Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. В. Жданович, Внешние автоморфизмы локально простых алгебр Ли, *Матем. сб.*, 1997, том 188, номер 9, 31–54

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm256>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.7.115

26 апреля 2023 г., 15:50:37

УДК 512.554

Д. В. Жданович

Внешние автоморфизмы локально простых алгебр Ли

В статье рассматриваются группы автоморфизмов локально простых алгебр Ли над полем $\mathbb{C}$. Выясняется, что существует естественное определение группы внутренних автоморфизмов таких алгебр Ли, которая является нормальной подгруппой в группе автоморфизмов. Следовательно, можно определить группу внешних автоморфизмов локально простой алгебры Ли. Показано, что, в отличие от конечномерного случая, группа внешних автоморфизмов не обязана быть конечной и в отдельных случаях эта группа вычислена полностью.

Библиография: 6 названий.

§ 1. Введение

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Алгебра Ли g называется *локально простой*, если для любого конечного подмножества $Y \subset g$, существует простая конечномерная подалгебра Ли g_Y , которая содержит это множество.

Если локально простая алгебра Ли g не более чем счетномерна, то она является прямым пределом индуктивной системы следующего вида

$$g_1 \xrightarrow{\varphi_1} g_2 \xrightarrow{\varphi_2} g_3 \rightarrow \cdots \rightarrow g_i \xrightarrow{\varphi_i} g_{i+1} \rightarrow \cdots,$$

где g_i — это конечномерная простая алгебра Ли для любого $i \geq 1$.

В настоящей статье рассматриваются не более чем счетномерные локально простые алгебры Ли над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$. Интерес к таким алгебрам возник после работы [1], в которой было показано, что запас таких алгебр довольно большой.

В данной работе исследуются группы автоморфизмов локально простых алгебр Ли. Представление локально простой алгебры Ли в виде прямого предела индуктивной системы конечномерных простых алгебр Ли позволяет сразу получить автоморфизмы, которые происходят из связи теории групп Ли и теории конечномерных алгебр Ли (см. замечание 2). Такие автоморфизмы естественно назвать *внутренними*.

Как обычно, внутренние автоморфизмы образуют нормальную подгруппу $\text{Int}(g)$ в группе $\text{Aut}(g)$ и, следовательно, определена факторгруппа $\text{Aut}(g)/\text{Int}(g)$, которая названа *группой внешних автоморфизмов*.

Вычисление группы внешних автоморфизмов в конечномерном случае не составляет труда. Она изоморфна группе автоморфизмов соответствующей схемы Динкина [2]. В общем счетномерном случае задача вычисления группы внешних автоморфизмов, по всей видимости, является трудно выполнимой.

В работе [3] среди всех локально полупростых алгебр Ли был выделен некоторый класс алгебр Ли, названный диагональным, и приведены достаточно убедительные доводы в пользу его содержательности.

Пусть алгебра Ли является прямым пределом индуктивной системы следующего вида

$$\mathfrak{sl}_{n_1}(\mathbb{C}) \xrightarrow{\varphi_1} \mathfrak{sl}_{n_2}(\mathbb{C}) \xrightarrow{\varphi_2} \mathfrak{sl}_{n_3}(\mathbb{C}) \longrightarrow \cdots \longrightarrow \mathfrak{sl}_{n_i}(\mathbb{C}) \xrightarrow{\varphi_i} \mathfrak{sl}_{n_{i+1}}(\mathbb{C}) \longrightarrow \cdots.$$

Если в этой индуктивной системе алгебры Ли $\mathfrak{sl}_{n_i}(\mathbb{C})$ можно реализовать в виде матриц размера $n_i \times n_i$ с нулевым следом так, что вложения φ_i примут вид

$$\varphi_i(A) = \begin{pmatrix} A & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & A & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -A^T & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & -A^T & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{sl}_{n_{i+1}}(\mathbb{C}),$$

где $A \in \mathfrak{sl}_{n_i}(\mathbb{C})$, а A^T — это матрица, являющаяся транспонированной матрицей к матрице A , то такие алгебры являются диагональными типа A .

Для таких алгебр доказано, что группа внешних автоморфизмов есть либо $\mathbb{Z}_2 \times A(g)$, либо $A(g)$, где $\mathbb{Z}_2$ — это группа второго порядка, а $A(g)$ — это не более чем счетная свободная абелева группа. Таким образом, для диагональной алгебры Ли типа A определен естественный инвариант, являющийся рангом группы $A(g)$. Показано, что для любого значения этого инварианта существует соответствующая диагональная алгебра Ли типа A .

Опишем структуру статьи. Во втором параграфе аккуратно определяется группа внешних автоморфизмов не более чем счетномерных локально простых алгебр Ли. Приведено доказательство теоремы 2.1 и утверждения 2.6, которые являются основным техническим средством для вычисления группы внешних автоморфизмов. Третий параграф перекликается с работой [4]. В нем дается более формальное описание категории диагональных алгебр Ли типа A . В четвертом параграфе доказывается теорема 4.1, в которой возникает группа $A(g)$ и приводится серия примеров для которых вычисляется группа $A(g)$.

§ 2. Группы внешних автоморфизмов локально простых алгебр Ли

Пусть $\mathfrak{C}$ — это произвольная категория. Определим категорию $\hat{\mathfrak{C}}$ в два шага.

Шаг 1. Определим категорию $\tilde{\mathfrak{C}}$.

а) Объекты: объект X категории $\tilde{\mathfrak{C}}$ есть пара последовательностей

$$(\{X_i \mid X_i \in \text{Ob } \mathfrak{C}\}_{i=1}^{\infty}, \{x_i \mid x_i \in \text{Hom}_{\mathfrak{C}}(X_i, X_{i+1})\}_{i=1}^{\infty}).$$

Неформально говоря, объект X – это индуктивная система:

$$X_1 \xrightarrow{x_1} X_2 \xrightarrow{x_2} X_3 \rightarrow \cdots \rightarrow X_i \xrightarrow{x_i} X_{i+1} \rightarrow \cdots.$$

Если $i \leq j$, то будем обозначать через x_{ij} композицию $x_{j-1} \circ x_{j-2} \circ \cdots \circ x_i \in \text{Hom}_{\mathfrak{C}}(X_i, X_j)$. (Имеется в виду, что $x_{ii} = \text{id}_{X_i}$.)

б) Морфизмы: если $X = (\{X_i\}_{i=1}^\infty, \{x_i\}_{i=1}^\infty)$, $Y = (\{Y_i\}_{i=1}^\infty, \{y_i\}_{i=1}^\infty)$ суть объекты категории $\tilde{\mathfrak{C}}$, то $\text{Hom}_{\tilde{\mathfrak{C}}}(X, Y)$ – это множество последовательностей $\{f_i \mid f_i \in \text{Hom}_{\mathfrak{C}}(X_i, Y_{n_i})\}_{i=1}^\infty$ таких, что

$$n_1 \leq n_2 \leq n_3 \leq \cdots \leq n_i \leq n_{i+1} \leq \cdots$$

и следующая диаграмма

$$\begin{array}{ccc} X_i & \xrightarrow{x_i} & X_{i+1} \\ f_i \downarrow & & \downarrow f_{i+1} \\ Y_{n_i} & \xrightarrow{y_{n_i} \circ x_{i+1}} & Y_{n_{i+1}} \end{array}$$

коммутативна для любого $i \geq 1$.

ПРИМЕР. Пусть $X = (\{X_i\}_{i=1}^\infty, \{x_i\}_{i=1}^\infty)$ есть объект категории $\tilde{\mathfrak{C}}$, а $\{n_i\}_{i=1}^\infty$ – это возрастающая последовательность натуральных чисел такая, что $n_i \geq i$ для любого $i \geq 1$. Тогда последовательность $\{f_i \mid f_i = x_{i, n_i} \in \text{Hom}_{\mathfrak{C}}(X_i, X_{n_i})\}_{i=1}^\infty$ задает морфизм в категории $\tilde{\mathfrak{C}}$ из объекта X в самого себя. Такие морфизмы будем называть *тривиальными*.

в) Композиция морфизмов: пусть

$$X = (\{X_i\}_{i=1}^\infty, \{x_i\}_{i=1}^\infty), \quad Y = (\{Y_i\}_{i=1}^\infty, \{y_i\}_{i=1}^\infty), \quad Z = (\{Z_i\}_{i=1}^\infty, \{z_i\}_{i=1}^\infty)$$

– это объекты категории $\tilde{\mathfrak{C}}$ и

$$\begin{aligned} f &= \{f_i \mid f_i \in \text{Hom}_{\mathfrak{C}}(X_i, Y_{n_i})\}_{i=1}^\infty, \\ g &= \{g_i \mid g_i \in \text{Hom}_{\mathfrak{C}}(Y_i, Z_{m_i})\}_{i=1}^\infty \end{aligned}$$

– это морфизмы категории $\tilde{\mathfrak{C}}$.

Тогда положим

$$g \circ f = \{(g \circ f)_i \mid (g \circ f)_i = g_{n_i} \circ f_i \in \text{Hom}_{\mathfrak{C}}(X_i, Z_{m_{n_i}})\}_{i=1}^\infty.$$

Например, композиция двух тривиальных морфизмов есть тривиальный морфизм.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.1. *Данные а), б), в) задают категорию.*

Шаг 2. Введем отношение $\sim$ на $\text{Мог } \tilde{\mathfrak{C}}$: $f \sim f'$ тогда и только тогда, когда $f, f' \in \text{Hom}_{\tilde{\mathfrak{C}}}(X, Y)$ и существуют тривиальные морфизмы $t, t' \in \text{Hom}_{\tilde{\mathfrak{C}}}(Y, Y)$ такие, что

$$t \circ f = t' \circ f'.$$

Непосредственной проверкой можно доказать следующее утверждение.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.2. а) *Отношение $\sim$ есть отношение эквивалентности.*

б) *Отношение $\sim$ согласовано с композицией морфизмов. Это означает, что если $f, f' \in \text{Hom}_{\tilde{\mathfrak{C}}}(X, Y)$ и $g, g' \in \text{Hom}_{\tilde{\mathfrak{C}}}(Y, Z)$ такие, что $f \sim f'$ и $g \sim g'$, тогда $g \circ f \sim g' \circ f'$.*

Это утверждение позволяет определить категорию $\hat{\mathfrak{C}} = \tilde{\mathfrak{C}}/(\sim)$.

Неформально говоря, категория $\hat{\mathfrak{C}}$ является фактором категории $\tilde{\mathfrak{C}}$ по тривиальным морфизмам.

Определим естественный функтор $\sigma: \mathfrak{C} \rightarrow \hat{\mathfrak{C}}$.

а) На объектах: если $X \in \text{Ob } \mathfrak{C}$, то тогда

$$\sigma(X) = (\{X_i \mid X_i = X\}_{i=1}^{\infty}, \{x_i \mid x_i = \text{id}_X\}_{i=1}^{\infty}).$$

б) На морфизмах: если $f \in \text{Hom}_{\mathfrak{C}}(X, Y)$, то тогда

$$\sigma(f) = [\{f_i \mid f_i = f \in \text{Hom}_{\mathfrak{C}}(X_i, Y_i)\}_{i=1}^{\infty}].$$

Здесь в квадратных скобках обозначен морфизм в категории $\hat{\mathfrak{C}}$, который задается последовательностью $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.3. *Функтор σ есть строгое и полное вложение категории. Это означает, что следующее отображение*

$$\sigma: \text{Hom}_{\mathfrak{C}}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}_{\hat{\mathfrak{C}}}(\sigma(X), \sigma(Y))$$

является биекцией для любых $X, Y \in \text{Ob } \mathfrak{C}$.

Пусть $\mathfrak{C}_1$ и $\mathfrak{C}_2$ суть произвольные категории и пусть задан функтор $F: \mathfrak{C}_1 \rightarrow \mathfrak{C}_2$. Определим функтор $\tilde{F}: \tilde{\mathfrak{C}}_1 \rightarrow \tilde{\mathfrak{C}}_2$.

а) На объектах:

$$\tilde{F}(\{X_i\}_{i=1}^{\infty}, \{x_i\}_{i=1}^{\infty}) = (\{F X_i\}_{i=1}^{\infty}, \{F x_i\}_{i=1}^{\infty}).$$

б) На морфизмах:

$$\tilde{F}\{f_i\}_{i=1}^{\infty} = \{F f_i\}_{i=1}^{\infty}.$$

Ясно, что функтор $\tilde{F}$ согласован с отношением эквивалентности $\sim$. Следовательно, определен функтор $\hat{F}: \hat{\mathfrak{C}}_1 \rightarrow \hat{\mathfrak{C}}_2$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Категория $\widehat{\mathfrak{C}}$ обладает тем свойством, что она содержит категорию $\mathfrak{C}$ в качестве полной подкатегории и, во-первых, любая индуктивная система вида:

$$X_1 \xrightarrow{x_1} X_2 \xrightarrow{x_2} X_3 \rightarrow \dots \rightarrow X_i \xrightarrow{x_i} X_{i+1} \rightarrow \dots$$

имеет прямой предел, лежащий в категории $\widehat{\mathfrak{C}}$, во-вторых, любой объект из категории $\widehat{\mathfrak{C}}$ является прямым пределом индуктивной системы указанного вида. То есть, в некотором смысле, категория $\widehat{\mathfrak{C}}$ является пополнением категории $\mathfrak{C}$. Однако, в общем случае, такое пополнение не единственно, т.е. могут существовать не эквивалентные категории, обладающие указанным свойством и, скорее всего, среди них нет универсальной. Выбор именно такого пополнения обуславливается утверждением 2.4.

Пусть $\mathfrak{C}_1$ – это категория конечномерных простых алгебр Ли. Обозначим через $\mathfrak{A}$ категорию не более чем счетномерных локально простых алгебр Ли.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.4. Категории $\mathfrak{A}$ и $\widehat{\mathfrak{C}}_1$ эквивалентны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства построим функтор $L: \widehat{\mathfrak{C}}_1 \rightarrow \mathfrak{A}$ такой, что

- 1) L – это строгий и полный функтор.
- 2) Если Y – это объект категории $\mathfrak{A}$, то тогда существует объект $X \in \text{Ob } \widehat{\mathfrak{C}}_1$ такой, что объект $L(X)$ изоморфен объекту Y .

Известно [5], что если функтор удовлетворяет этим двум свойствам, то он задает эквивалентность категорий.

Сначала построим функтор $\mathbf{L}: \widehat{\mathfrak{C}}_1 \rightarrow \mathfrak{A}$.

а) На объектах: пусть $X \in \text{Ob } \widehat{\mathfrak{C}}_1$ есть пара последовательностей $(\{g_i\}_{i=1}^\infty, \{\varphi_i\}_{i=1}^\infty)$, где g_i – это конечномерная простая алгебра Ли и $\varphi_i \in \text{Hom}_{\mathfrak{A}}(g_i, g_{i+1})$ – это гомоморфное вложение для любого $i \geq 1$. Тогда положим $\mathbf{L}(X) = g = \varinjlim g_i$.

б) На морфизмах: пусть последовательность

$$f = \{f_i \mid f_i \in \text{Hom}_{\mathfrak{C}_1}(g_i, g'_{n_i})\}_{i=1}^\infty$$

задает морфизм в категории $\widehat{\mathfrak{C}}$ из объекта $X = (\{g_i\}_{i=1}^\infty, \{\varphi_i\}_{i=1}^\infty)$ в объект $X' = (\{g'_i\}_{i=1}^\infty, \{\varphi'_i\}_{i=1}^\infty)$. Определим поточечно гомоморфизм $\mathbf{L}(f)$ из алгебры Ли $g = \varinjlim g_i$ в алгебру Ли $g' = \varinjlim g'_i$. Если $g \in g$, то тогда существует $j \geq 1$ такой, что $g \in g_j$. Положим $\mathbf{L}(f)(g) = f_j(g) \in g'_{n_j} \subset g'$.

Во-первых, это определение корректно. То есть, если выбрать другой индекс k такой, что $g \in g_k$, то $f_j(g)$ совпадает с $f_k(g)$ как элемент прямого предела $\varinjlim g'_i = g'$.

Во-вторых, $\mathbf{L}(f)$ является гомоморфизмом алгебр Ли, так как каждый f_i есть гомоморфизм алгебр Ли.

Рассмотрим отображение $\mathbf{L}: \text{Hom}_{\widehat{\mathfrak{C}}}(X, X') \rightarrow \text{Hom}_{\mathfrak{A}}(g, g')$ и перечислим его свойства.

1. Это отображение сюръективно. Пусть $f \in \text{Hom}_{\mathfrak{A}}(g, g')$, тогда для любого $i \geq 1$, существует n_i так, что $f(g_i) \subset g'_{n_i}$. Тем самым определена последовательность $\{f_i \mid f_i \in \text{Hom}_{\mathfrak{C}_1}(g_i, g'_{n_i})\}_{i=1}^{\infty}$, которая очевидным образом задает морфизм в категории $\widehat{\mathfrak{C}}_1$.

2. Если последовательности $f = \{f_i \mid f_i \in \text{Hom}_{\mathfrak{C}_1}(g_i, g'_{n_i})\}_{i=1}^{\infty}$ и $f' = \{f'_i \mid f'_i \in \text{Hom}_{\mathfrak{C}_1}(g_i, g'_{n'_i})\}_{i=1}^{\infty}$ задают эквивалентные в категории $\widehat{\mathfrak{C}}_1$ морфизмы, то $\mathbf{L}(f) = \mathbf{L}(f')$. Для этого заметим, что если $t \in \text{Hom}_{\widehat{\mathfrak{C}}_1}(Y, Y)$ является тривиальным морфизмом, то $\mathbf{L}(t) = \text{id}_{\mathbf{L}(Y)}$. А теперь вспомним, что эквивалентность морфизмов f, f' означает существование тривиальных морфизмов и $t, t' \in \text{Hom}_{\widehat{\mathfrak{C}}_1}(X', X')$ таких, что $t \circ f = t' \circ f'$. Следовательно, $\mathbf{L}(f) = \mathbf{L}(f')$.

3. Если морфизмы $f = \{f_i \mid f_i \in \text{Hom}_{\mathfrak{C}_1}(g_i, g'_{n_i})\}_{i=1}^{\infty}$ и $f' = \{f'_i \mid f'_i \in \text{Hom}_{\mathfrak{C}_1}(g_i, g'_{n'_i})\}_{i=1}^{\infty}$ таковы, что $\mathbf{L}(f) = \mathbf{L}(f')$, то f и f' суть эквивалентные морфизмы. В самом деле, если гомоморфизмы $\mathbf{L}(f), \mathbf{L}(f')$ из алгебры Ли g в алгебру Ли g' совпадают, то совпадают и их ограничения на подалгебры Ли g_i для любого $i \geq 1$. Пусть m_i — это такое число, что $\mathbf{L}(f)(g_i), \mathbf{L}(f')(g_i) \subset g'_{m_i}$ и $m_i \geq n_i, n'_i$. Тогда

$$\varphi_{n_i m_i} \circ f_i = \varphi_{n'_i m_i} \circ f'_i.$$

А это и означает, что морфизмы f и f' эквивалентны.

Свойство 2 позволяет определить отображение

$$L: \text{Hom}_{\widehat{\mathfrak{C}}_1}(X, X')/(\sim) \rightarrow \text{Hom}_{\mathfrak{A}}(g, g')$$

и, следовательно, функтор $L: \widehat{\mathfrak{C}}_1 \rightarrow \mathfrak{A}$. Из свойств 1 и 3 следует, что этот функтор является строгим и полным. То, что функтор L удовлетворяет второму условию следует из того факта, что любая счетномерная локально простая алгебра Ли является прямым пределом индуктивной системы следующего вида

$$g_1 \xrightarrow{\varphi_1} g_2 \xrightarrow{\varphi_2} g_3 \rightarrow \dots \rightarrow g_i \xrightarrow{\varphi_i} g_{i+1} \rightarrow \dots,$$

где g_i — это простая конечномерная алгебра Ли для любого $i \geq 1$. Следовательно, категории $\widehat{\mathfrak{C}}_1$ и $\mathfrak{A}$ эквивалентны.

Свяжем с каждой конечномерной простой алгеброй Ли $g \in \text{Ob } \mathfrak{C}_1$ связную односвязную группу Ли G такую, что $\text{Lie}(G) = g$. Как известно [2], существует гомоморфизм групп Ли $\text{Ad}: G \rightarrow \text{Aut}(g)$, причем образом этого отображения является нормальная подгруппа Ли, которая называется *группой внутренних автоморфизмов* алгебры Ли g и обозначается через $\text{Int}(g)$. Факторгруппа $\text{Aut}(g)/\text{Int}(g)$ называется *группой внешних автоморфизмов* алгебры Ли g .

Определим отношение $\sim$ на $\text{Mor } \mathfrak{C}_1$: $\varphi \sim \varphi'$ тогда и только тогда, когда $\varphi, \varphi' \in \text{Hom}_{\mathfrak{C}_1}(g_1, g_2)$ и существует элемент $g \in G_2$ такой, что $\varphi = \text{Ad}(g) \circ \varphi'$. Из того, что отображение Ad является гомоморфизмом групп, следует, что отношение $\sim$ есть отношение эквивалентности.

Отображение Ad удовлетворяет следующему свойству. Пусть $\varphi \in \text{Hom}_{\mathfrak{C}_1}(g_1, g_2)$ — это гомоморфизм алгебр Ли и пусть

$$f_\varphi: G_1 \rightarrow G_2$$

такой гомоморфизм групп Ли, что $df_\varphi = \varphi$. Тогда

$$\varphi \circ \text{Ad}(g) = \text{Ad}(f_\varphi(g)) \circ \varphi$$

для любого $g \in G_1$.

Из этого свойства следует, что отношение эквивалентности $\sim$ согласованно с композицией морфизмов в категории $\mathfrak{C}_1$. Следовательно, определена категория $\mathfrak{C}_2 = \mathfrak{C}_1 / (\sim)$ и функтор проекции $F: \mathfrak{C}_1 \rightarrow \mathfrak{C}_2$.

Неформально говоря, категория $\mathfrak{C}_2$ — это категория конечномерных простых алгебр Ли, в которой морфизмы рассматриваются с точностью до внутренних сопряжений.

Из определения следует, что группа внешних автоморфизмов алгебры Ли $g \in \text{Ob } \mathfrak{C}_1$ есть $\text{Aut}_{\mathfrak{C}_2}(F(g))$.

Пусть алгебра Ли $g \in \text{Ob } \mathfrak{A}$. Рассмотрим ее как объект категории $\widehat{\mathfrak{C}}_1$, т.е. представим ее в виде индуктивной системы:

$$g_1 \xrightarrow{\varphi_1} g_2 \xrightarrow{\varphi_2} g_3 \rightarrow \cdots \rightarrow g_i \xrightarrow{\varphi_i} g_{i+1} \rightarrow \cdots,$$

где $g_i \in \text{Ob } \mathfrak{C}_1$.

Тогда существует индуктивная система

$$G_1 \xrightarrow{f_{12}} G_2 \xrightarrow{f_{23}} G_3 \rightarrow \cdots \rightarrow G_i \xrightarrow{f_{i(i+1)}} G_{i+1} \rightarrow \cdots,$$

где G_i — это связная односвязная группа Ли такая, что $\text{Lie}(G_i) = g_i$ и $df_{i(i+1)} = \varphi_i$ для любого $i \geq 1$.

Пусть $G = \varinjlim G_i$ и $f_i: G_i \rightarrow G$ — это соответствующие отображения.

Пусть задана система $\mathfrak{V}$ подмножеств группы G , содержащих единицу, которая обладает следующими свойствами.

- а) Пересечение двух множеств системы $\mathfrak{V}$ содержит некоторое третье множество системы $\mathfrak{V}$.
- б) Если множество U принадлежит семейству $\mathfrak{V}$, то существует $V \in \mathfrak{V}$ так, что $VV^{-1} \subset U$.
- в) Если множество U принадлежит семейству $\mathfrak{V}$ и a является элементом множества U , то существует $V \in \mathfrak{V}$ так, что $Va \subset U$.
- г) Если множество U принадлежит семейству $\mathfrak{V}$ и a является элементом группы G , то существует $V \in \mathfrak{V}$ так, что $a^{-1}Va \subset U$.

Тогда известно [6], что семейство множеств вида Ug , где $U \in \mathfrak{V}$ и $g \in G$, является базой некоторой топологии, относительно которой группа G превращается в топологическую группу и семейство $\mathfrak{V}$ является базой окрестностей единицы.

Пусть $\mathfrak{A} = \{C(f_i(G_i))\}_{i=1}^\infty$, где $C(f_i(G_i))$ — это централизатор подгруппы $f_i(G_i)$ в группе G .

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.5. Семейство централизаторов $\mathfrak{U}$ обладает всеми вышеуказанными свойствами.

Из этого утверждения следует, что G — это топологическая группа и, следовательно, можно определить пополнение $\widehat{G}$ группы G по соответствующей топологии.

Определим гомоморфизм $\text{Ad} : \widehat{G} \rightarrow \text{Aut}_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{g})$, где g — это $\varinjlim g_i$.

Сначала построим гомоморфизм $\text{Ad} : G \rightarrow \text{Aut}_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{g})$.

Пусть $g \in G$, тогда существуют $j \geq 1$ и $g_j \in G_j$ такие, что $f_j(g_j) = g$. Элемент g_j определяет автоморфизм $\text{Ad}(g_j)$ алгебры Ли $\mathfrak{g}_j$. Элемент $f_{j(j+k)}(g_j)$ определяет автоморфизм $\text{Ad}(f_{j(j+k)}(g_j))$ алгебры Ли $\mathfrak{g}_{j+k}$ такой, что

$$\varphi_{j+k-1} \circ \text{Ad}(f_{j(j+k-1)}(g_j)) = \text{Ad}(f_{j(j+k)}(g_j)) \circ \varphi_{j+k-1}$$

для любого $k \geq 1$. Следовательно, определена последовательность

$$\begin{aligned} \{h_i \mid h_i = \text{Ad}(f_{ji}(g_j)) \in \text{Hom}_{\mathfrak{C}_1}(\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_i) \text{ при } i \geq j \text{ и} \\ h_i = \text{Ad}(g_j)|_{\mathfrak{g}_i} \in \text{Hom}_{\mathfrak{C}_1}(\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j) \text{ при } i < j\}_{i=1}^{\infty}, \end{aligned}$$

которая задает автоморфизм в категории $\widehat{\mathfrak{C}}$ и, следовательно, автоморфизм $\text{Ad}(g)$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Нетрудно убедиться в том, что эта конструкция корректна.

Напомним, что элементами пополнения $\widehat{G}$ являются последовательности $\{g_i \mid g_i \in G\}_{i=1}^{\infty}$ такие, что

$$\forall k \exists N \text{ такой, что } \forall s, t \geq N \quad g_s^{-1}g_t \in C(f_k(G_k)). \quad (*)$$

Если $g = \{g_i \mid g_i \in G\}_{i=1}^{\infty} \in \widehat{G}$, то определена последовательность $\{\text{Ad}(g_i)\}_{i=1}^{\infty}$ автоморфизмов алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Эта последовательность автоморфизмов поточечно сходится к некоторому автоморфизму. В самом деле, если $x \in \mathfrak{g}$, то тогда, используя условие $(*)$, получаем, что последовательность $\{\text{Ad}(g_i)(x)\}_{i=1}^{\infty}$ элементов алгебры Ли $\mathfrak{g}$ стабилизируется на некотором элементе $\text{Ad}(g)(x)$. Следовательно, мы определили гомоморфизм групп $\text{Ad} : \widehat{G} \rightarrow \text{Aut}_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{g})$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Морфизм, задаваемый последовательностью

$$f = \{f_i \mid f_i \in \text{Hom}_{\mathfrak{C}_1}(\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_{n_i})\}_{i=1}^{\infty} \in \text{Hom}_{\widehat{\mathfrak{C}}}(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}),$$

принадлежит образу $\text{Ad}(\widehat{G})$ тогда и только тогда, когда существует последовательность $\{g_i \mid g_i \in G_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}$ такая, что гомоморфизм алгебр Ли $f_i : \mathfrak{g}_i \rightarrow \mathfrak{g}_{n_i}$ есть ограничение автоморфизма $\text{Ad}(g_i)$ на подалгебру Ли $\mathfrak{g}_i$. Ясно, что $\text{Ad}(\widehat{G})$ является нормальной подгруппой в группе $\text{Aut}_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{g})$. Обозначим $\text{Ad}(\widehat{G})$ через $\text{Int}(\mathfrak{g})$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Группой внешних автоморфизмов алгебры Ли $\mathfrak{g} \in \mathfrak{A}$ будем называть факторгруппу $\text{Aut}_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{g}) / \text{Int}(\mathfrak{g})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим алгебру Ли $\mathfrak{g}$ как объект категории $\widehat{\mathfrak{C}}_1$, т.е. $\mathfrak{g}$ – это индуктивная система

$$g_1 \xrightarrow{\varphi_1} g_2 \xrightarrow{\varphi_2} g_3 \rightarrow \cdots \rightarrow g_i \xrightarrow{\varphi_i} g_{i+1} \rightarrow \cdots,$$

В любом случае, существует отображение

$$\hat{F}: \text{Hom}_{\hat{\mathfrak{C}}_1}(g, g) \rightarrow \text{Hom}_{\hat{\mathfrak{C}}_2}(\hat{F}(g), \hat{F}(g)),$$

Воспользуемся следующей несложной леммой.

Докажем, что отображение $\hat{F}$ является сюръективным. Пусть задан морфизм

$$x = [\{x_i \mid x_i \in \text{Hom}_{\mathfrak{C}_2}(F(\mathfrak{g}_i), F(\mathfrak{g}_{n_i}))\}_{i=1}^\infty] \in \text{Hom}_{\widehat{\mathfrak{C}_2}}(\widehat{F}(\mathfrak{g}), \widehat{F}(\mathfrak{g}))$$

$$F(\varphi_{n;n_{i+1}}) \circ x_i = x_{i+1} \circ F(\varphi_i)$$

Пусть $\{h'_i \mid h'_i \in \text{Hom}_{\mathfrak{C}_1}(g_i, g_{n_i})\}_{i=1}^\infty$ – это такая последовательность, что $F(h'_i) = x_i$ для любого $i \geq 1$. Тогда существует $g_{i+1} \in G_{n_{i+1}}$ такой, что

$$\varphi_{n_i n_{i+1}} \circ h'_i = \text{Ad}(g_{i+1}) \circ h'_{i+1} \circ \varphi_i$$

Положим

$$\begin{aligned} h_1 &= h'_1, \\ h_2 &= \text{Ad}(g_2) \circ h'_2, \\ h_3 &= \text{Ad}(f_{n_2 n_3}(g_2)g_3) \circ h'_3, \\ &\dots \\ h_i &= \text{Ad}(f_{n_2 n_i}(g_2)f_{n_3 n_i}(g_3) \dots f_{n_{i-1} n_i}(g_{i-1})g_i) \circ h'_i, \\ &\dots \end{aligned}$$

Тогда непосредственными выкладками можно показать, что последовательность $\{h_i\}_{i=1}^\infty$ определяет морфизм в категории $\widehat{\mathfrak{C}}_1$, т.е. выполнено равенство

$$\varphi_{n_i n_{i+1}} \circ h_i = h_{i+1} \circ \varphi_i$$

для любого $i \geq 1$. Так как гомоморфизмы h_i и h'_i сопряжены, то $\widehat{F}(h) = x$.

Пусть последовательность $h = \{h_i\}_{i=1}^\infty \in \text{Hom}_{\widehat{\mathfrak{C}}_1}(g, g)$ задает такой морфизм, что $\widehat{F}(h) = \text{id}_{\widehat{F}(g)}$. Тогда $F(h_i) = F(\varphi_{n_i-1}) \circ \dots \circ F(\varphi_{i+1}) \circ F(\varphi_i)$. Это равенство означает, что для любого $i \geq 1$, существует элемент $g_i \in G_{n_i}$ такой, что $h_i = \text{Ad}(g_i) \circ \varphi_{n_i-1} \circ \dots \circ \varphi_{i+1} \circ \varphi_i$. По замечанию 2 получаем, что $h \in \text{Int}(g)$.

Пусть $h \in \text{Int}(g)$. Из замечания 2 получаем, что существует последовательность $\{g_i \mid g_i \in G_{n_i}\}_{i=1}^\infty$ такая, что

$$h_i = \text{Ad}(g_i) \circ \varphi_{n_i-1} \circ \dots \circ \varphi_{i+1} \circ \varphi_i.$$

Следовательно, $F(h_i) = F(\varphi_{n_i-1}) \circ \dots \circ F(\varphi_{i+1}) \circ F(\varphi_i)$. А значит, $\widehat{F}(h) = \text{id}_{\widehat{F}(g)}$.

Из леммы 2.1 получаем, что гомоморфизм групп

$$\widehat{F}: \text{Aut}_{\widehat{\mathfrak{C}}_1}(g) \rightarrow \text{Aut}_{\widehat{\mathfrak{C}}_2}(\widehat{F}(g))$$

сюръективен и $\text{Ker } \widehat{F} = \text{Int}(g)$.

Следующее утверждение будет часто использоваться в дальнейшем.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.6. Пусть $\mathfrak{C}$ – произвольная категория и $\mathfrak{C}' \subset \mathfrak{C}$ такая ее подкатегория, что для морфизмов категории $\mathfrak{C}'$ выполнено следующее: если $f \in \text{Hom}_{\mathfrak{C}'}(X, Y)$ и $f = g \circ h$, где $h \in \text{Hom}_{\mathfrak{C}}(X, Z)$ и $g \in \text{Hom}_{\mathfrak{C}}(Z, Y)$, то $h \in \text{Hom}_{\mathfrak{C}'}(X, Z)$. Тогда $\text{Aut}_{\widehat{\mathfrak{C}}}(X) = \text{Aut}_{\widehat{\mathfrak{C}}'}(X)$ для любого $X \in \text{Ob } \widehat{\mathfrak{C}}'$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $X = (\{X_i\}_{i=1}^\infty, \{x_i\}_{i=1}^\infty) \in \text{Ob } \widehat{\mathfrak{C}}'$ и

$$\{f_i \mid f_i \in \text{Hom}_{\mathfrak{C}}(X_i, X_{n_i})\}_{i=1}^\infty \in \text{Aut}_{\widehat{\mathfrak{C}}}(X),$$

тогда существует последовательность

$$\{h_i \mid h_i \in \text{Hom}_{\mathfrak{C}}(X_i, X_{m_i})\}_{i=1}^\infty \in \text{Aut}_{\widehat{\mathfrak{C}}}(X)$$

такая, что

$$h_{n_i} \circ f_i = x_{m_{n_i}-1} \circ \dots \circ x_i.$$

Так как $x_{m_{n_i}-1} \circ \dots \circ x_i \in \text{Mor } \widehat{\mathfrak{C}}'$, то $f_i \in \text{Mor } \widehat{\mathfrak{C}}'$.

§ 3. Диагональные алгебры Ли типа A и полугруппа D

Локально простую алгебру Ли g будем называть *алгеброй Ли типа A* , если она является прямым пределом индуктивной системы следующего вида

$$\mathfrak{sl}_{n_1}(\mathbb{C}) \xrightarrow{\varphi_1} \mathfrak{sl}_{n_2}(\mathbb{C}) \xrightarrow{\varphi_2} \mathfrak{sl}_{n_3}(\mathbb{C}) \longrightarrow \cdots \longrightarrow \mathfrak{sl}_{n_i}(\mathbb{C}) \xrightarrow{\varphi_i} \mathfrak{sl}_{n_{i+1}}(\mathbb{C}) \longrightarrow \cdots.$$

Выберем для каждой алгебры Ли $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ представление минимальной размерности, обозначим его через V_n и назовем его *тавтологическим*. Тогда $\dim V_n = n$ и $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C}) = \mathfrak{sl}(V_n)$, т.е. это множество линейных операторов на линейном пространстве V_n с нулевым следом. Будем называть двойственное представление V_n^* *анти-тавтологическим* и одномерное представление $\mathbb{C}$ *тривиальным*.

Если алгебра Ли $\mathfrak{sl}_k(\mathbb{C})$ вкладывается в алгебру Ли $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$, то любое представление алгебры Ли $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ является представлением алгебры Ли $\mathfrak{sl}_k(\mathbb{C})$, в том числе и тавтологическое представление V_n алгебры Ли $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ является некоторым представлением алгебры Ли $\mathfrak{sl}_k(\mathbb{C})$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. Вложение $\varphi: \mathfrak{sl}_k(\mathbb{C}) \rightarrow \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ будем называть *диагональным*, если представление V_n есть сумма тавтологических, антитавтологических и тривиальных представлений алгебры Ли $\mathfrak{sl}_k(\mathbb{C})$.

Ясно, что композиция диагональных вложений является диагональным вложением. То есть можно определить подкатегорию $\mathfrak{D}_1$ в категории конечномерных простых алгебр Ли $\mathfrak{C}_1$.

- а) Объекты подкатегории $\mathfrak{D}_1$ – это алгебры Ли $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$.
- б) Морфизмы подкатегории $\mathfrak{D}_1$ – это диагональные вложения.

Объекты категории $\widehat{\mathfrak{D}}_1$ будем называть *диагональными алгебрами Ли типа A* , т.е. диагональная алгебра Ли g – это локально простая алгебра Ли, являющаяся прямым пределом индуктивной системы следующего вида

$$\mathfrak{sl}_{n_1}(\mathbb{C}) \xrightarrow{\varphi_1} \mathfrak{sl}_{n_2}(\mathbb{C}) \xrightarrow{\varphi_2} \mathfrak{sl}_{n_3}(\mathbb{C}) \longrightarrow \cdots \longrightarrow \mathfrak{sl}_{n_i}(\mathbb{C}) \xrightarrow{\varphi_i} \mathfrak{sl}_{n_{i+1}}(\mathbb{C}) \longrightarrow \cdots,$$

где вложения $\varphi_i: \mathfrak{sl}_{n_i}(\mathbb{C}) \rightarrow \mathfrak{sl}_{n_{i+1}}(\mathbb{C})$ являются диагональными для любого $i \geq 1$.

Для диагональных вложений верен следующий факт [3]. Пусть коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{sl}_k(\mathbb{C}) & \xrightarrow{\varphi} & \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C}) \\ \psi \searrow & & \nearrow \chi \\ & \mathfrak{sl}_m(\mathbb{C}) & \end{array}$$

такова, что вложение φ является диагональным. Тогда вложение ψ также является диагональным. Следовательно, для подкатегории $\mathfrak{D}_1$ выполнено условие утверждения 2.6. Значит, если g – это диагональная алгебра Ли, то

$$\mathrm{Aut}_{\widehat{\mathfrak{C}}_1}(g) = \mathrm{Aut}_{\widehat{\mathfrak{D}}_1}(g).$$

Также определена подкатегория $\mathfrak{D}_2$ в категории $\mathfrak{C}_2$.

- а) Объекты подкатегории $\mathfrak{D}_2$ – это алгебры Ли $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$, где $n \geq 3$.
- б) Морфизмы подкатегории $\mathfrak{D}_2$ – это диагональные вложения с точностью до сопряжения.

Требование $n \geq 3$ объясняется тем, что тавтологическое и антитавтологическое представления алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ изоморфны.

К подкатегории $\mathfrak{D}_2$ можно также применить утверждение 2.6. Следовательно, если $g \in \text{Ob } \widehat{\mathfrak{D}}_1$, то тогда группа внешних автоморфизмов алгебры Ли g изоморфна группе

$$\text{Aut}_{\widehat{\mathfrak{D}}_2}(\widehat{F}(g)).$$

Зафиксируем некоторые обозначения. Если $A_1, A_2, \dots, A_s$ – это числовые матрицы размеров $k_1 \times k_1, k_2 \times k_2, \dots, k_s \times k_s$ соответственно, то через $\text{diag}(A_1, A_2, \dots, A_s)$ обозначим числовую матрицу размера $(k_1 + k_2 + \dots + k_s) \times (k_1 + k_2 + \dots + k_s)$ следующего вида:

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_s \end{pmatrix}.$$

Опишем более формально категорию $\mathfrak{D}_2$. Для этого заметим, что с точностью до сопряжения диагональное вложение $\varphi: \mathfrak{sl}_k(\mathbb{C}) \rightarrow \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$, где $k \geq 3$, задается тройкой неотрицательных целых чисел (a, b, c) , где a, b, c – это, соответственно, кратности тавтологических, антитавтологических и тривиальных подпредставлений алгебры Ли $\mathfrak{sl}_k(\mathbb{C})$ в тавтологическом представлении V_n алгебры Ли $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$.

Если заданы два диагональных вложения $\psi: \mathfrak{sl}_k(\mathbb{C}) \rightarrow \mathfrak{sl}_m(\mathbb{C})$ и $\chi: \mathfrak{sl}_m(\mathbb{C}) \rightarrow \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ так, что вложению ψ соответствует тройка (a, b, c) , а вложению χ соответствует тройка (x, y, z) , то вложению $\chi \circ \psi$ соответствует тройка

$$(ax + by, ay + bx, (x + y)c + z).$$

Это следует из того, что можно выбрать базисы в пространствах V_k, V_m, V_n так, что $\psi(A) = \text{diag}(\underbrace{A, \dots, A}_a, \underbrace{-A^T, \dots, -A^T}_b, \underbrace{0, \dots, 0}_c)$, где $A \in \mathfrak{sl}_k(\mathbb{C})$ и

$$\chi(B) = \text{diag}(\underbrace{B, \dots, B}_x, \underbrace{-B^T, \dots, -B^T}_y, \underbrace{0, \dots, 0}_z), \text{ где } B \in \mathfrak{sl}_m(\mathbb{C}).$$

Тогда число экземпляров матрицы A в матрице $\chi(\psi(A))$, т.е. кратность тавтологического представления V_k в представлении V_n , равно $ax + by$, число матриц $-A^T$, стоящих на диагонали матрицы $\chi(\psi(A))$, равно $ay + bx$, а число нулей на диагонали матрицы $\chi(\psi(A))$ равно $(x + y)c + z$.

Из этого следует, что можно определить полугруппу $\mathbf{D}$. Элементами полугруппы $\mathbf{D}$ являются тройки неотрицательных целых чисел (a, b, c) , где хотя бы одно из чисел a или b не равно нулю. Умножение таких троек задается по формуле

$$(a, b, c) * (x, y, z) = (ax + by, ay + bx, (x + y)c + z).$$

Полугруппа $\mathbf{D}$ действует справа на множестве натуральных чисел больших либо равных трем $\mathbb{N}_{\geq 3}$ следующим образом

$$n * (a, b, c) = n(a + b) + c.$$

Это действие происходит из того соображения, что если диагональному вложению $\varphi: \mathfrak{sl}_k(\mathbb{C}) \rightarrow \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ соответствует тройка $(a, b, c) \in \mathbf{D}$, то тогда $n = k * (a, b, c)$.

Эти соображения позволяют описать категорию $\mathfrak{D}_2$ следующим образом.

- а) Объекты категории $\mathfrak{D}_2$ – это натуральные числа большие либо равные трем.
- б) Морфизмы категории $\mathfrak{D}_2$: если $k, n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$, то $\text{Hom}_{\mathfrak{D}_2}(k, n) = \{d \in \mathbf{D} \mid k * d = n\}$.

Опишем строение полугруппы $\mathbf{D}$. Пусть S – это полугруппа пар (a, b) неотрицательных целых чисел, где хотя бы одно из чисел a или b не равно нулю, и умножение таких пар происходит по формуле

$$(x, y) * (a, b) = (ax + by, ay + bx).$$

Полугруппа $\mathbf{D}$ содержит полугруппу S в качестве подполугруппы таких троек (a, b, c) , что $c = 0$.

Непосредственными вычислениями можно доказать следующее утверждение.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.1. а) *Полугруппа S коммутативна.*

б) *Отображение $\chi: S \rightarrow \mathbb{N}$, $\chi((a, b)) = a + b$, является гомоморфизмом из полугруппы S в полугруппу натуральных чисел $\mathbb{N}$ по умножению.*

в) *Отображение $\kappa: S \rightarrow \mathbb{Z}$, $\kappa((a, b)) = (a - b)$, является гомоморфизмом из полугруппы S в полугруппу $\mathbb{Z}$ целых чисел по умножению.*

Полугруппа $\mathbf{D}$ содержит полугруппу неотрицательных целых чисел по сложению $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ в качестве подполугруппы троек вида $(1, 0, c)$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.2. *Полугруппа $\mathbf{D}$ изоморфна полупрямому произведению полугрупп $S \ltimes \mathbb{Z}_{\geq 0}$ с законом умножения*

$$(g_1, c_1) * (g_2, c_2) = (g_1 * g_2, \chi(g_2)c_1 + c_2).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Это следует из определения полугрупп $\mathbf{D}$ и S .

Представим полугруппу S в виде объединения двух своих подмножеств $S = S_{\infty} \cup S_0$, где S_{∞} – это множество пар (a, b) таких, что $a \neq b$, а S_0 – это множество пар (a, b) таких, что $a = b$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.3. а) *Подмножество S_{∞} является подполугруппой, причем если $g_1, g_2 \in S$ и $g_1 * g_2 \in S_{\infty}$, то $g_1, g_2 \in S_{\infty}$.*

б) *Подмножество S_0 является идеалом в полугруппе S . То есть $g_1 * g_2 \in S_0$ для любых $g_1 \in S$ и $g_2 \in S_0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) Подмножество S_∞ есть множество таких элементов $g \in S$, что $\kappa(g) \neq 0$. Отсюда следует, что если $\kappa(g_1 * g_2) \neq 0$, то $\kappa(g_1) \neq 0$ и $\kappa(g_2) \neq 0$, так как κ — это гомоморфизм.

б) Подмножество S_0 есть множество таких элементов $g \in S$, что $\kappa(g) = 0$. Отсюда следует, что если $g_2 \in S_0$, то $\kappa(g_1 * g_2) = 0$ для любого $g_1 \in S$.

Напомним определение полугруппы с сокращением.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.2. Коммутативную полугруппу P будем называть *сократимой*, если из равенства $x * y = z * y$ следует равенство $x = z$ для любых $x, y, z \in P$.

Следующее утверждение было доказано в работе [4].

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.4. а) *Полугруппа S_∞ сократима.*

б) *Полугруппа S_0 сократима.*

Пусть $\mathbf{D}_\infty$ — это подмножество троек (a, b, c) полугруппы $\mathbf{D}$ таких, что $(a, b) \in S_\infty$. И пусть $\mathbf{D}_0$ — это подмножество троек (a, b, c) полугруппы $\mathbf{D}$ таких, что $(a, b) \in S_0$. Из утверждений 3.2 и 3.3 следует, что $\mathbf{D}_0$ является идеалом в полугруппе $\mathbf{D}$ и $\mathbf{D}_\infty$ является такой подполугруппой в полугруппе $\mathbf{D}$, что если $d_1, d_2 \in \mathbf{D}$ и $d_1 * d_2 \in \mathbf{D}_\infty$, то тогда $d_1, d_2 \in \mathbf{D}_\infty$.

Определим подкатегорию $\mathfrak{D}_\infty$ в категории $\mathfrak{D}_2$.

- а) Объекты категории $\mathfrak{D}_\infty$ такие же как в категории $\mathfrak{D}_2$. То есть это натуральные числа большие либо равные трем.
- б) Морфизмы категории $\mathfrak{D}_\infty$: если $k, n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$, то $\text{Hom}_{\mathfrak{D}_\infty}(k, n) = \{d \in \mathbf{D}_\infty \mid d * k = n\}$.

Определим также подкатегорию $\mathfrak{D}_0$ в категории $\mathfrak{D}_2$.

- а) Объекты: $\text{Ob } \mathfrak{D}_0 = \text{Ob } \mathfrak{D}_2 = \mathbb{N}_{\geq 3}$.
- б) Морфизмы категории $\mathfrak{D}_0$: если $k, n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$ и $k \neq n$, то $\text{Hom}_{\mathfrak{D}_0}(k, n) = \{d \in \mathbf{D}_0 \mid d * k = n\}$. Если $k = n$, то $\text{Hom}_{\mathfrak{D}_0}(k, k)$ — это множество, состоящее из одного тождественного морфизма id_k .

ТЕОРЕМА 3.1. Если $X \in \text{Ob } \widehat{\mathfrak{D}}_2$, то тогда возможны два варианта:

- а) существует $Y \in \widehat{\mathfrak{D}}_\infty$ такой, что

$$\text{Aut}_{\widehat{\mathfrak{D}}_2}(X) = \text{Aut}_{\widehat{\mathfrak{D}}_\infty}(Y);$$

- б) существует $Y \in \widehat{\mathfrak{D}}_0$ такой, что

$$\text{Aut}_{\widehat{\mathfrak{D}}_2}(X) = \text{Aut}_{\widehat{\mathfrak{D}}_0}(Y).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть X — это пара последовательностей

$$(\{n_i \mid n_i \in \mathbb{N}_{\geq 3}\}_{i=1}^{\infty}, \{x_i \mid x_i \in \mathbf{D}, n_i * x_i = n_{i+1}\}_{i=1}^{\infty}).$$

Тогда множество натуральных чисел $\mathbb{N}$ есть объединение своих подмножеств $\mathbb{N}_0$ и $\mathbb{N}_{\infty}$, где

$$\mathbb{N}_0 = \{k \in \mathbb{N} \mid x_k \in \mathbf{D}_0\},$$

$$\mathbb{N}_{\infty} = \{k \in \mathbb{N} \mid x_k \in \mathbf{D}_{\infty}\}.$$

Подмножество $\mathbb{N}_0$ может быть конечным или бесконечным.

а) Предположим, что множество $\mathbb{N}_0$ конечно. Рассмотрим $Y = (\{n_i\}_{i=m+1}^{\infty}, \{x_i\}_{i=m+1}^{\infty})$, где $m = \max_{k \in \mathbb{N}_0} k$. Так как $x_i \in \mathbf{D}_{\infty}$ для любого $i > m$, то мы можем рассматривать Y и как объект категории $\widehat{\mathfrak{D}}_2$, и как объект категории $\widehat{\mathfrak{D}}_{\infty}$.

Ясно, что Y изоморфен объекту X как объект категории $\widehat{\mathfrak{D}}_2$. Следовательно,

$$\text{Aut}_{\widehat{\mathfrak{D}}_2}(X) = \text{Aut}_{\widehat{\mathfrak{D}}_2}(Y).$$

Из утверждений 3.3 и 2.6 следует, что

$$\text{Aut}_{\widehat{\mathfrak{D}}_2}(Y) = \text{Aut}_{\widehat{\mathfrak{D}}_{\infty}}(Y).$$

б) Предположим, что множество $\mathbb{N}_0$ бесконечно. Тогда существует строго возрастающая последовательность натуральных чисел $\{i_k\}_{k=1}^{\infty}$ такая, что $x_{i_k} \in \mathbf{D}_0$. Рассмотрим $Y = (\{l_k \mid l_k = n_{i_k}\}_{k=1}^{\infty}, \{y_k \mid y_k = x_{i_k i_{k+1}}\}_{k=1}^{\infty})$. Так как $\mathbf{D}_0$ является идеалом полугруппы $\mathbf{D}$, то $x_{i_k i_{k+1}} \in \mathbf{D}_0$. Следовательно, можно рассматривать Y как объект категории $\widehat{\mathfrak{D}}_2$ или как объект категории $\widehat{\mathfrak{D}}_0$.

Ясно, что объект X изоморфен объекту Y в категории $\widehat{\mathfrak{D}}_2$. Следовательно,

$$\text{Aut}_{\widehat{\mathfrak{D}}_2}(X) = \text{Aut}_{\widehat{\mathfrak{D}}_2}(Y).$$

Для завершения доказательства надо показать, что

$$\text{Aut}_{\widehat{\mathfrak{D}}_2}(Y) = \text{Aut}_{\widehat{\mathfrak{D}}_0}(Y).$$

В самом деле, если последовательность

$$f = \{f_i \mid f_i \in \text{Hom}_{\mathfrak{D}_2}(l_i, l_{r_i})\}_{i=1}^{\infty}$$

задает автоморфизм объекта Y в категории $\widehat{\mathfrak{D}}_2$, то тогда последовательность

$$h = \{h_i \mid h_i = y_{r_i} \circ f_i \in \text{Hom}_{\mathfrak{D}_2}(l_i, l_{r_{i+1}})\}_{i=1}^{\infty}$$

задает тот же самый автоморфизм объекта Y в категории $\widehat{\mathfrak{D}}_2$, но, на этот раз, $h_i \in \mathbf{D}_0$ для любого $i \geq 1$, так как $\mathbf{D}_0$ — это идеал в полугруппе $\mathbf{D}$.

§ 4. Группы внешних автоморфизмов диагональных алгебр Ли

Пусть P – это коммутативная сократимая полугруппа. Напомним определение группы частных $Q(P)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1. Пусть $P \times P$ – это декартов квадрат полугруппы P . Пусть $\sim$ – это отношение эквивалентности на $P \times P$ такое, что $(a, s) \sim (a', s')$ тогда и только тогда, когда $a * s' = a' * s$. Положим $Q(P) = P \times P / (\sim)$.

Элемент $(a, s) \in Q(P)$ обычно обозначается через a/s .

ПРИМЕР. Пусть $\mathbb{N}$ – это полугруппа натуральных чисел по умножению. Тогда $Q(\mathbb{N}) = \mathbb{Q}_{>0}$, где $\mathbb{Q}_{>0}$ – это группа положительных рациональных чисел по умножению.

Пусть P – это произвольная полугруппа. Определим категорию $\mathfrak{D}_P$.

- а) Объекты: категория $\mathfrak{D}_P$ содержит только один объект. Обозначим этот объект точкой $\cdot$.
- б) Морфизмы: $\text{Hom}_{\mathfrak{D}_P}(\cdot, \cdot) = P_e$, где P_e – это полугруппа P , если в полугруппе P существует единица, или $P_e = P \cup \{e\}$, где e – это присоединенная единица, в том случае, если в полугруппе P нет единицы.

В соответствии с конструкцией из § 2, можно рассмотреть категорию $\widehat{\mathfrak{D}}_P$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 4.1. Пусть P – это коммутативная сократимая полугруппа. Тогда полугруппа $\text{Hom}_{\widehat{\mathfrak{D}}_P}(X, X)$ естественно вкладывается в группу $Q(P)$ для любого объекта $X \in \text{Ob } \widehat{\mathfrak{D}}_P$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Опишем категорию $\widehat{\mathfrak{D}}_P$ в более удобном виде. Так как в категории $\mathfrak{D}_P$ всего один объект, то можно считать, что объектами категории $\widehat{\mathfrak{D}}_P$ являются последовательности $\{p_i \mid p_i \in P\}_{i=1}^\infty$. Морфизмами из объекта $\{p_i \mid p_i \in P\}_{i=1}^\infty$ в объект $\{p'_i \mid p'_i \in P\}_{i=1}^\infty$ являются пары последовательностей $(\{f_i \mid f_i \in P\}_{i=1}^\infty, \{k_i \mid k_i \in \mathbb{N}\}_{i=1}^\infty)$ такие, что последовательность $\{k_i\}_{i=1}^\infty$ является возрастающей последовательностью натуральных чисел и $p'_{k_i k_{i+1}} * f_i = f_{i+1} * p_i$ для любого $i \geq 1$. (Напомним, что если $s \geq t$, то $p'_{st} = p'_{s-1} * p'_{s-2} * \dots * p'_t$.)

Определим отображение

$$\rho: \text{Hom}_{\widehat{\mathfrak{D}}_P}(X, X) \rightarrow Q(P),$$

$$\rho(\{f_i\}_{i=1}^\infty, \{k_i\}_{i=1}^\infty) = \frac{f_1}{p_1 k_1} = \frac{f_1}{p_1 * p_2 * \dots * p_{k_1-1}},$$

где $X = \{p_i \mid p_i \in P\}_{i=1}^\infty$. Предположим, что два морфизма

$$f = (\{f_i\}_{i=1}^\infty, \{k_i\}_{i=1}^\infty)$$

и

$$f' = (\{f'_i\}_{i=1}^\infty, \{k'_i\}_{i=1}^\infty)$$

совпадают как морфизмы категории $\widehat{\mathfrak{D}}_P$. В частности, это означает, что существует число $l \geq k_1, k'_1$ такое, что

$$f_1 * p_{k_1 l} = f'_1 * p_{k'_1 l}.$$

Умножив это равенство на $p_{1k_1} * p_{1k'_1}$, мы получим равенство

$$f_1 * p_{1k'_1} * p_{1l} = f'_1 * p_{1k_1} * p_{1l}.$$

Сокращая полученное равенство на p_{1l} , получаем равенство

$$f_1 * p_{1k'_1} = f'_1 * p_{1k_1},$$

которое означает, что

$$\frac{f_1}{p_{1k_1}} = \frac{f'_1}{p_{1k'_1}}.$$

Следовательно, можно определить отображение

$$\widehat{\rho}: \text{Hom}_{\widehat{\mathfrak{D}}_P}(X, X) \rightarrow Q(P).$$

Докажем инъективность отображения $\widehat{\rho}$. Пусть пары последовательностей $f = (\{f_i\}_{i=1}^\infty, \{k_i\}_{i=1}^\infty)$, $f' = (\{f'_i\}_{i=1}^\infty, \{k'_i\}_{i=1}^\infty)$ задают такие морфизмы в категории $\widehat{\mathfrak{D}}_P$, что $\widehat{\rho}(f) = \widehat{\rho}(f')$. Тогда $f_1/p_{1k_1} = f'_1/p_{1k'_1}$ или, другими словами,

$$f_1 * p_{1k'_1} = f'_1 * p_{1k_1}.$$

Из того, что f, f' являются морфизмами, вытекают равенства

$$p_{k_1 k_i} * f_1 = f_i * p_{1i},$$

$$p_{k'_1 k'_i} * f'_1 = f'_i * p_{1i}$$

для любого $i \geq 1$.

Выберем число l такое, что $l \geq k_i, k'_i$. Тогда

$$p_{1l} = p_{1k_1} * p_{k_1 k_i} * p_{k_i l} = p_{1k'_1} * p_{k'_1 k'_i} * p_{k'_i l}.$$

Следовательно, из равенства

$$p_{1l} * f_1 * p_{1k'_1} = p_{1l} * f'_1 * p_{1k_1}$$

вытекает равенство

$$f_i * p_{1i} * p_{1k_1} * p_{k_i l} * p_{1k'_1} = f'_i * p_{1i} * p_{1k'_1} * p_{k'_i l} * p_{1k_1}.$$

Сокращая последнее равенство на $p_{1i} * p_{1k_1} * p_{1k'_1}$, получаем равенство

$$f_i * p_{k_i l} = f'_i * p_{k'_i l}$$

для любого $i \geq 1$. А это и означает, что последовательности f и f' задают один и тот же морфизм в категории $\widehat{\mathfrak{D}}_P$.

Докажем, что $\widehat{\rho}$ является гомоморфизмом полугрупп.

ЛЕММА 4.1. Если последовательность $f = \{f_i \mid f_i \in P\}_{i=1}^\infty$ задает морфизм объекта $\{p_i \mid p_i \in P\}_{i=1}^\infty$ в категории $\widehat{\mathfrak{D}}_P$, то

$$\frac{f_1}{p_{1k_1}} = \frac{f_m}{p_{mk_m}}$$

для любого $m \geq 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку f является морфизмом, то выполнено равенство

$$p_{k_1k_m} * f_1 = f_m * p_{1m}.$$

Умножив это равенство на p_{mk_m} , получим равенство

$$p_{k_1k_m} * p_{mk_m} * f_1 = f_m * p_{1k_m}.$$

Так как $p_{1k_m} = p_{1k_1} * p_{k_1k_m}$, то, сократив последнее равенство на $p_{k_1k_m}$, получим

$$p_{mk_m} * f_1 = f_m * p_{1k_1}.$$

То есть

$$\frac{f_1}{p_{1k_1}} = \frac{f_m}{p_{mk_m}}.$$

Пусть пары последовательностей

$$f = (\{f_i\}_{i=1}^\infty, \{k_i\}_{i=1}^\infty), \quad f' = (\{f'_i\}_{i=1}^\infty, \{k'_i\}_{i=1}^\infty)$$

задают морфизмы объекта $\{p_i \mid p_i \in P\}_{i=1}^\infty$ в категории $\widehat{\mathfrak{D}}_P$. Тогда композиция $f' \circ f$ задается парой последовательностей $(\{f'_{k'_i} * f_i\}_{i=1}^\infty, \{k'_{k'_i}\}_{i=1}^\infty)$. Следовательно,

$$\widehat{\rho}(f' \circ f) = \frac{f'_{k'_1} * f_1}{p_{1k'_1}} = \frac{f_{k_1}}{p_{k_1k'_1}} * \frac{f_1}{p_{1k_1}} = \frac{f'_{k_1}}{p_{k_1k'_1}} * \widehat{\rho}(f) = \widehat{\rho}(f') * \widehat{\rho}(f).$$

Последнее равенство выполнено в силу леммы 4.1.

В предыдущем параграфе были определены полугруппы S_∞ , S_0 и категории $\widehat{\mathfrak{D}}_\infty$, $\widehat{\mathfrak{D}}_0$. Определим функтор $C_\infty: \widehat{\mathfrak{D}}_\infty \rightarrow \widehat{\mathfrak{D}}_{S_\infty}$.

- а) На объектах: если $X \in \text{Ob } \widehat{\mathfrak{D}}_\infty$, то тогда X есть пара последовательностей $(\{n_i\}_{i=1}^\infty, \{d_i\}_{i=1}^\infty)$, где $d_i \in \mathbf{D}_\infty$. Из утверждения 3.2 следует, что d_i есть пара (s_i, c_i) , где $s_i \in S_\infty$. Тогда положим $C_\infty(X) = \{s_i\}_{i=1}^\infty \in \text{Ob } \widehat{\mathfrak{D}}_{S_\infty}$.
- б) На морфизмах: пусть заданы объекты категории $\widehat{\mathfrak{D}}_\infty$

$$X = (\{n_i\}_{i=1}^\infty, \{d_i\}_{i=1}^\infty), \\ X' = (\{n'_i\}_{i=1}^\infty, \{d'_i\}_{i=1}^\infty).$$

Пусть задан морфизм из объекта X в объект X'

$$f = \{f_i \mid f_i \in \text{Hom}_{\widehat{\mathfrak{D}}_\infty}(n_i, n'_{k_i}), f_i = (r_i, t_i) \in \mathbf{D}_\infty\}_{i=1}^\infty \in \text{Hom}_{\widehat{\mathfrak{D}}_\infty}(X, X').$$

Тогда положим $C_\infty(f) = (\{r_i\}_{i=1}^\infty, \{k_i\}_{i=1}^\infty) \in \text{Hom}_{\widehat{\mathfrak{D}}_{S_\infty}}(C_\infty(X), C_\infty(X'))$.

Из утверждения 3.2 следует, что C_∞ является функтором.

Совершенно аналогично можно определить функтор $C_0: \widehat{\mathfrak{D}}_0 \rightarrow \widehat{\mathfrak{D}}_{S_0}$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 4.2. а) Функтор C_∞ является строгим. Это означает, что следующее отображение

$$C_\infty: \text{Hom}_{\widehat{\mathfrak{D}}_\infty}(X, X') \rightarrow \text{Hom}_{\widehat{\mathfrak{D}}_{S_\infty}}(C_\infty(X), C_\infty(X'))$$

инъективно для любых $X, X' \in \text{Ob } \mathfrak{D}_\infty$.

б) Функтор C_0 является строгим.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся следующей леммой.

ЛЕММА 4.2. Пусть заданы элементы $\mathbf{D}$ $d_1 = (s_1, c_1), d_2 = (s_2, c_2) \in \mathbf{D} = S \ltimes \mathbb{Z}$ и число $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$ такие, что $s_1 = s_2$ и $n * d_1 = n * d_2$. Тогда $c_1 = c_2$, т.е. $d_1 = d_2$.

Зафиксируем объекты X и X' в категории $\mathfrak{D}_\infty$

$$\begin{aligned} X &= (\{n_i\}_{i=1}^\infty, \{d_i \mid d_i \in D_\infty, n_{i+1} = n_i * d_i\}_{i=1}^\infty), \\ X' &= (\{n'_i\}_{i=1}^\infty, \{d'_i \mid d_i \in D_\infty, n'_{i+1} = n'_i * d'_i\}_{i=1}^\infty). \end{aligned}$$

Пусть морфизмы $f, f' \in \text{Hom}_{\widehat{\mathfrak{D}}_\infty}(X, X')$ задаются последовательностями

$$\begin{aligned} \{f_i \mid f_i = (r_i, b_i) \in D_\infty = S_\infty \ltimes \mathbb{Z}; n_{k_i} = n_i * f_i\}_{i=1}^\infty, \\ \{f'_i \mid f'_i = (r'_i, b'_i) \in D_\infty = S_\infty \ltimes \mathbb{Z}; n_{k'_i} = n_i * f'_i\}_{i=1}^\infty. \end{aligned}$$

Предположим, что $C_\infty(f) = C_\infty(f')$. Тогда это означает, что для любого $i \geq 1$ существует $l_i \geq k_i, k'_i$ такое, что морфизмы f и f' задаются последовательностями

$$\begin{aligned} \{g_i \mid g_i = (s_i, c_i) \in D_\infty = S_\infty \ltimes \mathbb{Z}; n_{l_i} = n_i * g_i\}_{i=1}^\infty, \\ \{g'_i \mid g'_i = (s_i, c'_i) \in D_\infty = S_\infty \ltimes \mathbb{Z}; n_{l_i} = n_i * g'_i\}_{i=1}^\infty. \end{aligned}$$

Из леммы 4.2 следует, что $g_i = g'_i$ для любого $i \geq 1$. То есть $f = f'$.

Строгость функтора C_0 доказывается аналогично.

УТВЕРЖДЕНИЕ 4.3. Имеем: а) $Q(S_\infty) = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}^\infty$, б) $Q(S_0) = \mathbb{Z}^\infty$.

Здесь $\mathbb{Z}_2$ – это группа второго порядка, а $\mathbb{Z}^\infty$ – это свободная абелева группа бесконечного ранга.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) Напомним, что определены два гомоморфизма полугрупп:

$$\begin{aligned} \chi: S_\infty &\rightarrow \mathbb{N}; & \chi((a, b)) &= a + b, \\ \kappa: S_\infty &\rightarrow \mathbb{Z}_{\neq 0}; & \kappa((a, b)) &= (a - b), \end{aligned}$$

где $\mathbb{Z}_{\neq 0}$ – это полугруппа ненулевых целых чисел по умножению.

Ясно, что следующий гомоморфизм полугрупп

$$S_\infty \xrightarrow{(\chi, \kappa)} \mathbb{N} \times \mathbb{Z}_{\neq 0}$$

является инъективным. Следовательно, существует инъективный гомоморфизм групп

$$Q(S_\infty) \rightarrow Q(\mathbb{N}) \times Q(\mathbb{Z}_{\neq 0}) = \mathbb{Q}_{>0} \times \mathbb{Q}^*,$$

где $\mathbb{Q}^*$ – это группа обратимых элементов поля $\mathbb{Q}$.

Группа $\mathbb{Q}_{>0}$ изоморфна группе $\mathbb{Z}^\infty$. В качестве свободных образующих можно взять, например, простые натуральные числа. Группа $\mathbb{Q}^*$ изоморфна группе $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}^\infty$. Следовательно, группа $\mathbb{Q}_{>0} \times \mathbb{Q}^*$ есть $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}^\infty$.

Полугруппа S_∞ содержит элемент $s = (0, 1)$ такой, что $s^2 = e$, где e – это единица полугруппы S_∞ . Следовательно, $Q(S_\infty) = \mathbb{Z}_2 \times F$, где F – это подгруппа свободной абелевой группы $\mathbb{Z}^\infty$, а значит, F – это не более чем счетная свободная абелева группа. Полугруппа S_∞ содержит полугруппу $\mathbb{N}$ в качестве подполугруппы пар (a, b) таких, что $b = 0$. Следовательно, $F = \mathbb{Z}^\infty$, так как $Q(\mathbb{N}) = \mathbb{Z}^\infty$.

б) Полугруппа S_0 изоморфна полугруппе $\mathbb{N}_{\text{even}}$, где $\mathbb{N}_{\text{even}}$ – это полугруппа четных натуральных чисел по умножению. Изоморфизм устанавливается гомоморфизмом κ . Следовательно,

$$Q(S_0) = Q(\mathbb{N}_{\text{even}}) = Q(\mathbb{N}) = \mathbb{Q}_{>0} = \mathbb{Z}^\infty.$$

Комбинируя теорему 3.1 и утверждения 4.1–4.3, получаем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть g – это диагональная алгебра Ли типа A . Тогда группа внешних автоморфизмов алгебры Ли g изоморфна группе $\mathbb{Z}_2 \times A(g)$ или группе $A(g)$, где $A(g)$ – это не более чем счетная свободная абелева группа.

Заметим, что из этой теоремы не следует, что группа $A(g)$ может быть нетривиальной. Для того чтобы привести примеры, показывающие, что группа $A(g)$ может быть произвольного ранга, определим полные подкатегории $\widehat{\mathcal{D}}'_\infty$, $\widehat{\mathcal{D}}'_0$ в категориях $\widehat{\mathcal{D}}_\infty$, $\widehat{\mathcal{D}}_0$ соответственно.

а) Объекты категории $\widehat{\mathcal{D}}'_\infty$ – это такие пары последовательностей

$$(\{n_i \mid n_i \in \mathbb{N}\}_{i=1}^\infty, \{d_i \mid d_i = (s_i, c_i) \in \mathbf{D}_\infty = S_\infty \times \mathbb{Z}_{\geq 0}; n_{i+1} = n_i * d_i\}_{i=1}^\infty),$$

что ряд

$$\sum_{i=1}^\infty \frac{c_i}{\chi(s_1)\chi(s_2)\cdots\chi(s_i)}$$

расходится.

б) Морфизмы в категории $\widehat{\mathcal{D}}'_\infty$ такие же, как и в категории $\widehat{\mathcal{D}}_\infty$.

Категория $\widehat{\mathcal{D}}'_0$ определяется аналогично.

УТВЕРЖДЕНИЕ 4.4. а) Ограничение функтора C_∞ на подкатегорию $\widehat{\mathcal{D}}'_\infty$ устанавливает эквивалентность категорий $\widehat{\mathcal{D}}'_\infty$ и $\widehat{\mathcal{D}}_{S_\infty}$.

б) Ограничение функтора C_0 на подкатегорию $\widehat{\mathcal{D}}'_0$ устанавливает эквивалентность категорий $\widehat{\mathcal{D}}'_0$ и $\widehat{\mathcal{D}}_{S_0}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем пункт а).

В силу утверждения 4.2 достаточно показать, что отображение

$$C_\infty: \text{Hom}_{\widehat{\mathfrak{D}}'_\infty}(X', X) \rightarrow \text{Hom}_{\widehat{\mathfrak{D}}_{S_\infty}}(C_\infty(X'), C_\infty(X))$$

сюръективно для любых $X, X' \in \text{Ob } \widehat{\mathfrak{D}}'_\infty$.

ЛЕММА 4.3. Пусть заданы числа $m, n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$ и последовательность $\{d_i \mid d_i = (s_i, c_i) \in D = S \times \mathbb{Z}_{\geq 0}\}_{i=1}^\infty$ такая, что ряд

$$\sum_{i=1}^\infty \frac{c_i}{\chi(s_1)\chi(s_2)\cdots\chi(s_i)}$$

расходится. Тогда существует $k \in \mathbb{N}$ такое, что $\forall l \geq k$

$$m\chi(s_1)\chi(s_2)\cdots\chi(s_l) \leq n * d_1 * d_2 * \cdots * d_l.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению действия полугруппы $\mathbf{D}$ на множестве $\mathbb{N}_{\geq 3}$ получаем

$$\begin{aligned} n * d_1 * d_2 * \cdots * d_j &= n\chi(s_1)\chi(s_2)\chi(s_3)\cdots\chi(s_j) + c_1\chi(s_2)\chi(s_3)\cdots\chi(s_j) \\ &\quad + c_2\chi(s_3)\cdots\chi(s_j) + \cdots + c_{j-1}\chi(s_j) + c_j. \end{aligned}$$

Требуется сравнить это число с числом $m\chi(s_1)\chi(s_2)\cdots\chi(s_j)$. Разделим оба числа на $\chi(s_1)\chi(s_2)\chi(s_3)\cdots\chi(s_j)$ и вычтем одно из другого. Получим

$$n - m + \sum_{i=1}^j \frac{c_i}{\chi(s_1)\chi(s_2)\cdots\chi(s_i)}.$$

Так как ряд из формулировки леммы 4.3 расходится, то существует $k \in \mathbb{N}$ такое, что $\forall l \geq k$

$$n - m + \sum_{i=1}^l \frac{c_i}{\chi(s_1)\chi(s_2)\cdots\chi(s_i)} > 0.$$

Пусть объект $X \in \widehat{\mathfrak{D}}'_\infty$ есть пара последовательностей

$$X = (\{n_i\}_{i=1}^\infty, \{d_i \mid d_i = (s_i, c_i) \in \mathbf{D}_\infty = S_\infty \ltimes \mathbb{Z}_{\geq 0}\}_{i=1}^\infty).$$

Пусть задан морфизм

$$u = (\{t_i \mid t_i \in S_\infty\}_{i=1}^\infty, \{k_i \mid k_i \in \mathbb{N}\}_{i=1}^\infty) \in \text{Hom}_{\widehat{\mathfrak{D}}_{S_\infty}}(C_\infty(X'), C_\infty(X)).$$

Так как ряд

$$\sum_{j=i}^{\infty} \frac{c_j}{\chi(s_1)\chi(s_2)\cdots\chi(s_i)}$$

расходится для любого $i \geq 1$, то тогда по лемме 4.3 существует $l_i > k_i$ такое, что

$$n_i * t_i * s_{k_i+1} * \cdots * s_{l_i} \leq n_{k_i} * d_{k_i+1} * \cdots * d_{l_i}.$$

Следовательно, последовательность

$$f = \{f_i \mid f_i = (t_i * s_{k_i+1} * \cdots * s_{l_i}, n_{k_i} * d_{k_i+1} * \cdots * d_{l_i} - n_i * t_i * s_{k_i+1} * \cdots * s_{l_i}) \in \text{Hom}_{\mathfrak{D}_{\infty}}(n_i, n_{l_i+1})\}_{i=1}^{\infty}$$

задает морфизм в категории $\widehat{\mathfrak{D}}_{\infty}$ такой, что $C_{\infty}(f) = u$.

Пункт б) доказывается аналогично.

УТВЕРЖДЕНИЕ 4.5. Пусть P – это счетная коммутативная сократимая полугруппа. Тогда в категории $\widehat{\mathfrak{D}}_P$ существует объект X такой, что

$$\text{Hom}_{\widehat{\mathfrak{D}}_P}(X, X) = Q(P).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть объект X задается последовательностью $\{p_i \mid p_i \in P\}_{i=1}^{\infty}$ такой, что для любого элемента $p \in P$ существует бесконечное число индексов $i \in \mathbb{N}$ таких, что $p_i = p$.

Из утверждения 4.1 следует, что существует естественное вложение $\widehat{\rho}$ полугруппы $\text{Hom}_{\widehat{\mathfrak{D}}_P}(X, X)$ в группу $Q(P)$. Докажем, что это вложение является сюръекцией.

Пусть $a/b \in Q(P)$. По определению последовательности $\{p_i \mid p_i \in P\}_{i=1}^{\infty}$ существует такое $k_1 \in \mathbb{N}$, что $p_{k_1-1} = b$. Тогда положим $f_1 = p_1 * p_2 * \cdots * p_{k_1-2} * a$. Опять по определению последовательности $\{p_i \mid p_i \in P\}_{i=1}^{\infty}$ существует такое $k_2 > k_1$, что $p_{k_2-1} = p_1$. Тогда положим $f_2 = p_1 * p_2 * p_3 * \cdots * p_{k_1-2} * a * p_{k_1} * \cdots * p_{k_2-2}$. Опять существует такое $k_3 > k_2$, что $p_{k_3-1} = p_2$. Тогда положим

$$f_3 = p_1 * p_2 * p_3 * \cdots * p_{k_1-2} * a * p_{k_1} * \cdots * p_{k_2-2} * p_{k_2} * \cdots * p_{k_3-2}.$$

Продолжая индуктивно, мы построим пару последовательностей

$$f = (\{f_i \mid f_i \in P\}_{i=1}^{\infty}, \{k_i \mid k_i \in \mathbb{N}\}_{i=1}^{\infty}),$$

которая задает морфизм объекта X в категории $\widehat{\mathfrak{D}}_P$ и $\widehat{\rho}(f) = a/b$.

Из этого утверждения и утверждения 4.3 сразу следует, что существуют диагональные алгебры Ли, группа внешних автоморфизмов которых есть $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}^{\infty}$ или $\mathbb{Z}^{\infty}$.

Для построения дальнейших примеров воспользуемся еще раз утверждением 2.6. Выделим в полугруппе S_∞ подполугруппу пар (a, b) таких, что $ab = 0$, и обозначим ее через R . Ясно, что подполугруппа R обладает следующим свойством: если $r_1, r_2 \in P$ и $r_1 * r_2 \in R$, то $r_1, r_2 \in R$. Следовательно, если $X = \{r_i \mid r_i \in R \subset S_\infty\}_{i=1}^\infty$, то $\text{Aut}_{\widehat{\mathfrak{D}}_{S_\infty}}(X) = \text{Aut}_{\widehat{\mathfrak{D}}_R}(X)$.

Полугруппа R содержит полугруппу натуральных чисел $\mathbb{N}$ по умножению в качестве подполугруппы N пар вида $(a, 0)$, а также и группу $\mathbb{Z}_2$ в качестве подмножества пар $\{(1, 0), (0, 1)\}$. Ясно, что полугруппа R изоморфна прямому произведению $\mathbb{Z}_2 \times N$. Отсюда вытекает, что если $X = \{r_i \mid r_i \in N \subset R\}_{i=1}^\infty$, то $\text{Aut}_{\widehat{\mathfrak{D}}_R}(X) = \mathbb{Z}_2 \times \text{Aut}_{\widehat{\mathfrak{D}}_N}(X)$.

Полугруппа N изоморфна полугруппе натуральных чисел $\mathbb{N}$ по умножению. Зафиксируем простые натуральные числа $p_1, \dots, p_k$ в количестве k штук. Обозначим через $N(p_1, \dots, p_k)$ полугруппу натуральных чисел n таких, что $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$. Ясно, что если $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ и $n_1 n_2 \in N(p_1, \dots, p_k)$, то $n_1, n_2 \in N(p_1, \dots, p_k)$. Следовательно, опять применяя утверждение 2.6, получаем, что если $X = \{n_i \mid n_i \in N(p_1, \dots, p_k) \subset \mathbb{N}\}_{i=1}^\infty$, то $\text{Aut}_{\widehat{\mathfrak{D}}_N}(X) = \text{Aut}_{\widehat{\mathfrak{D}}_{N(p_1, \dots, p_k)}}(X)$.

Так как $Q(N(p_1, \dots, p_k))$ есть $\mathbb{Z}^k$, то из этого рассуждения и утверждения 4.5 следует, что существуют диагональные алгебры Ли, у которых группа внешних автоморфизмов есть $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}^k$, где k любое.

Напомним, что полугруппа S_0 изоморфна полугруппе $\mathbb{N}_{\text{even}}$ четных натуральных чисел. Опять зафиксируем простые натуральные числа $p_1, \dots, p_k$ в количестве k штук и определим полугруппу $S_0(p_1, \dots, p_k)$ четных натуральных чисел n таких, что $n = 2^{\alpha_0} p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$. Так как $Q(S_0(p_1, \dots, p_k)) = \mathbb{Z}^{k+1}$, то точно так же показывается, что существуют диагональные алгебры Ли, у которых группа внешних автоморфизмов есть $\mathbb{Z}^k$, где $k \geq 1$.

Для полноты картины приведем пример, показывающий, что существует диагональная алгебра Ли, у которой группа внешних автоморфизмов тривиальна. Для этого занумеруем простые нечетные числа, например, в порядке возрастания. И определим объект $X = \{2p_i\}_{i=1}^\infty$ категории $\widehat{\mathfrak{D}}_{S_0}$. Пусть пара $f = (\{f_i\}_{i=1}^\infty, \{k_i\}_{i=1}^\infty)$ задает морфизм объекта X . Предположим, что $k_1 > 1$, тогда из того, что f — морфизм, следуют равенства

$$2^{k_i - k_1 - 1} p_{k_1} \cdots p_{k_i - 1} f_1 = f_i 2^{i-1} p_1 \cdots p_{i-1}$$

для любого $i \geq 2$. Из этих равенств вытекает, что число f_1 должно делиться на p_{i-1} для любого $i \geq 2$. Следовательно, $k_1 = 1$. Рассуждая аналогично, получаем, что $k_i = i$ для любого $i \geq 1$. Из полученного в соответствии с определением категории $\widehat{\mathfrak{D}}_{S_0}$ легко выводится, что

$$\text{Aut } \widehat{\mathfrak{D}}_{S_0}(X) = \langle e \rangle.$$

В заключение мне бы хотелось поблагодарить моего научного руководителя Ю. А. Бахтурина, по настоятельной просьбе которого была написана эта статья, за проявленный интерес к работе.

Список литературы

1. *Базтурин Ю. А., Штраде Г.* Локально конечномерные простые алгебры Ли // Матем. сб. 1994. Т. 185. № 2. С. 3–32.
2. *Винберг Э. Б., Омицик А. Л.* Семинар по группам Ли и алгебраическим группам. М.: Наука, 1988.
3. *Baranov A. A.* Diagonal local finite Lie algebras // Preprint. Inst. Math. Acad. Sci. Belarus. V. 3 (515), 1996.
4. *Yanson I. A., Zhdanovich D. V.* The set of the direct limits of Lie algebras of the type A // Communications in algebra. 1996. V. 24. № 23. P. 1125–1156.
5. *Гельфанд С. И., Манин Ю. И.* Методы гомологической алгебры. М.: Наука, 1988.
6. *Понтрягин Л. С.* Непрерывные группы. М.: Наука, 1984.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Поступила в редакцию
29.11.1996