Общероссийский математический портал

В. В. Волчков, Решение проблемы носителя для некоторых классов функций, *Матем. сб.*, 1997, том 188, номер 9, 13–30

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm255>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.207.199.55

26 апреля 2023 г., 15:20:31

УДК 517.5

В. В. Волчков

Решение проблемы носителя для некоторых классов функций

Изучаются различные классы функций, имеющих нулевые интегралы по всем шарам фиксированного радиуса. Для таких классов найдено описание в виде ряда по специальным функциям и доказана теорема об устранимой особенности. Эти результаты позволили получить полное решение проблемы носителя для некоторых классов функций с нулевыми шаровыми средними. В качестве одного из следствий получено далеко идущее обобщение известной теоремы Л. Зальмана о двух радиусах.

Библиография: 21 название.

Введение

Пусть K — компакт со связным дополнением в вещественном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$), $\mathcal{M}$ — некоторый класс функций, локально суммируемых в $\mathbb{R}^n$, r — фиксированное положительное число. Проблема носителя (для шаровых средних) состоит в описании наименьшего множества $\mathcal{U}(\mathcal{M}, K, r) \subset \mathbb{R}^n$, содержащего носители всех функций $f \in \mathcal{M}$, удовлетворяющих условию

$$\int_{|x| \leq r} f(x+y) dx = 0 \quad \text{для любого } y \in \mathbb{R}^n \setminus K \quad (1)$$

(здесь и далее $|\cdot|$ — евклидова норма в $\mathbb{R}^n$).

Если K не содержит внутренних точек, то равенство (1) выполнено при всех $y \in \mathbb{R}^n$. Этот случай и различные его обобщения изучались во многих работах (см. обзор [1] с обширной библиографией). В общей ситуации отсутствие групповой структуры сдвигов на множестве $\mathbb{R}^n \setminus K$ создает серьезные препятствия для изучения уравнения (1). Наиболее сильный из известных до настоящего времени результатов по проблеме носителя получил А. Ситарам ([2], см. также [3]): если $K = \overline{B}_R$ — замкнутый шар радиуса R с центром в нуле и $1 \leq p \leq \frac{2n}{n-1}$, то носители всех функций $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ с условием (1) содержатся в шаре $\overline{B}_{R+r}$. При $\frac{2n}{n-1} < p \leq \infty$ $\mathcal{U}(L^p, K, r) = \mathbb{R}^n$ для любого K [2]. Доказательства в [2], [3]

Работа выполнена при частичной поддержке Объединенного фонда Украины (гранты № U9D000, U9D200) и Международного научного фонда.

основаны на применении классической теоремы Пэли–Винера и некоторых ее обобщений [4]. По поводу других результатов, связанных с различными вариантами проблемы носителя, см. [5, с. 38], а также [6, с. 125, 178].

В последние годы автором данной работы разработана принципиально новая методика, позволяющая решать многие задачи, связанные с шаровыми средними (см. [7]–[14] и библиографию к этим работам). Здесь мы продолжаем изучение функций с условиями вида (1). Дальнейшее развитие техники, предложенной в [11], позволило получить полное решение проблемы носителя для широкого класса функций (см. теорему 1 ниже). Этот результат существенно усиливает сформулированную выше теорему А. Ситарамы и носит окончательный характер. Методика доказательства дает возможность получить ряд других точных результатов для функций с нулевыми шаровыми средними (см. §§ 5, 8).

§1. Формулировка основного результата

Далее, как обычно, $\overline{A}$ – замыкание множества $A \subset \mathbb{R}^n$, $\text{Int } A$ – множество внутренних точек A , $A + B = \{a + b \in \mathbb{R}^n : a \in A, b \in B\}$ – сумма непустых множеств $A, B \subset \mathbb{R}^n$, $L_{\text{loc}}^p(G)$, $1 \leq p < \infty$, – класс p -локально суммируемых функций в открытом множестве $G \subset \mathbb{R}^n$, $\text{supp } f$ – носитель функции $f \in L_{\text{loc}}^p(\mathbb{R}^n)$ (см., например, [15, с. 11, 24]). Для любых $R > 0$, $1 \leq p \leq \frac{2n}{n-1}$, $f \in L_{\text{loc}}^p(\mathbb{R}^n)$ положим $M_R(f)_p = \int_{|x| \leq R} |f(x)|^p dx$, $\eta_p(R) = R^{n - \frac{n-1}{2}p}$ при $1 \leq p < \frac{2n}{n-1}$ и $\eta_p(R) = \ln R$ при $p = \frac{2n}{n-1}$, $B_R = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < R\}$. Пусть еще $K_r = \mathbb{R}^n \setminus (B_r + (\mathbb{R}^n \setminus K))$.

Основным результатом данной работы является

ТЕОРЕМА 1. *При любом $1 \leq p \leq \frac{2n}{n-1}$ имеют место следующие утверждения.*

1. *Пусть $f \in L_{\text{loc}}^p(\mathbb{R}^n)$ и выполнено (1). Тогда если*

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{M_R(f)_p}{\eta_p(R)} = 0, \quad (2)$$

то $\text{supp } f \subset \overline{\text{Int } K_r}$.

2. *Существует функция $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ с условиями (1), (2), у которой $\text{supp } f = \overline{\text{Int } K_r}$.*

3. *Существует функция $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ с условием (1), у которой $M_R(f)_p / \eta_p(R) = O(1)$ при $R \rightarrow \infty$ и $\text{supp } f = \mathbb{R}^n$. В частности, при $1 \leq p \leq \frac{2n}{n-1}$ имеем $\mathcal{U}(L^p, K, r) = \overline{\text{Int } K_r}$. Если $K = \overline{B_R}$ и $R > r$, откуда следует, что $\mathcal{U}(L^p, \overline{B_R}, r) = \overline{B_{R-r}}$.*

Таким образом, сформулированный выше результат А. Ситарамы при $1 \leq p \leq \frac{2n}{n-1}$ не является точным. Далее, полагая $K = \emptyset$, $p = 1$, из первого утверждения теоремы 1 получаем уточнение одного из результатов Д. Смита [16, с. 410].

Отметим также, что при любом $p > \frac{2n}{n-1}$ существует функция $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ с условием (1), у которой $\text{supp } f = \mathbb{R}^n$ (см. [2]).

В §§2–6 данной работы изучаются различные свойства функций с условиями вида (1). В §5 доказана локальная теорема об одном радиусе, представляющая самостоятельный интерес. В §6 получено описание пространства решений (1) в виде ряда по специальным функциям. Доказательство основного результата содержится в §7. В §8 рассматриваются некоторые обобщения и следствие результатов §§6, 7. В частности, получено далеко идущее обобщение известной теоремы Л. Зальцмана о двух радиусах (см., например, [11, с. 15]).

Отдельные результаты данной работы анонсированы в [14]. Автор благодарит Л. Зальцмана и А. Ситараму за обсуждение и предоставленную литературу.

§2. Обозначения и вспомогательные конструкции

Мы полностью сохраняем обозначения из §2 работы [11] и будем их использовать без дополнительных ссылок на [11]. Далее, для $0 \leq a < b$ положим $B_{a,b} = \{x \in \mathbb{R}^n : a < |x| < b\}$, $B_{a,\infty} = \mathbb{R}^n \setminus \overline{B}_a$, $\mathbf{e} = (1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$. Для $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ обозначим $[x] = x_1$. При $R > r$ обозначим через $U_r(B_R)$ множество функций $f \in L^1_{\text{loc}}(B_R)$, у которых интеграл

$$\int_S f(x + r\sigma) d\sigma$$

равен нулю при почти всех (по мере Лебега) $x \in B_{R-r}$ (здесь и далее $d\sigma$ – элемент площади поверхности сферы S). Для целого $s \geq 0$, а также для $s = \infty$ положим $U_r^s(B_R) = U_r(B_R) \cap C^s(B_R)$. Пусть $\{Y_l^{(k)}\}$, $1 \leq l \leq a_k$, – ортонормированный базис в пространстве $\mathcal{H}_k$ сферических гармоник степени k , рассматриваемом как подпространство $L^2(S)$ [17, с. 161]. Следуя [17, с. 157–158], обозначим через $\mathfrak{H}_k(G)$ подпространство $L^2(G)$, порожденное произведениями радиальных функций на сферические гармоники степени k . Как и выше, $\mathfrak{H}_k^s(G) = \mathfrak{H}_k(G) \cap C^s(G)$. Для краткости положим $\mathfrak{H}_0^\infty(G) = \mathfrak{H}(G)$, $W_r(B_R) = U_r(B_R) \cap V_r(B_R)$, где $V_r(B_R)$ – множество функций, имеющих нулевые интегралы по всем замкнутым шарам радиуса r , лежащим в B_R . Пусть $f \in \mathfrak{H}_0^0(B_R)$ (или $f \in \mathfrak{H}_0^0(B_{a,b})$), тогда символом f_0 обозначим функцию, заданную на $[0, R)$ (соответственно на (a, b)) и удовлетворяющую равенству $f(x) = f_0(|x|)$ при всех x из области определения f .

При $1 < R < 2$ рассмотрим систему интегральных уравнений

$$\int_{-1}^1 u(\sqrt{1 + \xi^2 - 2\xi\lambda})(1 - \lambda^2)^{\frac{n-3}{2}} d\lambda = 0, \quad |\xi| < R - 1, \quad (3)$$

$$\int_{-1}^1 u(\sqrt{1 + \xi^2 - 2\xi\lambda})(1 - \lambda^2)^{\frac{n-3}{2}} \lambda d\lambda = 0, \quad |\xi| < R - 1, \quad (4)$$

с неизвестной функцией $u \in C(2 - R, R)$. Обозначим через Ω_R множество функций $f \in \mathfrak{H}(B_R)$ таких, что сужение функции f_0 на интервал $(2 - R, R)$ удовлетворяет уравнениям (3) и (4).

Для любого $k \in \mathbb{Z}$ рассмотрим дифференциальный оператор d_k , заданный на пространстве $C^1(a, b)$, $0 < a < b$, следующим образом

$$(d_k f)(t) = f'(t) - \frac{k}{t} f(t), \quad f \in C^1(a, b).$$

При $k \in \mathbb{N}$ введем обозначения: $D_k = d_k d_{k-1} \cdots d_0$, $D_0 = d_0$. Пусть $\gamma \in \mathbb{R}^1$, $\pi_m(\gamma) = \prod_{q=0}^m (\gamma - 2q)$, $t > 0$. Для функций $u_\gamma(t) = t^\gamma$, $v_\gamma(t) = t^\gamma \ln t$ индукцией по $k = 0, 1, \dots$ нетрудно получить равенства

$$(D_k u_\gamma)(t) = \pi_k(\gamma) u_\gamma(t) t^{-k-1}, \quad (5)$$

$$(D_k v_\gamma)(t) = v_\gamma(t) \frac{\pi_k(\gamma)}{t^{k+1}} + u_\gamma(t) \frac{\pi_k(\gamma)}{t^{k+1}} \sum_{m=0}^k \frac{1}{\gamma - 2m}. \quad (6)$$

При $m \in \mathbb{N}$ обозначим $w_{m,n}(t) = v_{2m-n}(t)$, если n четно и $2m \geq n$. В противном случае положим $w_{m,n}(t) = u_{2m-n}(t)$. Простые вычисления показывают (см. также [11, с. 18]), что

$$\Delta^m(w_{m,n}(\rho)) = 0, \quad 0 < \rho < \infty. \quad (7)$$

Далее мы используем стандартные обозначения J_λ и N_λ для функций Бесселя и Неймана с индексом λ . Пусть $\Lambda_n = \{\nu_1, \nu_2, \dots\}$ — возрастающая последовательность всех положительных корней $J_{n/2}$, E_n — множество чисел вида α/β , где $\alpha, \beta \in \Lambda_n$. Символами $c_1, c_2, \dots$ обозначаются комплексные постоянные, в разных случаях, вообще говоря, разные. Коэффициенты в используемых ниже разложениях по функциям J_λ и N_λ также предполагаются комплексными.

§ 3. Некоторые свойства класса U_r

Прежде всего отметим, что простейшие утверждения о свойствах $V_r(B_R)$ (см. леммы 1, 2 в [11]) имеют место и для класса $U_r(B_R)$. Для доказательства достаточно повторить рассуждения из [11, с. 18–19] с заменой шаровых средних сферическими. Далее, если f — радиальная функция из класса $U_r^0(B_R)$, то

$$\int_S f(r\sigma) d\sigma = f_0(r) = 0. \quad (8)$$

Последнее равенство является аналогом следствия леммы 2 из [11].

ЛЕММА 1. Пусть $f \in C^\infty(B_R)$. Тогда для того чтобы $f \in U_r(B_R)$ необходимо и достаточно, чтобы при всех целых $k \geq 0$, $1 \leq l \leq a_k$, имело место равенство

$$f_{kl}(\rho) = \rho^{1-\frac{n}{2}} \sum_{m=1}^{\infty} c_{m,k,l} J_{\frac{n}{2}+k-1} \left(\frac{\tau_m}{r} \rho \right), \quad (9)$$

где $\{\tau_m\}$ — возрастающая последовательность всех положительных корней $J_{\frac{n}{2}-1}$ и $c_{m,k,l} = O(\tau_m^{-\alpha})$ при $m \rightarrow \infty$ и любом фиксированном $\alpha > 0$.

Подобное утверждение для класса $V_r(B_R)$ получено в [11, с. 26]. Доказательство леммы 1 проводится аналогично.

ЛЕММА 2. Пусть $1 < R < 2$, $f \in \mathfrak{H}(B_R)$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

1. сужение функции f_0 на интервал $(2 - R, R)$ удовлетворяет уравнению (3),
2. $f \in U_1(B_R)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что имеет место первое утверждение и докажем, что $f \in U_1(B_R)$. Не ограничивая общности, можно считать $f = 0$ в $B_{1-R/2}$. Пусть $h \in C(-R, R)$ – четная функция, удовлетворяющая уравнению

$$f_0(|x|) = \int_{SO(n)} h([gx]) dg \quad (10)$$

для всех $x \in B_R$ [11, с. 23]. Обозначим через $I(\xi, g\mathbf{e})$ интеграл функции $h([x])$ по шару радиуса $|\xi|$ с центром $g\mathbf{e}$, где $g \in SO(n)$, $\xi \in (1 - R, R - 1)$. Тогда

$$I(\xi, g\mathbf{e}) = \int_{-|\xi|}^{|\xi|} h(t + [g\mathbf{e}]) (\xi^2 - t^2)^{\frac{n-1}{2}} dt. \quad (11)$$

Из определения $I(\xi, g\mathbf{e})$ и равенств (3), (10) имеем

$$\int_{SO(n)} I(\xi, g\mathbf{e}) dg = \int_{|x - \mathbf{e}| \leq |\xi|} f_0(|x|) dx = 0.$$

Отсюда и из (11) получаем

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{-|\xi|}^{|\xi|} \int_{SO(n)} h(t + [g\mathbf{e}]) dg (\xi^2 - t^2)^{\frac{n-1}{2}} dt \\ &= \int_{-|\xi|}^{|\xi|} \varphi(t) (\xi^2 - t^2)^{\frac{n-1}{2}} dt, \end{aligned} \quad (12)$$

где

$$\varphi(t) = \int_S h(t + [\sigma]) d\sigma$$

(см. [17, с. 46]). Далее, из четности h следует четность функции φ на интервале $|t| < R - 1$. Тогда из (12) получаем, что $\varphi = 0$ при $|t| < R - 1$ и $h([x]) \in U_1(B_R)$ [6, с. 126]. Учитывая (10), отсюда имеем $f \in U_1(B_R)$ [11, с. 18].

Обратное утверждение следует из леммы 1 при $k = 0$, $r = 1$ (см. [18, с. 39, 44], а также [17, с. 169, 171]).

§ 4. Примеры функций с нулевыми шаровыми средними

ЛЕММА 3. Пусть $0 \leq a < b - 2r$, $f \in L^1_{\text{loc}}(B_{a,b})$ и при всех целых $k \geq 0$, $1 \leq l \leq a_k$ имеет место равенство

$$f_{kl}(\rho) = \rho^{1-\frac{n}{2}} \sum_{m=1}^{\infty} c_{m,k,l} N_{\frac{n}{2}+k-1} \left(\frac{\nu_m}{r} \rho \right), \quad (13)$$

где

$$\sum_{m=1}^{\infty} |c_{m,k,l}| \nu_m^{-1/2} < \infty.$$

Тогда $f \in V_r(B_{a,b})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из теоремы о среднем для уравнения Гельмгольца следует, что

$$N_{\frac{n}{2}+k-1}(\nu_m \rho / r) Y(\sigma) \in V_r(B_{a,b})$$

при любом $Y \in \mathcal{H}_k$ [11, с. 19–20]. Далее, из условия для коэффициентов $c_{m,k,l}$ имеем равномерную сходимость ряда (13) на компактных подмножествах $B_{a,b}$ [18, с. 175]. Таким образом, $f_{kl}(\rho) Y_l^{(k)}(\sigma) \in V_r(B_{a,b})$ при всех k, l . Отсюда следует (см. [11, с. 20]), что $f \in V_r(B_{a,b})$.

ЛЕММА 4. Пусть $k, m \in \mathbb{N}$, $m \leq k$, $Y \in \mathcal{H}_{k+1}$, $1 < R < 2$. Предположим, что функция $f \in L^1_{\text{loc}}(B_R)$ удовлетворяет условиям:

- а) $\int_{|x| \leq 2-R} f(x) dx = 0$,
- б) $f(x) = \rho^{2m-n-k-1} Y(\sigma)$ при $x \in B_{2-R,R}$.

Тогда $f \in W_1(B_R)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\varphi \in \mathfrak{H}(B_R)$, $\varphi = 0$ в $B_{1-R/2}$, $\varphi = 1$ в $B_R \setminus B_{2-R}$, и $\psi(x) = \varphi(x) w_{m,n}(|x|)$. При $x \in B_{R-1}$ обозначим

$$\Phi(x) = \int_{|y| \leq 1} \psi(x-y) dy,$$

тогда $\Phi \in \mathfrak{H}(B_{R-1})$. Учитывая, что $\Delta^m \psi = 0$ в $B_R \setminus B_{2-R}$ (см. (7)), из определения Φ получаем, что $\Delta^m \Phi$ — тождественная константа. Следовательно, $\Delta^{m+1} \Phi = 0$ и $\Phi_0(\rho) = \sum_{q=0}^m c_q \rho^{2q}$. Таким образом, функция $\left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)^{m+1} \Phi$ является многочленом степени не выше $m-1$. С другой стороны, из свойств φ и [11, с. 19] имеем

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)^{m+1} \psi = \sum_{q=0}^{m+1} h_q,$$

где $h_q \in \mathfrak{H}_q^\infty(B_R)$ и $h_q = 0$ в B_{1-2R} . Более того, функция h_{m+1} имеет вид

$$h_{m+1}(x) = (D_m w_{m,n})(\rho) Y^{(m+1)}(\sigma),$$

где $\rho \in [2-R, R]$ и $Y^{(m+1)} \in \mathcal{H}_{m+1}$ [11, с. 19]. По лемме 5 из [11] свертка $h_{m+1} * \chi_1$ равна нулю в B_{R-1} . Это означает, что при любом $X \in \mathcal{H}_{m+1}$ функция $h(x) = h_{m+1}(x)X(\sigma)/Y^{(m+1)}(\sigma)$ принадлежит $V_1(B_R)$ (см. лемму 1 в [11]). Аналогично, рассматривая вместо Φ функцию $H(x) = \int_S \psi(x - \sigma) d\sigma$, имеем $h \in U_1(B_R)$. Учитывая, что $(D_m w_{m,n})(\rho) = c\rho^{m-n-1}$, где $c \neq 0$ (см. (5), (6)) и $\int_{|x| \leq 2-R} h(x) dx = 0$ [17, с. 161], получаем, что для любого единичного шара $B \subset B_R$ интеграл от функции $\rho^{m-n-1}Y(\sigma)$ по множеству $B \setminus B_{2-R}$ равен нулю. Отсюда следует утверждение леммы 4 при $k = m$. Применяя к функции h утверждение а) леммы 2 из [11], аналогично получаем утверждение леммы 4 при всех $m \leq k$.

§ 5. Теорема об одном радиусе

Следующий результат является аналогом локальной теоремы о двух радиусах [11, с. 16].

ТЕОРЕМА 2. Пусть $f \in L_{\text{loc}}^1(B_R)$. Тогда:

1. если $R > 2r$ и $f \in W_r(B_R)$, то $f = 0$ в B_R ;
2. пусть $R \leq 2r$, тогда для того чтобы $f \in W_r(B_R)$ необходимо и достаточно, чтобы

$$\int_{|x| \leq 2r-R} f(x) dx = 0 \quad (14)$$

и при всех целых $k \geq 0$, $1 \leq l \leq a_k$ и почти всех $x \in B_{2r-R,R}$ имело место равенство

$$f_{kl}(|x|) = \sum_{m=0}^{k-2} c_{m,k,l} |x|^{2m-n-k+2}, \quad (15)$$

в котором при $k = 0, 1$ сумма считается равной нулю.

Отметим, что при $R = 2r$ условие $f \in L_{\text{loc}}^1(B_R)$ позволяет упростить описание класса $W_r(B_R)$ во втором утверждении теоремы 2. В этом случае постоянные $c_{m,k,l}$ при $0 \leq m < \frac{k-1}{2}$ равны нулю (см. формулу (17) в [11]), а равенство (14) выполнено для любой $f \in L_{\text{loc}}^1(B_R)$. По поводу других вариантов теоремы об одном радиусе см. [19, с. 65].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $R > 2r$ и $f \in W_r(B_R)$. Докажем, что $f = 0$ в B_R . Не ограничивая общности, можно считать $f \in C^\infty(B_R)$ [11, с. 21]. По лемме 1 имеет место равенство (9). Так как $f_{kl}(\rho)Y_l^{(k)}(\sigma) \in W_r(B_R)$ (см. начало §3, а также [11, с. 18]), из (9) и [11, формула (13)] получаем

$$\sum_{m=1}^{\infty} c_{m,k,l} \tau_m^{-\frac{n}{2}} J_{\frac{n}{2}}(\tau_m) J_{\frac{n}{2}+k-1}\left(\frac{\tau_m}{r}\rho\right) = 0$$

при $\rho \leq R - r$. Поскольку $J_{n/2}(\tau_m) \neq 0$ [18, с. 131–132] и $R > 2r$, отсюда следует, что $c_{m,k,l} = 0$ [11, с. 29]. Таким образом, все $f_{kl}(\rho) = 0$ в B_R , откуда $f = 0$.

Для доказательства второго утверждения теоремы 2 потребуются четыре леммы.

ЛЕММА 5. Пусть $1 < R < 2$, $f \in \mathfrak{H}(B_R)$ и для некоторой константы c функция $f - c \in V_1(B_R)$. Тогда $f'_0(1) = 0$ и сужение функции f_0 на интервал $(2 - R, R)$ удовлетворяет уравнению (4).

Доказательство следует из описания радиальных функций класса $V_1^\infty(B_R)$ [11, с. 26] и теоремы сложения Гегенбауэра (см. [18, с. 39, 44], а также [17, с. 169, 171]).

ЛЕММА 6. $f \in \Omega_R$ тогда и только тогда, когда $f \in U_1^\infty(B_R)$ и для некоторой константы c функция $f - c \in V_1^\infty(B_R)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f \in \Omega_R$. Из лемм 1, 2 следует, что $f \in U_1^\infty(B_R)$ и выполнено равенство (9) при $r = 1$. Используя (9) при $k = 0, l = 1, r = 1$ и уравнение (4) для $u = f_0$, получаем

$$\sum_{m=1}^{\infty} c_{m,0,1} J_{\frac{n}{2}}(\tau_m) \tau_m^{1-\frac{n}{2}} J_{\frac{n}{2}}(\tau_m \rho) = 0 \quad (16)$$

при $\rho < R - 1$ (см. [18, с. 39, 44] и [17, с. 169, 171]). Далее, из равенства (9) при $k = 0, l = 1, r = 1$ и формулы (13) из [11] следует, что

$$(f * \chi_1)(x) = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \sum_{m=1}^{\infty} c_{m,0,1} \tau_m^{-\frac{n}{2}} J_{\frac{n}{2}}(\tau_m) J_{\frac{n}{2}-1}(\tau_m \rho) \rho^{1-\frac{n}{2}}$$

при $x \in B_{R-1}$. Учитывая (16), отсюда имеем

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (f * \chi_1) = 0$$

в B_{R-1} при всех $j = 1, 2, \dots, n$. Таким образом, для некоторой константы c функция $f - c \in V_1^\infty(B_R)$. Обратное утверждение следует из лемм 2, 5.

ЛЕММА 7. Пусть $f \in \Omega_R$. Тогда функции $\rho^2 f_0(\rho)$, $\rho f'_0(\rho)$, $\rho^2 f''_0(\rho)$ принадлежат классу $U_1^\infty(B_R)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (3), (4) следует, что функция $u(t)t^2$ удовлетворяет уравнению (4). Отсюда и из леммы 2 получаем $\rho^2 f_0(\rho) \in U_1^\infty(B_R)$. Далее,

$$\rho^2 f''_0(\rho) + (n+3)\rho f'_0(\rho) + 2nf_0(\rho) = \Delta(f(x)|x|^2) \in U_1^\infty(B_R) \quad (17)$$

(см. [11, с. 18]). Аналогично, из условия и леммы 6 имеем

$$\Delta f = f''_0(\rho) + (n-1)f'_0(\rho)\rho^{-1} \in W_1(B_R)$$

и $\Delta f \in \Omega_R$ [11, с. 18]. Тогда по уже доказанному

$$\rho^2(\Delta f) = \rho^2 f''_0(\rho) + (n-1)\rho f'_0(\rho) \in U_1^\infty(B_R).$$

Отсюда и из (17) получаем, что функции $\rho f'_0(\rho)$ и $\rho^2 f''_0(\rho)$ принадлежат $U_1^\infty(B_R)$.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть $f \in \Omega_R$, тогда

$$f_0(1) = f'_0(1) = f''_0(1) = 0. \quad (18)$$

Доказательство следует из леммы 7 и равенства (8).

ЛЕММА 8. Пусть $f \in \Omega_R$, тогда $\rho^2 f_0(\rho) \in \Omega_R$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала докажем, что

$$\rho f'_0(\rho) \in \Omega_R \text{ и } \rho^2 f''_0(\rho) \in \Omega_R. \quad (19)$$

Дифференцируя по ξ равенства (3), (4) при $u = f_0$ и используя то, что функции $tf'_0(t)$, $t^2 f''_0(t)$ удовлетворяют (3) (см. леммы 2, 7), получаем $\rho f'_0(\rho) \in \Omega_R$. Аналогично, $\rho(\rho f'_0(\rho))' \in \Omega_R$ и $\rho^2 f''_0(\rho) \in \Omega_R$. Далее, пусть

$$\varphi(x) = \int_{|x-y| \leq 1} |y|^2 f_0(|y|) dy,$$

тогда $\varphi \in \mathfrak{H}(B_{R-1})$. Из леммы 6 и (19) следует, что $\Delta\varphi$ — тождественная константа, откуда $\varphi(x) = c_1 + c_2|x|^2$. Это означает, что при некоторых $c_3, c_4 \in \mathbb{C}$

$$\rho^2 f_0(\rho) - c_3 \rho^2 - c_4 \in V_1^\infty(B_R).$$

Из равенств (18) и леммы 5 получаем $c_3 = 0$. Таким образом, $\rho^2 f_0(\rho) - c_4 \in V_1^\infty(B_R)$ и $\rho^2 f_0(\rho) \in U_1^\infty(B_R)$ по лемме 7. Отсюда и из леммы 6 следует утверждение леммы 8.

Перейдем к доказательству второго утверждения теоремы 2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Пусть $R \leq 2r$ и $f \in W_r(B_R)$. Сначала докажем (15). Не ограничивая общности, можно считать, что $r = 1$, $R < 2$ и $f \in C^\infty(B_R)$ (см. [11, с. 21], а также [17, с. 21]). Тогда из условия следует, что

$$f_{kl}(\rho)Y_l^{(k)}(\sigma) \in W_1(B_R)$$

(см. [11, с. 18], а также начало § 3). Докажем, что $f_{kl}(|x|) = 0$ в $B_{2-R,R}$ при $k = 0, 1$ и $1 \leq l \leq a_k$. Пусть $k = 0$, тогда $a_k = 1$, $l = 1$ и $f_{01}(\rho) \in \Omega_R$ (см. лемму 6). По лемме 8 $f_{01}(\rho)P(\rho) \in \Omega_R$ для любого четного многочлена $P: \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{C}$. Отсюда и из уравнения (3) следует, что $f_{01}(\rho) = 0$ в $B_{2-R,R}$. Пусть теперь $k = 1$. При любом $1 \leq l \leq a_1$ имеем $(d_{1-n}f_{1l})(\rho) \in W_1(B_R)$ (см. [11, с. 18]). По уже доказанному $(d_{1-n}f_{1l})(\rho) = 0$ при $\rho \in (2-R, R)$, откуда $f_{1l}(\rho) = c\rho^{1-n}$ в $B_{2-R,R}$. Используя следствие леммы 2 из [11] при $r = 1$, получаем $c = 0$ и $f_{1l}(\rho) = 0$ в $B_{2-R,R}$. При $k \geq 2$ равенство (15) получается индукцией по k с использованием утверждения б) леммы 2 из [11].

Для доказательства (14) достаточно заметить, что

$$\int_{|x| \leq r} f(x) dx = 0$$

и

$$\varkappa_n \int_r^{2r-R} f_{01}(\rho) \rho^{n-1} d\rho = 0 = \int_{B_r \setminus B_{2r-R}} f(x) dx$$

(здесь $\varkappa_n$ — площадь сферы S).

Достаточность. Очевидно, достаточно рассмотреть случай $R < 2r$. Из условия и леммы 4 получаем, что $f_{kl}(\rho)Y_l^{(k)}(\sigma) \in W_r(B_R)$. Отсюда и из теоремы Фубини следует [11, с. 20], что $f \in W_r(B_R)$.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $R = 2r$ и $f \in W_r(B_R)$. Тогда:

1. если f бесконечно дифференцируема в окрестности нуля, то $f = 0$;
2. если f непрерывна в окрестности нуля и $f = o(|x|^\alpha)$ при $|x| \rightarrow 0$ и любом фиксированном $\alpha > 0$, то $f = 0$;
3. если E — бесконечное множество точек на интервале $(0, R)$ и $f(x) = 0$ при $|x| \in E$, то $f = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из [11, с. 18] следует, что вместе с f функции $f_{kl}(\rho)Y_l^{(k)}(\sigma)$ принадлежат $W_r(B_R)$ и удовлетворяют перечисленным в пп. 1–3 условиям. Тогда из (15) и [11, формула (7)] получаем $f_{kl}(\rho) = 0$ в B_R , откуда $f = 0$.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $1 < R < 2$, $u \in C(2-R, R)$ и удовлетворяет уравнениям (3), (4). Тогда $u = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $u = 0$ на $[0, 2 - R]$ и рассмотрим радиальную функцию $f = u(\rho)$ на B_R . Пусть $0 < \varepsilon < R - 1$, $\varphi_\varepsilon \in \mathfrak{H}(B_R)$, $\text{supp } \varphi_\varepsilon \subset B_\varepsilon$ и $F_\varepsilon = f * \varphi_\varepsilon$. Равенство (3) означает, что интеграл от f по сфере радиуса $|\xi|$ с центром e равен нулю. В силу радиальности f и произвольности $\xi \in (1 - R, R - 1)$ получаем, что условие (3) эквивалентно тому, что свертка функции f с любой функцией $g \in \mathfrak{H}(B_R)$ с носителем в B_{R-1} равна нулю на сфере S . Аналогичные рассуждения показывают, что условие (4) эквивалентно тому, что $f * h|_S = 0$, где h — произвольная функция из $\mathfrak{H}_1^\infty(B_R)$ с носителем в B_{R-1} . Поскольку свертка функции из $\mathfrak{H}_k(B_R)$ с функцией из $\mathfrak{H}_0(B_1)$ принадлежит $\mathfrak{H}_k(B_{R-1})$ (см. лемму 5 в [11]), отсюда следует, что $F_\varepsilon \in \Omega_{R-\varepsilon}$ (см. леммы 2, 5, 6). Тогда $F_\varepsilon = 0$ в $B_{2-R+\varepsilon, R-\varepsilon}$ (см. лемму 8 и доказательство необходимости во втором утверждении теоремы 2). В силу произвольности φ_ε получаем $f = 0$ в $B_{2-R, R}$, откуда $u = 0$ на $(2 - R, R)$.

§ 6. Описание гладких функций класса $V_r(B_{a,b})$

ЛЕММА 9. Пусть $0 \leq a < b - 2r$, $s > \max\left(3, \frac{n+1}{2}\right)$ и $f \in \mathfrak{H}_0^s(B_{a,b})$. Тогда для того чтобы $f \in V_r(B_{a,b})$ необходимо и достаточно, чтобы

$$f_0(\rho) = \sum_{m=1}^{\infty} \left(\alpha_m J_{\frac{n}{2}-1}\left(\frac{\nu_m}{r}\rho\right) + \beta_m N_{\frac{n}{2}-1}\left(\frac{\nu_m}{r}\rho\right) \right) \rho^{1-\frac{n}{2}}, \quad (20)$$

где $a < \rho < b$ и $|\alpha_m| + |\beta_m| = O(\nu_m^{\frac{n}{2}-s})$ при $m \rightarrow \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточность следует из леммы 3 и [11, с. 20]. Докажем необходимость. Пусть $c = \frac{1}{2}(a + b)$. Из условия и [11, с. 18] получаем, что функция

$$\lambda(\rho) = \int_S \int_0 (|ce + \rho\sigma|) d\sigma$$

принадлежит $V_r^s(B_{\frac{1}{2}(b-a)})$ (см. также [11, формула (5)]). Используя теорему 3 из [11] при $k = 0$, имеем

$$\lambda(\rho) = \rho^{1-\frac{n}{2}} \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m J_{\frac{n}{2}-1}\left(\frac{\nu_m}{r}\rho\right),$$

где $\lambda_m = O(\nu_m^{-s-\frac{1}{2}})$ при $m \rightarrow \infty$. Аналогично,

$$\int_S f_0(|ce + \rho\sigma|)[\sigma] d\sigma = \rho^{1-\frac{n}{2}} \sum_{m=1}^{\infty} \mu_m J_{\frac{n}{2}}\left(\frac{\nu_m}{r}\rho\right),$$

где $\mu_m = O(\nu_m^{-s+\frac{1}{2}})$ при $m \rightarrow \infty$ [11, формула (5), а также с. 18, 25]. По теореме сложения Гегенбауэра для цилиндрических функций $Z_{\frac{n}{2}-1}$, $Z_{\frac{n}{2}}$ имеют место равенства

$$\int_S \frac{Z_{\frac{n}{2}-1} \left(\frac{\nu_m}{r} |c\mathbf{e} + \rho\sigma| \right)}{|c\mathbf{e} + \rho\sigma|^{\frac{n}{2}-1}} d\sigma = c_1 \frac{J_{\frac{n}{2}-1} \left(\frac{\nu_m}{r} \rho \right) Z_{\frac{n}{2}-1} \left(\frac{\nu_m}{r} c \right)}{\left(\frac{\nu_m c}{r} \rho \right)^{\frac{n}{2}-1}}, \quad (21)$$

$$\int_S \frac{Z_{\frac{n}{2}-1} \left(\frac{\nu_m}{r} |c\mathbf{e} + \rho\sigma| \right)}{|c\mathbf{e} + \rho\sigma|^{\frac{n}{2}-1}} [\sigma] d\sigma = c_2 \frac{J_{\frac{n}{2}} \left(\frac{\nu_m}{r} \rho \right) Z_{\frac{n}{2}} \left(\frac{\nu_m}{r} c \right)}{\left(\frac{\nu_m c}{r} \rho \right)^{\frac{n}{2}-1}}, \quad (22)$$

в которых постоянные c_1 , c_2 зависят только от n (см. [18, с. 39–44], а также [17, с. 169, 171]). Положим

$$\begin{aligned} \alpha_m &= \frac{\pi}{2c_1c_2} \left(\frac{\nu_m c}{r} \right)^{\frac{n}{2}} \left(c_1 \mu_m N_{\frac{n}{2}-1} \left(\frac{\nu_m}{r} c \right) - c_2 \lambda_m N_{\frac{n}{2}} \left(\frac{\nu_m}{r} c \right) \right), \\ \beta_m &= \frac{\pi}{2c_1c_2} \left(\frac{\nu_m c}{r} \right)^{\frac{n}{2}} \left(c_2 \lambda_m J_{\frac{n}{2}} \left(\frac{\nu_m}{r} c \right) - c_1 \mu_m J_{\frac{n}{2}-1} \left(\frac{\nu_m}{r} c \right) \right), \end{aligned}$$

тогда $|\alpha_m| + |\beta_m| = O(\nu_m^{\frac{n}{2}-s})$ при $m \rightarrow \infty$. Пусть $h(\rho)$ — сумма ряда в правой части равенства (20) и $u(\rho) = f_0(c\rho) - h(c\rho)$, где $\rho \in (2-R, R)$ и $R = 2b/(a+b)$. Нетрудно видеть, что числа α_m и β_m являются решением линейной системы уравнений

$$\begin{aligned} \alpha_m J_{\frac{n}{2}-1} \left(\frac{\nu_m}{r} c \right) + \beta_m N_{\frac{n}{2}-1} \left(\frac{\nu_m}{r} c \right) &= \frac{\lambda_m}{c_1} \left(\frac{\nu_m c}{r} \right)^{\frac{n}{2}-1}, \\ \alpha_m J_{\frac{n}{2}} \left(\frac{\nu_m}{r} c \right) + \beta_m N_{\frac{n}{2}} \left(\frac{\nu_m}{r} c \right) &= \frac{\mu_m}{c_2} \left(\frac{\nu_m c}{r} \right)^{\frac{n}{2}-1} \end{aligned}$$

с определителем, равным $-2r/(\pi c \nu_m)$ [18, с. 32]. Отсюда и из равенств (21), (22) следует, что функция u удовлетворяет системе уравнений (3), (4). Кроме того, из определения h и оценок α_m , β_m имеем непрерывность функции u на $(2-R, R)$ [18, с. 175]. Используя следствие 2 теоремы 2, получаем $u = 0$. Тогда выполнено (20) и лемма 9 доказана.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $0 \leq a < b - 2r$, $s > \max\left(3, \frac{n+1}{2}\right)$, $f \in V_r^s(B_{a,b})$. Тогда при $0 \leq k < s - \max\left(3, \frac{n+1}{2}\right)$ и всех $1 \leq l \leq a_k$ имеет место равенство

$$f_{kl}(\rho) = \rho^{1-\frac{n}{2}} \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_{m,k,l} J_{\frac{n}{2}+k-1} \left(\frac{\nu_m}{r} \rho \right) + \beta_{m,k,l} N_{\frac{n}{2}+k-1} \left(\frac{\nu_m}{r} \rho \right), \quad (23)$$

где $|\alpha_{m,k,l}| + |\beta_{m,k,l}| = O(\nu_m^{\frac{n}{2}-s-k})$ при $m \rightarrow \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условия следует, что $f_{kl}(\rho)Y_l^{(k)}(\sigma) \in V_r^s(B_{a,b})$ при всех $k \geq 0, 1 \leq l \leq a_k$ [11, с. 18]. Отсюда и из леммы 9 получаем утверждение теоремы 3 при $k = 0$. При $1 \leq k < s - \max\left(3, \frac{n+1}{2}\right)$ утверждение получается индукцией по k с использованием утверждения б) леммы 2 из [11].

СЛЕДСТВИЕ. Пусть $0 \leq a < b - 2r, f \in C^\infty(B_{a,b})$. Тогда для того чтобы $f \in V_r(B_{a,b})$ необходимо и достаточно, чтобы при всех целых $k \geq 0, 1 \leq l \leq a_k$ имело место равенство (23), причем $|\alpha_{m,k,l}| + |\beta_{m,k,l}| = O(\nu_m^{-q})$ при $m \rightarrow \infty$ и любом фиксированном $q > 0$.

Доказательство следует из теоремы 3, [11, с. 20] и леммы 3.

Другим следствием результатов этого параграфа является следующая теорема о стирании особенностей для функций с нулевыми шаровыми средними.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $R > 2r, s \in \mathbb{N}, s > n + 1$ и $f \in V_r(B_R) \cap \mathfrak{H}^s(B_{0,R})$. Тогда существует функция $g \in C^{s-n-1}(B_R)$, совпадающая с f на множестве $B_{0,R}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условия и леммы 9 получаем, что при $0 < \rho < R$ имеет место равенство (20). Следовательно, при $x \in B_{R-r}$

$$(f * \chi_r)(x) = \sum_{m=1}^{\infty} a_{m,n} \beta_m \left(J_{\frac{n}{2}-1} \left(\frac{\nu_m}{r} \rho \right) \rho^{1-\frac{n}{2}} - J_{\frac{n}{2}-1}(\nu_m) \right) = 0,$$

где

$$a_{m,n} = \pi^{\frac{n}{2}-1} \left(\frac{2r}{\nu_m} \right)^{\frac{n}{2}+1} / J_{\frac{n}{2}-1}(\nu_m)$$

(см. [20]). Дифференцируя последнее равенство по ρ [18, с. 23, 175] и используя следствие 3 теоремы 2 из [11], имеем $\beta_m = 0$ при всех m . Отсюда и из (20) следует утверждение теоремы 4.

Используя теорему 3 вместо леммы 9, можно получить аналогичные результаты и для функций из класса $V_r(B_R) \cap \mathfrak{H}_k^s(B_{0,R}), k \in \mathbb{N}$.

§ 7. Доказательство основного результата

Для доказательства теоремы 1 нам потребуются еще три леммы.

ЛЕММА 10. Пусть $1 \leq p \leq \frac{2n}{n-1}, \{\alpha_m\}_{m \in \mathbb{Z}}$ — последовательность попарно различных действительных чисел,

$$g(t) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} c_m e^{i\alpha_m t},$$

где

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}} |c_m| < \infty.$$

Тогда если

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{\eta_p(R)} \int_1^R |g(t)|^4 d\eta_p(t) = 0,$$

то все $c_m = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условия следует, что функцию $|g(t)|^2$ можно представить в виде

$$|g(t)|^2 = \sum_{m \in \mathbb{Z}} g_m e^{i\beta_m t},$$

где $\{\beta_m\}$ – последовательность попарно различных действительных чисел, $\sum_{m \in \mathbb{Z}} |g_m| < \infty$, и одно из чисел g_m равно $\sum_{m \in \mathbb{Z}} |c_m|^2$. Имеем

$$\int_1^R |g(t)|^4 d\eta_p(t) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} |g_m|^2 \int_1^R d\eta_p(t) + \sum_{\substack{q, s \in \mathbb{Z} \\ q \neq s}} g_q \bar{g}_s \int_1^R e^{i(\beta_q - \beta_s)t} d\eta_p(t).$$

Поскольку при $q \neq s$

$$\int_1^R e^{i(\beta_q - \beta_s)t} d\eta_p(t) = o(\eta_p(R)) \quad \text{при } R \rightarrow \infty,$$

из условия леммы и полученного равенства следует, что $\sum_{m \in \mathbb{Z}} |g_m|^2 = 0$. Отсюда и из определения g_m получим $c_m = 0$ при всех m .

ЛЕММА 11. Пусть $1 \leq p < \infty$, $\varepsilon > 0$, $f \in L_{\text{loc}}^p(\mathbb{R}^n)$, $\varphi \in C(\mathbb{R}^n)$ и $\text{supp } \varphi \subset B_\varepsilon$. Тогда при всех $R > 0$ имеют место неравенства

$$\int_0^R |f_{kl}(\rho)|^p \rho^{n-1} d\rho < c_1 M_R(f)_p, \quad (24)$$

$$M_R(f * \varphi)_p < c_2 M_{R+\varepsilon}(f)_p, \quad (25)$$

в которых постоянные c_1, c_2 не зависят от R .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из определения f_{kl} [11, с. 17] и неравенства Гёльдера имеем

$$|f_{kl}(\rho)|^p < c_1 \int_S |f(\rho\sigma)|^p d\sigma,$$

где c_1 не зависит от ρ . Из этого неравенства и определения $M_R(f)_p$ следует (24). Аналогично,

$$M_R(f * \varphi)_p < c \int_{B_\varepsilon} \int_{B_R} |f(x-y)|^p dx dy,$$

где c не зависит от R . Отсюда получаем неравенство (25).

ЛЕММА 12. Пусть $a > 0$, $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \cap V_r(B_{a,\infty})$ и выполнено условие (2). Тогда $f = 0$ в $B_{a,\infty}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $b > a + 2r$, $k + 1 \in \mathbb{N}$, $q = \frac{n}{2} + k - 1$. По следствию из теоремы 3 при $a < \rho < b$, $1 \leq l \leq a_k$ имеет место равенство

$$f_{kl}(\rho)Y_l^{(k)}(\sigma) = \rho^{1-\frac{n}{2}}Y_l^{(k)}(\sigma) \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_{m,k,l} J_q\left(\frac{\nu_m}{r}\rho\right) + \beta_{m,k,l} N_q\left(\frac{\nu_m}{r}\rho\right), \quad (26)$$

где $|\alpha_{m,k,l}| + |\beta_{m,k,l}| = O(\nu_m^{-s})$ при $m \rightarrow \infty$ и любом фиксированном $s > 0$. Поскольку функции в левой и правой частях равенства (26) принадлежат $V_r(B_{a,\infty})$ (см. лемму 3, а также [11, с. 20]), из следствия 2 теоремы 2 из [11, с. 24] получаем, что равенство (26) имеет место при всех $\rho > a$. Докажем, что $f_{kl}(\rho) = 0$ при $\rho > a$. Используя асимптотические разложения для цилиндрических функций [18, с. 175], из (26) имеем

$$f_{kl}(\rho)\rho^{\frac{n-1}{2}} = F(\rho) + O(1/\rho),$$

где

$$F(\rho) = \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m e^{i\nu_m \rho/r} + \mu_m e^{-i\nu_m \rho/r}$$

и

$$\begin{aligned} \lambda_m &= \frac{1}{2}(\alpha_{m,k,l} - i\beta_{m,k,l})e^{-i\frac{\pi}{4}(2q-1)}, \\ \mu_m &= \frac{1}{2}(\alpha_{m,k,l} + i\beta_{m,k,l})e^{i\frac{\pi}{4}(2q-1)}. \end{aligned}$$

Пусть $M = \sum_{m=1}^{\infty} (|\lambda_m| + |\mu_m|)$, тогда при $R > 1$

$$\begin{aligned} \int_1^R |F(\rho)|^4 d\eta_p(\rho) &\leq M^{4-p} \int_1^R |F(\rho)|^p d\eta_p(\rho) \\ &\leq c_1 \int_1^R \rho^{n-1} |f_{kl}(\rho)|^p d\rho + c_2(R), \end{aligned}$$

где постоянная c_1 не зависит от R , а $c_2(R) = o(\eta_p(R))$ при $R \rightarrow \infty$. Отсюда, используя (2), (26) и леммы 10, 11, получаем $\lambda_m = \mu_m = 0$. Таким образом, все $f_{kl}(\rho) = 0$ при $\rho > a$, откуда следует утверждение леммы 12.

Перейдем к доказательству теоремы 1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Пусть $f \in L_{\text{loc}}^p(\mathbb{R}^n)$ и выполнены условия (1), (2). Достаточно доказать, что $f = 0$ в $B_r + (\mathbb{R}^n \setminus K)$. Пусть $a > 1$ такое, что $K \subset B_{a-1}$, $\varphi \in \mathcal{D}(B_1)$ и $F = f * \varphi$. Тогда $F \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \cap V_r(B_{a,\infty})$ и из (25) и (2) имеем

$$\lim_{R \rightarrow \infty} M_R(F)_p / \eta_p(R) = 0.$$

По лемме 12 $F = 0$ в $B_{a,\infty}$ и из произвольности φ следует, что $f = 0$ в $B_{a,\infty}$. Отсюда, используя связность множества $\mathbb{R}^n \setminus K$ и следствие 2 теоремы 2 из [11, с. 24], получаем $f = 0$ в $B_r + (\mathbb{R}^n \setminus K)$ и $\text{supp } f \subset \overline{\text{Int } K_r}$.

2. По теореме Уитни (см., например, [21, с. 16]) существует функция $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, у которой $\text{supp } f = \overline{\text{Int } K_r}$. Тогда $f = 0$ в $B_r + (\mathbb{R}^n \setminus K)$ и выполнено условие (1). Кроме того, при любых $1 \leq p \leq \frac{2n}{n-1}$, $R > 0$ имеем $M_R(f)_p \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx$, откуда следует (2).

3. Пусть $\lambda \in \Lambda_n$ и $f(x) = J_{\frac{n}{2}-1}(\lambda|x|/r)|x|^{1-\frac{n}{2}}$. Тогда $f \in V_r^\infty(\mathbb{R}^n)$ [11, с. 20], $\text{supp } f = \mathbb{R}^n$ и из известных оценок для функций Бесселя [18, с. 175] получаем $M_R(f)_p/\eta_p(R) = O(1)$ при $R \rightarrow \infty$.

§ 8. Обобщения и следствия

Из доказательства теоремы 1 видно, что совершенно аналогичными рассуждениями можно получить и более общие результаты. Рассмотрим некоторые из них.

Пусть $r_1, \dots, r_m$ ($m \geq 2$) — фиксированные положительные числа. Для любого целого $1 \leq k < m$ положим

$$\varphi_k(z) = \prod_{q=1}^k J_{\frac{n}{2}}(r_q z), \quad \psi_k(z) = \prod_{q=k+1}^m J_{\frac{n}{2}}(r_q z).$$

Обозначим через $\mathcal{N}_k$ множество общих положительных корней функций φ_k и ψ_k .

ТЕОРЕМА 5. Пусть $K \subset \mathbb{R}^n$ — выпуклый компакт и при некотором $1 \leq p \leq \frac{2n}{n-1}$

$$f_s \in L_{\text{loc}}^p(\mathbb{R}^n) \cap V_{r_s}(\mathbb{R}^n \setminus K), \quad s = 1, \dots, m.$$

Тогда если для функции $f = \sum_{s=1}^m f_s$ выполнено условие (2) и при некотором $1 \leq k < m$ $\mathcal{N}_k = \emptyset$, то

$$\sum_{s=1}^k f_s = \sum_{s=k+1}^m f_s = 0 \quad \text{в } \mathbb{R}^n \setminus K.$$

Для доказательства достаточно представить K в виде пересечения шаров и повторить рассуждения из доказательства леммы 12 и теоремы 1. Полагая $f_{m+1} = 0$ и используя теорему 5 для функций $f_1, \dots, f_{m+1}$ при $k = m$ и подходящем r_{m+1} , получим

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $K \subset \mathbb{R}^n$ — выпуклый компакт и при некотором $1 \leq p \leq \frac{2n}{n-1}$

$$f_s \in L_{\text{loc}}^p(\mathbb{R}^n) \cap V_{r_s}(\mathbb{R}^n \setminus K), \quad s = 1, \dots, m.$$

Тогда если для функции $f = \sum_{s=1}^m f_s$ выполнено условие (2), то $\text{supp } f \subset K$.

В случае, когда $r_i/r_j \notin E_n$ для всех $1 \leq i, j \leq m, i \neq j$, из теоремы 5 (см. также доказательство теоремы 1) имеем

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $K^1, \dots, K^m \subset \mathbb{R}^n$ — компакты со связными дополнениями и $r_i/r_j \notin E_n$ при всех $1 \leq i, j \leq m$, $i \neq j$. Предположим, что при некотором $1 \leq p \leq \frac{2n}{n-1}$ $f_s \in L^p_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ и $\int_{|x| \leq r_s} f_s(x+y) dx = 0$ для любого $y \in \mathbb{R}^n \setminus K^s$, $s = 1, \dots, m$. Тогда если для функции $f = \sum_{s=1}^m f_s$ выполнено условие (2), то $\text{supp } f_s \subset \overline{\text{Int } K^s_r}$ для всех s .

При $m = 2$ и $p = 1$ это утверждение является далеко идущим обобщением известной теоремы Л. Зальцмана о двух радиусах (см., например, [11, с. 15]). Нетрудно видеть (см. § 6), что без сформулированных выше условий для корней φ_k и ψ_k утверждения теоремы 5 и следствия 2 становятся неверными. Кроме того, условие (2) также нельзя ослабить (см. доказательство утверждения 3 теоремы 1).

ТЕОРЕМА 6. Пусть $K \subset \mathbb{R}^n$ — выпуклый компакт, $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n \setminus K)$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

1. $f \in V_r(\mathbb{R}^n \setminus K)$ при всех $r \in \Lambda_n$,
2. $\Delta f + f = 0$ в $\mathbb{R}^n \setminus K$ (равенство понимается в смысле распределений).

При $K = \emptyset$ аналогичный результат был получен автором в [7]. Для доказательства теоремы 6 достаточно повторить рассуждения из [7], применяя утверждение теоремы 3 вместо описания класса $V_r^\infty(\mathbb{R}^n)$, использованного в [7]. Подобное уточнение допускают и другие результаты работы [7], связанные с уравнением Гельмгольца.

Список литературы

1. Zalzman L. A bibliographic survey of the Pompeiu problem // Approximation by solutions of partial differential equations / ed. Fuglede B. et. al. Kluwer Acad. Publ, 1992. P. 185–194.
2. Sitaram A. Fourier analysis and determining sets for Radon measures on $\mathbb{R}^n$ // Illinois J. Math. 1984. V. 28. P. 339–347.
3. Shahshahani M., Sitaram A. The Pompeiu problem in exterior domains in symmetric spaces // Contemp. Math. 1987. V. 63. P. 267–277.
4. Eguchi M. An application of topological Paley–Wiener theorems to invariant differential equations on symmetric spacer // Lect. Notes in Math. V. 739. Berlin: Springer-Verlag, 1979. P. 192–206.
5. Berenstein C. A., Gay R., Yger A. The three squares theorem, a local version // Analysis and partial differential equations / ed. Sadosky C. New York: Marcel Deccer, 1990. P. 35–50.
6. Хелгасон С. Группы и геометрический анализ. М.: Мир, 1987.
7. Волчков В. В. Новые теоремы о среднем для решений уравнения Гельмгольца // Матем. сб. 1993. Т. 184. № 7. С. 71–78.
8. Волчков В. В. Об одной проблеме Зальцмана и ее обобщениях // Матем. заметки. 1993. Т. 53. № 2. С. 30–36.
9. Волчков В. В. Новые теоремы о двух радиусах в теории гармонических функций // Изв. РАН. Сер. матем. 1994. Т. 58. № 1. С. 182–194.
10. Volchkov V. V. Morera type theorems on the unit disk // Anal. Math. 1994. V. 20. P. 49–63.
11. Волчков В. В. Окончательный вариант локальной теоремы о двух радиусах // Матем. сб. 1995. Т. 186. № 6. С. 15–34.

12. Волчков В. В. Новые теоремы о среднем для полианалитических функций // Матем. заметки. 1994. Т. 56. № 3. С. 20–28.
13. Волчков В. В. Окончательный вариант теоремы о среднем в теории гармонических функций // Матем. заметки. 1996. Т. 59. № 3. С. 351–358.
14. Волчков В. В. Теоремы о двух радиусах на пространствах постоянной кривизны // Докл. РАН. 1996. Т. 347. № 3. С. 300–302.
15. Владимиров В. С. Обобщенные функции в математической физике. М.: Наука, 1976.
16. Smith I. D. Harmonic analysis of scalar and vector fields in $\mathbb{R}^n$ // Proc. Cambridge Philos. Soc. 1972. V. 72. P. 403–416.
17. Стейн И., Вейс Г. Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. М.: Мир, 1974.
18. Корнев Б. Г. Введение в теорию бесселевых функций. М.: Наука, 1971.
19. Рудин У. Теория функций в единичном шаре из $\mathbb{C}^n$. М.: Мир, 1984.
20. Williams S. A. A partial solution of the Ponysiu problem // Math. Ann. 1976. V. 223. P. 183–190.
21. Постников М. М. Лекции по геометрии. Семестр III. Гладкие многообразия. М.: Наука, 1987.

Донецкий государственный университет

Поступила в редакцию
21.10.1996