Общероссийский математический портал

Г. И. Лаптев, Слабые решения квазилинейных параболических уравнений второго порядка с двойной нелинейностью, *Матем. сб.*, 1997, том 188, номер 9, 83–112

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm258>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.23.180.231

26 апреля 2023 г., 15:22:40

УДК 517.9

Г. И. Лаптев

Слабые решения квазилинейных параболических уравнений второго порядка с двойной нелинейностью

В ограниченной области пространства $\mathbb{R}^n$ рассматривается первая краевая задача для уравнения

$$\beta(u) \frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i=1}^n D_i A_i(t, x, u, Du) + A_0(t, x, u, Du) = 0.$$

Предполагается, что функция $\beta(u)$ непрерывна и удовлетворяет следующим условиям роста

$$c|u|^{r-2} \leq \beta(u) \leq C(|u|^{r-2} + 1), \quad r \geq 2.$$

Остальные коэффициенты удовлетворяют условиям, характерным для теории монотонных операторов. Доказывается теорема существования глобального слабого решения.

Библиография: 18 названий.

В ограниченной области $(0, T) \times \Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, с кусочно-гладкой границей S рассмотрим начально-краевую задачу

$$\begin{aligned} \beta(u) \frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i=1}^n D_i A_i(t, x, u, Du) + A_0(t, x, u, Du) &= 0; \\ u(0, x) &= u_0(x); \quad u|_{(0, T) \times S} = 0. \end{aligned} \tag{0.1}$$

Здесь переменная t меняется от 0 до фиксированного числа $T > 0$; $u = u(t, x)$ – искомая функция, определяемая на множестве $(t, x) \in \overline{Q}$, где $Q = (0, T) \times \Omega$; $D = (D_1, \dots, D_n)$, где $D_i = \partial/\partial x_i$ для $i = 1, \dots, n$; $u_0(x)$ – заданная функция. Условия на коэффициенты уравнения будут наложены позднее.

Начало теории разрешимости подобных задач было положено в работах [1], [2], где рассмотрен случай конкретных коэффициентов

$$\beta(u) = |u|^s \quad (s > -1); \quad A_i = |D_i u|^{p-2} D_i u \quad (p > 1); \quad A_0 = 0.$$

Эта теория подвергалась затем многочисленным обобщениям. Их обзор, который будет дополнен далее, можно найти в работе [3]. Там же детально проанализирована связь с уравнениями, допускающими двойное вырождение, интерес к которым

Работа частично поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (грант № 96-01-000-97).

значительно активизировался после обзорной статьи [4], где освещены разнообразные приложения таких уравнений. Во многих предыдущих статьях предполагается, что функции β и A_i связаны. Например, в основополагающей работе [5], где существенно расширен запас коэффициентов, требуется равенство

$$A_i(t, x, u, \xi) = a_i(B(u), \xi), \quad \text{где } B(u) = \int_0^u \beta(s) ds.$$

Аналогичные связи на рост функций β и A_i имеются также в статьях [6]–[8]. Попытки отказаться от них предприняты в работах [9]–[12]. При этом возникли ограничения другого рода. Так, в статьях [9], [10] при весьма слабых условиях на функцию $\beta(u)$ предполагается, что коэффициенты $\{A_i\}$ имеют вид градиента: $A_i(\xi) = \partial\varphi(\xi)/\partial\xi_i$, где φ – выпуклая коэрцитивная функция. В [11] все коэффициенты подчинены выпуклым функциям. В [12], [13] предложены условия, обеспечивающие существование и единственность достаточно регулярного неотрицательного решения для неотрицательной начальной функции $u_0(x) \geq 0$. При этом уравнение представлено в форме так называемого уравнения с двойным вырождением. Подводя итог, можно констатировать, что в ранее полученных результатах имеются ограничения, связанные с выбранным методом доказательства. В данной работе многие из этих ограничений снимаются или ослабляются и доказывается существование слабого решения задачи (0.1) при условиях, характерных для теории монотонных операторов.

§1. Формулировка результата

Приведем предположения о функциях, входящих в уравнение (0.1).

1β. Функция $\beta(u)$ определена на всей числовой оси, непрерывна и неотрицательна. С некоторым показателем $r \geq 2$ она удовлетворяет следующим условиям роста:

$$c|u|^{r-2} \leq \beta(u) \leq C(|u|^{r-2} + 1), \quad c > 0.$$

Условия на коэффициенты A_i формулируются длиннее. Предполагается, что функции $A_i(t, x, u, \xi)$ для $i = 0, 1, \dots, n$ удовлетворяют условиям Каратеодори, т.е. они измеримы по аргументам $(t, x) \in Q$ для всех $u \in \mathbb{R}^1, \xi \in \mathbb{R}^n$ и непрерывны по u, ξ для почти всех (t, x) . Кроме того, эти функции подчиняются следующим ограничениям.

1А. Условия роста. Для любого числа $\delta > 0$ и некоторых положительных функций $C(\delta), C_1(\delta)$, определенных для $\delta > 0$:

$$|A_i(t, x, u, \xi)| \leq c|\xi|^{p-1} + \delta(|u|^{q/p'} + h(t)|u|^{r/p'}) + C(\delta)h_0(t, x),$$

где $p > 1$; $q = p\left(1 + \frac{r}{n}\right)$; $h \in L^{p'}(0, T)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$; $h_0 \in L^{p'}(Q)$; $i = 1, \dots, n$;

$$|A_0(t, x, u, \xi)| \leq \delta(|\xi|^{p/q'} + |u|^{q-1} + h_1(t)|u|^{r/q'}) + C_1(\delta)h_2(t, x),$$

где $h_1 \in L^{q'}(0, T)$; $h_2 \in L^{q'}(Q)$; $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$.

2А. *Условие параболичности.* Для почти всех $(t, x) \in Q$ и всех $u \in \mathbb{R}^1$, $\xi, \eta \in \mathbb{R}^n$

$$\sum_{i=1}^n [A_i(t, x, u, \xi) - A_i(t, x, u, \eta)](\xi_i - \eta_i) > 0 \quad (\xi \neq \eta).$$

3А. *Условие коэрцитивности.* Для любого числа $\delta > 0$ и некоторой положительной функции $C_2(\delta)$, определенной для $\delta > 0$:

$$\sum_{i=1}^n A_i(t, x, u, \xi) \xi_i + A_0(t, x, u, \xi) u \geq c_0 |\xi|^p - \delta g(x) |u|^p - \delta g_1(t) |u|^r - C_2(\delta) g_2(t, x),$$

где $c_0 > 0$; $g_1 \in L^1(0, T)$; $g_2 \in L^1(Q)$; $g(x) \in L^s(\Omega)$, где $s = n/p$ для $p < n$, $s > 1$ для $p = n$, $s = 1$ для $p > n$.

Сделаем следующее замечание. Часто в уравнении (0.1) выделяют правую часть в форме заданной функции, т.е. пишут уравнение в виде $Lu = f$. Условия 1А–3А представлены в такой форме, что заданную функцию f можно включить в коэффициенты уравнения, оценив ее слагаемыми h_0 , h_2 и g_2 .

Цель работы – установить существование слабого решения задачи (0.1). При формулировке результата используются традиционные обозначения пространств абстрактных функций, заданных на отрезке $[0, T]$ и принимающих значения в некотором банаховом пространстве. Свойства таких пространств изложены в монографиях [1], [14]. Символом $(u, v) = \int_{\Omega} uv \, dx$ обозначается двойственность между пространствами $L^{p'}(\Omega)$ и $L^p(\Omega)$, а символом $\langle u, v \rangle = \int_Q uv \, dQ$ – двойственность между пространствами $L^{p'}(Q)$ и $L^p(Q)$. В последующем изложении основную роль играют банаховы пространства $X_0 = L^\infty(0, T; L^r(\Omega))$ и $X_1 = L^p(0, T; \overset{\circ}{W}_p^1(\Omega))$, наделенные нормами:

$$\|u\|_{X_0} = \operatorname{ess\,sup}_t \|u(t, x)\|_{L^r(\Omega)}; \quad \|u\|_{X_1} = \|Du(t, x)\|_{L^p(Q)},$$

а также их пересечение $X = X_0 \cap X_1$, наделенное нормой $\|u\|_X = \|u\|_{X_0} + \|u\|_{X_1}$. Часто используются также пространство $X_1^* = L^{p'}(0, T; W_{p'}^{-1}(\Omega))$, сопряженное к X_1 , и пространство X^* , сопряженное к X .

Введем функцию $B(u) = \int_0^u \beta(s) \, ds$ и перепишем уравнение (0.1) в такой форме

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} B(u) - \sum_{i=1}^n D_i A_i(t, x, u, Du) + A_0(t, x, u, Du) &= 0; \\ B(u(0, x)) &= B(u_0(x)); \quad u|_S = 0. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Главным результатом работы является следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 1.1. Пусть выполнены условия 1β и 1А–3А. Если $u_0(x) \in L^r(\Omega)$, то задача (1.1) имеет решение $u(t, x)$ со следующими свойствами:

- (а) $u \in X \subset L^q(Q)$; $A_i(t, x, u, Du) \in L^{p'}(Q)$ ($i = 1, \dots, n$); $A_0(t, x, u, Du) \in L^{q'}(Q)$;

- (b) производная $\frac{\partial}{\partial t}B(u)$ определена как элемент пространства $\mathcal{D}'(0, T; L^{r'}(\Omega))$ и при этом $\frac{\partial}{\partial t}B(u) \in X^*$;
- (c) функция $u(t, x)$ для любого элемента $w \in X \subset L^q(Q)$ удовлетворяет уравнению
- $$\left\langle \frac{\partial}{\partial t}B(u), w \right\rangle + \sum_{i=1}^n \langle A_i(t, x, u, Du), D_i w \rangle + \langle A_0(t, x, u, Du), w \rangle = 0;$$
- (d) $B(u(t, x)) \in C([0, T], w-L^{r'}(\Omega))$, где символ w - означает слабую топологию пространства $L^{r'}(\Omega)$, и при этом как непрерывная функция принимает значение $B(u(0, x)) = B(u_0(x))$. В этом смысле понимается начальное условие задачи.

§ 2. Вспомогательные утверждения

Далее через c, C обозначаются, вообще говоря, различные положительные постоянные, которые зависят только от исходных данных рассматриваемой задачи. Отметим некоторые свойства функции $B(u) = \int_0^u \beta(s) ds$.

ЛЕММА 2.1. *Функция $B(u) \in C^1(\mathbb{R}^1)$, строго монотонно возрастает и осуществляет гомеоморфизм вещественной оси $\mathbb{R}^1$ на себя. Она удовлетворяет также следующим условиям роста:*

- (a) $c|u|^{r-1} \leq |B(u)| \leq C(|u|^{r-1} + 1)$;
- (b) $c|u - v|^r \leq (u - v)(B(u) - B(v))$;
- (c) $|B(u) - B(v)| \leq C|u - v|(1 + |u|^{r-2} + |v|^{r-2})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $B'(u) = \beta(u) > 0$ для $u \neq 0$, то функция $B(u)$ строго монотонно возрастает. Неравенства (a) являются непосредственным следствием условий роста $1/\beta$ на функцию $\beta(u)$. Из левой части этих неравенств вытекает, что образ функции $B(u)$ заполняет всю ось $\mathbb{R}^1$. Так как $B(u)$ непрерывна, то она отображает ось $\mathbb{R}^1$ на себя гомеоморфно. Для проверки соотношения (b) используем формулу Адамара

$$B(u) - B(v) = (u - v) \int_0^1 \beta(v + \tau(u - v)) d\tau.$$

Отсюда по условию $1/\beta$

$$(u - v)(B(u) - B(v)) \geq (u - v)^2 \int_0^1 c|v + \tau(u - v)|^{r-2} d\tau.$$

Используя известное неравенство

$$\int_0^1 |v + \tau(u - v)|^{r-2} d\tau \geq c|u - v|^{r-2} \quad (c > 0),$$

получим утверждение (b) леммы. Аналогично, из формулы Адамара и условия $1/\beta$ получается неравенство (c), что завершает доказательство леммы.

В дальнейшем значительную роль играет функция $\Gamma(u) = \int_0^u s\beta(s) ds$. Ее свойства собраны в следующих далее утверждениях.

ЛЕММА 2.2. *Функция $\Gamma(u) \in C^1(\mathbb{R}^1)$ и удовлетворяет следующим условиям роста:*

$$c|u|^r \leq \Gamma(u) \leq C(|u|^r + 1).$$

Доказательство следует непосредственно из определения функции $\Gamma(u)$ и условия 1β .

При использовании метода монотонности в параболических уравнениях важную роль играет выпуклость некоторых функций, так как они порождают выпуклые функционалы. Введенные выше функции $B(u)$, $\Gamma(u)$ выпуклыми быть не обязаны. Однако некоторая их композиция дает выпуклую функцию. Построим такую композицию. По лемме 2.1 функция $B(u)$ осуществляет гомеоморфизм вещественной оси $\mathbb{R}^1$ на себя. В частности, она имеет обратную функцию, которую обозначим $\alpha(U)$, так что уравнение $U = B(u)$ разрешимо для любого $U \in \mathbb{R}^1$ в форме $u = \alpha(U)$. Составим композицию $\gamma(U) \equiv \Gamma(\alpha(U))$, так что $\gamma(B(u)) = \Gamma(u)$.

ЛЕММА 2.3. *Функция $\gamma(U) \in C^1(\mathbb{R}^1)$, является выпуклой и удовлетворяет следующему условию роста: $\gamma(U) \leq C(|U|^{r'} + 1)$, где $\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = 1$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно общей теории обратных функций

$$\gamma'(U) = \frac{d\Gamma}{d\alpha} \cdot \frac{d\alpha}{dU} = \frac{d\Gamma}{du} \left(\frac{dB}{du} \right)^{-1} = u\beta(u)[\beta(u)]^{-1} = u = \alpha(U).$$

Функция αU , являясь обратной к строго монотонно возрастающей функции $B(u)$, сама монотонно возрастает, что является достаточным для выпуклости функции $\gamma(U)$. Далее, первое из неравенств леммы 2.1 можно представить в таком виде: $c|\alpha(U)|^{r-1} \leq |U|$. Аналогично, последнее неравенство леммы 2.2 запишем так: $\Gamma(\alpha(U)) \leq C(|\alpha(U)|^r + 1)$. Отсюда

$$\gamma(U) = \Gamma(\alpha(U)) \leq C[(|\alpha(U)|^{r-1})^{r'} + 1] \leq C(|U|^{r'} + 1).$$

Это завершает доказательство леммы.

По коэффициентам рассматриваемого уравнения введем функцию

$$H(t, x, u, \eta, \xi) = \sum_{i=1}^n [A_i(t, x, u, \xi) - A_i(t, x, u, \eta)] (\xi_i - \eta_j),$$

считая ее определенной для $(t, x) \in Q$, $u \in \mathbb{R}^1$, $\xi, \eta \in \mathbb{R}^n$.

ЛЕММА 2.4. *На каждом ограниченном множестве вида $|u| \leq M$, $|\eta| \leq M_1$ справедливо неравенство*

$$H(t, x, u, \eta, \xi) \geq c(t, x)|\xi - \eta| \quad (|\xi| \geq 2 + M_1),$$

где функция $c(t, x)$ положительна для почти всех $(t, x) \in Q$. Она может зависеть от выбранных постоянных M , M_1 , но не зависит от аргумента $\xi \in \mathbb{R}^n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя представление $\xi = \eta + \rho\zeta^0$, где $|\zeta^0| = 1$, $\rho = |\xi - \eta|$, введем функцию $h(\rho) = H(t, x, u, \eta, \eta + \rho\zeta^0)$, считая все аргументы фиксированными, кроме $\rho > 0$. Согласно определению

$$h(\rho) = \sum_{i=1}^n [A_i(t, x, u, \eta + \rho\zeta^0) - A_i(t, x, u, \eta)] \rho \zeta_i^0,$$

что можно представить в такой форме:

$$\begin{aligned} h(\rho) &= \sum_{i=1}^n [A_i(t, x, u, \eta + \rho\zeta^0) - A_i(t, x, u, \eta + \zeta^0)] \rho \zeta_i^0 \\ &\quad + \sum_{i=1}^n [A_i(t, x, u, \eta + \zeta^0) - A_i(t, x, u, \eta)] \rho \zeta_i^0 \equiv \sigma_1 + \sigma_2. \end{aligned}$$

Пусть $\xi^0 = \eta + \zeta^0$, тогда $\xi - \xi^0 = (\rho - 1)\zeta^0$, так что $\rho\zeta^0 = \frac{\rho}{\rho - 1}(\xi - \xi^0)$. Следовательно,

$$\sigma_1 = \sum_{i=1}^n [A_i(t, x, u, \xi) - A_i(t, x, u, \xi^0)] (\xi_i - \xi_i^0) \frac{\rho}{\rho - 1} > 0,$$

если $\rho \geq 2$, в силу условия параболичности 2А. В результате получается оценка $h(\rho) = \sigma_1 + \sigma_2 \geq \sigma_2$. Заметим, что $\sigma_2 = \rho h(1)$, так что $h(\rho) \geq \rho h(1)$ при $\rho \geq 2$. Это неравенство в терминах функции H принимает такой вид

$$H(t, x, u, \eta, \xi) \geq |\xi - \eta| H(t, x, u, \eta, \eta + \zeta^0), \quad (2.1)$$

где $\xi = \eta + \rho\zeta^0$, $|\zeta^0| = 1$, $\rho \geq 2$. Введем константу

$$\begin{aligned} c(t, x) &= \min_R H(t, x, u, \eta, \eta + \zeta^0), \\ R &= \{|u| \leq M, |\eta| \leq M_1, |\zeta^0| = 1\}, \end{aligned}$$

считая постоянные M, M_1 фиксированными. В силу условия Каратеодори функция H непрерывна по аргументам $u, \eta, \xi = \eta + \zeta^0$ для почти всех $(t, x) \in Q$. Выберем именно такую точку (t, x) . Так как множество R ограничено и замкнуто, то введенный минимум $c(t, x)$ достигается, т.е. найдутся аргументы u_m, η_m, ζ_m^0 , для которых $c(t, x) = H(t, x, u_m, \eta_m, \eta_m + \zeta_m^0)$. Так как последние аргументы η_m и $\eta_m + \zeta_m^0$ различны, то по условию параболичности 2А выполняется строгое неравенство $c(t, x) > 0$. Итак, функция $c(t, x)$ положительна для почти всех $(t, x) \in Q$. Подставляя ее в неравенство (2.1), получим $H \geq c(t, x)|\xi - \eta|$. Это и есть утверждение леммы.

ЛЕММА 2.5. *Пространство X непрерывно вложено в пространство $L^r(Q) \cap L^q(Q)$, где $q = p\left(1 + \frac{r}{n}\right)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $q \leq r$, то утверждение очевидно, так как пространство X является частью пространства $L^\infty(0, T; L^r(\Omega))$, которое непрерывно вложено в $L^r(Q)$. Поэтому рассмотрим случай $q > r$. Воспользуемся интерполяционным неравенством [15, с. 79]:

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq C \|Du\|_{L^p(\Omega)}^\alpha \|u\|_{L^r(\Omega)}^{1-\alpha}, \quad \alpha = \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{q}\right) \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{p} + \frac{1}{r}\right)^{-1}.$$

С учетом выбора $q = p \left(1 + \frac{r}{n}\right)$ получаем $\alpha = \frac{n}{r+n}$, так что $\alpha q = p$; $(1-\alpha)q = q - p$. Возводя в степень q интерполяционное неравенство и интегрируя его по отрезку $[0, T]$, считая $u = u(t, x)$, получим

$$\int_0^T \|u\|_{L^q(\Omega)}^q dt = \|u\|_{L^q(Q)}^q \leq C \int_0^T \|Du\|_{L^p(\Omega)}^p \cdot \|u\|_{L^r(\Omega)}^{q-p} dt.$$

Предполагая, что $u \in X$, получим

$$\|u\|_{L^q(Q)}^q \leq C \operatorname{ess\,sup}_t \|u\|_{L^r(\Omega)}^{q-p} \cdot \|Du\|_{L^p(Q)}^p \leq C \|u\|_X^q.$$

Отсюда следует утверждение леммы для рассматриваемого случая $q > r$, что завершает доказательство.

ЛЕММА 2.6. Пусть E — произвольное измеримое подмножество области Q и пусть выполнены условия роста 1А. Тогда справедливы следующие оценки, в которых постоянная C не зависит ни от множества E , ни от выбранных функций $u, v \in X$.

а) Если $i = 1, 2, \dots, n$, то $A_i(t, x, u, Dv) \in L^{p'}(Q)$ и при этом

$$\begin{aligned} & \left(\int_E |A_i(t, x, u, Dv)|^{p'} dQ \right)^{1/p'} \\ & \leq C (\|Dv\|_{L^p(E)}^{p-1} + \delta \|u\|_X^{q/p'} + \delta \|u\|_X^{r/p'} + C(\delta) \|h_0\|_{L^{p'}(E)}). \end{aligned}$$

б) Если $i = 0$, то $A_0(t, x, u, Du) \in L^{q'}(Q)$ и при этом

$$\begin{aligned} & \left(\int_E |A_0(t, x, u, Du)|^{q'} dQ \right)^{1/q'} \\ & \leq C [\delta (\|u\|_X^{p/q'} + \|u\|_X^{q-1} + \|u\|_X^{r/q'}) + C_1(\delta) \|h_2\|_{L^{q'}(E)}]. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применим элементарное неравенство, справедливое для любых чисел $a, b \geq 0$:

$$(a + b)^m \leq C(a^m + b^m), \quad m > 0. \quad (2.2)$$

Используя условия роста 1A, получаем для $i = 1, 2, \dots, n$

$$|A_i(t, x, u, Dv)| \leq c|Dv|^{p-1} + \delta|u|^{q/p'} + \delta h(t)|u|^{r/p'} + C(\delta)h_0(t, x).$$

Возводя в степень p' и применяя неравенство (2.2), получим

$$|A_i(t, x, u, Dv)|^{p'} \leq C(c^{p'}|Dv|^p + \delta^{p'}|u|^q + \delta^{p'}|h|^{p'} \cdot |u|^r + C^{p'}(\delta)|h_0|^{p'}).$$

Интегрируя это неравенство по множеству $E \subset Q$, найдем

$$\begin{aligned} \int_E |A_i(t, x, u, Dv)|^{p'} dQ \\ \leq C \left(c^{p'} \int_E |Dv|^p dQ + \delta^{p'} \int_E |u|^q dQ + \delta^{p'} \int_E |h|^{p'} |u|^r dQ \right. \\ \left. + C^{p'}(\delta) \int_E |h_0|^{p'} dQ \right). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Оценим первое слагаемое с множителем δ :

$$\int_E |u|^q dQ \leq \int_Q |u|^q dQ = \|u\|_{L^q(Q)}^q \leq C\|u\|_X^q.$$

Здесь использована лемма 2.5 о непрерывности вложения $X \subset L^q(Q)$. Оценим второе слагаемое с множителем δ :

$$\begin{aligned} \int_E |h(t)|^{p'} |u|^r dQ &\leq \int_0^T \int_\Omega |h(t)|^{p'} |u|^r dx dt \leq \operatorname{ess\,sup}_t \int_\Omega |u|^r dx \cdot \int_0^T |h(t)|^{p'} dt \\ &= \|u\|_{L^\infty(0,T;L^r(\Omega))}^r \|h\|_{L^{p'}(0,T)}^{p'} \leq \|h\|_{L^{p'}(0,T)}^{p'} \cdot \|u\|_X^r. \end{aligned}$$

Полученные оценки подставим в неравенство (2.3):

$$\begin{aligned} \int_E |A_i(t, x, u, Dv)|^{p'} dQ \\ \leq C(c^{p'}\|Dv\|_{L^p(E)}^p + C\delta^{p'}\|u\|_X^q + \delta^{p'}\|h\|_{L^{p'}(0,T)}^{p'} \cdot \|u\|_X^r + C^{p'}(\delta)\|h_0\|_{L^{p'}(E)}^{p'}). \end{aligned}$$

Возводя в степень $1/p'$ и снова применяя неравенство (2.2), получим оценку леммы для индексов $i = 1, \dots, n$. Полагая в ней $E = Q$, убедимся, что $A_i(t, x, u, Dv) \in L^{p'}(Q)$, что доказывает пункт а) леммы.

Используя условия роста 1A для $i = 0$, запишем оценку

$$|A_0(t, x, u, Du)| \leq \delta(|Du|^{p/q'} + |u|^{q-1} + h_1(t)|u|^{r/q'}) + C_1(\delta)h_2(t, x),$$

что после возведения в степень q' и интегрирования по множеству E дает

$$\begin{aligned} & \int_E |A_0(t, x, u, Du)|^{q'} dQ \\ & \leq C \left[\delta^{q'} \left(\int_E |Du|^p dQ + \int_E |u|^q dQ + \int_E |h_1(t)|^{q'} |u|^r dQ \right) \right. \\ & \quad \left. + C_1^{q'}(\delta) \int_E |h_2|^{q'} dQ \right]. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Первое слагаемое с множителем δ оценивается просто:

$$\int_E |Du|^p dQ \leq \int_Q |Du|^p dQ = \|u\|_{X_1}^p \leq \|u\|_X^p.$$

Оставшиеся два слагаемых с множителем δ уже оценивались ранее, так что можем записать

$$\int_E |u|^q dQ \leq C \|u\|_X^q; \quad \int_E |h_1(t)|^{q'} |u|^r dQ \leq \|h_1\|_{L^{p'}(0,T)}^{q'} \cdot \|u\|_X^r.$$

Подставляя в неравенство (2.4) и возводя результат в степень $1/q'$, получим последнее утверждение леммы, чем завершается ее доказательство.

Пусть задана последовательность функций $u_N \in X$ ($N = 1, 2, \dots$). Введем обозначения

$$w_{iN} = A_i(t, x, u_N, Du_N) \quad (i = 0, 1, \dots, n). \quad (2.5)$$

ЛЕММА 2.7. Пусть $\|u_N\|_X \leq C$. Тогда последовательности w_{iN} равномерно ограничены в норме пространства $L^{p'}(Q)$ для $i = 1, 2, \dots, n$ и в норме пространства $L^{q'}(Q)$ для $i = 0$. Более того, из последовательности u_N можно выделить подпоследовательность, снова обозначаемую u_N , такую, что для некоторых элементов $w_i \in L^{p'}(Q)$ ($i = 1, \dots, n$) и $w_0 \in L^{q'}(Q)$ справедливы соотношения: $w_{iN} \rightarrow w_i$ слабо в пространстве $L^{p'}(Q)$ для $i = 1, 2, \dots, n$ и $w_{0N} \rightarrow w_0$ слабо в пространстве $L^{q'}(Q)$ при $N \rightarrow \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ограниченность последовательностей w_{iN} в указанных пространствах вытекает из леммы 2.6, в которой следует положить $E = Q$, $u = v = u_N$. Сформулированные в лемме сходимости являются следствием рефлексивности пространств $L^{p'}(Q)$ и $L^{q'}(Q)$.

ЛЕММА 2.8. Пусть $\|u_N\|_X \leq C$ и $u_N \rightarrow u$ почти всюду в Q при $N \rightarrow \infty$. Тогда для каждого $i = 1, 2, \dots, n$ и фиксированного $v \in X$ последовательность $z_{iN} = A_i(t, x, u_N, Dv)$ сходится к функции $z_i = A_i(t, x, u, Dv)$ в норме пространства $L^{p'}(Q)$. При этом оператор $a_i(u, v) = A_i(t, x, u, Dv)$ непрерывен по аргументу v как оператор из X в $L^{p'}(Q)$ для каждого фиксированного $u \in X$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $u_N \rightarrow u$ почти всюду в Q , то $z_{iN} \rightarrow z_i$ почти всюду в Q . Убедимся, что последовательность z_{iN} сходится к функции z_i в норме пространства $L^{p'}(Q)$. Для этого используем теорему Витали о сходимости в такой форме [16, с. 167]: если $z_N \rightarrow z$ п.в. в Q при $N \rightarrow \infty$ и интегралы от функций $|z_N|^{p'}$ равномерно абсолютно непрерывны, то $z_N \rightarrow z$ в норме пространства $L^{p'}(Q)$. Запишем первое из неравенств леммы 2.6, подставляя u_N вместо u :

$$\begin{aligned} \left(\int_E |z_{iN}|^{p'} dQ \right)^{1/p'} &= \left(\int_E |A_i(t, x, u_N, Dv)|^{p'} dQ \right)^{1/p'} \\ &\leq C (\|Dv\|_{L^p(E)}^{p-1} + \delta \|u_N\|_X^{q/p'} + \delta \|u_N\|_X^{r/p'} + C(\delta) \|h_0\|_{L^{p'}(E)}). \end{aligned} \quad (2.6)$$

По условию последовательность $\|u_N\|_X$ ограничена, поэтому по заданному $\varepsilon > 0$ можно подобрать такое $\delta > 0$, чтобы выполнялись неравенства: $\delta \|u_N\|_X^{q/p'} < \varepsilon$, $\delta \|u_N\|_X^{r/p'} < \varepsilon$. По выбранному δ подберем δ_1 так, чтобы для любого измеримого множества $E \subset Q$, удовлетворяющего условию $\text{mes } E < \delta_1$, выполнялись неравенства: $\|Dv\|_{L^p(E)}^{p-1} < \varepsilon$; $C(\delta) \|h_0\|_{L^{p'}(E)} < \varepsilon$. Это возможно, так как по условию $Dv \in L^p(Q)$ и $h_0 \in L^{p'}(Q)$, следовательно, функции $|Dv|^p$ и $|h_0|^{p'}$ имеют абсолютно непрерывные интегралы. Подставляя приведенные неравенства в формулу (2.6), получим оценку $\int_E |z_{iN}|^{p'} dQ \leq (4C\varepsilon)^{p'}$, где постоянная C не зависит от номера N . Это значит, что функции $|z_{iN}|^{p'}$ имеют равномерно абсолютно непрерывные интегралы. Тем самым выполнены условия теоремы Витали для последовательности z_{iN} , согласно которой $z_{iN} \rightarrow z_i$ при $N \rightarrow \infty$ в норме пространства $L^{p'}(Q)$. Непрерывность оператора $a_i(u, v)$ вытекает из того, что он составлен как композиция операторов дифференцирования и оператора суперпозиции, поэтому его непрерывность есть следствие его ограниченности. В свою очередь, ограниченность оператора $a_i(u, v)$ следует из леммы 2.6, примененной к множеству $E = Q$. Это завершает доказательство леммы.

Согласно лемме 2.7 последовательность w_{0N} , определенная равенством (2.5) для случая $i = 0$, слабо сходится к некоторой функции w_0 в пространстве $L^{q'}(Q)$. Эта последовательность обладает дополнительными свойствами, которые указываются в следующем утверждении.

ЛЕММА 2.9. Пусть $\|u_N\|_X \leq C$. Тогда последовательность $|w_{0N}|^{q'}$ имеет равномерно абсолютно непрерывные интегралы. Если дополнительно известно, что $u_N \rightarrow u$, $Du_N \rightarrow Du$ почти всюду в Q , то предельный элемент $w_0 = A_0(t, x, u, Du)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применим лемму 2.6 для случая $i = 0$, подставляя u_N вместо u , что дает

$$\begin{aligned} \left(\int_E |w_{0N}|^{q'} dQ \right)^{1/q'} &= \left(\int_E |A_0(t, x, u_N, Du_N)|^{q'} dQ \right)^{1/q'} \\ &\leq C [\delta (\|u_N\|_X^{p/q'} + \|u_N\|_X^{q-1} + \|u_N\|_X^{r/p'}) + C_1(\delta) \|h_2\|_{L^{q'}(E)}]. \end{aligned} \quad (2.7)$$

По условию $\|u_N\|_X \leq C$, поэтому слагаемое, содержащее множитель δ , может быть сделано меньше ε для любого заданного $\varepsilon > 0$ за счет выбора малого $\delta > 0$. При выбранном таким способом δ последнее слагаемое в формуле (2.7) может быть сделано меньше ε за счет выбора множества E малой меры. В результате неравенство (2.7) примет вид $\int_E |w_{0N}|^{q'} dQ \leq (2C\varepsilon)^{q'}$, где постоянная C не зависит от $N = 1, 2, \dots$. Это значит, что последовательность $|w_{0N}|^{q'}$ имеет равностепенно абсолютно непрерывные интегралы. Если при этом известно, что $u_N \rightarrow u$, $Du_N \rightarrow Du$ почти всюду в Q , то $w_{0N} \rightarrow A_0(t, x, u, Du)$ почти всюду в Q , следовательно, выполнены условия теоремы Витали о сходимости, согласно которой $w_{0N} \rightarrow A_0(t, x, u, Du)$ в норме пространства $L^{q'}(Q)$. По лемме 2.7 одновременно $w_{0N} \rightarrow w_0$ слабо в $L^{q'}(Q)$. Из сравнения приведенных сходимостей следует, что $w_0 = A_0(t, x, u, Du)$. Это завершает доказательство леммы.

§3. Конечномерные приближения

Для доказательства разрешимости рассматриваемой задачи применим метод Фадеев–Галёркина. Так как функция $\beta(u)$ может обратиться в нуль при $u = 0$, то введем функцию $\beta_N(u) = \beta(u) + \frac{1}{N}$, выбирая в качестве N натуральные числа.

В пространстве $C_0^1(\bar{\Omega})$ выделим полную счетную систему линейно независимых функций $e_1(x), e_2(x), \dots$. Заметим, что эта система будет полной в каждом из пространств $L^r(\Omega)$ и $\dot{W}_p^1(\Omega)$. Ищем приближенные решения уравнения (0.1) в виде $u_N = \sum_{k=1}^N c_{Nk}(t) e_k(x)$, и для каждого натурального $N = 1, 2, \dots$ составим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \left(\left(\beta(u_N) + \frac{1}{N} \right) u'_N, e_m \right) + \sum_{i=1}^n (A_i(t, x, u_N, Du_N), D_i e_m) \\ + (A_0(t, x, u_N, Du_N), e_m) = 0 \quad (m = 1, 2, \dots, N), \end{aligned} \quad (3.1)$$

которую дополним начальным условием $u_N(0, x) = u_{0N}$. Эти условия выбираются таким образом, чтобы функции $u_N(0, x) = \sum_{k=1}^N c_{Nk}(0) e_k(x)$ сходились к заданной функции $u_0(x)$ в норме пространства $L^r(\Omega)$. Убедимся, что система (3.1) локально разрешима. Запишем первое слагаемое системы в развернутом виде

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N \left(\left(\beta(u_N) + \frac{1}{N} \right) e_k, e_m \right) c'_{Nk}(t) \\ = \sum_{k=1}^N \left(\sqrt{\beta(u_N) + \frac{1}{N}} e_k, \sqrt{\beta(u_N) + \frac{1}{N}} e_m \right) c'_{Nk}(t). \end{aligned}$$

Отсюда непосредственно видно, что из коэффициентов при $c'_{Nk}(t)$ получается определитель Грама системы функций $\left(\beta(u_N) + \frac{1}{N} \right)^{1/2} e_k$, которая линейно независима вместе с исходной системой e_k ($k = 1, 2, \dots, N$), так как $\beta(u_N) + \frac{1}{N} \geq$

$\frac{1}{N} > 0$. Это значит, что систему дифференциальных уравнений (3.1) можно привести к нормальной форме невырожденным преобразованием, следовательно, эта система разрешима при каждом $N = 1, 2, \dots$ по крайней мере на некотором интервале $[0, T_N)$. Чтобы продолжить решение на весь отрезок $[0, T]$, получим оценку решений u_N .

При фиксированном N каждое уравнение системы (3.1) под номером $m = 1, \dots, N$ умножим на функцию $c_{Nm}(t)$, сложим все уравнения и результат проинтегрируем по отрезку $[0, t]$, считая $t < T_N$. В результате получим тождество

$$\begin{aligned} & \int_0^t \left(\left(\beta(u_N) + \frac{1}{N} \right) u'_N, u_N \right) dt \\ & + \sum_{i=1}^n \int_0^t (A_i(t, x, u_N, Du_N), D_i u_N) dt + \int_0^t (A_0(t, x, u_N, Du_N), u_N) dt = 0, \end{aligned}$$

которое перепишем в условных обозначениях

$$J_1 + J_2 + J_3 = 0. \quad (3.2)$$

Оценим каждое слагаемое. Используя функцию $\Gamma(u) = \int_0^u s \beta(s) ds$, можем записать

$$\begin{aligned} \int_0^t (\beta(u_N) u'_N, u_N) dt &= \int_{\Omega} \left(\int_{u_N(0, x)}^{u_N(t, x)} u \beta(u) du \right) dx \\ &= \int_{\Omega} \Gamma(u_N(t, x)) dx - \int_{\Omega} \Gamma(u_N(0, x)) dx. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} J_1 &= \int_{\Omega} \Gamma(u_N(t, x)) dx - \int_{\Omega} \Gamma(u_N(0, x)) dx \\ &\quad + \frac{1}{2N} \int_{\Omega} u_N^2(t, x) dx - \frac{1}{2N} \int_{\Omega} u_N^2(0, x) dx. \end{aligned}$$

Согласно оценкам леммы 2.2

$$\int_{\Omega} \Gamma(u_N(t, x)) dx \geq c \int_{\Omega} |u_N(t, x)|^r dx = c \|u_N(t, x)\|_{L^r(\Omega)}^r.$$

Аналогично,

$$\int_{\Omega} \Gamma(u_N(0, x)) dx \leq C \int_{\Omega} (|u_N(0, x)|^r + 1) dx \leq C_1.$$

Здесь использован тот факт, что последовательность $u_N(0, x)$ согласно построению сходится к функции $u_0(x)$ в пространстве $L^r(\Omega)$, следовательно, нормы этих функций в указанном пространстве равномерно ограничены. По условию степень

$r \geq 2$, так что пространство $L^r(\Omega)$ непрерывно вложено в $L^2(\Omega)$. Это значит, что $\|u_N(0, x)\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|u_N(0, x)\|_{L^r(\Omega)}$, так что интегралы $\int_{\Omega} u_N^2(0, x) dx$ также равномерно ограничены. В целом для слагаемого J_1 получается такая оценка

$$J_1 \geq c \|u_N(t, x)\|_{L^r(\Omega)}^r - C. \quad (3.3)$$

Для оценки суммы $J_2 + J_3$ воспользуемся условием коэрцитивности 3А, что дает

$$\begin{aligned} J_2 + J_3 &\geq c_0 \int_0^t \int_{\Omega} |Du_N|^p dx dt - \delta \int_0^t \int_{\Omega} g(x) |u_N|^p dx dt \\ &\quad - \delta \int_0^t \int_{\Omega} g_1(t) |u_N|^r dx dt - C_2(\delta) \int_0^t \int_{\Omega} g_2(t, x) dx dt. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Оценим слагаемые с множителем δ . Для определенности рассмотрим случай $p < n$, так что функция $g(x) \in L^s(\Omega)$, где $s = \frac{n}{p}$. По неравенству Гёльдера с показателями s и s' имеем

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} g(x) |u_N|^p dx &\leq \left(\int_{\Omega} |g(x)|^s dx \right)^{1/s} \left(\int_{\Omega} |u_N|^{ps'} dx \right)^{1/s'} \\ &= \|g\|_{L^s(\Omega)} \|u_N\|_{L^{ps'}(\Omega)}^p \\ &\leq C \|g\|_{L^s(\Omega)} \|u_N\|_{\dot{W}_p^1(\Omega)}^p = C \|g\|_{L^s(\Omega)} \|Du_N\|_{L^p(\Omega)}^p. \end{aligned}$$

Здесь использован тот факт, что $ps' = \frac{np}{n-p}$, следовательно, по теоремам вложения пространство $\dot{W}_p^1(\Omega)$ непрерывно вложено в пространство $L^{ps'}(\Omega)$. В результате можно оценить первое слагаемое в сумме (3.4), содержащее множитель δ :

$$\int_0^t \int_{\Omega} g(x) |u_N|^p dx dt \leq C \|g\|_{L^s(\Omega)} \|Du_N\|_{L^p(Q_t)}^p.$$

Здесь введено обозначение $Q_t = (0, t) \times \Omega$. Аналогично рассматриваются случаи $p = n$ и $p > n$.

Перейдем ко второму слагаемому, содержащему множитель δ в сумме (3.4):

$$\begin{aligned} \int_0^t g_1(t) \left(\int_{\Omega} |u_N|^r dx \right) dt &= \int_0^t g_1(t) \|u_N(t, x)\|_{L^r(\Omega)}^r dt \\ &\leq \sup_t \|u_N(t, x)\|_{L^r(\Omega)}^r \int_0^t g_1(t) dt \\ &\leq \|g_1\|_{L^1(0, T)} \sup_t \|u_N(t, x)\|_{L^r(\Omega)}^r. \end{aligned}$$

В целом для суммы (3.4) получаем такую оценку

$$\begin{aligned} J_2 + J_3 &\geq c_0 \|Du_N\|_{L^p(Q_t)}^p - \delta C \|g\|_{L^s(\Omega)} \|Du_N\|_{L^p(Q_t)}^p \\ &\quad - \delta \|g_1\|_{L^1(0, T)} \sup_t \|u_N(t, x)\|_{L^r(\Omega)}^r - C_2(\delta) \|g_2\|_{L^1(Q)}. \end{aligned}$$

Объединяя ее с неравенством (3.3) для J_1 и подставляя в тождество (3.2), получим

$$\begin{aligned} c\|u_N(t, x)\|_{L^r(\Omega)}^r + c_0\|Du_N\|_{L^p(Q_t)}^p \\ \leq C(1 + \delta\|Du_N\|_{L^p(Q_t)}^p + \delta \sup_t \|u_N(t, x)\|_{L^r(\Omega)}^r + C_2(\delta)). \end{aligned}$$

Ясно, что выбором достаточно малого параметра $\delta > 0$ можно добиться следующей оценки

$$\sup_t \|u_N(t, x)\|_{L^r(\Omega)}^r + \|Du_N\|_{L^p(Q_t)}^p \leq C,$$

где постоянная C не зависит от номера N . Отсюда следует, что решения $u_N(t, x)$ можно продолжить на весь отрезок $[0, T]$ для каждого номера $N = 1, 2, \dots$, и при этом сохраняется приведенная оценка, которую удобно представить в виде

$$\sup_t \|u_N(t, x)\|_{L^r(\Omega)} \leq C; \quad \|Du_N\|_{L^p(Q)} \leq C,$$

что равносильно оценке $\|u_N\|_X \leq C$. По лемме 2.5 пространство X непрерывно вложено в пространство $L^q(Q)$, следовательно, $\|u_N\|_{L^q(Q)} \leq C$. Объединяя эти оценки с леммой 2.7, приходим к следующему заключению.

ЛЕММА 3.1. *Для каждого $N = 1, 2, \dots$ система дифференциальных уравнений (3.1) имеет решение $u_N(t, x)$, которое определено на отрезке $[0, T]$ и удовлетворяет оценкам:*

- (a) $\sup_t \|u_N(t, x)\|_{L^r(\Omega)} \leq C; \quad \|Du_N\|_{L^p(Q)} \leq C;$
- (b) $\|u_N\|_X \leq C; \quad \|u_N\|_{L^q(Q)} \leq C;$
- (c) $\|A_i(t, x, u_N, Du_N)\|_{L^{p'}(Q)} \leq C \quad (i = 1, \dots, n);$
- (d) $\|A_0(t, x, u_N, Du_N)\|_{L^{q'}(Q)} \leq C.$

Здесь постоянные не зависят от номера N .

Дальнейшее изложение посвящено изучению свойств последовательности u_N , а также построенной по ней последовательности $U_N = B(u_N) + \frac{1}{N}u_N$. Введем конечномерные пространства E_N , натянутые на первые элементы базиса $e_1(x), \dots, e_N(x)$, и пусть $E_0 = \bigcup_{N=1}^{\infty} E_N$. Заметим, что $U'_N = \left(\beta(u_N) + \frac{1}{N}\right)u'_N$, поэтому для каждого элемента $e \in E_N$ систему приближенных уравнений (3.1) можно представить в таком виде:

$$(U'_N, e) + \sum_{i=1}^n (A_i(t, x, u_N, Du_N), D_i e) + (A_0(t, x, u_N, Du_N), e) = 0. \quad (3.5)$$

ЛЕММА 3.2. *Для последовательности U_N справедливо неравенство $\sup_t \|U_N(t, x)\|_{L^{r'}(\Omega)} \leq C$, где постоянная не зависит от номера $N = 1, 2, \dots$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя оценку $|B(u)| \leq C(|u|^{r-1} + 1)$ из леммы 2.1 (а), найдем, что $|B(u)|^{r'} \leq C(|u|^r + 1)$. Так как $|U_N|^{r'} \leq C(|B(u_N)|^{r'} + |N^{-1}u_N|^{r'})$, то

$$\begin{aligned} \|U_N(t, x)\|_{L^{r'}(\Omega)}^{r'} &= \int_{\Omega} |U_N(t, x)|^{r'} dx \\ &\leq C \left(\int_{\Omega} |u_N|^r dx + \int_{\Omega} |N^{-1}u_N|^{r'} dx + \text{mes } \Omega \right). \end{aligned}$$

Отсюда

$$\sup_t \|U_N(t, x)\|_{L^{r'}(\Omega)}^{r'} \leq C \left(\sup_t \|u_N\|_{L^r(\Omega)}^r + \sup_t \|N^{-1}u_N\|_{L^{r'}(\Omega)}^{r'} + \text{mes } \Omega \right).$$

Так как $r \geq 2$, то $r' \leq 2$, и потому $\|N^{-1}u_N\|_{L^{r'}(\Omega)} \leq C\|N^{-1}u_N\|_{L^r(\Omega)}$. Применяя лемму 3.1, получим утверждение.

ЛЕММА 3.3. Пусть $t, t+h \in [0, T]$. Тогда для каждой функции $e \in E_N$ справедлива оценка, в которой постоянная C не зависит от N :

$$|(\Delta_h U_N, e)| = |(U_N(t+h, x) - U_N(t, x), e)| \leq C(|h|^{1/p} \|De\|_{L^p(\Omega)} + |h|^{1/q} \|e\|_{L^q(\Omega)}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Представим рассматриваемое приращение по формуле Ньютона–Лейбница

$$(\Delta_h U_N, e) = \int_t^{t+h} (U'_N(\tau, x), e) d\tau.$$

Так как $e \in E_N$, то можно воспользоваться системой (3.5), что дает тождество

$$\begin{aligned} (\Delta_h U_N, e) &= - \sum_{i=1}^n \int_t^{t+h} (A_i(\tau, x, u_N, Du_N), D_i e) d\tau \\ &\quad - \int_t^{t+h} (A_0(\tau, x, u_N, Du_N), e) d\tau. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} |(\Delta_h U_N, e)| &\leq \sum_{i=1}^n \left(\int_t^{t+h} \|A_i(\tau, x, u_N, Du_N)\|_{L^{p'}(\Omega)}^{p'} d\tau \right)^{1/p'} \left(\int_t^{t+h} \|D_i e\|_{L^p(\Omega)}^p d\tau \right)^{1/p} \\ &\quad + \left(\int_t^{t+h} \|A_0(\tau, x, u_N, Du_N)\|_{L^{q'}(\Omega)}^{q'} d\tau \right)^{1/q'} \left(\int_t^{t+h} \|e\|_{L^q(\Omega)}^q d\tau \right)^{1/q}. \end{aligned}$$

Учтем, что функция $e(x)$ не зависит от переменной $\tau \in [0, T]$, поэтому

$$\begin{aligned} |(\Delta_h U_N, e)| &\leq \sum_{i=1}^n |h|^{1/p} \|D_i e\|_{L^p(\Omega)} \|A_i(\tau, x, u_N, Du_N)\|_{L^{p'}(Q)} \\ &\quad + |h|^{1/q} \|e\|_{L^q(\Omega)} \|A_0(\tau, x, u_N, Du_N)\|_{L^{q'}(Q)}. \end{aligned}$$

Используя оценку леммы 3.1, получим утверждение доказываемой леммы.

ЛЕММА 3.4. Пусть h – фиксированное число, причем $|h| \leq 1$. Введем функцию $u_N(t+h, x)$, считая ее продолженной нулем вне области Q . Тогда

$$\|u_N(t+h, x) - u_N(t, x)\|_{L^r(Q)} \leq C|h|^\alpha, \quad \alpha = \frac{1}{r} \min\left(\frac{1}{p}, \frac{1}{q}\right),$$

где постоянная C не зависит от h и номера N .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Введем функцию $B_N(u) = B(u) + N^{-1}u$, и для произвольных $u, v \in \mathbb{R}^1$ рассмотрим произведение

$$\begin{aligned} (B_N(u) - B_N(v))(u - v) &= (B(u) - B(v))(u - v) + N^{-1}(u - v)^2 \\ &\geq (B(u) - B(v))(u - v) \geq c|u - v|^r. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Здесь использована лемма 2.1(b). Применим это неравенство, полагая $v = u_N(t, x)$, $u = u_N(t+h, x)$. При этом согласно принятым обозначениям $B_N(u) = U_N(t+h, x)$, $B_N(v) = U_N(t, x)$. В результате получим: $c|\Delta_h u_N|^r \leq \Delta_h U_N \cdot \Delta_h u_N$. Отсюда

$$c \int_{\Omega} |\Delta_h u_N|^r dx \leq (\Delta_h U_N, \Delta_h u_N).$$

При каждом $t \in [0, T]$ $\Delta_h u_N \in E_N$ согласно построению, поэтому можно применить лемму 3.3, полагая $e = \Delta_h u_N$, при условии, что $t+h \in [0, T]$. В результате получим оценку

$$c \int_{\Omega} |\Delta_h u_N|^r dx \leq C(|h|^{1/p} \|D\Delta_h u_N\|_{L^p(\Omega)} + |h|^{1/p} \|\Delta_h u_N\|_{L^q(\Omega)}).$$

Для определенности допустим, что $h > 0$. Тогда условие $t+h \in [0, T]$ выполнено, если $t \in [0, T-h]$. Для таких t приведенное выше неравенство справедливо и его можно интегрировать по отрезку $[0, T-h]$, что дает

$$c \int_0^{T-h} \int_{\Omega} |\Delta_h u_N|^r dx dt \leq C(|h|^{1/p} \|Du_N\|_{L^p(Q)} + |h|^{1/q} \|u_N\|_{L^q(Q)}).$$

Используя еще лемму 3.1, получим

$$\int_0^{T-h} \int_{\Omega} |\Delta_h u_N|^r dx dt \leq C|h|^\gamma, \quad \gamma = \min\left(\frac{1}{p}, \frac{1}{q}\right). \quad (3.7)$$

Пусть теперь $t \in (T-h, T)$. Тогда в соответствии с договоренностью $u_N(t+h, x) = 0$, так что $\Delta_h u_N = -u_N(t, x)$. Отсюда для $|h| \leq 1$

$$\begin{aligned} \int_{T-h}^T \int_{\Omega} |\Delta_h u_N|^r dx dt &= \int_{T-h}^T \|u_N(t, x)\|_{L^r(\Omega)}^r dt \\ &\leq h \sup_t \|u_N(t, x)\|_{L^r(\Omega)}^r \leq Ch \leq Ch^\gamma. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Здесь вновь использована лемма 3.1. Складывая оценки (3.7) и (3.8), получим утверждение леммы.

ЛЕММА 3.5. Из последовательности u_N можно извлечь подпоследовательность, снова обозначаемую u_N , такую, что для некоторой функции $u(t, x)$ справедливы следующие предельные соотношения при $N \rightarrow \infty$:

- (a) $\|u_N - u\|_{L^m(Q)} \rightarrow 0$, $m = \min(p, r)$;
- (b) $u_N(t, x) \rightarrow u(t, x)$ п.в. в Q ;
- (c) $U_N(t, x) \rightarrow U(t, x) = B(u(t, x))$ п.в. в Q .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используем теорему Рисса о компактности в пространстве L^m в следующей формулировке [17, с. 278]. Пусть $g \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область пространства $\mathbb{R}^n$. Множество M функций $f \in L^m(g)$ компактно в $L^m(g)$, $1 \leq m < \infty$, если: 1) оно ограничено в $L^m(g)$, 2) равномерно непрерывно по сдвигу в $L^m(g)$, т.е.

$$\sup_{f \in M; |h| \leq \delta} \|f(x+h) - f(x)\|_{L^m(g)} \rightarrow 0 \quad (\delta \rightarrow 0).$$

При этом предполагается, что $f = 0$ вне области g .

Полагаем $g = Q$. Множество M состоит из функций u_N ($N = 1, 2, \dots$). По лемме 3.1 (a) $\|u_N\|_{L^\infty(0, T; L^r(\Omega))} \leq C$. Отсюда следует благодаря выбору $m = \min(p, r)$, что $\|u_N\|_{L^m(Q)} \leq C$, так что первое условие теоремы о компактности выполнено. Проверим второе. Фиксируем число $\delta > 0$ и пусть $|h| \leq \delta$. Сдвиги функций u_N по переменной t уже оценены в лемме 3.4. При этом оценка получена в норме пространства $L^r(Q)$. Так как $m \leq r$, то упомянутую оценку можно использовать в такой форме

$$\begin{aligned} \|u_N(t+h, x) - u_N(t, x)\|_{L^m(Q)} &= \|\Delta_h u_N\|_{L^m(Q)} \leq C\delta^\alpha, \\ \alpha &= \min\left(\frac{1}{rp}, \frac{1}{rq}\right). \end{aligned} \quad (3.9)$$

Перейдем к сдвигам по переменной $x \in \Omega$. Рассмотрим подробно приращение по переменной x_1 , для чего используем представление $x = (x_1, x')$. Допустим, что отрезок $[x_1, x_1 + h_1]$ при заданном x' полностью содержится в области Ω . Тогда

$$\Delta_{h_1} u_N = u_N(t, x_1 + h_1, x') - u_N(t, x_1, x') = \int_{x_1}^{x_1 + h_1} D_1 u_N(t, y, x') dy, \quad (3.10)$$

так что

$$\begin{aligned} |\Delta_{h_1} u_N| &\leq \left(\int_{x_1}^{x_1 + h_1} |D_1 u_N|^p dy \right)^{1/p} \left(\int_{x_1}^{x_1 + h_1} dy \right)^{1/p'} \\ &\leq |h_1|^{1/p'} \left(\int_{\Omega_1(x')} |D_1 u_N|^p dy \right)^{1/p}. \end{aligned}$$

Здесь $\Omega_1(x')$ — сечение области Ω прямой $l(x')$, которая получается фиксированием точки x' и изменением переменной $x_1 \in \mathbb{R}^1$. Если же точка $(x_1 + h_1, x')$ выходит

за пределы области Ω , то в соответствии с договоренностью $u_N(t, x_1 + h_1, x') = 0$, так что $\Delta_{h_1} u_N \equiv -u_N(t, x_1, x')$. Однако в этом случае на интервале $x_1 < y < x_1 + h_1$ прямой $l(x')$ найдется точка (x_1^0, x') , лежащая на границе S области Ω . Так как $u|_S = 0$, то можно записать такое тождество: $\Delta_{h_1} u_N = u_N(t, x_1^0, x') - u_N(t, x_1, x')$, причем $|x_1 - x_1^0| < h_1$. Мы снова оказались в условиях применимости формулы (3.10), откуда следует, что во всех возможных случаях верно неравенство

$$|\Delta_{h_1} u_N| \leq |h_1|^{1/p'} \left(\int_{\Omega_1(x')} |D_1 u_N|^p dy \right)^{1/p}.$$

Из него достаточно очевидным образом вытекает оценка

$$\int_Q |\Delta_{h_1} u_N|^p dQ \leq C |h_1|^{p/p'} \int_Q |D_1 u_N|^p dQ.$$

Так как $\|D u_N\|_{L^p(Q)} \leq C$ согласно лемме 3.1, то

$$\|\Delta_{h_1} u_N\|_{L^p(Q)} \leq C |h_1|^{1/p'}.$$

Ясно, что эта оценка справедлива для любой переменной $x_1, \dots, x_n$, так что

$$\|\Delta_{h_i} u_N\|_{L^p(Q)} \leq C |h_i|^{1/p'} \quad (i = 1, \dots, n). \quad (3.11)$$

В случае совместного сдвига на вектор $\bar{h} \in \mathbb{R}^n$, где $|\bar{h}| \leq \delta$, представим разность $\Delta_{\bar{h}} u_N$ как сумму сдвигов по каждой переменной $x_1, \dots, x_n$ и воспользуемся формулой (3.11), что приведет к неравенству $\|\Delta_{\bar{h}} u_N\|_{L^p(Q)} \leq C \delta^{1/p'}$, откуда следует благодаря выбору m , что

$$\|\Delta_{\bar{h}} u_N\|_{L^m(Q)} \leq C \delta^{1/p'}.$$

Объединяя этот результат с оценкой (3.9), при совместном сдвиге по переменным $(t, x) \in Q$ получим

$$\|u_N(t + h, x + \bar{h}) - u_N(t, x)\|_{L^m(Q)} \leq C \delta^\rho, \quad \rho = \min \left(\alpha, \frac{1}{p'} \right).$$

Здесь $|h|, |\bar{h}| \leq \delta$, постоянная C не зависит от δ и N . Тем самым выполнено и второе условие теоремы о компактности, значит, последовательность u_N компактна в пространстве $L^m(Q)$. Это доказывает первое утверждение леммы. Второе является его следствием. Проверим последнее. Согласно построению $U_N = B(u_N) + N^{-1} u_N$. При этом $u_N \rightarrow u$ почти всюду в Q . Фиксируем точку сходимости $(t, x) \in Q$. Тогда $N^{-1} u_N(t, x) \rightarrow 0$ ($N \rightarrow \infty$), $B(u_N(t, x)) \rightarrow B(u(t, x))$, так что в целом $U_N(t, x) \rightarrow B(u(t, x)) = U(t, x)$. Это завершает доказательство леммы.

ЛЕММА 3.6. Из последовательности u_N можно извлечь подпоследовательность, снова обозначаемую u_N , такую, что при $N \rightarrow \infty$:

- (а) $u_N \rightarrow u$ слабо в $X_1 = L^p(0, T; \dot{W}_p^1(\Omega))$ и при этом $u \in X$;
- (б) $A_i(t, x, u_N, Du_N) = w_{iN} \rightarrow w_i$ слабо в $L^{p'}(Q)$, $i = 1, \dots, n$;
 $A_0(t, x, u_N, Du_N) = w_{0N} \rightarrow w_0$ слабо в $L^{q'}(Q)$,
 где w_i ($i = 1, \dots, n$) – некоторые элементы пространства $L^{p'}(Q)$, w_0 – элемент пространства $L^{q'}(Q)$;
- (с) $U_N \rightarrow U = B(u)$ *-слабо в $L^\infty(0, T; L^{r'}(\Omega))$, т.е. $\langle U_N, w \rangle \rightarrow \langle U, w \rangle$ для любого элемента $w \in L^1(0, T; L^r(\Omega))$, при этом

$$\|U(t, x)\|_{L^\infty(0, T; L^{r'}(\Omega))} < C.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно определению нормы в пространстве X_1 и в силу оценок леммы 3.1(а) справедливы неравенства $\|u_N\|_{X_1} = \|Du_N\|_{L^p(Q)} \leq C$. Так как пространство X_1 рефлексивно, то можно считать, что $u_N \rightarrow z$ слабо в X_1 . Одновременно по лемме 3.5 (а) $u_N \rightarrow u$ в пространстве $L^m(Q)$. Из сравнения приведенных сходимостей следует, что $z = u$, так что $u_N \rightarrow u$ слабо в X_1 . В частности, $u \in X_1$. Из оценок леммы 3.1(а) с очевидностью вытекает, что $\|u\|_{L^\infty(0, T; L^r(\Omega))} \leq C$, т.е. $u \in X_0$. А тогда $u \in X = X_0 \cap X_1$. Это доказывает пункт (а). Аналогично из лемм 3.2 и 3.5(с) вытекает пункт (с). Наконец, пункт (б) следует из объединения лемм 3.1(б) и 2.7, что завершает доказательство.

Обозначим через Y_N пространство функций вида $\sum_{k=1}^N d_k(t)e_k(x)$, где $d_k \in C^1[0, T]$. И пусть $Y_0 = \bigcup_{N=1}^\infty Y_N$. Очевидно, что $Y_0 \subset X$.

ЛЕММА 3.7. Для функции $U = B(u)$, построенной в лемме 3.5, определена производная $U' = \frac{\partial}{\partial t} B(u)$ как элемент пространства $\mathcal{D}'(0, T; L^{r'}(\Omega))$. Эта производная задает непрерывный линейный функционал на пространстве X и удовлетворяет уравнению

- (а) $\langle U', v \rangle + \sum_{i=1}^n \langle w_i, D_i v \rangle + \langle w_0, v \rangle = 0$, $v \in X$.
 Здесь элементы w_i ($i = 0, 1, \dots, n$) взяты из леммы 3.6. При этом для каждого $v \in Y_0$ при $N \rightarrow \infty$
- (б) $\langle U'_N, v \rangle \rightarrow \langle U', v \rangle$, $v \in Y_0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\varphi(t) \in \mathcal{D}(0, T)$, $e(x) \in L^r(\Omega)$. Полагаем $w = \varphi'(t)e(x)$. Очевидно, что $w \in L^1(0, T; L^r(\Omega))$, поэтому согласно лемме 3.6(с) $\langle U_N, \varphi'e \rangle \rightarrow \langle U, \varphi'e \rangle$ при $N \rightarrow \infty$. Это соотношение означает, что определены производные U'_N и U' как элементы пространства $\mathcal{D}'(0, T; L^{r'}(\Omega))$, и при этом

$$\langle U'_N, w \rangle \rightarrow \langle U', w \rangle, \quad w = \varphi(t)e(x), \quad \varphi \in \mathcal{D}(0, T). \quad (3.12)$$

Пусть задана функция $v \in Y_0$, так что $v = \sum_{k=1}^M d_k(t)e_k(x)$, где M – фиксированное целое число. Считая $N \geq M$, запишем приближенные уравнения (3.5) для

функций $e_1(x), \dots, e_M(x)$, умножим уравнение под номером $k = 1, 2, \dots, M$ на числовую функцию $d_k(t)$ и все результаты сложим. Это дает следующее равенство

$$\langle U'_N, v \rangle + \sum_{i=1}^n \langle w_{iN}, D_i v \rangle + \langle w_{0N}, v \rangle = 0, \quad N \geq M. \quad (3.13)$$

Выберем функции $d_k(t) \in \mathcal{D}(0, T)$ для $k = 1, \dots, M$. Тогда можно использовать соотношение (3.12), так что предыдущее равенство с учетом предельных соотношений леммы 3.6(b) дает при $N \rightarrow \infty$ тождество

$$\langle U', v \rangle + \sum_{i=1}^n \langle w_i, D_i v \rangle + \langle w_0, v \rangle = 0. \quad (3.14)$$

Оно верно для функций вида $v = \sum_{k=1}^M d_k(t) e_k(x)$, где $d_k(t) \in \mathcal{D}(0, T)$. Множество таких функций плотно в пространстве X , поэтому из (3.14) следует, что $U' = \sum_{i=1}^n D_i w_i - w_0$. Для $i = 1, \dots, n$ $w_i \in L^{p'}(Q)$, поэтому

$$D_i w_i \in L^{p'}(0, T; W_{p'}^{-1}(\Omega)) = X_1^*.$$

Они определяют непрерывные линейные функционалы на пространстве X_1 , следовательно, и на его части $X = X_0 \cap X_1$. Функция $w_0 \in L^{q'}(Q)$ и потому задает непрерывный линейный функционал на пространстве $L^q(Q)$, а тогда и на его части $X \subset L^q(Q)$, что следует из леммы 2.5. В целом функция U' задает непрерывный линейный функционал на пространстве X . В частности, тождество (3.14) продолжается по непрерывности на все функции $v \in X$, что доказывает пункт (а) леммы.

Перейдем к (b). Из (3.12) следует, что требуемое соотношение уже доказано для функций специального вида. Задача состоит в том, чтобы расширить запас множителей. Пусть задана функция $v \in Y_0$. Для нее верно тождество (3.13). Одновременно эту функцию можно подставить в тождество (3.14), так как согласно предыдущему оно верно для всех функций $v \in X$. В тождестве (3.13) устремим $N \rightarrow \infty$. При этом все слагаемые, кроме первого, будут стремиться к соответствующим слагаемым тождества (3.14), что установлено в лемме 3.6(b). Но тогда первое слагаемое тождества (3.13) также будет стремиться к первому слагаемому тождества (3.14). Это в точности соответствует пункту (b) леммы, что завершает ее доказательство.

ЛЕММА 3.8. *Из последовательности u_N можно извлечь подпоследовательность, снова обозначаемую u_N , такую, что при $N \rightarrow \infty$:*

- (a) $B(u_N(T, x)) \rightarrow B(u(T, x))$ слабо в $L^{r'}(\Omega)$;
- (b) $B(u_N(0, x)) \rightarrow B(u(0, x))$ сильно в $L^{r'}(\Omega)$;
- (c) $B(u(0, x)) = B(u_0(x))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала убедимся, что последовательность $U_N(T, x) \rightarrow U(T, x)$ слабо в пространстве $L^{r'}(\Omega)$. Согласно лемме 3.2 $\|U_N(T, x)\|_{L^{r'}(\Omega)} \leq C$, поэтому можно считать, что $U_N(T, x) \rightarrow W$ слабо в $L^{r'}(\Omega)$. Зафиксируем элемент $e(x) \in E_0$ и введем функцию $v = te(x)$. Непосредственным вычислением находим, что

$$\langle U'_N, te \rangle = T(U_N(T, x), e) - \langle U_N, e \rangle.$$

В последнем равенстве устремим $N \rightarrow \infty$. Так как $v = te \in Y_0$, то можно использовать лемму 3.7(b), согласно которой в пределе получим тождество

$$\langle U', te \rangle = T(W, e) - \langle U, e \rangle.$$

Вычитая его из тождества

$$\langle U', te \rangle = T(U(T, x), e) - \langle U, e \rangle,$$

найдем, что $(U(T, x) - W, e) = 0$; $e \in E_0$. Так как E_0 плотно в пространстве $L^r(\Omega)$, то $U(T, x) = \overset{\circ}{W}$, что в принятых обозначениях $U(T, x) = B(u(T, x))$ приводит к соотношению: $U_N(T, x) \rightarrow B(u(T, x))$ слабо в $L^{r'}(\Omega)$. Согласно определению $U_N = B(u_N) + N^{-1}u_N$, так что для элемента $e \in L^r(\Omega)$

$$(B(u_N(T, x)), e) = (U_N(T, x), e) - \frac{1}{N}(u_N(T, x), e) \rightarrow (B(u(T, x)), e)$$

при $N \rightarrow \infty$, так как множители $(u_N(T, x), e)$ равномерно ограничены:

$$|(u_N(T, x), e)| \leq \|u_N(T, x)\|_{L^r(\Omega)} \|e\|_{L^{r'}(\Omega)} \leq C$$

в силу леммы 3.1 (а). Тем самым доказан пункт (а) леммы. Проверим последующие. Если провести аналогичные вычисления с функцией $v = (T - t)e(x)$, то придем к соотношению: $B(u_N(0, x)) \rightarrow B(u(0, x))$ слабо в $L^{r'}(\Omega)$. Убедимся, что сходимость здесь сильная. Для этого используем неравенство (с) леммы 2.1 в такой форме:

$$|B(u_N(0, x)) - B(u_0(x))| \leq C |u_N(0, x) - u_0(x)| (1 + |u_N(0, x)|^{r-2} + |u_0(x)|^{r-2}).$$

Возводя в степень r' , интегрируя по области Ω и применяя неравенство Гёльдера с подходящими показателями, получим

$$\begin{aligned} & \|B(u_N(0, x)) - B(u_0(x))\|_{L^{r'}(\Omega)}^{r'} \\ & \leq C \|u_N(0, x) - u_0(x)\|_{L^r(\Omega)}^{\frac{1}{r-1}} \left(1 + \|u_N(0, x)\|_{L^r(\Omega)}^{\frac{r-2}{r-1}} + \|u_0(x)\|_{L^r(\Omega)}^{\frac{r-2}{r-1}} \right). \end{aligned}$$

Согласно построению $u_N(0, x) \rightarrow u_0(x)$ в норме пространства $L^r(\Omega)$, а сумма в скобках справа равномерно ограничена. Следовательно, $B(u_N(0, x)) \rightarrow B(u_0(x))$ в норме пространства $L^{r'}(\Omega)$. Сравним это соотношение с установленной выше слабой сходимостью $B(u_N(0, x))$ к $B(u(0, x))$. Из сравнения следует, что $B(u(0, x)) = B(u_0(x))$ и при этом $B(u_N(0, x)) \rightarrow B(u(0, x))$ в норме пространства $L^{r'}(\Omega)$. Тем самым проверены все утверждения леммы, что завершает ее доказательство.

ЛЕММА 3.9. Функция $U = B(u(t, x))$ принадлежит $C([0, T]; w - L^{r'}(\Omega))$, где символ w — означает слабую топологию пространства $L^{r'}(\Omega)$, и при этом как непрерывная функция она принимает значение $B(u(0, x)) = B(u_0(x))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $t, t + h \in [0, T]$. Введем скалярную функцию $(U(t, x), f(x))$ для $f \in C_0^1(\bar{\Omega})$. Ее приращение представим в виде

$$\langle \Delta_h U, f \rangle = (U(t + h, x) - U(t, x), f) = \int_t^{t+h} (U'(\tau, x), f) d\tau = \langle U', v \rangle.$$

Здесь функция v задается следующими равенствами: $v = f$ для $\tau \in [t, t + h]$; $v = 0$ для $\tau \notin [t, t + h]$. Очевидно, что $v \in X_1 = L^p(0, T; \dot{W}_p^1(\Omega))$, поэтому можно воспользоваться тождеством (а) леммы 3.7, согласно которому $(\Delta_h U, f) = -\sum_{i=1}^n \langle w_i, D_i v \rangle - \langle w_0, v \rangle$. Отсюда

$$|(\Delta_h U, f)| \leq \sum_{i=1}^n \|w_i\|_{L^{p'}(Q)} \|D_i v\|_{L^p(Q)} + \|w_0\|_{L^{q'}(Q)} \|v\|_{L^q(Q)}.$$

Учитывая определение функции v , находим, что

$$\begin{aligned} \|D_i v\|_{L^p(Q)}^p &= \int_t^{t+h} \|D_i f\|_{L^p(\Omega)}^p d\tau = h \|D_i f\|_{L^p(\Omega)}^p; \\ \|v\|_{L^q(Q)}^q &= \int_t^{t+h} \|f\|_{L^q(\Omega)}^q d\tau = h \|f\|_{L^q(\Omega)}^q. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что для $f \in C_0^1(\bar{\Omega})$

$$|(\Delta_h U, f)| \leq C \left(h^{1/p} \sum_{i=1}^n \|D_i f\|_{L^p(\Omega)} + h^{1/q} \sum_{i=1}^n \|f\|_{L^q(\Omega)} \right), \quad (3.15)$$

где постоянная C не зависит от h . Тем самым установлена непрерывность функции $(U(t, x), f)$ при условии, что $f \in C_0^1(\bar{\Omega})$. Пусть теперь $f \in L^r(\Omega)$. Приближим ее последовательностью $f_k \in C_0^1(\bar{\Omega})$, так что $\|f - f_k\|_{L^r(\Omega)} \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. Рассматриваемое приращение представим в виде

$$(\Delta_h U, f) = (\Delta_h U, f - f_k) + (\Delta_h U, f_k).$$

Тогда

$$|(\Delta_h U, f)| \leq (\|U(t + h, x)\|_{L^{r'}(\Omega)} + \|U(t, x)\|_{L^{r'}(\Omega)}) \|f - f_k\|_{L^r(\Omega)} + |(\Delta_h U, f_k)|.$$

По лемме 3.6(c) $\|U(t, x)\|_{L^{r'}(\Omega)} \leq C$, где постоянная не зависит от t . По заданному $\varepsilon > 0$ подберем номер k такой, что $2C\|f - f_k\|_{L^r(\Omega)} < \varepsilon/2$. Затем по выбранному k подберем число h столь малое, что $|(\Delta_h U, f_k)| < \varepsilon/2$. Это возможно по формуле (3.15). В результате получим неравенство $|(\Delta_h U, f)| < \varepsilon$, которое доказывает непрерывность функции $(U(t, x), f)$ для произвольной $f \in L^r(\Omega)$. Этим проверено утверждение леммы о слабой непрерывности функции $U = B(u)$. Равенство $B(u(0, x)) = B(u_0(x))$ установлено в лемме 3.8(c), что завершает доказательство.

ЛЕММА 3.10. *Для построенной выше последовательности u_N справедливы следующие предельные соотношения:*

$$\begin{aligned} (a) \quad & \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \Gamma(u_N(0, x)) dx = \int_{\Omega} \Gamma(u(0, x)) dx; \\ (b) \quad & \varliminf_{N \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \Gamma(u_N(T, x)) dx \geq \int_{\Omega} \Gamma(u(T, x)) dx. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вернемся к функции $\gamma(U)$, определенной в §2 равенством $\gamma(B(u)) = \Gamma(u)$, $u \in \mathbb{R}^1$. Построим по ней функционал $F(U) = \int_{\Omega} \gamma(U(x)) dx$. Согласно лемме 2.3 функция $\gamma(U)$ удовлетворяет неравенству $|\gamma(U)| \leq C(|U|^{r'} + 1)$, следовательно, введенный функционал непрерывен и локально ограничен на пространстве $L^{r'}(\Omega)$. По лемме 3.8(b) последовательность $B(u_N(0, x)) \rightarrow B(u(0, x))$ в пространстве $L^{r'}(\Omega)$ при $N \rightarrow \infty$, поэтому в силу непрерывности функционала $F[B(u_N(0, x))] \rightarrow F[B(u(0, x))]$, т.е.

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \gamma[B(u_N(0, x))] dx = \int_{\Omega} \gamma[B(u(0, x))] dx,$$

что равнозначно пункту (a) леммы в силу равенства $\gamma(B(u)) = \Gamma(u)$. Перейдем к (b). По лемме 2.3 функция $\gamma(U)$ является выпуклой и потому определяет выпуклый функционал $F(U)$. Каждый выпуклый локально ограниченный функционал слабо полунепрерывен снизу [18, с. 107]. Это означает следующее: если последовательность $V_N \rightarrow V$ слабо в пространстве $L^{r'}(\Omega)$, то $\varliminf_{N \rightarrow \infty} F(V_N) \geq F(V)$. Полагая здесь $V_N = B(u_N(T, x))$, $V = B(u(T, x))$ и используя лемму 3.8(a), получим

$$\varliminf_{N \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \gamma[B(u_N(T, x))] dx \geq \int_{\Omega} \gamma[B(u(T, x))] dx,$$

что равносильно пункту (b) леммы, так как $\gamma(B(u)) = \Gamma(u)$. Это завершает доказательство.

ЛЕММА 3.11. *Для построенных выше последовательностей u_N , U_N справедливо следующее соотношение*

$$\varliminf_{N \rightarrow \infty} \langle U'_N, u_N - v \rangle \geq \langle U', u - v \rangle; \quad U = B(u), \quad v \in X.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Напомним, что $U'_N = (\beta(u_N) + N^{-1})u'_N$. Отсюда прямым вычислением получаем формулу

$$\begin{aligned} \langle U'_N, u_N \rangle &= \int_{\Omega} \Gamma(u_N(T, x)) dx - \int_{\Omega} \Gamma(u_N(0, x)) dx \\ &\quad + \frac{1}{2N} (\|u_N(T, x)\|_{L^2(\Omega)}^2 - \|u_N(0, x)\|_{L^2(\Omega)}^2). \end{aligned}$$

Так как $\|u_N(t, x)\|_{L^2(\Omega)} \leq c\|u_N(t, x)\|_{L^r(\Omega)} \leq C$ по лемме 3.1(a), то в пределе при $N \rightarrow \infty$ согласно лемме 3.10 получим

$$\varliminf_{N \rightarrow \infty} \langle U'_N, u_N \rangle \geq \int_{\Omega} \Gamma(u(T, x)) dx - \int_{\Omega} \Gamma(u(0, x)) dx = \langle U', u \rangle. \quad (3.16)$$

Согласно лемме 3.7(b) $\lim_{N \rightarrow \infty} \langle U'_N, v \rangle = \langle U', v \rangle$ для каждого элемента $v \in Y_0$. Вычитая это соотношение из (3.16), получим

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \langle U'_N, u_N - v \rangle \geq \langle U', u - v \rangle, \quad v \in Y_0.$$

Это есть требуемое неравенство для функций $v \in Y_0$. По непрерывности оно продолжается на все функции $v \in X$, что завершает доказательство.

§ 4. Предельный переход

Приближенные уравнения (3.5) запишем в форме двойственности для функции $w \in Y_N$:

$$\langle U'_N, w \rangle + \sum_{i=1}^n \langle A_i(t, x, u_N, Du_N), D_i w \rangle + \langle A_0(t, x, u_N, Du_N), w \rangle = 0. \quad (4.1)$$

Выберем $w = u_N - v$, где $v \in Y_N$, и представим уравнение в такой форме

$$\begin{aligned} & \langle U'_N, u_N - v \rangle + \sum_{i=1}^n \langle A_i(t, x, u_N, Du_N) - A_i(t, x, u_N, Dv), D_i(u_N - v) \rangle \\ & + \sum_{i=1}^n \langle A_i(t, x, u_N, Dv), D_i(u_N - v) \rangle + \langle A_0(t, x, u_N, Du_N), u_N - v \rangle = 0. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Перепишем это уравнение в условных обозначениях

$$\langle U'_N, u_N - v \rangle + \int_Q H(u_N, v) dQ + \int_Q G_N dQ + \int_Q F_N dQ = 0. \quad (4.3)$$

Найдем предел каждого слагаемого при $N \rightarrow \infty$. Напомним, что предел первого слагаемого уже вычислен в лемме 3.11. Второе слагаемое неотрицательно в силу условия параболичности 2А. Перейдем к последним слагаемым. При этом будет использовано следующее утверждение: если $f_N \rightarrow f$ в X^* , $w_N \rightarrow w$ слабо в X , то $\langle f_N, w_N \rangle \rightarrow \langle f, w \rangle$.

ЛЕММА 4.1. *Для последовательности u_N , построенной в предыдущем параграфе, справедливо следующее предельное соотношение*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_Q G_N dQ = \sum_{i=1}^n \langle A_i(t, x, u, Dv), D_i(u - v) \rangle.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Перепишем рассматриваемый интеграл, используя обозначения леммы 2.8:

$$\int_Q G_N dQ = \sum_{i=1}^n \langle z_{iN}, D_i(u_N - v) \rangle.$$

Так как $\|u_N\|_X \leq C$ согласно лемме 3.1(b) и при этом $u_N \rightarrow u$ почти всюду в Q по лемме 3.5(b), то по лемме 2.8

$$z_{iN} = A_i(t, x, u_N, Dv) \rightarrow z_i = A_i(t, x, u, Dv) \quad (N \rightarrow \infty)$$

в норме пространства $L^{p'}(Q)$. Одновременно последовательность $u_N \rightarrow u$ слабо в пространстве $X_1 = L^p(0, T; \overset{\circ}{W}_p^1(\Omega))$ согласно лемме 3.6(a). Это значит, что $D_i u_N \rightarrow D_i u$ слабо в пространстве $L^p(Q)$ при $N \rightarrow \infty$. Но тогда

$$\langle z_{iN}, D_i(u_N - v) \rangle \rightarrow \langle z_i, D_i(u - v) \rangle \quad (N \rightarrow \infty),$$

что составляет утверждение леммы.

ЛЕММА 4.2. Введем обозначение

$$\int_Q K_N dQ = \langle A_0(t, x, u_N, Du_N), u_N - u \rangle = \langle w_{0N}, u_N - u \rangle.$$

Тогда

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_Q K_N dQ = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Далее постоянно используется оценка $\|u_N\|_X \leq C$, полученная в лемме 3.1(b). Пусть E — измеримое подмножество области Q , E' — его дополнение. Разбив рассматриваемый интеграл на два по областям E и E' соответственно, оценим его следующим образом

$$\left| \int_Q K_N dQ \right| \leq \|w_{0N}\|_{L^{q'}(E)} \|u_N - u\|_{L^q(E)} + \|w_{0N}\|_{L^{q'}(E')} \|u_N - u\|_{L^q(E')}. \quad (4.4)$$

По заданному $\varepsilon > 0$ найдем такое $\delta > 0$, что $\int_E |w_{0N}|^{q'} dQ < \varepsilon^{q'}$, как только $\text{mes } E < \delta$. Это возможно, так как функции под знаком интеграла имеют равномерно абсолютно непрерывные интегралы по лемме 2.9. В результате можно оценить первую норму неравенства (4.4):

$$\|w_{0N}\|_{L^{q'}(E)} = \left(\int_E |w_{0N}|^{q'} dQ \right)^{1/q'} < \varepsilon.$$

Затем строим множество $E \subset Q$ с такими свойствами: $\text{mes } E < \delta$, $u_N \rightarrow u$ равномерно на множестве E' . Это возможно по теореме Егорова, так как $u_N \rightarrow u$

$(N \rightarrow \infty)$ почти всюду в Q согласно лемме 3.5(b). В частности, найдется номер N_0 такой, что

$$\sup_{E'} |u_N - u| < \varepsilon \quad (N > N_0).$$

В результате можно дать следующую оценку для номеров $N > N_0$:

$$\|u_N - u\|_{L^q(E')} = \left(\int_{E'} |u_N - u|^q dQ \right)^{1/q} \leq C \sup_{E'} |u_N - u| \leq C\varepsilon.$$

Далее,

$$\|u_N - u\|_{L^q(E)} \leq \|u_N - u\|_{L^q(Q)} \leq c \|u_N - u\|_X \leq C$$

согласно лемме 2.5 о непрерывности вложения X в $L^q(Q)$ и лемме 3.1(b). Наконец,

$$\|w_{0N}\|_{L^{q'}(E')} \leq \|w_{0N}\|_{L^{q'}(Q)} \leq C,$$

так как $w_{0N} \rightarrow w_0$ слабо в $L^{q'}(Q)$ по лемме 2.7. Подставляя полученные выше соотношения в неравенстве (4.4), получим для $N > N_0$: $\left| \int_Q K_N dQ \right| \leq C\varepsilon$, где постоянная C не зависит от ε . Так как ε произвольно, то отсюда следует утверждение леммы.

ЛЕММА 4.3. *Для последовательности u_N , построенной в третьем параграфе, справедливо следующее предельное соотношение*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_Q F_N dQ = \lim_{N \rightarrow \infty} \langle w_{0N}, u_N - v \rangle = \langle w_0, u - v \rangle.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассматриваемый интеграл представим в таком виде

$$\int_Q F_N dQ = \langle w_{0N}, u_N - u \rangle + \langle w_{0N}, u - v \rangle.$$

Первое слагаемое справа стремится к нулю в силу леммы 4.2, а второе имеет пределом число $\langle w_0, u - v \rangle$, так как $w_{0N} \rightarrow w_0$ слабо в пространстве $L^{q'}(Q)$ при $N \rightarrow \infty$ согласно лемме 2.7, а $u - v \in L^q(Q)$ по лемме 2.5 о непрерывности вложения X в $L^q(Q)$. В результате получается утверждение леммы.

Вернемся к равенству (4.2) в форме (4.3) и устремим N к бесконечности. Учитывая результаты лемм 3.11, 4.1 и 4.3, получим в пределе

$$\begin{aligned} \langle U', u - v \rangle + \overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} \int_Q H(u_N, v) dQ \\ + \sum_{i=1}^n \langle A_i(t, x, u, Dv), D_i(u - v) \rangle + \langle w_0, u - v \rangle \leq 0. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Это неравенство получено при условии, что $v \in Y_0$. По непрерывности оно продолжается на все функции $v \in X$. В частности, можно взять $v = u$, что дает неравенство

$$\overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} \int_Q H(u_N, u) dQ \leq 0.$$

Однако по условию параболичности 2А $H(u_N, u) \geq 0$ почти всюду в Q . Отсюда следует, что $\lim_{N \rightarrow \infty} H(u_N, u) = 0$ п.в. в Q , что в подробной записи имеет следующий вид: для почти всех $(t, x) \in Q$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n [A_i(t, x, u_N, Du_N) - A_i(t, x, u_N, Du)] (D_i u_N - D_i u) = 0. \quad (4.6)$$

Опираясь на это равенство, докажем следующее утверждение.

ЛЕММА 4.4. *Для последовательности $u_N(t, x)$ справедливы следующие предельные соотношения: $u_N \rightarrow u$, $Du_N \rightarrow Du$ почти всюду в Q при $N \rightarrow \infty$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое соотношение уже установлено ранее в лемме 3.5(b), поэтому проверим второе. Выберем точку $(t, x) \in Q$ так, чтобы выполнялись следующие условия: $u_N(t, x) \rightarrow u(t, x)$ при $N \rightarrow \infty$; $Du(t, x)$ определено и конечно; функции $A_i(t, x, u, \xi)$ непрерывны по $u \in \mathbb{R}^1$, $\xi \in \mathbb{R}^n$ для $i = 1, \dots, n$. Каждое из этих свойств справедливо почти всюду в Q , поэтому их комбинация выполняется также для почти всех $(t, x) \in Q$. Для выбранной таким способом точки введем обозначения: $u_N = u_N(t, x)$, $u = u(t, x)$, $\xi_N = Du_N(t, x)$, $\eta = Du(t, x)$. Введем также числовую последовательность

$$H_N = \sum_{i=1}^n [A_i(t, x, u_N, \xi_N) - A_i(t, x, u_N, \eta)] (\xi_{iN} - \eta_i).$$

Исходя из формулы (4.6) и введенных обозначений, можно считать, что $H_N \rightarrow 0$ ($N \rightarrow \infty$). Заметим также, что $H_N = H(t, x, u_N, \eta, \xi_N)$, где функция $H(t, x, u, \eta, \xi)$ введена в лемме 2.4. По условию $u_N \rightarrow u$ при $N \rightarrow \infty$, в частности, $|u_N| \leq M$ для некоторой постоянной M . Полагаем также $M_1 = |\eta|$. Для указанных постоянных M, M_1 строим функцию $c(t, x)$ из леммы 2.4, так что

$$H_N = H(t, x, u_N, \eta, \xi_N) \geq c(t, x) |\xi_N - \eta|, \quad |\xi_N| \geq 2 + M_1. \quad (4.7)$$

Напомним, что функция $c(t, x)$ положительна почти всюду в Q . Считаем, что выбранная точка $(t, x) \in Q$ такова, что $c(t, x) > 0$. Теперь имеется возможность выяснить свойства последовательности $\xi_N = Du_N(t, x)$. Допустим, что она неограничена, т.е. найдется подпоследовательность ξ_{N_k} такая, что $|\xi_{N_k}| \rightarrow \infty$ при $k \rightarrow \infty$. Используя неравенство (4.7), получим

$$H_{N_k} \geq c(t, x) |\xi_{N_k} - \eta| \rightarrow \infty \quad (k \rightarrow \infty).$$

Это противоречит условию, что $H_N \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$, следовательно, последовательность ξ_N равномерно ограничена. Пусть ξ — один из ее частичных пределов,

т.е. $\xi_{N_k} \rightarrow \xi$ при $k \rightarrow \infty$. В силу непрерывности функций $A_i(t, x, u, \xi)$ по двум последним аргументам получим

$$\lim_{k \rightarrow \infty} H_{N_k} = \sum_{i=1}^n [A_i(t, x, u, \xi) - A_i(t, x, u, \eta)] (\xi_i - \eta_i) = 0.$$

По условию параболичности 2А такое равенство возможно только для $\xi = \eta$. Тем самым любой частичный предел последовательности ξ_N совпадает с η , что равносильно соотношению $Du_N(t, x) \rightarrow Du(t, x)$ при $N \rightarrow \infty$. Согласно построению это соотношение выполняется для почти всех $(t, x) \in Q$, что и утверждалось.

Объединяя доказанное утверждение с леммой 2.9, приходим к следующему заключению.

ЛЕММА 4.5. В неравенстве (4.5) элемент $w_0 = A_0(t, x, u, Du)$.

ЛЕММА 4.6. Функция $u(t, x)$ для любого $w \in X$ удовлетворяет уравнению

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial t} B(u), w \right\rangle + \sum_{i=1}^n \langle A_i(t, x, u, Du), D_i w \rangle + \langle A_0(t, x, u, Du), w \rangle = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вернемся к неравенству (4.5). Учитывая лемму 4.5 и условие параболичности $H(u_N, v) \geq 0$, получим для любого $v \in X$

$$\langle U', u - v \rangle + \sum_{i=1}^n \langle A_i(t, x, u, Dv), D_i(u - v) \rangle + \langle A_0(t, x, u, Du), u - v \rangle \leq 0. \quad (4.8)$$

Выберем $v = u - \lambda w$, где $\lambda > 0$, $w \in X$, так что $u - v = \lambda w$. Подставив это выражение в (4.8) и разделив на λ , получим

$$\langle U', w \rangle + \sum_{i=1}^n \langle A_i(t, x, u, D(u - \lambda w)), D_i w \rangle + \langle A_0(t, x, u, Du), w \rangle \leq 0.$$

Устремляя $\lambda \rightarrow 0$ и используя лемму 2.8 о непрерывности операторов $a_i(u, v) = A_i(t, x, u, Dv)$ по второму аргументу как операторов из X в $L^{p'}(Q)$, придем к соотношению

$$\langle U', w \rangle + \sum_{i=1}^n \langle A_i(t, x, u, Du), D_i w \rangle + \langle A_0(t, x, u, Du), w \rangle \leq 0.$$

Так как элемент $w \in X$ произволен, то вместо неравенства здесь можно ставить знак равенства. Полагая еще $U = B(u)$, придем к утверждению леммы.

Отметим, что получены все элементы теоремы 1.1, что дает возможность завершить ее доказательство.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.1. Проверим, что выполнены все ее утверждения. Включение $u \in X$ установлено в лемме 3.6(a). Остальные утверждения пункта (a) теоремы вытекают из леммы 2.6, в которой следует положить $u = v$. Пункт (b) теоремы совпадает с началом леммы 3.7. Пункт (c) составляет содержание леммы 4.6. Наконец, пункт (d) соответствует лемме 3.9. Это завершает доказательство теоремы.

В заключение приведем примеры функций $\beta(u)$, для которых применима развитая выше теория.

1. $\beta(u) = |u|^\alpha$, где $\alpha > 0$. Показатель: $r = \alpha + 2$.
2. $\beta(u) = 1 - u + u^2$. Очевидно, что

$$\frac{1}{2}u^2 \leq \beta(u) \leq 2(1 + u^2),$$

так что выполнено условие 1β с показателем $r = 4$.

3. Более общим образом можно взять $\beta(u) = \sum_{k=1}^l a_k |u|^{\alpha_k}$, где $\alpha_k \geq 0$, а числа a_k таковы, что $\beta(u) > 0$ при $u \neq 0$. Можно считать, что числа α_k расположены в порядке возрастания: $0 \leq \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_l$. Нетрудно видеть, что тогда справедливы неравенства

$$c|u|^{\alpha_l} \leq \beta(u) \leq C(|u|^{\alpha_l} + 1) \quad (c > 0),$$

так что условие 1β выполнено. Можно предложить и более сложные функции, например, дробно-рациональные.

Автор благодарит А. В. Иванова и С. И. Похожаева за полезное обсуждение результатов.

Список литературы

1. Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М.: Мир, 1972.
2. Raviart P. A. Sur la résolution de certaines équations paraboliques non linéaires // J. Funct. Anal. 1970. V. 5. № 2. P. 299–328.
3. Иванов А. В. Квазилинейные параболические уравнения, допускающие двойное вырождение // Алгебра и анализ. 1992. Т. 4. № 6. С. 114–130.
4. Калашников А. С. Некоторые вопросы качественной теории нелинейных вырождающихся параболических уравнений второго порядка // УМН. 1987. Т. 42. № 2. С. 135–176.
5. Alt H. W., Luckhaus S. Quasilinear elliptic-parabolic differential equations // Math. Z. 1983. V. 183. № 3. P. 311–341.
6. Павлова М. Ф. Исследование уравнений нестационарной нелинейной фильтрации // Дифференц. уравнения. 1987. Т. 23. № 8. С. 1436–1446.
7. Леонов К. Я. О начально-краевой задаче для одного класса квазилинейных параболических уравнений. Препринт Института физики АН АзССР № 202. Баку: Институт физики АН АзССР, 1987.
8. Bernis F. Existence results for doubly nonlinear higher order parabolic equations on unbounded domains // Math. Ann. 1988. V. 279. P. 373–394.
9. Blanchard D., Francfort G. A. A few results on a class of degenerate parabolic equations // Ann. Sc. norm. super. Pisa. Cl. sci. 1991. V. 18. № 2. P. 213–219.
10. Blanchard D., Redwane H. Solutions renormalisées d'équations paraboliques à deux non linéarités // C. R. Acad. Sci. Ser. 1. 1994. V. 319. № 8. P. 831–835.

11. *Солтанов К. Н.* Существование и несуществование глобального решения некоторых нелинейных эллипτικο-параболических уравнений // Дифференц. уравнения. 1993. Т. 29. № 4. С. 646–661.
12. *Иванов А. В., Мкртычян П. З.* О существовании непрерывных по Гёльдеру обобщенных решений первой краевой задачи для квазилинейных параболических уравнений, допускающих двойное вырождение // Зап. научн. семин. ПОМИ. 1990. Т. 183. С. 5–28.
13. *Иванов А. В., Мкртычян П. З., Яегер В.* Существование и единственность регулярно-го решения первой начально-краевой задачи для некоторого класса дважды нелинейных параболических уравнений // Зап. научн. семин. ПОМИ. 1994. Т. 213. С. 48–65.
14. *Гаевский Х., Грёгер К., Захариас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1978.
15. *Ладженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967.
16. *Данфорд Н., Шварц Дж. Т.* Линейные операторы. Общая теория. М.: ИЛ, 1962.
17. *Никольский С. М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М.: Наука, 1977.
18. *Вайнберг М. М.* Вариационный метод и метод монотонных операторов. М.: Наука, 1972.

Тульский государственный университет

Поступила в редакцию
09.09.1996