Общероссийский математический портал

М. И. Кузнецов, Максимальные торы общей алгебры Ли картановского типа, *Матем. сб.*, 1997, том 188, номер 9, 55–82

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm257>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.187.69

26 апреля 2023 г., 16:19:00

УДК 512.554.31

М. И. Кузнецов

Максимальные торы общей алгебры Ли картановского типа

В работе дается описание всех максимальных торов в p -замыкании общей алгебры Ли картановского типа $W(\mathcal{F})$ над алгебраически замкнутым полем характеристики $p > 0$. В терминах определяющей системы функций максимального тора находятся основные характеристики торов (размерность, алгебра инвариантов, весовые функции, корневые подпространства, централизатор максимального тора), получены критерии стандартности и оптимальности максимального тора. Установлена связь между максимальными торами в p -замыкании и подалгебрами Картана в $W(\mathcal{F})$.

Библиография: 21 название.

Подалгебры Картана H и корневые разложения относительно H составляют основной инструмент исследования алгебр Ли в конечномерном случае. Как известно, если основное поле F алгебраически замкнуто и имеет характеристику 0, то все подалгебры Картана в алгебре Ли L сопряжены относительно группы автоморфизмов алгебры L . В случае $\text{char } F = p > 0$ это, вообще говоря, не так. Более того, подалгебры Картана в L могут иметь различные размерности. В теории p -алгебр Ли особую роль играют p -подалгебры, на которых p -отображение невырождено. Такие p -подалгебры называются торами. Они абелевы и имеют базис, состоящий из тороидальных элементов, т.е. таких элементов t_i , что $t_i^p = t_i$. В p -алгебре Ли подалгебры Картана находятся во взаимно однозначном соответствии с максимальными торами: подалгебры Картана являются централизаторами максимальных торов [1].

Максимальные торы в p -алгебрах Ли картановского типа были найдены Демущкиным [2], [3]. Теоремы Демущкина о классах сопряженности максимальных торов играют важную роль в классификации Блока–Вильсона простых p -алгебр Ли ($p > 7$) [4]. В 1987 г. Х. Штраде ввел понятие абсолютного торального ранга алгебры Ли и в дальнейших исследованиях по классификации простых конечномерных модулярных алгебр Ли показал особую важность максимальных торов в p -замыкании $\bar{L}$ алгебры Ли L [5]–[8]. Рассмотрение максимальных торов в $\bar{L}$ вместо подалгебр Картана в L позволило перенести на общий случай многие результаты, полученные прежде для простых p -алгебр Ли и, в итоге, привело к классификации простых конечномерных алгебр Ли для $p > 7$ [9].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант №96-01-01756).

Максимальные торы бывают различных типов. Особый интерес для классификации простых алгебр Ли представляют максимальные торы T такие, что $C_L(T)$ действует триангулируемо на L (стандартные торы). Для построения длинных фильтров в L применяются оптимальные торы. Напомним [4], что корень α стандартного тора T называется *собственным*, если для некоторого i , $1 \leq i \leq p-1$, $\alpha([L_{i\alpha}, L_{-i\alpha}]) = 0$. Тор T в $\bar{L}$ называется *оптимальным*, если T имеет максимальную размерность среди всех торов и число его собственных корней максимально.

К изучению максимальных торов в p -замыканиях алгебр Ли свелась задача описания простых алгебр Ли, допускающих невырожденное дифференцирование, возникшая в связи с теорией p -групп и про- p -групп конечного кокласса, [10], [11]. Здесь важную роль играют максимальные торы в $\bar{L}$, имеющие нулевое пересечение с максимальной инвариантной подалгеброй L_0 (максимальные торы общего положения).

Наиболее полная информация о строениях торов и подалгебр Картана имеется для алгебры Цассенхауза $W(1 : m)$ (см. [12]). В [7] получено описание оптимальных торов для $W(1 : n)$. В работе [13] Ри показал, что в p -замыкании общей алгебры Ли картановского типа $W(n : \underline{m})$ имеются максимальные торы различной размерности, $n \leq \dim T \leq |\underline{m}|$. В [14] метод Демушкина применен для нахождения характеристик максимальных торов алгебр Ли картановского типа. Этот метод основан на изучении орбит тороидальных элементов относительно группы автоморфизмов алгебры и исследовании централизатора тороидального элемента. Максимальные торы общего положения для общей алгебры Ли картановского типа описаны в [10], [11].

В настоящей работе дано описание и построение всех максимальных торов в p -замыкании $\bar{L}$ общей алгебры Ли $L = W(\mathcal{F})$. В п. 3.1 для максимального тора T вводится определяющая система функций $S = \{f_1, \dots, f_k, g_{k+1}, \dots, g_n\}$, состоящая из элементов $f_i, g_j \in \mathcal{O}(\mathcal{F})$ таких, что $f_1, \dots, f_k$ — максимальная линейно независимая по $\text{mod } \mathfrak{m}^{(2)}$ система необратимых собственных функций тора T , а g_j , $j = k+1, \dots, n$, — такие обратимые собственные функции тора T , что элементы $g_j - g_j(0)$ дополняют f_i до базиса $\mathfrak{m}$ по $\text{mod } \mathfrak{m}^{(2)}$ (здесь $\mathfrak{m}$ — максимальный идеал в $\mathcal{O}(\mathcal{F})$). Доказывается, что система S однозначно определяет максимальный тор T . В теоремах 1, 2 установлены необходимые и достаточные условия, при которых система функций S будет определяющей системой функций некоторого максимального тора.

В п. 3.2 в терминах определяющей системы функций дано описание алгебры инвариантов, весовых функций и корневых пространств максимального тора. В пп. 3.3, 3.4 дается описание максимальных торов общего положения, стандартных и оптимальных торов.

Подалгебры Картана общей алгебры Ли картановского типа изучаются в п. 3.5. Здесь доказано, что любая подалгебра Картана в $L = W_n(\mathcal{F})$ равна $C_L(T \cap L)$ для некоторого максимального тора T в $\bar{L}$ и обратно, $C_L(T \cap L)$ является подалгеброй Картана в L для любого максимального тора T . Подалгебры Картана могут иметь различную размерность, однако, для любого максимального тора T $\dim T \cap L = n$.

Поэтому множество подалгебр Картана в L параметризуется точками грассманиана $\text{Gr}_n L$, которые соответствуют n -мерным абелевым подалгебрам в L , состоящим из полупростых элементов.

В § 2 изучаются абелевы транзитивные подалгебры V в $L = W(\mathcal{F})$. Двойственное пространство V^* к такой алгебре можно реализовать в пространстве замкнутых 1-форм относительно естественного спаривания дифференцирований и 1-форм. p -замыкание $\bar{V}$ является абелевой транзитивной подалгеброй в алгебре Ли W_N всех дифференцирований алгебры $\mathcal{O}(\mathcal{F})$. Использование представления колчана Кронекера, соответствующего пространству замкнутых 1-форм [15], дает эффективный метод для нахождения единственного максимального тора в $\bar{V}$. Этот метод позволяет найти максимальный тор по определяющей системе функций.

В § 1 собраны необходимые сведения об алгебре разделенных степеней, дифференциальных формах и общей алгебре Ли картановского типа.

§ 1. Общая алгебра Ли картановского типа

Всюду в дальнейшем все векторные пространства рассматриваются над алгебраически замкнутым полем F характеристики $p > 0$. Алгебра разделенных степеней на n -мерном векторном пространстве E обозначается через $\mathcal{O}(E)$. Напомним [16], что алгебра $\mathcal{O}(E)$ задается образующими $x^{(m)}$, $x \in E$, $m \in \mathbb{Z}^+$, и определяющими соотношениями:

$$\begin{aligned} x^{(0)} &= 1; \quad (ax)^{(m)} = a^m x^{(m)}, \quad a \in F; \\ (x + y)^{(m)} &= \sum_{i=0}^m x^{(i)} y^{(m-i)}; \\ x^{(m)} x^{(n)} &= \binom{m+n}{m} x^{(m+n)}. \end{aligned}$$

Обобщенному флагу $\mathcal{F}$ в пространстве E ,

$$\mathcal{F} : E = E_0 \supseteq E_1 \supseteq \dots \supseteq E_r \supset E_{r+1} = (0),$$

соответствует конечномерная подалгебра $\mathcal{O}(\mathcal{F})$ в $\mathcal{O}(E)$, порожденная элементами $x^{(p^j)}$, $x \in E_j$. Если $\{x_1, \dots, x_n\}$ – базис E , согласованный с флагом $\mathcal{F}$, то алгебра $\mathcal{F}$ имеет базис, состоящий из мономов

$$X^{(\alpha)} = x_1^{(\alpha_1)} \dots x_n^{(\alpha_n)}, \quad \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n), \quad 0 \leq \alpha_i < p^{m_i}.$$

В этом случае алгебра $\mathcal{O}(\mathcal{F})$ обозначается также через $A(n, \underline{m})$, где $\underline{m} = (m_1, \dots, m_n)$ – набор высот переменных $x_1, \dots, x_n$ [1]. Положим $\text{ht}(\mathcal{F}) = \sum \dim E_j$ – высота флага $\mathcal{F}$. Очевидно, $\text{ht}(\mathcal{F}) = m_1 + \dots + m_n$.

Алгебры $\mathcal{O}(E)$, $\mathcal{O}(\mathcal{F})$ являются локальными, максимальный идеал $\mathfrak{m}$ имеет базис, состоящий из мономов $X^{(\alpha)}$, $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n > 0$, $g(0)$ – это значение

элемента g в точке, соответствующей этому максимальному идеалу. Разделенные степени максимального идеала

$$\mathfrak{m}^{(i)} = \langle X^{(\alpha)}, |\alpha| \geq i \rangle$$

определяют убывающую фильтрацию в $\mathcal{O}(E)$. Соответствующая пополненная алгебра состоит из рядов в разделенных степенях от переменных $x_1, \dots, x_n$ и обозначается через $\widehat{\mathcal{O}}(E)$. Элементы $x_1, \dots, x_n$ будем называть *топологическими образующими* алгебры $\widehat{\mathcal{O}}(E)$. Пусть $\widehat{\mathfrak{m}}$ – максимальный идеал в $\widehat{\mathcal{O}}(E)$. Операции возведения в разделенные степени определяются на $\widehat{\mathfrak{m}}$ с помощью соотношений, аналогичных соотношениям для разделенных степеней элементов $x \in E$ и следующих соотношений [17]:

$$(u^{(m)})^{(n)} = \frac{(mn)!}{(m!)^n (n!)} u^{(mn)}.$$

Для элементов $u \in \widehat{\mathfrak{m}}$ определено экспоненциальное отображение [17]

$$\exp u = 1 + u + u^{(2)} + \dots + u^{(m)} + \dots$$

Обратное отображение $\log: 1 + \widehat{\mathfrak{m}} \rightarrow \widehat{\mathfrak{m}}$ определяется так [17]:

$$\begin{aligned} \log(1 + u) &= \sum_{j=1}^p (-1)^{j+1} (j-1)! u^{(j)}, \\ \exp(\log(1 + u)) &= 1 + u, \quad \log(\exp u) = u. \end{aligned}$$

Справедливо равенство $\exp(u^{(p^m)}) = f(u)(\exp u)$, где $f(u)$ – линейная комбинация элементов $1, u, u^{(2)}, \dots, u^{(p^{m-1})}$ [17].

Через $\mathcal{O}_n$ обозначается алгебра срезанных многочленов от n переменных $F[x_1, \dots, x_n]/(x_1^p, \dots, x_n^p)$. Алгебра $A(n : \underline{m})$ изоморфна алгебре срезанных многочленов от $N = m_1 + \dots + m_n$ переменных $y_{ij} = x_i^{(p^j)}$, $i = 1, \dots, n$, $j = 0, \dots, m_i - 1$. Через W_n обозначается алгебра Ли всех дифференцирований алгебры $\mathcal{O}_n$.

Дифференцирование D алгебры $\mathcal{O}(E)$ называется специальным, если $D(x^{(m)}) = x^{(m-1)}D(x)$, $x \in E$. Алгебра Ли специальных дифференцирований обозначается через $W(E)$. Непрерывные специальные дифференцирования алгебры $\widehat{\mathcal{O}}(E)$ образуют алгебру Ли $\widehat{W}(E)$. Специальные дифференцирования, сохраняющие подалгебру $\mathcal{O}(\mathcal{F})$, образуют подалгебру Ли $W(\mathcal{F})$ в $W(E)$. Пусть $x_1, \dots, x_n$ – базис E , согласованный с флагом $\mathcal{F}$, ∂_i , $i = 1, \dots, n$, – соответствующие частные производные, $\partial_i(x_j^{(m)}) = \delta_{ij}x_j^{(m-1)}$. Алгебра Ли $W(\mathcal{F})$ является свободным $\mathcal{O}(\mathcal{F})$ -модулем с базисом $\{\partial_i, i = 1, \dots, n\}$. Аналогично, $W_n, W(E), \widehat{W}(E)$ – свободные модули над соответствующей алгеброй “функций” с базисом из частных производных. В частности, $W(\mathcal{F})$ является n -мерным распределением над $\mathcal{O}_N$ [15]. Подпространства $L_i = \mathfrak{m}^{(i+1)}W(\mathcal{F})$ образуют стандартную фильтрацию в $W(\mathcal{F})$.

Через $\Omega^*(E)$, $\Omega^*(\mathcal{F})$ обозначается комплекс дифференциальных форм над соответствующей алгеброй “функций”, Ω^* – комплекс дифференциальных форм над алгеброй срезанных многочленов $\mathcal{O}_n$. Иногда, чтобы подчеркнуть число переменных, Ω^* будет обозначаться через Ω_n^* . В частности, дифференциальная 1-форма из $\Omega^1(\mathcal{F})$ – это линейная над $\mathcal{O}(\mathcal{F})$ форма на свободном модуле $W(\mathcal{F})$. Гомоморфизм ограничения форм из Ω_N на $W(\mathcal{F})$ имеет ядро J – характеристический идеал расщепления $W(\mathcal{F})$ [15]. Комплекс $\Omega(\mathcal{F})$ является факторкомплексом Ω_N/J . Идеал J порождается замкнутыми формами

$$\omega_{ij} = dy_{ij} - y_{i,j-1}^{(p-1)} dy_{i,j-1}.$$

Свойства идеала J подробно изложены в [15]. Здесь отметим лишь, что J – дифференциальный идеал и $Z^1(J)$ имеет базис, состоящий из указанных выше форм ω_{ij} . Через $Z^1(\Omega)$ обозначается пространство замкнутых форм над $\mathcal{O}_n$, через $B^1(\Omega)$ – пространство точных 1-форм. Аналогичный смысл имеют обозначения $Z^1(\mathcal{F})$, $B^1(\mathcal{F})$. Первая группа когомологий де Рама $H^1(\mathcal{F}) = Z^1(\mathcal{F})/B^1(\mathcal{F})$ имеет базис, состоящий из классов форм $x_i^{(p^{m_i}-1)} dx_i$, $i = 1, \dots, n$. В частности, $H^1(\Omega)$ имеет базис, состоящий из классов форм $x_i^{p-1} dx_i$, $i = 1, \dots, n$.

В заключение приведем несколько известных фактов об автоморфизмах рассмотренных выше алгебр. Автоморфизм φ алгебры $\mathcal{O}_n$ определяется действием на образующие x_i :

$$\varphi(x_i) = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + f_i, \quad a_{ij} \in F, \quad f_i \in \mathfrak{m}^2, \quad \det(a_{ij}) \neq 0.$$

Аutomорфизм φ индуцирует автоморфизм алгебры W_n , $D \mapsto D^\varphi = \varphi D \varphi^{-1}$. Описание автоморфизмов алгебры $\mathcal{O}(\mathcal{F})$, индуцирующих автоморфизмы алгебры Ли $W(\mathcal{F})$, несколько сложнее и может быть найдено в [18]. Здесь мы ограничимся лишь очевидным замечанием, что автоморфизм φ алгебры $\mathcal{O}_N = \mathcal{O}(\mathcal{F})$ индуцирует автоморфизм алгебры Ли $W(\mathcal{F})$ (т.е. является допустимым) тогда и только тогда, когда $\varphi(Z^1(J)) = Z^1(J)$. Допустимые автоморфизмы определяются действием на $x_1, \dots, x_n \in E$. Отметим, что для любых $g_1, \dots, g_n \in \widehat{\mathfrak{m}}$, линейно независимых по $\text{mod } \widehat{\mathfrak{m}}^{(2)}$, существует допустимый автоморфизм φ алгебры $\widehat{\mathcal{O}}(E)$ такой, что $\varphi(x_i) = g_i$.

Через $\mathcal{H}$ обозначим группу допустимых автоморфизмов алгебры $\mathcal{O}(\mathcal{F})$ таких, что $\varphi(x_i) \equiv x_i \pmod{\mathfrak{m}^2}$.

Следующая лемма является очевидным обобщением леммы 2.5 из [15].

ЛЕММА 1. Пусть

$$\Sigma = \left\{ dx_i + df_i + \sum_{j=1}^n \sum_{s=1}^{m_j} a_{ijs} x_j^{(p^s-1)} dx_j, \quad i = 1, \dots, n, \quad a_{ijs} \in F \right\}$$

– семейство замкнутых форм в $\Omega^1(\mathcal{F})$. Если $f_i \in \mathfrak{m}^2$, то существует автоморфизм $\chi \in \mathcal{H}$ такой, что

$$\chi(\Sigma) = \left\{ dx_i + \sum_{j=1}^n \sum_{s=1}^{m_j} a_{ijs} x_j^{(p^s-1)} dx_j, \quad i = 1, \dots, n \right\}.$$

В заключение отметим одно свойство логарифма. Алгебру $\mathcal{O}_N$ можно рассматривать как подалгебру, соответствующую тривиальному флагу, в полной алгебре разделенных степеней от N переменных. Таким образом, можно определить $\log g$ для любого $g \in \mathcal{O}_N$, $g(0) = 1$. Однако, может оказаться, что $\log g \notin \mathcal{O}_N$. Тем не менее, для любого дифференцирования $D \in W_N$ $d \log g(D) = g^{-1} D(g) = g^{p-1} D(g)$, т.е. $d \log g = g^{p-1} dg \in Z^1(\Omega_N)$. Пусть $\mathcal{F}$ – флаг в пространстве E , $W(\mathcal{F})$ – TI-распределение ранга n над $\mathcal{O}_N$, $N = \text{ht}(\mathcal{F})$, т.е. $\mathcal{O}_N = \mathcal{O}(\mathcal{F})$. Ограничение на $W(\mathcal{F})$ дифференциальной формы $d \log g$ совпадает со значением дифференциала функции $\log g$, вычисленной в структуре разделенных степеней алгебры $\mathcal{O}(E)$. Следовательно, форма $d \log g \in Z^1(\mathcal{F})$ каноническим образом поднимается до дифференциальной формы $g^{p-1} dg \in Z^1(\Omega_N)$.

ЗАМЕЧАНИЕ. В дальнейшем будут использоваться правильные подалгебры в $\widehat{\mathcal{O}}(E)$ [17]. Напомним, что по определению правильная подалгебра содержит $x_1, \dots, x_n$ и инвариантна относительно частных производных ∂_i , $i = 1, \dots, n$. Очевидно, полиномиальная правильная конечномерная подалгебра B в $\widehat{\mathcal{O}}(E)$ порождается $x_1, \dots, x_n$ и рекуррентной последовательностью полиномов $F_j(x_1, \dots, x_n)$ таких, что $\partial_i F_j$ содержатся в правильной подалгебре, порожденной $x_1, \dots, x_n$ и F_s , $s < j$. Конечномерная правильная подалгебра A в $\widehat{\mathcal{O}}(E)$ имеет вид $A = B \otimes F[\Gamma]$, где B – полиномиальная правильная подалгебра, а $F[\Gamma]$ – подалгебра, порожденная $\exp(a_1 x_1 + \dots + a_n x_n)$, $a_i \in F$, где наборы $(a_1, \dots, a_n) \in F^n$ пробегает подгруппу аддитивной группы F^n . Пусть $\mathfrak{n}$ – максимальный идеал правильной полиномиальной подалгебры B в $\mathcal{O}(E)$. Очевидно, включение $\mathfrak{n} \subset \mathfrak{m}$ индуцирует вложение $\mathfrak{n}/\mathfrak{n}^2$ в $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$.

§ 2. Абелевы транзитивные подалгебры

Подалгебра V в фильтрованной алгебре Ли $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{-1} \subset \mathcal{L}_0 \subset \dots$ называется *транзитивной*, если $V + \mathcal{L}_0 = \mathcal{L}$. В дальнейшем алгебра Ли $W(\mathcal{F})$ рассматривается со стандартной фильтрацией, в частности, подалгебра $\mathcal{L}_0$ состоит из векторных полей, обращающихся в нуль в нуле. Отметим, что для любой транзитивной подалгебры V в $L = W(\mathcal{F})$ p -замыкание $\overline{L}$ в $W_N = \text{Der } \mathcal{O}(\mathcal{F})$ равно $\overline{V} + L$, где $\overline{V}$ – p -замыкание V .

ЛЕММА 2. Пусть V – абелева транзитивная подалгебра в $L = W_m(\mathcal{F})$.

- 1) Множество весов Λ V -модуля $A = \mathcal{O}(\mathcal{F})$ является элементарной абелевой p -группой ранга $k \leq N = \text{ht}(\mathcal{F})$.
- 2) Для любого $\varphi \in \Lambda$ весовое пространство A_φ содержит единственную собственную f_φ функцию алгебры V такую, что $f_\varphi(0) = 1$. Кроме того, $A_\varphi = f_\varphi A_0$.

- 3) Оператор $D \in V$ полупрост тогда и только тогда, когда $D(A_0) = 0$.
 4) $V \oplus \mathcal{L}_0 = L$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1), 2). Так как для $\varphi \in \Lambda$ весовое подпространство A_φ инвариантно относительно транзитивной подалгебры V , то A_φ содержит обратимый элемент f такой, что $D(f) = \varphi(D)f$ для любого $D \in V$. Кроме того, f определен однозначно с точностью до ненулевого множителя из F , так как линейная оболочка двух линейно независимых обратимых собственных функций веса φ имеет ненулевое пересечение с $\mathfrak{m}$, что невозможно в силу транзитивности V .

Нормируем все обратимые собственные функции f_φ , $\varphi \in \Lambda$, $\varphi \neq 0$, так чтобы $f_\varphi(0) = 1$. Положим $f_0 = 1$. Тогда множество $\{f_\varphi, \varphi \in \Lambda\}$ образует группу по умножению: $f_\varphi f_\psi = f_{\varphi+\psi}$, $f_\varphi^{-1} = f_{-\varphi}$. Следовательно, Λ – абелева подгруппа в V^* . Очевидно, $A_\varphi = f_\varphi A_0$. Так как $A = \bigoplus_{\varphi \in \Lambda} A_\varphi$, то

$$p^N = \dim A = |\Lambda| \dim A_0 = p^k \dim A_0.$$

Таким образом, $k \leq N$. Утверждение 3) следует из 2).

Для доказательства утверждения 4) достаточно заметить, что подпространство $(V \cap \mathcal{L}_0)(\mathfrak{m}) \subset \mathfrak{m}$ инвариантно относительно V и, следовательно, порождает идеал в A , инвариантный относительно $A \cdot V = L$. Таким образом, $V \cap \mathcal{L}_0 = 0$.

Согласно [15] подпространство $\Sigma \subset \Omega^1(\mathcal{F})$ называется *невыврожденным*, если $\dim \Sigma = \dim \Sigma(0)$, т.е. $\Sigma \cap \mathfrak{m}\Omega^1(\mathcal{F}) = (0)$. Следующая лемма показывает, что абелевы транзитивные подалгебры в $W_n(\mathcal{F})$ двойственны n -мерным невыврожденным подпространствам в $Z^1(\mathcal{F})$.

ЛЕММА 3. Пусть V – абелева транзитивная подалгебра в $L = W_n(\mathcal{F})$. Пространство $\Sigma = \{\omega \in \Omega^1(\mathcal{F}) \mid \omega(V) = F\}$ является невыврожденным n -мерным подпространством в $Z^1(\mathcal{F})$. Обратно, если Σ – невыврожденное n -мерное подпространство в $Z^1(\mathcal{F})$, то пространство $V = \{D \in W_n(\mathcal{F}) \mid \Sigma(D) = F\}$ является абелевой транзитивной подалгеброй в $W_n(\mathcal{F})$.

Утверждение леммы следует из локальности алгебры A и формулы дифференциала 1-формы:

$$d\omega(D_1, D_2) = D_1(\omega(D_2)) - D_2(\omega(D_1)) - \omega([D_1, D_2]).$$

ЛЕММА 4. Пусть $W_N = \text{Der } \mathcal{O}_N$ – общая p -алгебра Ли картановского типа. Если V – абелева транзитивная подалгебра в W_N , то V – p -подалгебра в W_N .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из транзитивности V следует, что централизатор V в W_N совпадает с V . Так как $[V^p, V] = (0)$, то $V^p \subset V$.

Пусть Σ – невыврожденное N -мерное подпространство в $Z^1(\Omega)$, V – двойственная Σ абелева транзитивная подалгебра в W_N , $\langle , \rangle$ – естественное спаривание V и Σ . Согласно лемме 4 V – p -подалгебра в W_N . По теореме Джекобсона [19] $V = T_1 \oplus \mathcal{N}$, где T_1 – единственный максимальный тор в V , $\mathcal{N}$ – нильрадикал V .

Покажем, каким образом тор T_1 и нильрадикал $\mathcal{N}$ можно описать в терминах дифференциальных форм из двойственного пространства Σ .

Пусть F – автоморфизм Фробениуса поля K , $F(\alpha) = \alpha^p$. Для формы $\omega \in \Sigma$ определим форму $\lambda(\omega) \in \Sigma$ по правилу $\langle \lambda(\omega), D \rangle = \langle \omega, D^p \rangle^{1/p}$. Очевидно, $\lambda: \Sigma \rightarrow \Sigma - F^{-1}$ -полулинейное отображение, сопряженное к p -операции в V . Разложению $V = T_1 \oplus \mathcal{N}$ соответствует двойственное разложение $\Sigma = T_1^* \oplus \mathcal{N}^*$. Операция λ невырождена на T_1^* и нильпотентна на $\mathcal{N}$. Если $\{t_1, \dots, t_k\}$ – базис тора T_1 , состоящий из тороидальных элементов (т.е. $t_i^p = t_i$), то для двойственного базиса $\{t_1^*, \dots, t_k^*\}$ в T_1^* ($t_i^*(\mathcal{N}) = 0$) $\lambda(t_i^*) = t_i^*$.

Согласно [15] невырожденному подпространству Σ в $Z^1(\Omega)$ соответствует представление $\mathcal{P}$ хроматического колчана Кронекера $\circ \rightrightarrows \circ$,

$$\mathcal{P} = (\varphi, \psi): \Sigma \rightrightarrows H^1(\Omega).$$

Здесь $\varphi: \Sigma \rightarrow H^1(\Omega)$ – линейное отображение, ставящее в соответствие 1-форме $\omega \in \Sigma \subset Z^1(\Omega)$ ее кохомологический класс $[\omega]$, $\psi - F$ -полулинейное отображение $\omega \mapsto \omega(0)^p$. Следуя [15], пространство $\Omega^1(0) = \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ отождествляется с пространством

$$E = \langle x_1, \dots, x_N \rangle, \quad \left(\sum f_i dx_i \right) (0) = \sum f_i(0) x_i,$$

а пространство

$$H^1(\Omega) = \langle [x_i^{(p-1)} dx_i], i = 1, \dots, N \rangle$$

– с пространством $E^p = \langle x_1^p, \dots, x_N^p \rangle$ и $\psi(dx_i) = x_i^p$. Подробнее о представлениях колчана Кронекера см. [15]. Так как Σ – невырожденное N -мерное подпространство в $Z^1(\Omega)$, то ψ – невырожденное отображение. Поэтому разложение $\mathcal{P}$ в прямую сумму неразложимых представлений не содержит представлений с вектором размерностей (r, s) , $r > s$.

Отождествим Σ и $H^1(\Omega)$ с помощью ψ . Тогда ϕ отождествляется с F^{-1} -полулинейным оператором $\hat{\phi} = \phi \circ \psi^{-1}$ на $H^1(\Omega)$. При изменении базиса матрица B оператора $\hat{\phi}$ меняется так же, как матрица отображения λ , $B' = T^{-1} B T^{(1/p)}$. Очевидно, для F^{-1} -полулинейного оператора также справедлива теорема Джекобсона [19], т.е. пространство Σ единственным образом раскладывается в прямую сумму подпространств $\Sigma = \Sigma_1 \oplus \Sigma_0$, где Σ_1 – наибольшее подпространство, на котором $\hat{\phi}$ действует невырожденно, а Σ_0 – фиттингова 0-компонента $\hat{\phi}$. Σ_1 является аналогом максимального тора в абелевой p -алгебре Ли, в частности, существует “тороидальный” базис в Σ_1 $\{\bar{\omega}_1, \dots, \bar{\omega}_s\}$, $\hat{\phi}(\bar{\omega}_i) = \bar{\omega}_i$. Очевидно, в соответствующем базисе Σ_0 отображение $\hat{\phi}$ имеет жорданову матрицу с нулями на главной диагонали.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. $\lambda = \hat{\phi}$ и, следовательно, $T_1^* = \Sigma_1$, $\mathcal{N}^* = \Sigma_0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\{\bar{\omega}_i, i = 1, \dots, s\}$ – “тороидальный” базис в Σ_1 относительно $\hat{\phi}$. Базис $\{\bar{\omega}_i, i = s+1, \dots, N\}$ в Σ_0 выберем так, чтобы матрица $\hat{\phi}$ была жордановой. Для клетки Жордана порядка l_j

$$\begin{aligned} \hat{\phi}(\bar{\omega}_{t+1}) &= 0, \\ \hat{\phi}(\bar{\omega}_{t+k+1}) &= \bar{\omega}_{t+k}, \quad k < l_j. \end{aligned}$$

Из определения $\widehat{\phi}$ и леммы 1 следует, что существуют образующие $z_1, \dots, z_N$ алгебры $\mathcal{O}_N$ такие, что для базиса Σ_1

$$\bar{\omega}_i = dz_i + z_i^{p-1} dz_i, \quad i = 1, \dots, s,$$

а для базиса Σ_0 , соответствующего клетке Жордана порядка l_j ,

$$\begin{aligned} \bar{\omega}_{t+1} &= dz_{t+1}, \\ \bar{\omega}_{t+k+1} &= dz_{t+k+1} + z_{t+k}^{p-1} dz_{t+k}, \quad k < l_j. \end{aligned}$$

Двойственный базис в транзитивной абелевой подалгебре V имеет вид

$$\begin{aligned} D_i &= (1 - z_i^{p-1}) \frac{\partial}{\partial z_i}, \quad i = 1, \dots, s, \\ D_{t+1} &= \frac{\partial}{\partial z_{t+1}} - z_{t+1}^{p-1} \frac{\partial}{\partial z_{t+2}} + \dots + (-1)^{l_j-1} z_{t+1}^{p-1} \dots z_{t+l_j-1}^{p-1} \frac{\partial}{\partial z_{t+l_j}}, \\ D_{t+k+1} &= \frac{\partial}{\partial z_{t+k+1}} - z_{t+k+1}^{p-1} \frac{\partial}{\partial z_{t+k+2}} + \dots \\ &\quad \dots + (-1)^{l_j-k+1} z_{t+k+1}^{p-1} \dots z_{t+l_j-1}^{p-1} \frac{\partial}{\partial z_{t+l_j}}, \quad k < l_j. \end{aligned}$$

Используя известную формулу $(fD)^p = f^p D^p + ((fD)^{p-1}(f))D$ (см., например, [15]), легко убедиться, что $D_i^p = D_i$ для $i = 1, \dots, s$. Для клетки Жордана порядка l_j получаем $D_{t+k+1}^p = D_{t+k+2}$, $k = 0, \dots, l_j - 1$, $D_i^{p^n} = 0$ для $i > s$ и достаточно большого n . Следовательно, $\lambda = \widehat{\phi}$.

ЗАМЕЧАНИЯ.

1) В предыдущих обозначениях $D_{s+1}, \dots, D_N$ являются частными производными относительно структуры разделенных степеней на $K[z_{s+1}, \dots, z_N]$: клетке Жордана порядка l_j соответствует набор разделенных степеней $z_{t+1} = y$, $z_{t+2} = y^{(p)}, \dots, z_{t+l_j} = y^{(p^{l_j-1})}$.

2) Пусть V – абелева транзитивная подалгебра в $W(n : \underline{m})$, $\underline{m} = (m_1, \dots, m_n)$, $\bar{\Sigma} = \langle \omega_1, \dots, \omega_n \rangle$ – подпространство в $Z^1(n : \underline{m})$, двойственное к V ,

$$\begin{aligned} \omega_i &= dx_i + df_i + d\left(\sum_{j=1}^n \sum_{s=1}^{m_j} a_{m_1+\dots+m_{j-1}+s,i} x_j^{(p^s)}\right), \\ a_{ki} &\in F, \quad f_i \in \mathfrak{m}^2, \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned} \tag{1}$$

Обозначим через $\bar{V}$ p -замыкание V в W_N , $N = m_1 + \dots + m_n$. Алгебра $\mathcal{O}(n : \underline{m})$ является алгеброй срезанных многочленов от переменных $y_1, \dots, y_N$,

$ym_1+\dots+m_{i-1}+s = x_i^{(p^{s-1})}$, $s = 1, \dots, m_i$. Покажем, что подпространство Σ в $Z^1(\Omega)$, двойственное $\bar{V}$, имеет базис

$$dy_{m_1+\dots+m_{i-1}+1} + df_i - \sum_{j=1}^N a_{ji} y_j^{p-1} dy_j, \quad (2)$$

$$dy_{r+1} + y_r^{p-1} dy_r, \quad r = m_1 + \dots + m_{i-1} + s, \quad s = 1, \dots, m_i - 1, \quad i = 1, \dots, n. \quad (3)$$

Согласно [15] формы (3) задают распределение $W(n : \underline{m})$ над θ_N . Пусть J – характеристический идеал распределения $W(n : \underline{m})$. Из точной последовательности когомологий, соответствующей последовательности комплексов

$$0 \longrightarrow J \longrightarrow \Omega \longrightarrow \Omega/J = \Omega(n : \underline{m}) \longrightarrow 0,$$

и известных размерностей ($H^0(J) = 0$, $H^1(J) = Z^1(J)$, $Z^1(J) \cap B^1(\Omega) = 0$, $\dim Z^1(J) = N - n$, $\dim H^1(\Omega) = N$, $\dim H^1(n : \underline{m}) = n$, см. [12]) следует точность последовательности

$$0 \longrightarrow Z^1(J) \longrightarrow Z^1(\Omega) \longrightarrow Z^1(n : \underline{m}) \longrightarrow 0. \quad (4)$$

Последнее отображение в точной последовательности (4) – это гомоморфизм ограничения на распределение $W(n : \underline{m})$ замкнутых форм из Ω^1 . Формы (3) образуют базис $Z^1(J)$. Из точной последовательности (4) следует, что Σ – множество всех замкнутых форм из $Z^1(\Omega)$, принимающих постоянные значения на V . Из формулы гомотопии

$$D \circ \omega = d\omega(D, -) + d(\omega(D))$$

получаем, что Σ – множество всех замкнутых форм из $Z^1(\Omega)$, аннулируемых дифференцированиями из алгебры V . Так как действие дифференцирований на формы определяет p -представление W_N на Ω^1 , то $\bar{V}$ также аннулирует формы из Σ . Опять из формулы гомотопии получаем, что $\omega(D) \in F$ для любых $D \in \bar{V}$, $\omega \in \Sigma$. Так как Σ – N -мерное невырожденное подпространство в $Z^1(\Omega)$ и $\dim \bar{V} = N$, то Σ – двойственное к $\bar{V}$ подпространство.

Теперь нетрудно записать матрицу C отображения $\hat{\phi} = \lambda$ в базисе $\{y_i^{p-1} dy_i \equiv y_i^p, i = 1, \dots, N\}$ пространства $H^1(\Omega)$. Действительно, $C = A + B$, где A – матрица порядка N , у которой все столбцы с номерами, отличными от $i = 1, m_1 + 1, m_1 + m_2 + 1, \dots, N - m_n + 1$, равны 0, а в столбцах с отмеченными номерами стоят элементы $-a_{ji}$, $j = 1, \dots, N$, матрица B – жорданова матрица с клетками Жордана $J_{m_1}, \dots, J_{m_n}$, соответствующими нулевым собственным значениям. Как было показано выше, вся информация о p -операции в $\bar{V}$ содержится в этой матрице. В частности, матрица C невырождена (и, следовательно, $\dim T_1 = N$) тогда и только тогда, когда невырождена матрица n -го порядка $\bar{A} = (\bar{a}_{ji})$, $\bar{a}_{ji} = -a_{m_1+\dots+m_j, i}$, $i, j = 1, \dots, n$, т.е. когда невырождено каноническое отображение $\bar{\Sigma} \rightarrow H^1(n : \underline{m})$, сопоставляющее форме ее когомологический класс. Позднее мы получим этот результат из других соображений.

3) В качестве примера рассмотрим частный случай – алгебру Пассенхауза $W(1 : N)$. Абелева транзитивная подалгебра V в $W(1 : N)$ одномерна, $V = \langle D \rangle$, $D(0) \neq 0$. Двойственное пространство $\overline{\Sigma} \subset Z^1(1 : N)$ имеет базис

$$\omega_1 = dx + df + d(a_1 x^{(p)} + \dots + a_{N-1} x^{(p^{N-1})} + a_N x^{(p^N)}), \quad f \in \mathfrak{m}^2.$$

В переменных $y_i = x^{(p^{i-1})}$, $i = 1, \dots, N$, пространство $\Sigma \subset Z^1(\Omega)$, двойственное p -замыканию $\overline{V}$ алгебры V в W_N , имеет базис

$$\omega_1 = dy_1 - \sum_{j=1}^N a_j y_j^{p-1} dy_j + df, \quad f \in \mathfrak{m}^2, \quad \omega_i = dy_i + y_{i-1}^{p-1} dy_{i-1}, \quad i = 2, \dots, N.$$

Матрица отображения $\widehat{\phi}$ в базисе $\{y_i^{p-1} dy_i \equiv y_i^p, i = 1, \dots, N\}$ пространства $H^1(\Omega)$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} -a_1 & 1 & \dots & 0 \\ -a_2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{N-1} & 0 & \dots & 1 \\ -a_N & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Пусть l равно максимальному k такому, что $a_k \neq 0$. Очевидно, $\widehat{\phi}$ действует невырожденно на подпространстве $\langle y_1^p, \dots, y_k^p \rangle$, которое совпадает с образом оператора $\widehat{\phi}^{N-k}$. Следовательно, $\Sigma_1 = \langle \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k \rangle$. В частности, $\dim T_1 = k$. Аналогично можно найти $\mathcal{N}^*$, после чего, переходя к двойственному пространству V , можно найти тор T_1 .

§ 3. Максимальные торы общей алгебры Ли картановского типа

3.1. Определяющая система функций максимального тора. Зафиксируем максимальный тор T в p -замыкании $\overline{L}$ алгебры $L = W(\mathcal{F})$, $\overline{L} \subset \text{Der } A$, $A = \mathcal{O}(\mathcal{F})$. Выберем максимальный набор $\{f_1, \dots, f_k\}$, $k \geq 0$, собственных функций тора T , лежащих в максимальном идеале $\mathfrak{m}$ алгебры A и линейно независимых по $\text{mod } \mathfrak{m}^{(2)}$. Обратимые собственные функции тора T будем нормировать так, что $f(0) = 1$. Дополним $f_1, \dots, f_k$ обратимыми собственными функциями $g_{k+1}, \dots, g_n$ так, чтобы $f_1, \dots, f_k, g_{k+1} - 1, \dots, g_n - 1$ были линейно независимы по $\text{mod } \mathfrak{m}^{(2)}$. Систему $S = \{f_1, \dots, f_k, g_{k+1}, \dots, g_n\}$ будем называть *определяющей системой функций* тора T .

ЛЕММА 5. Если $\mathfrak{n}$ – максимальный идеал алгебры инвариантов A^T , тогда $\mathfrak{n} \subset \mathfrak{m}^{(2)}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для собственной функции $f \in \mathfrak{m} \setminus \mathfrak{m}^{(2)}$ пусть $U_f = \{D \in L \mid D(f) \in F\}$. Так как $df \in \Omega^1(\mathcal{F})$ имеет ненулевое значение в нуле, то df можно дополнить до базиса свободного A -модуля $\Omega^1(\mathcal{F})$. Для одного из дифференцирований D из двойственного базиса мы будем иметь $df(D) = D(f) = 1$. Таким образом, $U_f \neq 0$ и, кроме того, подпространство $U_f^0 = \{D \in L \mid D(f) = 0\}$ имеет коразмерность 1 в U_f . Так как f – собственная функция тора T , пространство U_f инвариантно относительно T . Пусть f имеет вес $\lambda \in T^*$. Для $D \in U_f, t \in T$,

$$[t, D](f) = (tD - Dt)(f) = -\lambda(t)D(f).$$

Допустим, $\lambda = 0$, тогда $[t, D] \in U_f^0$. Поэтому существует $D \in U_f$, коммутирующий с тором T и такой, что $D(f) = 1$. Дифференцирование fD является тороидальным, так как

$$(fD)^p = f^p D^p + (fD)^{p-1}(f)D = fD.$$

В силу построения fD $[t, fD] = 0$ для любого $t \in T$. Из максимальной тора T получаем $fD \in T$. Однако $fD(f) = f$, что противоречит предположению $f \in A^T$.

СЛЕДСТВИЕ 1. В определяющей системе функций максимального тора T все функции имеют ненулевой вес.

Пусть $S = \{f_1, \dots, f_k, g_{k+1}, \dots, g_n\}$ – определяющая система функций максимального тора T , $f_i \in \mathfrak{m} \setminus \mathfrak{m}^{(2)}$, $g_j(0) = 1$. Положим $\omega_i = df_i$, $i = 1, \dots, k$, $\omega_j = d \log g_j$, $j = k+1, \dots, n$. Из построения определяющей системы S следует, что $\sigma = \{\omega_i, i = 1, \dots, n\}$ образуют базис свободного A -модуля $\Omega^1(\mathcal{F})$. Выберем дуальный базис в L $\{D_1, \dots, D_n\}$, $\omega_i(D_j) = \delta_{ij}$.

ЛЕММА 6. 1) Пространство $V = \langle D_1, \dots, D_n \rangle$ является абелевой транзитивной подалгеброй в L .

2) Пусть $\alpha_i \in T^*$, $i = 1, \dots, n$, – множество весов функций из определяющей системы S максимального тора T . Для любого $t \in T$

$$[t, D_i] = -\alpha_i(t)D_i, \quad i = 1, \dots, k, \quad [t, D_j] = 0, \quad j = k+1, \dots, n.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Очевидно, $L = V \oplus \mathfrak{m}L$. Пусть $\omega_i \in \sigma$, тогда

$$0 = d\omega_i(D_s, D_r) = D_s\omega_i(D_r) - D_r\omega_i(D_s) - \omega_i([D_s, D_r]) = -\omega_i([D_s, D_r]).$$

Так как ω_i образуют базис A -модуля $\Omega^1(\mathcal{F})$, то $[D_s, D_r] = 0$ для любых r, s . Таким образом, $[V, V] = 0$.

2) Для $t \in T, D_i \in V, h \in S = \{f_1, \dots, f_k, g_{k+1}, \dots, g_m\}$ вычислим $[t, D_i](h)$.

$$[t, D_i](f_j) = (tD_i - D_it)(f_j) = t(\delta_{ij}) - \alpha_j(t)\delta_{ij} = -\alpha_j(t)\delta_{ij}.$$

Так как $d \log g(D) = g^{-1}D(g)$ для любого $D \in L$, то для $i = 1, \dots, k$ условие $d \log g_s(D_i) = 0$ означает $D_i(g_s) = 0$ и $[t, D_i](g_s) = (tD_i - D_it)(g_s) = 0$. Таким образом, для $i = 1, \dots, k$ и любой формы $\omega_j \in \sigma$ $\omega_j([t, D_i]) = -\alpha_i(t)\delta_{ij}$. Так как σ – базис $\Omega^1(\mathcal{F})$, то $[t, D_i] = -\alpha_i(t)D_i$. Аналогично, для $j = k+1, \dots, n$ $D_j(g_s) = \delta_{js}g_s$ и $[t, D_j](g_s) = (tD_j - D_jt)(g_s) = 0$. Теперь $\omega_i([t, D_j]) = 0$ для любого $\omega_i \in \sigma$ и $[t, D_j] = 0$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. $T_0 = L_0 \cap T = \langle f_i D_i, i = 1, \dots, k \rangle$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из леммы 6 следует, что $[t, f_i D_i] = 0$ для любого $t \in T$ и по известной формуле

$$(f_i D_i)^p = f_i^p D_i^p + (f_i D_i)^{p-1} (f_i) D_i = f_i D_i.$$

Таким образом, $f_i D_i, i = 1, \dots, k$, – тороидальные элементы, перестановочные с тором T . Следовательно, $f_i D_i \in T_0$. Если $\langle f_i D_i, i = 1, \dots, k \rangle \neq T_0$, то существует элемент $0 \neq t_0 \in T_0$ такой, что $\alpha_i(t_0) = 0, i = 1, \dots, k$. Действительно, если $t_1 \in T_0 \setminus \langle f_i D_i, i = 1, \dots, k \rangle$ и $\alpha_i(t_1) = a_i \in F$, то

$$\alpha_j \left(t_1 - \sum_i a_i (f_i D_i) \right) = 0, \quad j = 1, \dots, k.$$

Возьмем $t_0 = t_1 - \sum_i a_i (f_i D_i)$. По лемме 6 $[t_0, V] = 0$. Так как V – транзитивная абелева подалгебра в L , а $t_0 \in L_0$, то равенство $[t_0, V] = 0$ невозможно. Полученное противоречие доказывает, что $T_0 = \langle f_i D_i, i = 1, \dots, k \rangle$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть $\bar{V}$ – p -замыкание алгебры V в $\bar{L}$. Справедливы следующие утверждения:

- 1) $V = \text{Ann}_L \sigma$,
- 2) $\bar{V} \cap L_0 = 0$, таким образом, $\bar{V}$ – абелева транзитивная подалгебра в $W_N = \text{Der } A$,
- 3) $T = T_1 \oplus T_0$, где T_1 – максимальный тор в абелевой p -алгебре Ли $\bar{V}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Пусть Σ – линейная оболочка σ , $\Sigma \subset Z^1(\mathcal{F})$. Покажем, что $V = \text{Ann}_L \Sigma$ при стандартном действии L на $\Omega^1(\mathcal{F})$. Для $D', D'' \in V, \omega \in \Sigma$

$$(D' \circ \omega)(D'') = D'(\omega(D'')) - \omega([D', D'']) = 0,$$

так как $[D', D''] = 0$ и $\omega(D'') = \text{const} \in F$. С другой стороны, если $D \circ \omega_i = 0, D \in L, \omega_i \in \sigma$, то $0 = (D \circ \omega_i)(D') = -\omega_i([D, D'])$ для $D' \in V$. Так как $\Sigma = \langle \omega_1, \dots, \omega_m \rangle$ и $\omega_1, \dots, \omega_m$ образуют базис свободного A -модуля $\Omega^1(\mathcal{F})$, то $[D, D'] = 0$ для любого $D' \in V$. Согласно лемме 6 V – абелева транзитивная подалгебра в L . Поэтому $D \in V$ и $V = \text{Ann}_L \Sigma$.

2) Очевидно, дифференцирования из $\bar{V}$ также аннулируют формы $\omega \in \Sigma$. Если $0 \neq D \in \bar{V} \cap L_0$, то $D \in \text{Ann}_L \Sigma = V$. Однако $V \cap L_0 = 0$, следовательно, $\bar{V} \cap L_0 = 0$.

3) Из 2) следует, что $\bar{L} = \bar{V} \oplus L_0$. Очевидно, для корневого элемента $D \in L$ относительно тора T $[D^p, T] = 0$. Следовательно, для любого элемента $u \in \bar{V}^p$ $[u, T] = 0$. Так как $T_1 = T_1^p$, то $[T_1, T] = 0$. В силу максимальности тора T $T_1 \subset T$ и $T_1 \oplus T_0 \subset T$ (сумма прямая согласно 2)). Обратно, пусть t – произвольный

элемент тора T . Так как $\bar{L} = \bar{V} \oplus L_0$, $\bar{V} = V + V^p + V^{p^2} + \dots$, то $t = D + N + \bar{t}$, где $D \in V$, $N \in V^p + V^{p^2} + \dots$, $\bar{t} \in L_0$. Для $t_0 \in T_0$

$$0 = [t_0, t] = [t_0, D] + [t_0, N] + [t_0, \bar{t}].$$

Как отмечалось выше, $[t_0, N] = 0$. Далее, $[t_0, D] \in V$, $[t_0, \bar{t}] \in L_0$. Так как $V \cap L_0 = 0$, то $[t_0, D] = 0$ и $[t_0, \bar{t}] = 0$. Поскольку $[t_0, D] = 0$, то по лемме 6 $D \in \langle D_{k+1}, \dots, D_n \rangle$. Кроме того,

$$[t, D_i] = [D, D_i] + [N, D_i] + [\bar{t}, D_i] = [\bar{t}, D_i] = -\alpha_i(t)D_i$$

для $i = 1, \dots, k$ и, аналогично, $0 = [t, D_j] = [\bar{t}, D_j]$ для $j = k+1, \dots, n$. Таким образом, для любого $s = 1, \dots, n$

$$\left[\bar{t} - \sum_{i=1}^k \alpha_i(t)(f_i D_i), D_s \right] = 0.$$

Так как $\bar{t} \in L_0$, а V — транзитивная подалгебра в L , отсюда получаем

$$\bar{t} = \sum_{i=1}^k \alpha_i(t)(f_i D_i) \in T_0.$$

Поскольку $D \in \langle D_{k+1}, \dots, D_n \rangle$ и, следовательно, $[D, T] = 0$, а $N \in V^p + V^{p^2} + \dots$, то $[\bar{t}, D + N] = 0$ и t — сумма коммутирующих элементов $\bar{t}$ и $D + N$. Поэтому для полупростых частей имеем $t = t_s = (D + N)_s + \bar{t}_s = (D + N)_s + \bar{t}$. Теперь $(D + N)_s \in T_1$, $\bar{t} \in T_0$, и мы получаем $t \in T_1 \oplus T_0$.

СЛЕДСТВИЕ 2. *Определяющая система функций S однозначно определяет максимальный тор T .*

Пусть $S = \{f_1, \dots, f_k, g_{k+1}, \dots, g_m\}$ — определяющая система функций максимального тора T , Σ — пространство 1-форм,

$$\begin{aligned} \Sigma &= \langle \omega_i, i = 1, \dots, n \rangle, \\ \omega_i &= df_i, \quad i = 1, \dots, k, \quad \omega_i = d \log g_i, \quad i = k+1, \dots, n. \end{aligned} \tag{5}$$

Как отмечалось выше, $\omega_1, \dots, \omega_n$ образуют базис свободного A -модуля $\Omega^1(\mathcal{F})$. Пусть $D_1, \dots, D_n$ — дуальный базис A -модуля $L = W(\mathcal{F})$. Обозначим через I однородный идеал в $\Omega(\mathcal{F})$, порожденный $\omega_i, i = 1, \dots, k, I = \bigoplus I_s, I_s = I \cap \Omega^s(\mathcal{F})$. Согласно [15] I является характеристическим идеалом интегрируемого распределения $\mathcal{L} \subset W(\mathcal{F})$. Следовательно, $A = C \otimes A_0, C \cong \mathcal{O}(\mathcal{F}_1)$ и $\mathcal{L} \cong W(\mathcal{F}_1) \otimes A_0$. Очевидно, A -модуль $\mathcal{L}$ имеет базис $D_{k+1}, \dots, D_n$.

В алгебре $\widehat{\mathcal{O}}(E)$, $A = \mathcal{O}(\mathcal{F}) \subset \widehat{\mathcal{O}}(E)$, выберем топологические образующие

$$y_i = f_i, \quad i = 1, \dots, k, \quad z_i = \log g_i, \quad i = k+1, \dots, n. \tag{6}$$

В образующих (6)

$$D_i = \frac{\partial}{\partial y_i}, \quad i = 1, \dots, k, \quad D_i = \frac{\partial}{\partial z_i}, \quad i = k + 1, \dots, n, \quad (7)$$

алгебра $\widehat{\mathcal{O}}(E)$ является алгеброй степенных рядов в разделенных степенях от переменных $y_1, \dots, y_k, z_{k+1}, \dots, z_n$, A – подалгебра в $\widehat{\mathcal{O}}(E)$, инвариантная относительно $\frac{\partial}{\partial y_i}, \frac{\partial}{\partial z_i}$. Нильпространство абелевой алгебры Ли $\langle D_{k+1}, \dots, D_n \rangle$ в $\widehat{\mathcal{O}}(E)$ состоит из полиномов от $z_{k+1}, \dots, z_n$ с коэффициентами, являющимися рядами от переменных $y_1, \dots, y_k$. Подалгебра A_0 состоит из всех $f \in A$ таких, что $D_i(f) = 0$, $i = k + 1, \dots, n$. Таким образом, $A_0 = \widehat{\mathcal{O}}(y) \cap A$, где $\widehat{\mathcal{O}}(y)$ – подалгебра в $\widehat{\mathcal{O}}(E)$, состоящая из степенных рядов от $y_1, \dots, y_k$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. 1) A_0 – правильная подалгебра в $\widehat{\mathcal{O}}(y)$, $A_0 = A(f) \otimes \Gamma$, где $A(f)$ – подалгебра в A , состоящая из всевозможных полиномов в разделенных степенях от $f_1, \dots, f_k$, Γ – групповая алгебра мультипликативной группы, состоящей из элементов $\exp v$, v пробегает конечную подгруппу в пространстве $\langle f_1, \dots, f_k \rangle$.

2) Пусть $M = A_0 D_1 + \dots + A_0 D_k \subset L = W(\mathcal{F})$. Алгебра A_0 изоморфна алгебре $\mathcal{O}(\mathcal{F}_0)$ для некоторого флага $\mathcal{F}_0$ на k -мерном векторном пространстве, при этом гомоморфизм ограничения $D \mapsto D|_{A_0}$ является изоморфизмом алгебры Ли M и $W(\mathcal{F}_0)$, а структура разделенных степеней в $A_0 \cong \mathcal{O}(\mathcal{F}_0)$ индуцирована структурой разделенных степеней в $\widehat{\mathcal{O}}(E)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Алгебра A_0 содержит элементы $y_1 = f_1, \dots, y_k = f_k$ и инвариантна относительно $D_i = \frac{\partial}{\partial y_i}, i = 1, \dots, k$. Следовательно, A_0 – правильная подалгебра в $\widehat{\mathcal{O}}(y)$ и согласно замечанию к § 1 $A_0 = A(y) \otimes \Gamma$, где Γ – групповая алгебра мультипликативной группы $\{\exp v, v \in G\}$, G – конечная аддитивная подгруппа в пространстве $\langle y_1, \dots, y_k \rangle$, $A(y)$ – полиномиальная правильная подалгебра в A_0 , состоящая из всех полиномов в разделенных степенях от $y_1, \dots, y_k$, содержащихся в A_0 (и, таким образом, в A). Учитывая, что $y_i = f_i$, получаем нужный результат.

2) Так как $\frac{\partial}{\partial z_i} A_0 = 0, \frac{\partial}{\partial y_i} A_0 \subset A_0$, то A_0 не имеет собственных нетривиальных идеалов, инвариантных относительно $\frac{\partial}{\partial y_i} = D_i, i = 1, \dots, k$. Следовательно, M – ТГ-распределение над A_0 . Согласно [15] $M \cong W(\mathcal{F}_0), A_0 \cong \mathcal{O}(\mathcal{F}_0)$.

Пусть $\mathfrak{n}$ – максимальный идеал в A_0 . Для $h \in \mathfrak{n}$ обозначим через $h^{[s]}$ s -ю разделенную степень h в структуре $\mathcal{O}(\mathcal{F}_0)$, а через $h^{(s)}$ – в структуре разделенных степеней алгебры $\widehat{\mathcal{O}}(E)$. Так как $h \in \mathfrak{n}$ однозначно определяется значениями $D_i(h), i = 1, \dots, k$, и $D_i h^{[s]} = h^{[s-1]} D_i(h), D_i h^{(s)} = h^{(s-1)} D_i(h), i = 1, \dots, k$, индукцией по s получаем, что $h^{(s)} \in A_0$ тогда и только тогда, когда $h^{[s]} \in A_0$ и $h^{[s]} = h^{(s)}$, т.е. структура разделенных степеней в $A_0 \cong \mathcal{O}(\mathcal{F}_0)$ индуцирована структурой разделенных степеней в $\widehat{\mathcal{O}}(E)$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть T – максимальный тор в p -замыкании алгебры $L = W(\mathcal{F})$, $S = \{f_1, \dots, f_k, g_{k+1}, \dots, g_n\}$ – определяющая система функций тора T , I – идеал в $\Omega(\mathcal{F})$, порожденный формами df_i , $i = 1, \dots, k$. Справедливы следующие утверждения:

- 1) классы форм $d \log g_i$, $i = k+1, \dots, n$, в $H^1(\mathcal{F})$ линейно независимы по модулю подпространства $\iota_* H^1(I)$, где $\iota: I \rightarrow \Omega(\mathcal{F})$ – естественное вложение комплексов,
- 2) $H^1(\mathcal{F}) = \langle [d \log g_i], i = k+1, \dots, n \rangle \oplus \iota_* H^1(I)$,
- 3) $\dim T \cap L = n$, $T \cap L = \langle f_i D_i, i = 1, \dots, k; D_{k+1}, \dots, D_n \rangle$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $A_0, y_1, \dots, y_k, z_{k+1}, \dots, z_n$ будут как выше. Покажем, что $D_{k+1}, \dots, D_n$ действуют полупросто на A . Согласно лемме 2 достаточно показать, что $D_{k+1}, \dots, D_n$ действуют тривиально на своей фиттинговой нуль-компоненте. Так как A_0 – алгебра инвариантов для $D_{k+1}, \dots, D_n$, достаточно доказать, что A_0 – фиттингова нуль-компонента для $D_{k+1}, \dots, D_n$.

Подпространство элементов в $\widehat{\mathcal{O}}(E)$, на которые операторы $D_{k+1} = \frac{\partial}{\partial z_{k+1}}, \dots, D_n = \frac{\partial}{\partial z_n}$ действуют нильпотентно, состоит из полиномов в разделенных степенях от $z_{k+1}, \dots, z_n$ с коэффициентами в кольце $\widehat{\mathcal{O}}(y)$ степенных рядов от $y_1, \dots, y_k$. Если $\Phi(z_{k+1}, \dots, z_n)$ – ненулевой полином такого вида, лежащий в A , то применяя к Φ операторы $\frac{\partial}{\partial z_{k+1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial z_n}$, мы получим линейную форму

$$u = a_{k+1}(y)z_{k+1} + \dots + a_n(y)z_n + b(y) \in A, \quad (8)$$

где $a_{k+1}(y), \dots, a_n(y), b(y) \in \widehat{\mathcal{O}}(y)$ и не все $a_i(y)$ равны нулю.

Из (8) следует, что $a_{k+1}(y), \dots, a_n(y) \in A_0$ и являются, таким образом, многочленами в разделенных степенях от некоторых стандартных образующих $x_1, \dots, x_k$ алгебры $A_0 \cong \mathcal{O}(\mathcal{F}_0)$ (см. предложение 4). Частные производные $\frac{\partial}{\partial x_i}$ в A_0 являются линейными комбинациями $D_i = \frac{\partial}{\partial y_i}$, $i = 1, \dots, k$, с коэффициентами из $A_0 = \widehat{\mathcal{O}}(y) \cap A$. Применяя дифференцирования $\frac{\partial}{\partial x_i}$ к форме u , получим линейную форму

$$u_1 = \alpha_{k+1}z_{k+1} + \dots + \alpha_n z_n + h(y) \in A, \quad (9)$$

где $\alpha_{k+1}, \dots, \alpha_n \in F$ и не все α_i равны нулю. Очевидно, $D_i u_1 = \frac{\partial h(y)}{\partial y_i} \in A_0$, $i = 1, \dots, k$. Следовательно, ряд $h(y)$ определяет дифференциальную форму $dh(y) \in Z^1(I)$.

Рассмотрим подпространство U в A , порожденное A_0 и всеми элементами вида (9) в A . U инвариантно относительно $D_1, \dots, D_n, f_1 D_1, \dots, f_k D_k$. Следовательно, U инвариантно относительно тора T (см. предложение 3). Так как

$D_i u_1 \in A_0, i = 1, \dots, n, f_i D_i u_1 \in A_0, i = 1, \dots, k$, то $U = U_0 \oplus A_0$, где U_0 – подпространство в пространстве инвариантов тора T в U . Следовательно, существует u_1 вида (9) в U_0 , причем можно считать, что $h(0) = 0$. Однако

$$du_1(0) \equiv \alpha_{k+1} dg_{k+1}(0) + \dots + \alpha_n dg_n(0) \pmod{\langle df_1(0), \dots, df_k(0) \rangle}.$$

Так как не все $\alpha_{k+1}, \dots, \alpha_n$ равны нулю, то из построения определяющей системы функций тора T следует, что $du_1(0) \neq 0$, т.е. $u_1 \in \mathfrak{m} \setminus \mathfrak{m}^{(2)}$, а это противоречит лемме 5. Итак, $D_{k+1}, \dots, D_n$ – полупростые элементы, коммутирующие с тором T , и значит, $D_{k+1}, \dots, D_n \in T$. Из предложения 3 получаем $T \cap L = T_0 \oplus (T_1 \cap L)$, $T_1 \cap L \subset \bar{V} \cap L = V$. Следовательно, $T_1 \cap L = \langle D_{k+1}, \dots, D_n \rangle$. Аналогично, если $[dz_i] = [d \log g_i], i = k+1, \dots, n$, линейно зависимы в $H^1(\mathcal{F})$ по модулю $\iota_* H^1(I)$, то для некоторых $\omega \in Z^1(I), u_1 \in A$ и $\alpha_{k+1}, \dots, \alpha_n \in F$, не равных нулю одновременно, $\alpha_{k+1} dz_{k+1} + \dots + \alpha_n dz_n + \omega = du_1$. Очевидно, ω можно записать в виде $dh(y), \frac{\partial h(y)}{\partial y_i} \in A_0$, и мы получаем элемент u_1 вида (9) в A . Предыдущее рассуждение показывает, что это невозможно.

Согласно доказанной теореме и следствию 1 максимальный тор T однозначно восстанавливается по своей определяющей системе функций $S = \{f_1, \dots, f_k, g_{k+1}, \dots, g_n\}$, удовлетворяющей условиям

- S1. $f_i \in \mathfrak{m} \setminus \mathfrak{m}^{(2)}, i = 1, \dots, k, g_j(0) = 1, j = k+1, \dots, n$;
- S2. $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^{(2)} = \langle \bar{f}_1, \dots, \bar{f}_k, \overline{g_{k+1}-1}, \dots, \overline{g_n-1} \rangle$;
- S3. $H^1(\mathcal{F}) = \langle [d \log g_i], i = k+1, \dots, n \rangle \oplus \iota_* H^1(I)$, где I – идеал в $\Omega(\mathcal{F})$, порожденный формами $df_1, \dots, df_k, \iota$ – естественное вложение I в $\Omega(\mathcal{F})$.

Справедливо и обратное утверждение.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $S = \{f_1, \dots, f_k, g_{k+1}, \dots, g_n\}$ – система элементов алгебры $A = \mathcal{O}(\mathcal{F})$, удовлетворяющая условиям S1–S3. Существует единственный максимальный тор $T \subset \bar{L}$, для которого S является определяющей системой функций.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО состоит в построении тора T так, как это сделано в предложении 3: выбираем базис $D_1, \dots, D_n$ в $L = W(\mathcal{F})$, дуальный базису (5) в $\Omega^1(\mathcal{F})$, полагаем $T_0 = \langle f_i D_i, i = 1, \dots, k \rangle$. Остается показать, что $T = T_1 \oplus T_0$, где T_1 – максимальный тор в p -замыкании $\bar{V}$ абелевой транзитивной подалгебры $V = \langle D_1, \dots, D_n \rangle$. Очевидно, $D_{k+1}, \dots, D_n$ коммутируют с T_0 . Так же, как и при доказательстве теоремы 1, можно показать, что из условий S1–S3 следует полупростота операторов $D_i, i = k+1, \dots, n$, т.е. $D_{k+1}, \dots, D_n \in T_1$. Далее, так же, как при доказательстве утверждения 3) предложения 3, можно показать для любого полупростого элемента $t \in \bar{L}$, коммутирующего с T , что $t \in T$, т.е. T – максимальный тор.

Остается показать, что S – определяющая система функций тора T . Очевидно, S состоит из собственных функций тора T . Поэтому достаточно доказать, что для любой необратимой собственной функции h тора T ее класс $\bar{h} \in \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^{(2)}$ лежит в пространстве $\langle \bar{f}_1, \dots, \bar{f}_k \rangle$. Так же, как и выше, рассмотрим топологические образующие $y_i = f_i, i = 1, \dots, k, z_i = \log g_i, i = k+1, \dots, n$, алгебры $\hat{\mathcal{O}}(E)$. Пусть

$h \in \mathfrak{m} \setminus \mathfrak{m}^{(2)}$ имеет вес α относительно тора T . Тогда для $i = k+1, \dots, n$ $D_i(h) = \alpha(D_i)h = \frac{\partial}{\partial z_i}(h)$, следовательно, $h = \varphi(y_1, \dots, y_k) \exp(a_{k+1}z_{k+1} + \dots + a_n z_n)$. Так как $h \in \mathfrak{m}$, то $\varphi(y) \in \widehat{\mathfrak{m}}(y)$, где $\widehat{\mathfrak{m}}(y)$ – максимальный идеал подалгебры формальных степенных рядов от $y_1, \dots, y_k$ (в разделенных степенях). Следовательно, $\overline{h} = \overline{\varphi} \in \widehat{\mathfrak{m}}/\widehat{\mathfrak{m}}^{(2)} = \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^{(2)}$. Очевидно, $\overline{\varphi}(y) \in \langle \overline{y}_1, \dots, \overline{y}_k \rangle = \langle \overline{f}_1, \dots, \overline{f}_k \rangle$. Единственность максимального тора T установлена в следствии 2.

ЗАМЕЧАНИЕ. Покажем, что любые элементы $f_1, \dots, f_k \in \mathfrak{m} \setminus \mathfrak{m}^{(2)}$, классы которых линейно независимы в $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^{(2)}$, входят в определяющую систему функций $S = \{f_1, \dots, f_k, g_{k+1}, \dots, g_n\}$ некоторого максимального тора T .

Для этого выберем новые топологические образующие $y_1, \dots, y_n$ алгебры $\widehat{\mathcal{O}}(E)$: $y_i = f_i$, $i = 1, \dots, k$, линейные части элементов $y_{k+1}, \dots, y_n \in A = \mathcal{O}(\mathcal{F})$ дополняют линейные части $f_1, \dots, f_k$ до базиса $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^{(2)}$. Пусть A_0 – подалгебра в A , состоящая из всех рядов от переменных $y_1, \dots, y_k$, содержащихся в A . Очевидно, A_0 – правильная подалгебра в алгебре рядов в разделенных степенях от переменных $y_1, \dots, y_k$. Легко убедиться, что для идеала I в $\Omega(\mathcal{F})$, порожденного $df_1 = dy_1, \dots, df_k = dy_k$, $Z^1(I) = A_0 dy_1 + \dots + A_0 dy_k$. Так же, как в предложении 4, $M = A_0 \partial/\partial y_1 + \dots + A_0 \partial/\partial y_k$ – ТИ-распределение над A_0 , изоморфное $W(\mathcal{F}_0)$. Таким образом, из описания группы $H^1(\mathcal{F}_0)$ в §1 следует, что существуют ряды $h_1, \dots, h_k$ от переменных $y_1, \dots, y_k$ такие, что классы форм dh_i , $i = 1, \dots, k$, образуют базис $\iota^* H^1(I) = Z^1(I)/dA_0$. Следовательно, $\dim \iota^* H^1(I) = k$.

Распределение

$$\mathcal{L} = \left\langle \frac{\partial}{\partial y_j}, j = k+1, \dots, y_n \right\rangle_A \subset W(\mathcal{F})$$

интегрируемо, так как его характеристический идеал в Ω_N , $N = \text{ht}(\mathcal{F})$, порождается замкнутыми формами df_i , $i = 1, \dots, k$, и замкнутыми формами, задающими распределение $W(\mathcal{F})$. Согласно [15] распределение $\mathcal{L}$ интегрируемо и его алгебра инвариантов A_0 отделима в A , т.е. $A = A_0 \otimes B$. На B существует структура разделенных степеней $B \cong \mathcal{O}(\mathcal{F}_1)$ такая, что $\mathcal{L} \cong A_0 \otimes W(\mathcal{F}_1)$.

Однако структура разделенных степеней на $\mathcal{O}(\mathcal{F}_1)$ может не совпадать со структурой разделенных степеней на $\widehat{\mathcal{O}}(E)$ (мы рассматриваем $B = 1 \otimes B$ как подалгебру в A и, таким образом, как подалгебру в $\widehat{\mathcal{O}}(E)$). Тем не менее, эти структуры связаны между собой. Пусть $x_{k+1}, \dots, x_n$ – некоторая стандартная система образующих алгебры $\mathcal{O}(\mathcal{F}_1) = \mathcal{O}(n-k : \underline{l})$, $\underline{l} = (l_{k+1}, \dots, l_n)$. Соответствующие частные производные $\partial_j \in W(\mathcal{F}_1) \subset \mathcal{L}$ являются специальными дифференцированиями алгебры $A = \mathcal{O}(\mathcal{F})$. Обратно, специальные дифференцирования $\frac{\partial}{\partial y_j} \in \mathcal{L} \subset W(\mathcal{F})$ являются линейными комбинациями дифференцирований ∂_j с коэффициентами из A . Отсюда следует, в частности, что функции x_j , $j = k+1, \dots, n$, содержатся в $\mathfrak{m} \setminus \mathfrak{m}^{(2)}$ ($\mathfrak{m}$ – максимальный идеал в A) и линейно независимы по $\text{mod}(\langle y_1, \dots, y_k \rangle + \mathfrak{m}^{(2)})$. Пусть $g_{k+1}, \dots, g_n$ – такие элементы из B , что $g_j - 1 \equiv x_j \pmod{\mathfrak{m}^{(2)}}$ и классы форм $d(\log g_j)$ образуют базис группы

$H^1(\mathcal{F}_1)$ (здесь $\overline{\log g_j}$ означает логарифм в структуре разделенных степеней алгебры $\mathcal{O}(\mathcal{F}_1) = B$). Очевидно, ограничение формы $d(\log g_j)$ на $W(\mathcal{F}_1)$ (здесь $\log g_j$ рассматривается в структуре разделенных степеней алгебры $\mathcal{O}(\mathcal{F}) = A$) совпадает с формой $d(\overline{\log g_j})$.

Покажем, что классы форм $d \log g_j$, $j = k+1, \dots, n$, образуют базис дополнения к $\iota^* H^1(I)$ в $H^1(\mathcal{F})$. Действительно, в противном случае для некоторых $a_1, \dots, a_n \in F$, $f \in A = A_0 \otimes B$ и всех $s = k+1, \dots, n$

$$\left(\sum_{j=k+1}^n a_j d \log g_j \right) (\partial_s) = \left(df + \sum_{i=1}^k a_i dh_i(y_1, \dots, y_k) \right) (\partial_s) = df(\partial_i),$$

что, очевидно, невозможно. Следовательно, система элементов $S = \{f_1, \dots, f_k, g_{k+1}, \dots, g_n\}$ удовлетворяет условиям S1–S3 определяющей системы функций максимального тора.

3.2. Собственные функции максимального тора. Выясним, как можно определить все собственные функции максимального тора по его определяющей системе. Согласно предложению 3 $T = T_1 \oplus T_0$, где $T_0 = T \cap L_0$, T_1 – максимальный тор в p -замыкании $\bar{V}$ абелевой транзитивной подалгебры V .

ТЕОРЕМА 3. Пусть $S = \{f_1, \dots, f_k, g_{k+1}, \dots, g_n\}$ – определяющая система функций максимального тора T .

1) Алгебра A^T инвариантов тора T состоит из всевозможных полиномов от p^l -х ($l > 0$) разделенных степеней элементов $f_1, \dots, f_k$, содержащихся в $A = \mathcal{O}(\mathcal{F})$. Подалгебра A^T отделима в A . Существует подалгебра B в A , инвариантная относительно тора T такая, что A изоморфна как T -модуль алгебре $A^T \otimes B$, $B \cong B_0 \otimes B_1$, где B_0 – подалгебра в B , порожденная $f_1, \dots, f_k$, B_1 – подалгебра в B , порожденная обратимыми собственными функциями тора T .

2) $A^T = F$ тогда и только тогда, когда кохомологические классы форм $f_1^{p-1} df_1, \dots, f_k^{p-1} df_k$ линейно независимы в $H^1(\mathcal{F})$.

3) Функция $g \in A$, $g(0) = 1$, является обратимой собственной функцией тора T тогда и только тогда, когда

$$d \log g \in \langle d \log g_{k+1}, \dots, d \log g_n \rangle_F + d(\langle f_1^{(p)}, \dots, f_k^{(p)} \rangle) + d \log(1 + \mathfrak{n}),$$

где $\mathfrak{n}$ – максимальный идеал в A^T .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Пусть $\{D_1, \dots, D_n\}$ – базис A -модуля $L = W(\mathcal{F})$, двойственный $\{df_1, \dots, df_k, d \log g_{k+1}, \dots, d \log g_n\}$. Так как $D_{k+1}, \dots, D_n$ и полупростые части операторов $D_1, \dots, D_k$ порождают тор $T_1 \subset T$ (см. предложение 3 и теорему 1), то, используя пополненную алгебру разделенных степеней, как и при доказательстве предложения 4, получаем, что A^T содержится в подалгебре $A_{\text{pol}}(f)$, состоящей из всевозможных полиномов в разделенных степенях от $f_1, \dots, f_k$. Таким образом, $A^T = A_{\text{pol}}(f)^{T_0}$. Так как $T_0 = \langle f_1 D_1, \dots, f_k D_k \rangle$, то алгебра T_0 -инвариантов в $A_{\text{pol}}(f)$ состоит из полиномов от p^l -х разделенных

степеней, $l > 0$, элементов $f_1, \dots, f_k$. Очевидно, A^T инвариантна относительно $\{D_1^p, \dots, D_k^p\}$, $D_i^p|_{A^T} = \frac{\partial}{\partial(f_i^{(p)})}$ – специальное дифференцирование в структуре разделенных степеней в A^T , индуцированной соответствующей структурой в A . Поэтому A^T – правильная полиномиальная подалгебра в разделенных степенях относительно переменных $f_1^{(p)}, \dots, f_k^{(p)}$ в пополненной алгебре разделенных степеней $\widehat{\mathcal{O}}(E)$, в качестве топологических образующих которой можно взять $f_1, \dots, f_k, \log g_{k+1}, \dots, \log g_n$. Согласно замечанию о правильных подалгебрах в §1 A^T является алгеброй срезанных многочленов от образующих $h_1, \dots, h_r, F_j$, $j = 1, \dots, l$, где h_i , $i = 1, \dots, r$, – линейные комбинации многочленов $f_1^{(p)}, \dots, f_k^{(p)}$, $r \leq k$, F_j – некоторая рекуррентная последовательность полиномов в разделенных степенях от $h_1, \dots, h_r$, и для максимального идеала $\mathfrak{n}$ алгебры A^T естественный гомоморфизм $j: \mathfrak{n}/\mathfrak{n}^2 \rightarrow \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$, индуцированный вложением $\mathfrak{n} \subset \mathfrak{m}$, инъективен. Следовательно, A^T – отделимая подалгебра в A .

Нормируем все обратимые собственные функции g тора T так, чтобы $g(0) = 1$. Так как A^T – отделимая подалгебра в A , то $A \cong A^T \otimes C$ для некоторой F -алгебры C и $\dim A^T = p^s$ для некоторого s . Очевидно, $C \cong A/\mathfrak{n}A$. Обозначим через $\overline{\mathfrak{m}}$ максимальный идеал алгебры $A/\mathfrak{n}A$. Алгебра A имеет базис, состоящий из собственных функций тора T . Выберем собственные функции $u_1, \dots, u_{N-s}$ так, чтобы образы элементов $u_i - u_i(0)$ составляли базис пространства $\overline{\mathfrak{m}}/\overline{\mathfrak{m}}^2$. Тогда подалгебра B , порожденная элементами u_i , изоморфна C и $A = A^T B$, т.е. $A \cong A^T \otimes B$ как T -модуль. В качестве первых n функций u_i можно взять функции из определяющей системы S . Функции $f_1, \dots, f_k$ порождают подалгебру B_0 в B .

2) следует из 1), так как когомологические классы форм $f_1^{p-1}df_1, \dots, f_k^{p-1}df_k$ линейно зависимы тогда и только тогда, когда в пополненной алгебре существует ненулевая линейная комбинация элементов $f_1^{(p)}, \dots, f_k^{(p)}$, принадлежащая A и, следовательно, A^T .

3) Пусть g – собственная функция тора T , соответствующая ненулевому весу и нормированная условием $g(0) = 1$. Очевидно, g – собственная функция тора T_1 , порожденного $D_{k+1}, \dots, D_n$ и полупростыми частями дифференцирований $D_1, \dots, D_k$ (см. предложение 3). Следовательно, $g \in u_\lambda A_0$, где $u_\lambda \in A$ – собственная функция транзитивной абелевой подалгебры $V = \langle D_1, \dots, D_n \rangle \subset L = W(\mathcal{F})$, A_0 – нильпространство V (см. лемму 2). Переходя к новым топологическим образующим пополненной алгебры разделенных степеней $y_i = f_i$, $i = 1, \dots, k$, $y_j = \log g_j$, $j = k+1, \dots, n$, получаем $u_\lambda = \exp(\mu_1 y_1 + \dots + \mu_n y_n)$, $\mu_i \in F$. Кроме того, обратимая собственная функция g должна быть инвариантом тора $T_0 = T \cap L_0$. Так как $A_0 = A_{\text{pol}}(f)$, то $g = u_\lambda w$, где w – многочлен в разделенных степенях от $f_1, \dots, f_k$. Запишем g в виде $g = \exp(w_1(f) + \mu_{k+1} y_{k+1} + \dots + \mu_n y_n)$, где $w_1 = \log w + \mu_1 y_1 + \dots + \mu_k y_k$ – многочлен в разделенных степенях от y_i , $i = 1, \dots, k$, $dw_1 \in Z^1(\mathcal{F})$. Так как $T_0 = \langle f_i D_i = y_i \partial_{y_i}, i = 1, \dots, k \rangle$, то w_1 является многочленом в разделенных степенях от $f_i^{(p)} = y_i^{(p)}$, $i = 1, \dots, k$. Очевидно, $\exp w_1$ можно записать в виде $h(f_1^{(p)}, \dots, f_k^{(p)}) \exp(\nu_1 f_1^{(p)} + \dots + \nu_k f_k^{(p)})$, где h – некоторый полином в разделенных степенях (см. свойства $\exp$ в §1). Получаем

$$g = h(f_1^{(p)}, \dots, f_k^{(p)}) \exp(\nu_1 f_1^{(p)} + \dots + \nu_k f_k^{(p)} + \mu_{k+1} \log g_{k+1} + \dots + \mu_n \log g_n). \quad (10)$$

Так как g имеет ненулевой вес относительно тора T , то $\exp$ не содержится в F , но содержится в A , в чем можно убедиться, применяя к g достаточное число раз операторы D_i^p , $i = 1, \dots, k$. Поэтому согласно 1) $h(f_1^{(p)}, \dots, f_k^{(p)}) \in 1 + \mathfrak{n} \subset A^T$. Теперь

$$d \log g \equiv d(\nu_1 f_1^{(p)} + \dots + \nu_k f_k^{(p)}) + (\mu_{k+1} d \log g_{k+1} + \mu_n d \log g_n) \pmod{d \log(1 + \mathfrak{n})}.$$

Из доказательства теоремы и свойств экспоненциального отображения получаем следующее утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть T – максимальный тор в p -замыкании алгебры Ли $L = W(\mathcal{F})$, $A = \mathcal{O}(\mathcal{F})$, Δ – множество весов T -модуля A . Пусть $S = \{f_1, \dots, f_k, g_{k+1}, \dots, g_n\}$ – определяющая система функций тора T , α_i – веса функций f_i , $i = 1, \dots, k$, $\{D_1, \dots, D_n\}$ – базис A -модуля L , двойственный базису df_i , $i = 1, \dots, k$, $d \log g_j$, $j = k+1, \dots, n$. Пусть $b_\beta \in B$ – весовая функция веса $\beta \in \Delta$. Корневое пространство L_γ тора T в L имеет вид

$$L_\gamma = \left(\bigoplus_{i=1}^k A^T b_{\gamma + \alpha_i} D_i \right) \oplus \left(\bigoplus_{j=k+1}^n A^T b_\gamma D_j \right).$$

В частности, L_0 – свободный A^T -модуль с базисом $\{f_i D_i, D_j, i = 1, \dots, k, j = k+1, \dots, n\}$.

СЛЕДСТВИЕ 4. Пусть T – максимальный тор в p -замыкании алгебры $W(\mathcal{F})$.

1) $\dim A^T = p^s$, $\dim T = \text{ht}(\mathcal{F}) - s$. Множество весов T -модуля A совпадает с множеством корней тора T в $W(\mathcal{F})$ и является элементарной абелевой p -группой ранга, равного $\dim T$.

2) Обратимые функции тора T имеют вид

$$g_\nu = h \cdot \exp(\nu_1 f_1^{(p)} + \dots + \nu_k f_k^{(p)} + \nu_{k+1} \log g_{k+1} + \dots + \nu_n \log g_n),$$

где h – обратимая функция в A^T , $\nu_1, \dots, \nu_n \in F$.

3) Пусть Γ – подгруппа в F^n , состоящая из наборов $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$, для которых существует обратимая собственная функция g_ν тора T , Γ_1 – подгруппа в Γ , состоящая из наборов ν , у которых последние $n-k$ компонент равны нулю. Пусть Γ_2 – подгруппа в Γ , дополнительная к Γ_1 . Γ изоморфна группе весов T -модуля A , обращающихся в нуль на T_0 .

4) В качестве подалгебры B_1 в A (см. теорему 3) можно выбрать подалгебру, порожденную собственными функциями g_ν , $g_\nu(0) = 1$, когда ν пробегает базис группы Γ над $\mathbb{F}_p$.

5) Пусть $C_i, i = 1, 2$, – подалгебра в A , порожденная обратимыми собственными функциями g_ν , $g_\nu(0) = 1$, когда ν пробегает базис группы Γ_i над $\mathbb{F}_p$. Алгебра A изоморфна как T -модуль тензорному произведению подалгебр $A \cong A^T \otimes B_0 \otimes C_1 \otimes C_2$. Здесь B_0 – подалгебра в A , порожденная собственными функциями $f_1, \dots, f_k$ из определяющей системы функций тора T .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение о размерности алгебры A^T следует из отделимости A^T . Очевидно, нуль-компонента A_0 тора T_1 , A^{T_1} , совпадает с $A_{\text{pol}}(f_1, \dots, f_k) = B_0 \otimes A^T$, где B_0 – подалгебра в A , порожденная $f_1, \dots, f_k$, $\dim B_0 = p^k$. Пусть Δ – множество весов T -модуля A . Если g – обратимая собственная функция, соответствующая ненулевому весу λ , то $T_0(g) = 0$, так как $T_0(A) \subset \mathfrak{m}$. Поэтому $\lambda(T_0) = 0$ для любого веса λ такого, что A_λ содержит обратимый элемент. Вид собственных функций тора T установлен при доказательстве теоремы 3, откуда получаем утверждение 2).

Обозначим через Ψ множество весов тора T , соответствующих обратимым собственным функциям. Пусть Λ – множество весов V -модуля A , $V = \langle D_1, \dots, D_n \rangle$. Для $v \in V$ пусть v_s – полупростая часть элемента v . Так как согласно предложению 3 тор T_1 является p -замыканием линейной оболочки полупростых частей элементов $v \in V$, то каждому весу $\lambda \in \Lambda$ можно поставить в соответствие вес $\bar{\lambda} \in \Psi$ (см. лемму 2), полагая $\bar{\lambda}(v_s) = \lambda(v)$, $\bar{\lambda}(v_s^{p^j}) = \lambda(v^{p^j})$. Очевидно, соответствие $\lambda \mapsto \bar{\lambda}$ является биекцией между множествами весов Λ и Ψ , кроме того, $A_\lambda = A_{\bar{\lambda}}$, $\bar{\lambda} + \mu = \bar{\lambda} + \bar{\mu}$.

Согласно лемме 2 Λ – элементарная абелева p -группа ранга $r \leq \text{ht}(\mathcal{F})$, $A_\lambda A_\mu = A_{\lambda+\mu}$. Поэтому Ψ – элементарная абелева p -группа ранга r , изоморфная Λ . Пусть $\dim T_1 = q$, $\{t_1, \dots, t_q\}$ – базис T_1 , состоящий из тороидальных элементов. Очевидно, для любого $\lambda \in \Lambda$ $\bar{\lambda}(t_i) \in \mathbb{F}_p$ и ограничение весов из Ψ на $\langle t_1, \dots, t_q \rangle_{\mathbb{F}_p}$ позволяет рассматривать Ψ (или $\bar{\Lambda}$) как подпространство в $\langle t_1, \dots, t_q \rangle_{\mathbb{F}_p}^*$. Следовательно, $r \leq q$. Если $r < q$, то существует $t \in T_1$, $t \neq 0$, такой, что $\bar{\lambda}(t) = 0$ для любого $\bar{\lambda} \in \Psi$. С другой стороны, $A = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ и, значит, $t(A) = 0$, т.е. $t = 0$. Поэтому $r = q$. Следовательно, группа Ψ изоморфна группе Γ , что доказывает утверждение 3).

Выберем базис $\{\lambda_1, \dots, \lambda_r\}$ над $\mathbb{F}_p$ в Γ и для каждого λ_i обратимую собственную функцию w_i тора T , $w_i \in A_{\bar{\lambda}_i}$, нормированную условием $w_i(0) = 1$. Тогда подалгебра в A , порожденная функциями w_i , изоморфна групповой алгебре $F[\Gamma]$ и согласно лемме 2 $A = F[\Gamma] \otimes A_0$, где $A_0 = A^{T_1} = A^T \otimes B_0$. Так как $\dim T_0 = k$ и $\dim A^T = p^s$, получаем, что $\text{ht}(\mathcal{F}) = r + k + s = \dim T_1 + \dim T_0 + s = \dim T + s$ и размерность T равна рангу группы весов в A . Очевидно, $F[\Gamma] = F[\Gamma_1] \otimes F[\Gamma_2]$, что доказывает утверждения 4) и 5). Так как базис $D_1, \dots, D_n$ свободного A -модуля $W(\mathcal{F})$ состоит из корневых векторов, то группа весов Δ совпадает с множеством корней, что завершает доказательство утверждения 1).

В дальнейшем нам понадобится вид собственных функций максимального тора в одном частном случае. Из следствия 4 и свойств экспоненциального отображения получаем следующее утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 5. Если определяющая система функций $S = \{f_1, \dots, f_n\}$ максимального тора T не содержит обратимых собственных функций, то собственные функции тора T имеют вид

$$h g_\nu f_\alpha, \quad f_\alpha = f_1^{i_1} \cdots f_n^{i_n}, \quad g_\nu = \exp(\nu_1 f_1^{(p)} + \cdots + \nu_n f_n^{(p)}),$$

где $h \in A^T$, $0 \leq i_1, \dots, i_n \leq p-1$, $\nu_1, \dots, \nu_n \in F$. Множество наборов $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$ является подгруппой Γ ранга $\dim T - n$ в аддитивной группе F^n .

Имеем $\nu \in \Gamma$ тогда и только тогда, когда

$$\exp(\nu_1^{1/p} f_1 + \dots + \nu_n^{1/p} f_n) \in A.$$

Вес γ собственной функции из следствия 5 будем записывать в виде

$$\gamma = \nu + \alpha, \quad \nu = (\nu_1, \dots, \nu_n) \in \Gamma \subset F^n, \quad \alpha = (i_1, \dots, i_n), \quad i_1, \dots, i_n \in \mathbb{F}_p.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Размерность максимального тора T , заданного определяющей системой функций $S = \{f_1, \dots, f_k, g_{k+1}, \dots, g_m\}$ можно найти, используя замечание 2) к §2. Действительно, согласно предложению 3 $T = T_1 \oplus T_0$, где T_0 — k -мерный тор в $W(\mathcal{F})_0$, T_1 — единственный максимальный тор в p -замыкании $\overline{V}$ абелевой транзитивной подалгебры $V \subset W(\mathcal{F})$, двойственного пространству

$$\overline{\Sigma} = \langle df_1, \dots, df_k, d \log g_{k+1}, \dots, d \log g_m \rangle \subset Z^1(\mathcal{F}).$$

В замечании 2) §2 изложен метод нахождения тора T_1 .

3.3. Максимальные торы общего положения. Максимальный тор $T \subset \overline{L}$ будем называть *тором общего положения*, если $T \cap L_0 = 0$. Из результатов предыдущего пункта следует, что T — тор общего положения тогда и только тогда, когда $T = T_1$, где T_1 — максимальный тор в p -замыкании транзитивной абелевой подалгебры $V \subset L$, а определяющая система функций тора T состоит из обратимых функций $g_1, \dots, g_n$, $g_i(0) = 1$. Из теоремы 1 получаем

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Пусть $S = \{g_1, \dots, g_n\}$ — определяющая система функций максимального тора T общего положения. Когомологические классы форм $d \log g_i$, $i = 1, \dots, n$, образуют базис $H^1(\mathcal{F})$.

Для формы $\omega \in Z^1(\mathcal{F})$ обозначим через $[\omega]$ когомологический класс формы ω в $H^1(\mathcal{F})$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. Пусть Σ — подпространство в $Z^1(\mathcal{F})$ такое, что

$$\dim \Sigma = \dim \Sigma(0) = \dim[\Sigma] = n.$$

Двойственное к Σ пространство $V \subset W(\mathcal{F})$ состоит из полупростых элементов, и его p -замыкание $\overline{V}$ является N -мерным тором общего положения в p -замыкании алгебры $W(\mathcal{F})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Условия предложения означают, что $\Sigma(0) = \Omega^1(\mathcal{F})(0)$ и $[\Sigma] = H^1(\mathcal{F})$. Так как $\Sigma \subset Z^1(\mathcal{F})$, то $V = \{D \in W(\mathcal{F}) \mid \Sigma(D) \in F\}$ — абелева транзитивная подалгебра в $W(\mathcal{F})$. Согласно лемме 2 для доказательства полупростоты элементов из V достаточно доказать, что фиттингова нуль-компонента A_0 V -модуля $A = \mathcal{O}(\mathcal{F})$ состоит из инвариантов, т.е. в силу транзитивности V из констант.

Допустим, $A_0 \neq F$. Следовательно, существует $f \in A_0$, $f \neq \text{const}$ такое, что $V(f) \subset F$, т.е. $V \circ df = 0$, $df \neq 0$. Из условий следует, что базис $\omega_1, \dots, \omega_n$

пространства Σ является базисом свободного $\mathcal{O}(\mathcal{F})$ -модуля $\Omega^1(\mathcal{F})$. Поэтому $df = u_1\omega_1 + \dots + u_n\omega_n$, $u_i \in \mathcal{O}(\mathcal{F})$. Согласно предложению 3, 1) $V = \text{Ann}_L \Sigma$. Следовательно, $D \circ df = D(u_1)\omega_1 + \dots + D(u_n)\omega_n = 0$ для любого $D \in V$. В силу транзитивности V отсюда получаем, что $u_i = \text{const}$ и $df \in \Sigma$. Однако по условию $\Sigma \cap B^1(\mathcal{F}) = 0$. Полученное противоречие показывает, что $A_0 = F$.

Суммируем полученные результаты о максимальных торах общего положения.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $\mathcal{T}$ – множество максимальных торов общего положения в p -замыкании алгебры $W_m(\mathcal{F})$, Θ – множество m -мерных подпространств Σ в $Z^1(\mathcal{F})$ таких, что $\Sigma(0) = \Omega^1(\mathcal{F})(0)$, $[\Sigma] = H^1(\mathcal{F})$. Для $\Sigma \in \Theta$ пусть

$$V_\Sigma = \{D \in W_m(\mathcal{F}) \mid \omega(D) \in F, \omega \in \Sigma\},$$

$\overline{V}_\Sigma$ – p -замыкание V_Σ .

- 1) $\overline{V}_\Sigma \in \mathcal{T}$.
- 2) Соответствие $\Sigma \mapsto \overline{V}_\Sigma$ является биекцией множеств Θ и $\mathcal{T}$. Обратное соответствие сопоставляет тору $T \in \mathcal{T}$ подпространство

$$\Sigma \in \Theta, \quad \Sigma = \{\omega \in \Omega^1(\mathcal{F}) \mid \omega(T \cap W_m(\mathcal{F})) \in F\}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Из теоремы следует, что максимальный тор T общего положения задается набором n дифференциальных форм $\omega_1, \dots, \omega_n$ таких, что

$$\begin{aligned} \omega_i &= dx_i + df_i + \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^{(p^{m_j}-1)} dx_j, \\ a_{ij} &\in F, \quad \det(a_{ij}) \neq 0, \quad f_i \in \mathfrak{m}^{(2)}. \end{aligned}$$

3.4. Стандартные и оптимальные торы. Согласно [4] тор T в p -замыкании $\overline{L}$ алгебры Ли L называется *стандартным*, если централизатор тора T в $\overline{V}$ действует триангулируемо на L , т.е. $C_{\overline{L}}(T)^{(1)}$ действует нильпотентно на L .

Известно [4], что тор максимальной размерности – стандартный. Для стандартного тора $C_{\overline{V}}(T) = T \oplus U$, где U – нильпотентный p -идеал централизатора, т.е. $l[p^k] = 0$ для любого $l \in U$ и достаточно большого k (см. [4]). Корни стандартного тора T продолжаются до линейных функций на $C_{\overline{V}}(T)$ по правилу $\alpha(t+u) = \alpha(t)$, $t \in T$, $u \in U$ (см. [20]). Корень α стандартного тора T называется *собственным*, если для некоторого i , $1 \leq i \leq p-1$, $\alpha([L_{i\alpha}, L_{-i\alpha}]) = 0$.

Тор T в $\overline{L}$ называется *оптимальным*, если T имеет максимальную размерность среди всех торов и число его собственных корней максимально.

ТЕОРЕМА 5. Пусть $S = \{f_1, \dots, f_k, g_{k+1}, \dots, g_n\}$ – определяющая система функций максимального тора T в p -замыкании алгебры Ли $L = W(\mathcal{F})$. Тор T является стандартным тогда и только тогда, когда он имеет максимальную размерность, т.е. когда классы форм $f_1^{p-1}df_1, \dots, f_k^{p-1}df_k$ линейно независимы в $H^1(\mathcal{F})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $D_1, \dots, D_n \in L$ будут как в следствии 1, $V = \langle D_1, \dots, D_n \rangle$ – абелева транзитивная подалгебра в L , $\bar{V}$ – p -замыкание V . Так как $\bar{V}$ инвариантно относительно тора T и $\bar{L} = \bar{V} + L$, то $C_{\bar{V}}(T) = C_{\bar{V}}(T) + C_L(T)$. Отметим, что $\bar{V} = V + \bar{V}^p$, $D_{k+1}, \dots, D_n \in T_1 \subset \bar{V}^p$, $D_1, \dots, D_k$ – корневые векторы тора T , соответствующие ненулевым корням, и $[\bar{V}^p, T] = 0$ (см. лемму 6 и доказательство утверждения 3) предложения 3). Следовательно, $C_{\bar{V}}(T) = \bar{V}^p$ и $C_{\bar{V}}(T) = \bar{V}^p + C_L(T)$.

Из теоремы 3, 1) получаем, что $A^T \neq F$ тогда и только тогда, когда некоторая ненулевая линейная комбинация $h = a_1 f_1^{(p)} + \dots + a_k f_k^{(p)}$ содержится в $A = \mathcal{O}(\mathcal{F})$ (разделенные p -степени вычисляются в алгебре $\mathcal{O}(E)$). Если $h \in A^T$, то согласно следствию 3 $C_L(T) = L_0$ содержит элементы $h f_i D_i$, $i = 1, \dots, k$, и, следовательно, для некоторого i $0 \neq a_i f_i D_i = [D_i^p, h f_i D_i] \in C_{\bar{V}}(T)^{(1)}$. Так как $f_i D_i \in T$, то тор T не является стандартным.

Если $A^T = F$, то согласно следствию 4 $\dim T = \text{ht}(\mathcal{F}) = N$. Как известно (см. также следствие 3), центализатор N -мерного тора T в $W_N = \text{Der } A$ совпадает с T . Так как $T \subset C_{\bar{V}}(T) \subset C_{W_N}(T) = T$, то $T = C_{\bar{V}}(T)$. Следовательно, T – стандартный тор.

ТЕОРЕМА 6. *Максимальный тор T в p -замыкании алгебры Ли $W(\mathcal{F})$ является оптимальным тогда и только тогда, когда определяющая система функций тора T состоит из необратимых функций $S = \{f_1, \dots, f_n\}$ таких, что классы форм $f_i^{p-1} df_i$, $i = 1, \dots, n$, образуют базис $H^1(\mathcal{F})$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если определяющая система функций S максимального тора T содержит обратимую функцию g_{k+1} , соответствующую весу α , то корневое пространство $L_{i\alpha}$ содержит элемент $g_{k+1}^i D_{k+1}$. Здесь использованы обозначения из леммы 6. Согласно теореме 1 $D_{k+1} \in T$ и $D_{k+1}(g_{k+1}) = g_{k+1}$, т.е. $\alpha(D_{k+1}) = 1$. Следовательно,

$$[g_{k+1}^i D_{k+1}, g_{k+1}^j D_{k+1}] = (j - i) g_{k+1}^{i+j} D_{k+1},$$

в частности, для любого i , $1 \leq i \leq p - 1$,

$$[g_{k+1}^i D_{k+1}, g_{k+1}^{p-i} D_{k+1}] = (p - 2i) g_{k+1}^p D_{k+1} = (p - 2i) D_{k+1}.$$

Таким образом, $D_{k+1} \in [L_{i\alpha}, L_{-i\alpha}]$ для любого i , $1 \leq i \leq p - 1$, и корень α не является собственным.

Если T – стандартный тор и определяющая система S не содержит обратимых функций, то по теореме 5 T – тор максимальной размерности и $A^T = F$. Согласно следствию 3 $L_0 = \langle f_1 D_1, \dots, f_n D_n \rangle$. В обозначениях следствия 5 собственные функции $\nu + \alpha$ тора T имеют вид $\exp(\nu_1 f_1^{(p)} + \dots + \nu_n f_n^{(p)}) f_1^{i_1} \dots f_n^{i_n}$. Согласно следствию 5 корневое пространство ненулевого корня $\beta = \nu + \alpha$ имеет базис, состоящий из дифференцирований $g_\nu f_{\alpha + \varepsilon_i} D_i$. Учитывая, что $D_j(g_\nu) = -\nu_j f_j^{p-1} g_\nu$, легко получить, что все корни тора T – собственные. Следовательно, такие и только такие торы являются оптимальными.

3.5. Подалгебры Картана.

ТЕОРЕМА 7. Пусть T – максимальный тор в p -замыкании алгебры Ли $L = W_n(\mathcal{F})$. Тогда $C_L(T \cap L)$ – подалгебра Картана в L и любая подалгебра Картана в L имеет такой вид.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что подалгебра $H = C_L(T \cap L)$ нильпотентна. Отсюда будет следовать, что H – подалгебра Картана [21]. Пусть $S = \{f_1, \dots, f_k, g_{k+1}, \dots, g_n\}$ – определяющая система функций тора T . Обозначим $T \cap L$ через $\hat{T}$. Так же, как при доказательстве теоремы 1, введем новые переменные в полной алгебре разделенных степеней $\hat{\mathcal{O}}(E)$: $y_i = f_i, i = 1, \dots, k, z_j = \log g_j, j = k+1, \dots, n$. В новых переменных дифференцирования $D_1, \dots, D_n \in L$, двойственные базису $df_i, d \log g_j$ A -модуля $\Omega^1(\mathcal{F})$, являются частными производными. Согласно теореме 1 $\hat{T} = \langle f_i D_i, i = 1, \dots, k, D_{k+1}, \dots, D_n \rangle$. Пусть, как в предложении 4, A_0 – подалгебра в A , состоящая из элементов h таких, что $D_j(h) = 0, j = k+1, \dots, n$. Согласно предложению 4 A_0 – правильная подалгебра в A , $A_0 = \hat{\mathcal{O}}(y) \cap A$, где $\hat{\mathcal{O}}(y)$ – подалгебра в $\hat{\mathcal{O}}(E)$, состоящая из степенных рядов от переменных $y_1, \dots, y_k$. Следовательно, алгебра инвариантов $A^{\hat{T}}$ алгебры Ли $\hat{T}$ состоит из таких $h \in A_0$, что $y_i \partial / \partial y_i(h) = 0, i = 1, \dots, k$. Следовательно, $A^{\hat{T}}$ состоит из всевозможных рядов в разделенных степенях от $y_1^{(p)}, \dots, y_k^{(p)}$, содержащихся в A .

Теперь нетрудно найти $C_L(\hat{T})$. Так как $\{D_1, \dots, D_n\}$ – базис свободного A -модуля L , то $C_L(\hat{T}) = \langle D_{k+1}, \dots, D_n \rangle_{A^{\hat{T}}} + C_M(\hat{T})$, где $M = \langle D_1, \dots, D_k \rangle_{A_0}$. Очевидно, $C_M(\hat{T}) = C_M(T_0)$, где $T_0 = T \cap L_0 = \langle f_i D_i, i = 1, \dots, k \rangle$. Из предложения 4, 2) и замечания к п. 3.1 следует, что $S' = \{f_1, \dots, f_k\}$ – определяющая система функций максимального тора T' в p -замыкании алгебры Ли $M \cong W(\mathcal{F}_0)$ и $T' \cap M_0 = T_0$, где M_0 – член стандартной фильтрации в M . Покажем, что $A^{\hat{T}}$ – отделимая подалгебра в A . Согласно теореме 3 $A_0^{T'} = A_{0, \text{pol}}(f_1^{(p)}, \dots, f_k^{(p)})$ – подалгебра полиномов в разделенных степенях от $f_i^{(p)}$, содержащихся в A_0 , и $A_0^{T'}$ – отделимая подалгебра в A_0 . Из теоремы 3 получаем, что алгебра инвариантов $A_0^{T_0}$ тора T_0 в A_0 совпадает с $A^T \otimes B_1$ (в обозначениях теоремы 3), т.е. $A_0^{T_0} = A^{\hat{T}} -$ отделимая подалгебра в A . Из вида собственных функций тора T' (см. следствие 5) получаем, что функции из $A^{\hat{T}}$ имеют вид

$$h(f_1^{(p)}, \dots, f_k^{(p)}) \exp(\nu_1 f_1^{(p)} + \dots + \nu_k f_k^{(p)}),$$

где $h \in A$ – многочлен в разделенных степенях от $f_1^{(p)}, \dots, f_k^{(p)}$, $\nu_1, \dots, \nu_k \in F$. Алгебра Ли M является свободным A_0 -модулем с базисом $D_1, \dots, D_k$. Если B_0 – подалгебра в A , порожденная $f_1, \dots, f_k$, то по теореме 3 $A_0 = A^{T'} \otimes B_1 \otimes B_0 = A^{\hat{T}} \otimes B_0$. Следовательно,

$$M = A^{\hat{T}} \otimes (B_0 D_1 + \dots + B_0 D_k) = A^{\hat{T}} \otimes W_k,$$

где $W_k = B_0 D_1 + \dots + B_0 D_k$ – алгебра Ли дифференцирований алгебры срезанных многочленов от переменных $y_i = f_i$. Отсюда получаем, что $C_M(T_0) = A^{\hat{T}} \otimes T_0$ и, следовательно,

$$C_L(\hat{T}) = A^{\hat{T}} D_{k+1} + \dots + A^{\hat{T}} D_n + C_M(T_0) = A^{\hat{T}} \otimes \hat{T}.$$

Таким образом, $H = C_L(\widehat{T})$ – абелева алгебра Ли.

Пусть теперь H – подалгебра Картана в L . Обозначим через T'' тор в p -замыкании $\overline{V}$, порожденный полупростыми частями всех элементов из H . Очевидно, $H = C_L(T'')$. Пусть T – максимальный тор в $\overline{V}$, содержащий T'' . Тогда $T \cap L \subset H$. Так как H – нильпотентная алгебра Ли, а $T \cap L$ состоит из полупростых элементов, то $H \subset C_L(T \cap L)$. Однако, как показано выше, $C_L(T \cap L)$ – подалгебра Картана в L . Следовательно, $H = C_L(T \cap L)$.

Соберем информацию о подалгебрах Картана, полученную при доказательстве теоремы.

СЛЕДСТВИЕ 6. Пусть H – подалгебра Картана в $L = W_n(\mathcal{F})$.

- 1) H – абелева подалгебра в L .
- 2) Пространство $\widehat{T}$ полупростых элементов в H n -мерно и $H = C_L(\widehat{T})$.
- 3) $\widehat{T} = T \cap L$, где T – максимальный тор в p -замыкании алгебры L .
- 4) Нульпространство H в $A = \mathcal{O}(\mathcal{F})$ совпадает с алгеброй H -инвариантов и с алгеброй $\widehat{T}$ -инвариантов $A^{\widehat{T}}$. В обозначениях следствия $A^H = A^{\widehat{T}} = A^T \otimes B_1$.
- 5) $H = A^{\widehat{T}} \widehat{T}$ – свободный $A^{\widehat{T}}$ -модуль.

ЗАМЕЧАНИЕ. Вид элементов из $A^{\widehat{T}}$ указан в следствии 5.

Список литературы

1. *Strade H., Farnsteiner R.* Modular Lie algebras and their representations. New York: Marcel Dekker, Inc., 1988.
2. *Демушкин С. П.* Подалгебры Картана простых p -алгебр Ли W_n и S_n // Сиб. матем. журн. 1970. Т. 11. С. 310–325.
3. *Демушкин С. П.* Подалгебры Картана простых неклассических p -алгебр Ли // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1972. Т. 36. С. 915–932.
4. *Brown G.* Cartan subalgebras of Zassenhaus algebras // Canad. J. Math. 1975. V. 27. P. 1011–1021.
5. *Strade H.* The absolute toral rank of Lie algebra // Lect. Notes in Math. V. 1373, 1989. P. 1–28.
6. *Strade H.* The classification of the simple modular Lie algebras: I. Determination of the two-sections // Ann. Math. 1989. V. 130. P. 643–677.
7. *Strade H.* The classification of the simple Lie algebras: II. The toral structure // Preprint, Math. Sem. Univ. Hamburg, 1989.
8. *Штраде Х.* Новые методы в классификации простых модулярных алгебр Ли // Матем. сб. 1990. Т. 181. С. 1391–1402.
9. *Strade H., Wilson R. L.* Classification of simple Lie algebras over algebraically closed fields of prime characteristic // Bull. Amer. Math. Soc. 1991. V. 24. P. 357–362.
10. *Кострикин А. И., Кузнецов М. И.* О строении модулярных алгебр Ли, связанных с аналитическими про- p -группами // Докл. РАН. 1994. Т. 339. № 5. С. 591–593.
11. *Kostrikin A. I., Kuznetsov M. I.* Finite-dimensional Lie algebras with a nonsingular derivation // Algebra and Analysis. Berlin: Walter de Gruyter, Inc., 1996. P. 81–90.
12. *Block R. E., Wilson R. L.* Classification of restricted simple Lie algebras // J. Algebra. 1988. V. 114. P. 115–259.
13. *Ree R.* On generalized Witt algebras // Trans. Amer. Math. Soc. 1956. V. 83. P. 510–546.

14. *Wang Q.* On the tori and Cartan subalgebras of Lie algebras of Cartan type // Ph.D. dissertation. Madison: Univ. of Wisconsin, 1992.
15. *Кузнецов М. И.* Распределения над алгеброй срезанных многочленов // Матем. сб. 1988. Т. 136. №2. С. 187–205.
16. *Кострикин А. И., Шафаревич И. Р.* Градуированные алгебры Ли конечной характеристики // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1969. Т. 33. С. 251–322.
17. *Кац В. Г.* Описание фильтрованных алгебр Ли, с которыми ассоциированы градуированные алгебры Ли картановского типа // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1974. Т. 38. С. 800–834.
18. *Wilson R. L.* Classification of generalized Witt algebras over algebraically closed fields // Trans. Amer. Math. Soc. 1971. V. 153. P. 191–210.
19. *Джекобсон Н.* Алгебры Ли. М.: Мир, 1964.
20. *Shue J. R.* Cartan decomposition for Lie algebras of prime characteristic // J. Algebra. 1969. V. 11. P. 25–52.
21. *Диксмье Ж.* Универсальные обертывающие алгебры. М.: Мир, 1978.

Нижегородский государственный
университет им. Н. И. Лобачевского

Поступила в редакцию
14.01.1997