)$ конечна тогда и только тогда, когда она реализуется на сфере, что имеет место в точности тогда, когда $\frac{1}{k} + \frac{1}{l} + \frac{1}{m} > 1$. Таким образом, в случае треугольных групп условие следствия теоремы 1 не только достаточно, но и необходимо для бесконечности группы. В случае групп Кокстера это уже не так. Все конечные группы Кокстера найдены в той же работе [4]. В настоящее время они широко известны благодаря тому, что, за немногими исключениями, они являются группами Вейля полупростых групп Ли.

В работах Файна и Розенбергера [6] и Баумслага, Моргана и Шейлена [3] были рассмотрены *обобщенные треугольные группы*

$$\langle x, y \mid x^k = y^l = w(x, y)^m = e \rangle, \quad (1)$$

где $k, l, m \geq 2$, а w – циклически приведенное слово, не сводящееся к степени x или y с учетом соотношений $x^k = y^l = e$; можно считать, что

$$w(x, y) = x^{k_1} y^{l_1} \dots x^{k_s} y^{l_s} \quad (0 < k_i < k, \ 0 < l_i < l). \quad (2)$$

В работе [3] было доказано, что всякая обобщенная треугольная группа допускает специальный гомоморфизм в группу $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$. (Другое доказательство и обобщение этого результата см. в [7].) В п. 2 настоящей работы будет приведен удобный для нас вариант доказательства этой теоремы.

Все конечные обобщенные треугольные группы, за исключением двух случаев, остававшихся неясными, были классифицированы в работе [8]. Оставшиеся два случая были разобраны в [9].

В настоящей работе рассматривается класс групп, включающий в себя как группы Кокстера, так и обобщенные треугольные группы. Это группы вида

$$\langle x_1, \dots, x_n \mid x_i^{k_i} = e \ (1 \leq i \leq n), \ w_{ij}(x_i, x_j)^{k_{ij}} = e \ (1 \leq i < j \leq n) \rangle,$$

где $k_i, k_{ij} \geq 2$, а w_{ij} – любые слова, удовлетворяющие тому же условию, что и в определении обобщенных треугольных групп. Они называются в работе *группами, задаваемыми периодическими попарными соотношениями*.

Основным результатом работы является

ТЕОРЕМА 2. *Всякая группа с n образующими, задаваемая периодическими попарными соотношениями, допускает специальный гомоморфизм в группу $\mathrm{SO}_{n+1}(\mathbb{C})$.*

Так как $\mathrm{SO}_3(\mathbb{C}) \simeq \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$, то эта теорема является прямым обобщением теоремы Баумслага, Моргана и Шейлена.

Доказательство теоремы 2 комбинирует идеи работы [3] и работы Царанова [10], в которой эта теорема была доказана для случая

$$w_{ij} = x_i^{p_{ij}} x_j^{q_{ij}}, \quad (p_{ij}, k_i) = (q_{ij}, k_j) = 1.$$

В работе Царанова [11] были классифицированы все конечные группы, задаваемые периодическими попарными соотношениями такого вида.

По аналогии с треугольными группами естественно называть *тетраэдральными* четные подгруппы групп Кокстера с четырьмя образующими. Они имеют представление вида

$$\langle x, y, z \mid x^k = y^l = z^m = (yz^{-1})^p = (zx^{-1})^q = (xy^{-1})^r = e \rangle.$$

Соответственно этому группы с тремя образующими, задаваемые периодическими попарными соотношениями, естественно называть *обобщенными тетраэдральными группами*. Для них теорема 2 может быть усилена.

ТЕОРЕМА 3. *Всякая обобщенная тетраэдральная группа допускает специальный гомоморфизм в группу $\mathrm{SO}_3(\mathbb{C})$ ($\simeq \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$).*

Доказательство этой теоремы, как мы увидим, может быть получено незначительной модификацией доказательства теоремы 2. Ее независимое доказательство, основанное на теории инвариантов (также приводимое ниже), было получено мной еще в 1991 г. и докладывалось в том же году в Москве, Бохуме, Билефельде и Базеле, но не было опубликовано до сих пор.

Я благодарю Ф. Левина, Г. Розенбергера и М. Хагельберга за полезные обсуждения.

1. Доказательство теоремы 1. Пусть $\Gamma_0 \subset \Gamma$ — ядро гомоморфизма, о котором идет речь в теореме. Из условия следует, что $|\Gamma : \Gamma_0| = d < \infty$ и Γ_0 не содержит элементов вида $w_i(x_1, \dots, x_n)^k$, $0 < k < k_i$.

Пусть F — свободная группа с образующими $u_1, \dots, u_n$ и $\pi: F \rightarrow \Gamma$ — гомоморфизм, отображающий u_i в x_i . Положим $F_0 = \pi^{-1}(\Gamma_0)$. Это (нормальная) подгруппа индекса d в F и, следовательно, свободная группа ранга $d(n-1) + 1$.

Ядро N гомоморфизма π как нормальная подгруппа группы F_0 порождается элементами вида

$$vw_i(u_1, \dots, u_n)^{k_i}v^{-1},$$

где v пробегает представителей смежных классов F по F_0 . Более того, ясно, что для каждого i на самом деле достаточно взять представителей смежных классов F по произведению F_0 и циклической подгруппы, порожденной элементом $w_i(u_1, \dots, u_n)$. Так как F_0 не содержит элементов вида $w_i(u_1, \dots, u_n)^k$, $0 < k < k_i$, то имеется d/k_i таких представителей. Следовательно, группа N порождена $d \sum_i \frac{1}{k_i}$ элементами как нормальная подгруппа группы F_0 .

Таким образом, группа Γ_0 имеет $d(n-1) + 1$ образующих и $d \sum_i \frac{1}{k_i}$ определяющих соотношений. Если $\sum_i \frac{1}{k_i} \leq n-1$, то число определяющих соотношений группы Γ_0 меньше числа образующих и, следовательно, она гомоморфно отображается на свободную циклическую группу. Если же $\sum_i \frac{1}{k_i} < n-1$, то число определяющих соотношений по меньшей мере на два меньше числа образующих и, следовательно [12], в Γ_0 имеется подгруппа конечного индекса, гомоморфно отображающаяся на свободную группу ранга 2.

2. Доказательство теоремы 2 при $n = 3$. Пусть V — комплексное векторное пространство с базисом $\{e_0, e_1, e_2\}$ и скалярным умножением (быть может, вырожденным), определенным на базисных векторах формулами

$$\begin{aligned} (e_0, e_0) &= (e_1, e_1) = (e_2, e_2) = 1, \\ (e_0, e_1) &= (e_0, e_2) = 0, \\ (e_1, e_2) &= z \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

Рассмотрим ортогональный оператор X_1 , представляющий собой поворот на угол $2\pi/k_1$ в плоскости $\langle e_0, e_1 \rangle$ и тождественно действующий в ортогональном дополнении. Легко видеть, что в базисе $\{e_0, e_1, e_2\}$ он задается матрицей

$$\begin{pmatrix} \cos \frac{2\pi}{k_1} & -\sin \frac{2\pi}{k_1} & -z \sin \frac{2\pi}{k_1} \\ \sin \frac{2\pi}{k_1} & \cos \frac{2\pi}{k_1} & z(\cos \frac{2\pi}{k_1} - 1) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Аналогично, ортогональный оператор X_2 , представляющий собой поворот на угол $2\pi/k_2$ в плоскости $\langle e_0, e_2 \rangle$, задается матрицей

$$\begin{pmatrix} \cos \frac{2\pi}{k_2} & -z \sin \frac{2\pi}{k_2} & -\sin \frac{2\pi}{k_2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \frac{2\pi}{k_2} & z(\cos \frac{2\pi}{k_2} - 1) & \cos \frac{2\pi}{k_2} \end{pmatrix}.$$

Пользуясь тем, что число z находится в нашем распоряжении, постараемся выбрать его так, чтобы (ортогональный) оператор $w_{12}(X_1, X_2)$ был поворотом на угол $2\pi/k_{12}$ в некоторой невырожденной плоскости. Для этого необходимо и достаточно, чтобы след этого оператора был равен $2 \cos \frac{2\pi}{k_{12}} + 1$. (Отметим, что если скалярное умножение в V вырожденно, то все рассматриваемые операторы тождественно действуют на его ядре.)

Можно считать, что

$$w_{12}(x_1, x_2) = x_1^{p_{11}} x_2^{p_{21}} \cdots x_1^{p_{1s}} x_2^{p_{2s}} \quad (0 < p_{1i} < k_1, \quad 0 < p_{2i} < k_2);$$

тогда след оператора $w_{12}(X_1, X_2)$ есть многочлен степени $\leq 2s$ от z , коэффициент которого при z^{2s} равен

$$\prod_i \left(\cos \frac{2\pi p_{1i}}{k_1} - 1 \right) \left(\cos \frac{2\pi p_{2i}}{k_2} - 1 \right) \neq 0.$$

Таким образом, это многочлен положительной степени. Следовательно, он принимает все значения, в том числе и интересующее нас.

Если число z выбрано указанным образом, то отображение $x_1 \mapsto X_1, x_2 \mapsto X_2$ продолжается до специального гомоморфизма группы Γ в группу ортогональных преобразований пространства V . Тем самым, если скалярное умножение в V невырожденно, мы получим специальный гомоморфизм группы Γ в $SO_3(\mathbb{C})$. Если оно вырожденно, то, перейдя к факторпространству по его ядру, мы получим специальный гомоморфизм группы Γ в $SO_2(\mathbb{C})$; но так как $SO_2(\mathbb{C}) \subset SO_3(\mathbb{C})$, то и в этом случае существует специальный гомоморфизм группы Γ в $SO_3(\mathbb{C})$.

3. Доказательство теоремы 2 в общем случае. Пусть V – комплексное векторное пространство с базисом $\{e_0, e_1, \dots, e_n\}$ и скалярным умножением, определенным на базисных векторах формулами

$$\begin{aligned} (e_0, e_0) &= (e_1, e_1) = \cdots = (e_n, e_n) = 1, \\ (e_0, e_1) &= \cdots = (e_0, e_n) = 0, \\ (e_i, e_j) &= z_{ij} \in \mathbb{C} \quad (1 \leq i < j \leq n). \end{aligned}$$

Обозначим через $X_i (i = 1, \dots, n)$ ортогональный оператор, представляющий собой поворот на угол $2\pi/k_i$ в плоскости $\langle e_0, e_i \rangle$ и тождественно действующий в ортогональном дополнении.

В соответствии с п. 2 подберем числа z_{ij} таким образом, чтобы оператор $w_{ij}(X_i, X_j)$ действовал в пространстве $\langle e_0, e_i, e_j \rangle$ как поворот на угол $2\pi/k_{ij}$ в некоторой невырожденной плоскости. Докажем, что в ортогональном дополнении к этой плоскости (во всем пространстве V , а не только в $\langle e_0, e_i, e_j \rangle$) этот оператор будет действовать тождественно. Это очевидно, если подпространство $\langle e_0, e_i, e_j \rangle$ невырожденно (т.е. если $z_{ij} \neq \pm 1$): действительно, в этом случае оба оператора X_i, X_j , а следовательно, и оператор $w_{ij}(X_i, X_j)$, действуют тождественно в ортогональном дополнении к $\langle e_0, e_i, e_j \rangle$. Таким образом, при $z_{ij} \neq \pm 1$ размерность пространства неподвижных точек оператора $w_{ij}(X_i, X_j)$ равна $n - 1$.

Путем предельного перехода отсюда получаем, что это верно и при $z_{ij} = \pm 1$. Это и означает, что оператор $w_{ij}(X_i, X_j)$ действует тождественно в ортогональном дополнении к плоскости поворота.

Ясно, что отображение $x_i \mapsto X_i$ продолжается до специального гомоморфизма группы Γ в группу ортогональных преобразований пространства V . Если скалярное умножение в V невырожденно, то мы тем самым получаем специальный гомоморфизм группы Γ в группу $\mathrm{SO}_{n+1}(\mathbb{C})$. Если оно вырождено, то все рассматриваемые операторы тождественно действуют на его ядре. Перейдя к факторпространству, мы получим специальный гомоморфизм группы Γ в $\mathrm{SO}_m(\mathbb{C})$, $m \leq n$; но так как $\mathrm{SO}_m(\mathbb{C}) \subset \mathrm{SO}_{n+1}(\mathbb{C})$, то и в этом случае существует специальный гомоморфизм группы Γ в $\mathrm{SO}_{n+1}(\mathbb{C})$.

4. Доказательство теоремы 3. В случае $n = 3$ мы построили специальный гомоморфизм группы Γ в группу $\mathrm{SO}_4(\mathbb{C})$. Известно, что

$$\mathrm{SO}_4(\mathbb{C}) \simeq (\mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})) / \{(E, E), (-E, -E)\}$$

и, следовательно, в $\mathrm{SO}_4(\mathbb{C})$ имеется нормальная подгруппа H , изоморфная $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$, факторгруппа по которой изоморфна $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C}) (\simeq \mathrm{SO}_3(\mathbb{C}))$. Переходя к этой факторгруппе, мы получаем гомоморфизм группы Γ в $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$. Докажем, что он специален. Для этого нужно только проверить, что подгруппа H не содержит нетривиальных степеней операторов X_i и $w_{ij}(X_i, X_j)$.

Заметим, что согласно построению каждый из указанных операторов, а также любая его нетривиальная степень, полупрост и имеет двукратное собственное значение 1. С другой стороны, спектр любого оператора из H имеет вид $\{\lambda, \lambda, \lambda^{-1}, \lambda^{-1}\}$. Это и доказывает сформулированное выше утверждение.

5. Инварианты системы матриц. Рассмотрим действие группы $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ на пространстве $M_2(\mathbb{C})$ всех матриц сопряжениями. Определитель матрицы есть невырожденная квадратичная форма на $M_2(\mathbb{C})$, инвариантная относительно этого действия. Введем в $M_2(\mathbb{C})$ инвариантное скалярное умножение так, чтобы

$$(X, X) = -2 \det X.$$

Пространство $M_2(\mathbb{C})$ разлагается в ортогональную прямую сумму одномерного пространства $\langle E \rangle$, на котором $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ действует тривиально, и трехмерного подпространства $M_2^0(\mathbb{C})$ матриц с нулевым следом, на котором $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ действует как группа $\mathrm{SO}_3(\mathbb{C})$ всех унимодулярных ортогональных преобразований. Отметим, что проекция матрицы X на подпространство $\langle E \rangle$ равна $\frac{1}{2}(\mathrm{tr} X)E$.

Имея в виду дальнейшие приложения, приведем здесь описание инвариантов системы матриц $X_1, \dots, X_m \in M_2(\mathbb{C})$ относительно действия группы $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ одновременно сопряжениями. Ввиду сказанного выше таковыми инвариантами являются следы матриц $X_1, \dots, X_m$ плюс инварианты системы их проекций на $M_2^0(\mathbb{C})$ относительно действия группы $\mathrm{SO}_3(\mathbb{C})$.

Описание образующих и определяющих соотношений алгебры инвариантов системы векторов $x_1, \dots, x_m \in \mathbb{C}^n$ относительно действия группы $\mathrm{SO}_n(\mathbb{C})$ есть один из основных результатов классической теории инвариантов XIX века (см., например, [13]). В частности, известно, что при $m < n$ алгебра инвариантов свободно

порождается скалярными произведениями векторов $x_1, \dots, x_m$. При $m = n$ есть еще инвариант $\det(x_1, \dots, x_n)$, равный определителю матрицы, составленной из координат векторов $x_1, \dots, x_n$ в каком-либо фиксированном базисе. Его квадрат выражается через скалярные произведения векторов $x_1, \dots, x_n$, а именно, равен определителю Грама этих векторов; других соотношений между образующими инвариантами в этом случае нет. Случай $m > n$ более сложен, но он нам не понадобится.

Если матрица $X \in M_2^0(\mathbb{C})$ имеет собственные значения $\lambda, -\lambda$, то

$$\operatorname{tr} X^2 = 2\lambda^2 = -2 \det X = (X, X).$$

Поэтому скалярное умножение на $M_2^0(\mathbb{C})$ может быть задано формулой

$$(X, Y) = \operatorname{tr} XY.$$

Далее, легко видеть, что

$$XY + YX = (X, Y)E.$$

Отсюда следует, что $\operatorname{tr} XYZ$ есть кососимметрическая трилинейная форма на $M_2^0(\mathbb{C})$. Поэтому можно считать, что

$$\det(X, Y, Z) = \operatorname{tr} XYZ.$$

Для любых матриц $X, Y \in M_2(\mathbb{C})$ скалярное произведение их проекций на $M_2^0(\mathbb{C})$ равно

$$\operatorname{tr}\left(X - \frac{1}{2}(\operatorname{tr} X)E\right)\left(Y - \frac{1}{2}(\operatorname{tr} Y)E\right) = \operatorname{tr} XY - \frac{1}{2}(\operatorname{tr} X)(\operatorname{tr} Y).$$

Аналогично, для матриц $X, Y, Z \in M_2(\mathbb{C})$ определитель их проекций на $M_2^0(\mathbb{C})$ есть $\operatorname{tr} XYZ$ плюс некоторый многочлен от $\operatorname{tr} YZ, \operatorname{tr} ZX, \operatorname{tr} XY, \operatorname{tr} X, \operatorname{tr} Y, \operatorname{tr} Z$ (линейный по каждой из матриц X, Y, Z).

Из всего сказанного следует, что алгебра инвариантов пары матриц $X, Y \in M_2(\mathbb{C})$ относительно действия группы $\operatorname{SL}_2(\mathbb{C})$ свободно порождается многочленами $\operatorname{tr} X, \operatorname{tr} Y, \operatorname{tr} X^2, \operatorname{tr} Y^2, \operatorname{tr} XY$, а алгебра инвариантов тройки матриц $X, Y, Z \in M_2(\mathbb{C})$ порождается многочленами $\operatorname{tr} X, \operatorname{tr} Y, \operatorname{tr} Z, \operatorname{tr} X^2, \operatorname{tr} Y^2, \operatorname{tr} Z^2, \operatorname{tr} YZ, \operatorname{tr} ZX, \operatorname{tr} XY, \operatorname{tr} XYZ$ с единственным определяющим соотношением вида

$$(\operatorname{tr} XYZ)^2 + P \cdot \operatorname{tr} XYZ + Q = 0,$$

где P и Q — какие-то многочлены от первых девяти образующих.

Ввиду соотношения

$$\operatorname{tr} X^2 = (\operatorname{tr} X)^2 - 2 \det X,$$

выполняющегося для любой матрицы $X \in M_2(\mathbb{C})$, все следы квадратов в приведенных выше системах образующих алгебр инвариантов можно заменить определителями. Если же нас интересуют инварианты систем унимодулярных матриц,

то их вообще можно выкинуть. Таким образом, мы получили, что *алгебра инвариантов пары матриц $X, Y \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ относительно действия группы $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ одновременными сопряжениями свободно порождается многочленами*

$$\mathrm{tr} X, \quad \mathrm{tr} Y, \quad \mathrm{tr} XY,$$

а алгебра инвариантов тройки матриц $X, Y, Z \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ порождается многочленами

$$\mathrm{tr} X, \quad \mathrm{tr} Y, \quad \mathrm{tr} Z, \quad \mathrm{tr} YZ, \quad \mathrm{tr} ZX, \quad \mathrm{tr} XY, \quad \mathrm{tr} XYZ$$

с единственным определяющим соотношением вида

$$(\mathrm{tr} XYZ)^2 + p \cdot \mathrm{tr} XYZ + q = 0, \quad (3)$$

где p и q — какие-то многочлены от первых шести образующих.

Отметим, что эти утверждения отнюдь не являются новыми, хотя трудно сказать, кем и когда они были впервые доказаны. Их можно, конечно, извлечь из соответствующих утверждений для матриц любого порядка, доказанных в [14] и [15], но несомненно, что они были известны раньше.

Применение этих утверждений в настоящей статье основано на следующей теореме теории инвариантов (см., например, [16]): *для всякой редуктивной комплексной алгебраической группы G , действующей на аффинном алгебраическом многообразии X , морфизм факторизации*

$$\pi: X \rightarrow X//G \doteq \mathrm{Spec} \mathbb{C}[X]^G$$

сюръективен.

Здесь $\mathbb{C}[X]^G$ обозначает алгебру G -инвариантных многочленов на X . Морфизм π определяется ее тождественным вложением в алгебру $\mathbb{C}[X]$ всех многочленов на X . Если алгебра $\mathbb{C}[X]^G$ порождается многочленами $f_1, \dots, f_m$, то многообразие $X//G$ может быть реализовано в $\mathbb{C}^m$ как множество нулей идеала I алгебраических соотношений между $f_1, \dots, f_m$; морфизм π при этом задается формулой

$$\pi(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x)).$$

Сформулированная выше теорема означает, что для любых чисел $c_1, \dots, c_m$, удовлетворяющих всем алгебраическим соотношениям, которым удовлетворяют многочлены $f_1, \dots, f_m$, существует такая точка $x \in X$, что

$$f_i(x) = c_i \quad (i = 1, \dots, m).$$

(Отметим, что для любых многочленов $f_1, \dots, f_m$ это, вообще говоря, неверно.)

6. Теоретико-инвариантное доказательство теоремы 3. Для любого натурального m имеем

$$\frac{z^m - z^{-m}}{z - z^{-1}} = P_m(z + z^{-1}),$$

где P_m — многочлен степени $m-1$ (многочлен Чебышёва второго рода с точностью до линейной замены переменной), имеющий нули в точках

$$2 \cos \frac{\pi}{m}, 2 \cos \frac{2\pi}{m}, \dots, 2 \cos \frac{(m-1)\pi}{m}.$$

Путем несложных преобразований получаем

$$z^m = P_m(z + z^{-1})z - P_{m-1}(z + z^{-1}).$$

Следовательно,

$$Z^m = P_m(\operatorname{tr} Z)Z - P_{m-1}(\operatorname{tr} Z)E \quad (4)$$

для любой матрицы $Z \in \operatorname{SL}_2(\mathbb{C})$.

Пусть w — слово вида (2). Для матриц $X, Y \in \operatorname{SL}_2(\mathbb{C})$, пользуясь соотношением (4), нетрудно представить $\operatorname{tr} w(X, Y)$ в виде многочлена P_w степени $\leq s$ от $\operatorname{tr} XY$, коэффициенты которого являются многочленами от $\operatorname{tr} X$ и $\operatorname{tr} Y$. При этом коэффициент при $(\operatorname{tr} XY)^s$ будет равен

$$\prod_{i=1}^s P_{k_i}(\operatorname{tr} X)P_{l_i}(\operatorname{tr} Y).$$

Если $\operatorname{tr} X = 2 \cos \frac{\pi}{k}$ и $\operatorname{tr} Y = 2 \cos \frac{\pi}{l}$, то этот коэффициент не равен нулю и, следовательно, P_w — многочлен положительной степени. (Отметим, что этот результат приведен в [3] со ссылкой на Т. Йоргенсена.) В частности, для любого m существует такое число ζ_m , что

$$P_w(\zeta_m) = 2 \cos \frac{\pi}{m}.$$

С другой стороны, в силу результатов, сформулированных в предыдущем пункте, для любых k, l, m существуют такие матрицы $X, Y \in \operatorname{SL}_2(\mathbb{C})$, что

$$\operatorname{tr} X = 2 \cos \frac{\pi}{k}, \quad \operatorname{tr} Y = 2 \cos \frac{\pi}{l}, \quad \operatorname{tr} XY = \zeta_m.$$

При $k, l, m \geq 2$ порядки X, Y и $w(X, Y)$ в $\operatorname{PSL}_2(\mathbb{C})$ равны тогда k, l и m соответственно, что дает нам специальный гомоморфизм обобщенной треугольной группы (1) в $\operatorname{PSL}_2(\mathbb{C})$.

Для обобщенных тетраэдральных групп ситуация несколько осложняется тем, что алгебра инвариантов системы трех матриц не является свободной. Однако из вида соотношения (3) следует, что образующие

$$\operatorname{tr} X, \operatorname{tr} Y, \operatorname{tr} Z, \operatorname{tr} YZ, \operatorname{tr} ZX, \operatorname{tr} XY$$

могут принимать независимо друг от друга произвольные значения. После этого замечания построение специального гомоморфизма обобщенной тетраэдральной группы в $\operatorname{PSL}_2(\mathbb{C})$ проводится так же, как для обобщенных треугольных групп.

Список литературы

1. *Сельберг А.* О дискретных группах преобразований симметрических пространств большой размерности // Математика. 1962. Т. 6. №3. С. 3–15.
2. *Thomas R. M.* Cayley graphs and group presentations // Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. 1988. V. 103. №3. P. 385–387.
3. *Baumslag G., Morgan J. W., Shalen P. B.* Generalized triangle groups // Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. 1987. V. 102. №1. P. 25–31.
4. *Coxeter H. S. M.* The complete enumeration of finite groups of the form $R_i^2 = (R_i R_j)^{k_{ij}} = 1$ // J. London Math. Soc. 1935. V. 10. P. 21–25.
5. *Бурбаки Н.* Группы и алгебры Ли. Гл. IV–VI. М.: Мир, 1972.
6. *Fine B., Rosenberger G.* A note on generalized triangle groups // Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg. 1986. V. 56. P. 233–244.
7. *Fine B., Howie J., Rosenberger G.* One-relator quotients and free products of cyclics // Proc. Amer. Math. Soc. 1988. V. 102. №2. P. 249–254.
8. *Howie J., Metaftsis V., Thomas R. M.* Finite generalized triangle groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1995. V. 347. №9. P. 3613–3623.
9. *Lévai L., Rosenberger G., Souvignier B.* All finite generalized triangle groups // Trans. Amer. Math. Soc. (to appear).
10. *Tsaranov S. V.* On a generalization of Coxeter groups // Algebras, Groups and Geometries. 1989. V. 6. P. 281–318.
11. *Tsaranov S. V.* Finite generalized Coxeter groups // Algebras, Groups and Geometries. 1989. V. 6. P. 421–452.
12. *Baumslag B., Pride S. J.* Groups with two more generators than relators // J. London Math. Soc. 1978. V. 17. P. 425–426.
13. *Вейль Г.* Классические группы, их инварианты и представления. М.: ИЛ, 1947.
14. *Размыслов Ю. П.* Тождества со следом полных матричных алгебр над полем характеристики 0 // Изв. АН. СССР. Сер. матем. 1974. Т. 38. №4. С. 723–756.
15. *Procesi C.* The invariant theory of $n \times n$ matrices // Adv. in Math. 1976. V. 19. P. 306–381.
16. *Винберг Э. Б., Попов В. Л.* Теория инвариантов // Итоги науки и техники. Совр. пробл. матем. Фундам. направл.. Т. 55. М.: ВИНТИ, 1989. С. 137–309.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Поступила в редакцию
09.01.1997