Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Рыжков, В. И. Черноусов, О классификации максимальных арифметических подгрупп односвязных групп, *Матем. сб.*, 1997, том 188, номер 9, 127–156

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm260>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.108.108

26 апреля 2023 г., 13:31:26

УДК 512.743

А. А. Рыжков, В. И. Черноусов

О классификации максимальных арифметических подгрупп односвязных групп

Пусть $G \subset \mathrm{GL}_n$ – простая односвязная алгебраическая группа, определенная над полем алгебраических чисел K , T – множество всех неархимедовых нормирований v поля K . Хорошо известно, что любая максимальная арифметическая подгруппа $\Gamma \subset G$ может быть однозначно восстановлена при помощи набора парахорических подгрупп; более точно, существуют парахорические подгруппы $M_v \subset G(K_v)$, $v \in T$, имеющие максимальный тип и такие, что $\Gamma = N_G(M)$, где $M = G(K) \cap \prod_{v \in T} M_v$. Таким образом, возникает естественный вопрос: для каких наборов $\{M_v\}_{v \in T}$, состоящих из парахорических подгрупп $M_v \subset G(K_v)$ максимальных типов, определенная выше подгруппа $\Gamma \subset G$ является максимальной арифметической подгруппой в G . Используя когомологический критерий Рольфа максимальной арифметической подгруппы, мы находим необходимые и достаточные условия максимальной вышеопределенной арифметической подгруппы $\Gamma \subset G$. Ответ дан в терминах существования элементов поля K с предписанными свойствами делимости.

Библиография: 23 названия.

Введение

Настоящая работа инспирирована серией работ А. А. Бондаренко [1]–[7], в которых приводится классификация максимальных арифметических подгрупп (всюду далее для краткости МАП) в ортогональных и симплектических группах, определенных над полями алгебраических чисел. Эти работы, на наш взгляд, имеют ряд недостатков. Главным из них, без сомнения, является ошибочность формулировок основных результатов работ [5], [6], [7], так как приведенные в этих работах необходимые и достаточные условия максимальной арифметической подгруппы являются лишь необходимыми, но не достаточными; соответствующий контрпример строится в конце статьи.

Далее, способ доказательства, избранный Бондаренко, заведомо не является оптимальным. Его рассуждения основаны на использовании явных геометрических реализаций исследуемых групп, что, с одной стороны, не позволяет включить в рассмотрение группы исключительных типов, которые, как известно, не имеют хороших геометрических реализаций, а с другой стороны, не является эффективным даже для групп классических типов. Это подтверждается как многочисленным дублированием однотипных рассуждений в упомянутых выше работах, так и тем фактом, что в них не охвачены все формы групп типов C_n , D_n .

Наконец, следует сказать, что при описании МАП наиболее естественным является получение их классификации с точностью до сопряжения элементами группы K -точек односвязных групп G (а не их центральных факторов G/μ , как это

сделано, например, в [6] для ортогональных групп), так как из сопряженности $\Gamma_2 = x\Gamma_1x^{-1}$ двух МАП Γ_1, Γ_2 элементом x , образ которого лежит в K -точках фактора G/μ , не следует их сопряженность элементом из $G(K)$. Забегая вперед, отметим также, что чем меньше центр исследуемой группы G , тем меньше технических трудностей приходится преодолевать на пути получения классификации МАП. Например, ответ давно уже известен для групп, являющихся одновременно односвязными и присоединенными [8], [9].

В предлагаемой статье приводится классификация МАП простых односвязных групп G всех типов с точностью до сопряжения элементами из $G(K)$. Наши рассуждения не зависят от выбора представления группы G , имеют универсальный характер и базируются на систематическом использовании структурных и арифметических свойств алгебраических групп, определенных над локальными и глобальными полями. Основными ингредиентами доказательств являются теория Брюа–Титса [10], [11], теорема о сильной аппроксимации [12], принцип Хассе для когомологий односвязных групп [12] и когомологический критерий Рольфа максимальной арифметических подгрупп (см. [13], [14]). Отправной точкой получения явной классификации МАП является для нас локально-глобальный подход, разработанный в 60-х–70-х годах в работах целого ряда математиков (см., например, [8], [13]–[17] и содержащиеся в обзоре В. П. Платонова [9] библиографические замечания). Его суть заключается в следующем.

Пусть $G \subset \mathrm{GL}_n$ – абсолютно простая односвязная алгебраическая группа, определенная над полем алгебраических чисел K . Обозначим через $\mathcal{O}$ кольцо целых алгебраических чисел поля K , через V (соответственно, V_∞ и V_f) – множество всех попарно неэквивалентных (соответственно, архимедовых и неархимедовых) нормирований поля K . Пусть также μ – центр группы G и $\pi: G \rightarrow \overline{G} = G/\mu$ – канонический гомоморфизм в соответствующую присоединенную группу. В дальнейшем будем предполагать, что вещественная часть $\prod_{v \in V_\infty} G(K_v)$ группы аделей $G(A)$ некомпактна. Последнее условие естественно, так как оно эквивалентно бесконечности группы целых точек $G(\mathcal{O})$.

Хорошо известно, что любая МАП $\Gamma \subset G$ может быть однозначно восстановлена при помощи набора локальных открытых компактных подгрупп $M_v \subseteq G(K_v)$, $v \in V_f$, выбранных специальным образом. Более точно, рассмотрим образ $\pi(\Gamma) \subseteq \overline{G}$. Поскольку он лежит в $\overline{G}(K)$, то можно взять замыкание $\pi(\Gamma)_v = \overline{\pi(\Gamma)} \subseteq \overline{G}(K_v)$ в v -адической топологии. Это замыкание является открытой компактной (но, вообще говоря, не максимальной) подгруппой. Обозначим через $\overline{M}_v$ произвольную максимальную компактную подгруппу, содержащую $\pi(\Gamma)_v$, и положим $M_v = \pi^{-1}(\overline{M}_v) \cap G(K_v)$. Согласно нашему построению группа Γ лежит в арифметической подгруппе $N_G(M)$, где $M = G(K) \cap \prod_{v \in V_f} M_v$, и значит, в силу максимальной обязана с ней совпадать.

Естественным образом возникает обратный вопрос, который приобрел в литературе название проблемы максимальной: найти необходимые и достаточные условия на множество открытых компактных подгрупп $\{M_v\}_{v \in V_f}$, $M_v \subseteq G(K_v)$, которые гарантируют максимальность арифметической подгруппы $\Gamma = N_G(M)$, где, как и выше, $M = G(K) \cap \prod_{v \in V_f} M_v$.

Легко установить, что для максимальной Γ необходимо, чтобы локальные

подгруппы M_v были парахорическими подгруппами и имели максимальный тип (см. определение в §1), причем $M_v = G(\mathcal{O}_v)$ для почти всех $v \in V_f$. Примеры показывают, что в общем случае эти условия не являются достаточными. Чтобы получить критерий максимальнойности Γ в классе K -разложимых групп G , Рольфс в работе [13] сузил класс парахорических подгрупп максимального типа, введя понятие подгруппы $\mathcal{O}$ -максимального типа, и доказал, что если G разложима над K , то Γ является максимальной тогда и только тогда, когда набор $\{M_v\}_{v \in V_f}$ имеет $\mathcal{O}$ -максимальный тип. Отметим, что для K -разложимых групп G , определенных над одноклассным полем K , понятия максимальнойности и $\mathcal{O}$ -максимальности совпадают, и поэтому отсюда в качестве частных случаев при $G = \mathrm{SL}, \mathrm{Sp}$ следуют результаты работ Аллана [16], [17], а при $K = \mathbb{Q}$ – результаты В. П. Платонова [8].

Анализ доказательства Рольфса показывает, что его критерий максимальнойности Γ справедлив для всех групп G , а не только для K -разложимых. Поскольку дополнительно в указанном выше способе построения МАП можно ограничиться стандартными парахорическими подгруппами, каноническое описание которых доставляет теория Брюа–Титса, то фактически на критерий Рольфса уже можно смотреть как на классификацию МАП с точностью до сопряжения элементами из $G(K)$ (см. формулировку теоремы 2.6). Единственный недостаток такой классификации состоит в том, что она дается в когомологических терминах (см. определение $\mathcal{O}$ -максимального типа в §2), что не всегда удобно для применений. В настоящей работе, опираясь на критерий Рольфса, мы находим необходимые и достаточные условия максимальнойности Γ в терминах существования элементов в исходном поле K с предписанными свойствами делимости и, как следствие, приводим классификацию МАП простых односвязных групп всех типов в том виде, к которому стремился А. А. Бондаренко в своих работах [1]–[7]. Тем самым, нашу статью можно рассматривать как естественное дополнение к [13].

Из-за громоздкости мы не будем приводить во введении формулировки основных результатов, а в заключение остановимся лишь на структуре работы. Первый параграф посвящен арифметическим и парахорическим подгруппам. В нем собраны необходимые в дальнейшем свойства этих подгрупп. Все они хорошо известны. Там, где не требуются большие усилия, приводятся полные доказательства; в остальных местах даются точные ссылки. В §2 излагается критерий Рольфса для произвольной односвязной группы G . В общем случае он впервые был сформулирован без доказательства в работе Рольфса и Маргулиса [14]. Поскольку с тех пор доказательство не было опубликовано, то мы решили для полноты привести его; при изложении доказательства мы полностью следуем рассуждениям Рольфса из [13]. В §3 дается явное описание множества $\mathrm{Im}(\rho: \overline{G}(K) \rightarrow H^1(K, \mu))$, где ρ – канонический гомоморфизм, индуцированный точной последовательностью $1 \rightarrow \mu \rightarrow G \rightarrow \overline{G} \rightarrow 1$. Результаты этого параграфа и критерий Рольфса применяются в последующих параграфах для получения классификации МАП групп типов $G_2, F_4, E_8, E_7, E_6, B_n, C_n$. Наиболее сложная в техническом плане классификация МАП групп типов A_n, D_n будет дана во второй части статьи. Кроме того, здесь же будет построен пример ортогональной группы $\mathrm{SO}(f)$ и ее арифметической подгруппы Γ , которая удовлетворяет необходимым и достаточным условиям мак-

симальности, сформулированным в работе А. А. Бондаренко [5], но которая, тем не менее, не является максимальной.

Всюду ниже через G (если не оговорено противное) обозначается односвязная абсолютно простая алгебраическая группа, определенная над полем алгебраических чисел K . Кроме того, мы фиксируем ее K -реализацию $G \subset \mathrm{GL}_n$.

Работа над настоящей статьей была начата в 1995 г. во время визита второго автора в Университет Билефельда в качестве гостя SFB 343 “Diskrete Strukturen in der Mathematik” и закончена в 1996 г. во время визита в тот же Университет в качестве стипендиата фонда А. Гумбольдта. Он благодарит фонд Гумбольдта и SFB 343 за поддержку, а Университет Билефельда за гостеприимство.

§1. Арифметические и парахорические подгруппы и их свойства

1.1. Напомним, что подгруппа $H \leq G(\overline{K})$ называется *арифметической*, если она соизмерима с группой целых точек $G(\mathcal{O})$, т.е. пересечение $H \cap G(\mathcal{O})$ имеет конечный индекс как в H , так и в $G(\mathcal{O})$, где $G(\mathcal{O}) = G(K) \cap \mathrm{GL}_n(\mathcal{O})$. Без ограничения общности мы можем считать [8], что $G \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ реализована таким образом, что $G(\mathcal{O}_v)$ – максимальная открытая компактная подгруппа группы $G(K_v)$ для всех $v \in V_f$. Всюду в этом параграфе через H будет обозначаться арифметическая подгруппа произвольной полупростой (не обязательно односвязной) группы G . Отметим, что мы не требуем, чтобы H лежала в $G(K)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть $f: G \rightarrow G'$ – центральная K -изогения. Тогда подгруппа $H \leq G(\overline{K})$ является арифметической (соответственно, максимальной арифметической) тогда и только тогда, когда образ $f(H)$ является арифметической (соответственно, максимальной арифметической).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [18] или [12, гл. 5, §4, теорема 9].

1.2. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Если центр μ группы G тривиален, то $H \leq G(K)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По условию $[H : H \cap G(\mathcal{O})] < \infty$. Поэтому найдется нормальный делитель конечного индекса $H_0 \leq H$, лежащий в $G(\mathcal{O})$. Рассмотрим групповую K -алгебру $K[H_0]$. Так как арифметические подгруппы плотны в топологии Зариского [18], то $K[H_0] \otimes_K \overline{K} = \overline{K}[H_0] = \overline{K}[G]$. Обозначим через $\lambda: G \rightarrow \overline{K}[G]$ соответствующий присоединенный гомоморфизм. Тогда, с одной стороны, λ – K -изоморфизм между G и $\lambda(G)$, ибо центр G тривиален, а с другой стороны, образ $\lambda(H)$ по построению лежит в K -точках группы $\lambda(G)$. Это означает, что $H \leq G(K)$, что и требовалось доказать.

1.3. ПРЕДЛОЖЕНИЕ (свойства компактных подгрупп группы $G(K_v)$).

- а) Любая открытая компактная подгруппа группы $G(K_v)$, $v \in V_f$, содержится в конечном числе компактных подгрупп.
- б) Любая компактная подгруппа группы $G(K_v)$ содержится в некоторой максимальной компактной подгруппе.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См., например, [12, гл. 3, §3].

1.4. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть $H \leq G(K)$. Тогда замыкание H_v группы H в v -адической топологии является открытой компактной подгруппой группы $G(K_v)$ для всех $v \in V_f$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что достаточно проверить это утверждение хотя бы для одной арифметической подгруппы $\Gamma \leq G(K)$. Если группа G односвязна, то в качестве Γ можно взять группу целых точек $G(\mathcal{O})$, так как из сильной аппроксимационной теоремы вытекает, что $G(\mathcal{O})_v = \overline{G(\mathcal{O})} = G(\mathcal{O}_v)$ и $G(\mathcal{O}_v)$ – открытая компактная подгруппа группы $G(K_v)$. В общем случае, пусть $\tilde{G}$ – односвязная накрывающая и $\pi: \tilde{G} \rightarrow G$ – канонический гомоморфизм. Согласно предложению 1.1 подгруппа $\Gamma = \pi(\tilde{G}(\mathcal{O}))$ является арифметической. Тогда из открытостиморфизма π в v -адической топологии следует, что $\pi(\tilde{G}(\mathcal{O}_v))$ – открытая компактная подгруппа в $G(K_v)$, и по построению Γ плотна в ней. Предложение доказано.

1.5. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть $H \leq G(K)$. Тогда $N_{G(\overline{K})}(H)$ является арифметической подгруппой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См., например, [12, гл. 3, §3, предл. 15], содержащее доказательство в локальном случае (отметим, что оно работает и в глобальном случае), или же [20], где рассматривается более общий случай решеток.

1.6. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть G – односвязная группа. Если $H \leq G(K)$, то для почти всех $v \in V_f$ подгруппа H_v совпадает с $G(\mathcal{O}_v)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Без ограничения общности можно считать, что $H \leq G(\mathcal{O})$. Пусть $v_1, \dots, v_n$ – произвольные нормирования из V_f . Из сильной аппроксимационной теоремы и предложения 1.4 следует, что

$$G(\mathcal{O}_{v_1}) \times \cdots \times G(\mathcal{O}_{v_n}) = i(G(\mathcal{O})) \cdot (H_{v_1} \times \cdots \times H_{v_n}),$$

где $i: G(\mathcal{O}) \rightarrow G(\mathcal{O}_{v_1}) \times \cdots \times G(\mathcal{O}_{v_n})$ – диагональное вложение. Тогда имеем:

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^n G(\mathcal{O}_{v_i}) / \prod_{i=1}^n H_{v_i} &= \left(i(G(\mathcal{O})) \cdot \prod_{i=1}^n H_{v_i} \right) / \prod_{i=1}^n H_{v_i} \\ &\simeq i(G(\mathcal{O})) / \left(i(G(\mathcal{O})) \cap \prod_{i=1}^n H_{v_i} \right). \end{aligned}$$

Но $i(H) \leq i(G(\mathcal{O})) \cap \prod_{i=1}^n H_{v_i}$, поэтому

$$\prod_{i=1}^n [G(\mathcal{O}_{v_i}) : H_{v_i}] = \left[i(G(\mathcal{O})) : \left(i(G(\mathcal{O})) \cap \prod_{i=1}^n H_{v_i} \right) \right] \leq [G(\mathcal{O}) : H] < \infty,$$

откуда следует, что имеется лишь конечное число нормирований $v \in V_f$, для которых $H_v \neq G(\mathcal{O}_v)$. Предложение доказано.

1.7. Пусть $v \in V_f$ и G – односвязна. Напомним [10], [11], что на группе $G(K_v)$ имеется структура системы Титса аффинного типа $(G(K_v), B_v, N_v, \Delta_v)$ с группой Вейля W_v .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Подгруппа $P_v < G(K_v)$ называется *подгруппой Ивахори*, если она сопряжена в $G(K_v)$ подгруппе B_v . P_v называется *парахорической подгруппой*, если она содержит подгруппу Ивахори.

Любая парахорическая подгруппа P_v сопряжена в $G(K_v)$ единственной *стандартной парахорической подгруппе* P_{X_v} вида $P_{X_v} = B_v W_{X_v} B_v$, где $X_v \subset \Delta_v$ — некоторое подмножество [19]. Это подмножество X_v называется *типом* парахорической подгруппы P_v и обозначается через $\tau(P_v)$. Если $X_v = \Delta \setminus \{\alpha_0\}$, то P_{X_v} совпадает с $G(\mathcal{O}_v)$ [11].

1.8. Группа $\overline{G}(K_v)$ естественным образом действует на множестве парахорических подгрупп. А именно, если $g \in \overline{G}(K_v)$ и $P_v \leq G(K_v)$ — парахорическая подгруппа, то по определению $g \cdot (P_v) = \tilde{g} P_v \tilde{g}^{-1}$, где $\tilde{g} \in \pi^{-1}(g)$ — произвольный прообраз. Легко проверить, что это действие определено корректно. Так как классы сопряженных в $G(K_v)$ парахорических подгрупп однозначно определяются своими типами, то в результате получаем каноническое действие группы $\overline{G}(K_v)$ на соответствующем графе Кокстера Δ_v . Обозначим это действие через $\xi_v: \overline{G}(K_v) \rightarrow \text{Aut } \Delta_v$. Очевидно, что $\pi(G(K_v)) \subseteq \text{Ker } \xi_v$.

Зададим также действие $H^1(K_v, \mu)$ на Δ_v . Из тривиальности $H^1(K_v, G)$ [12] следует, что имеется точная последовательность

$$1 \rightarrow \mu(K_v) \rightarrow G(K_v) \xrightarrow{\pi} \overline{G}(K_v) \xrightarrow{\rho} H^1(K_v, \mu) \rightarrow 1.$$

Тогда для любого элемента $\gamma \in H^1(K_v, \mu)$ слой $\rho^{-1}(\gamma)$ непуст, и поэтому γ можно поставить в соответствие автоморфизм $\xi_v(g)$, где $g \in \rho^{-1}(\gamma)$ — произвольный прообраз. Этот автоморфизм не зависит от выбора представителя g , ибо $\pi(G(K_v)) \subseteq \text{Ker } \xi_v$, и тем самым в результате получаем гомоморфизм $H^1(K_v, \mu) \rightarrow \text{Aut } \Delta_v$, который будем обозначать той же буквой ξ_v . Итак, имеется коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \overline{G}(K_v) & \xrightarrow{\xi_v} & \text{Aut } \Delta_v \\ \rho \searrow & & \nearrow \xi_v \\ & H^1(K_v, \mu). & \end{array}$$

Положим $\Xi_v = \text{Im } \xi_v$.

1.9. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Тип $X_v \subseteq \Delta_v$ называется *максимальным*, если дополнение $\Delta_v \setminus X_v$ является орбитой некоторой подгруппы группы Ξ_v .

ПРИМЕР. Если $\Delta_v \setminus X_v$ — одна вершина, то тип X_v максимален, так как любая вершина является орбитой единичной подгруппы.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть $M_v \leq \overline{G}(K_v)$ и $P_v = G(K_v) \cap \pi^{-1}(M_v)$. Тогда M_v является максимальной компактной подгруппой группы $\overline{G}(K_v)$ тогда и только тогда, когда P_v — парахорическая подгруппа максимального типа.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [10].

1.10. ЛЕММА. Пусть $\Gamma \leq G$ – арифметическая подгруппа и $P = \Gamma \cap G(K)$. Тогда $\Gamma \leq N_{G(\overline{K})}(P)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно установить, что $[\Gamma, \Gamma] \subset P$. Пусть $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ и $\sigma \in \text{Gal}(\overline{K}/K)$. Тогда в силу предложения 1.2 элемент $\gamma_i^{-1}\sigma(\gamma_i)$ лежит в центре группы G , откуда $\sigma(\gamma_1\gamma_2\gamma_1^{-1}\gamma_2^{-1}) = \gamma_1\gamma_2\gamma_1^{-1}\gamma_2^{-1}$ и, следовательно, $[\Gamma, \Gamma] \subset G(K)$. Лемма доказана.

§2. Критерий Рольфа максимальности арифметической подгруппы

2.1. Начиная с этого места, через G будет обозначаться простая односвязная алгебраическая K -группа.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Арифметическая подгруппа $H \leq G(K)$ называется *парахорической*, если для любого $v \in V_f$ замыкание $H_v = \overline{H}$ является парахорической подгруппой группы $G(K_v)$ и $H = G(K) \cap \prod_{v \in V_f} H_v$. Если $X_v = \tau(H_v)$ есть тип H_v , то семейство $X = \{X_v\}_{v \in V_f}$ называется *типом H* и обозначается $\tau(H)$.

Отметим, что в силу предложения 1.6 $H_v = G(\mathcal{O}_v)$ для почти всех $v \in V_f$. Следовательно, если H – парахорическая подгруппа и X – ее тип, то для почти всех $v \in V_f$ справедливо равенство $X_v = \Delta_v \setminus \{\alpha_0\}$.

2.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Семейство $X = \{X_v\}$, где $X_v \subseteq \Delta_v$, называется *типом*, если $X_v = \Delta_v \setminus \{\alpha_0\}$ для почти всех $v \in V_f$.

Если $X = \{X_v\}$ – тип, то положим $P_X = G(K) \cap \prod_{v \in V_f} P_{X_v}$. Очевидно, что P_X является арифметической подгруппой и ее замыкание $\overline{P_X}$ в v -адической топологии совпадает с P_{X_v} . Это означает, что P_X – парахорическая подгруппа типа X . В дальнейшем будем называть ее *стандартной парахорической подгруппой*.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Любая парахорическая подгруппа $P \leq G(K)$ сопряжена в $G(K)$ ровно с одной стандартной парахорической подгруппой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $X = \{X_v\}$ – тип подгруппы P и рассмотрим соответствующую стандартную парахорическую подгруппу P_X . По построению подгруппы P_v и P_{X_v} сопряжены в $G(K_v)$. Введем множество

$$R = \left\{ g \in G(A_f) \mid g \left(\prod_{v \in V_f} P_{X_v} \right) g^{-1} = \prod_{v \in V_f} P_v \right\}.$$

Применяя предложение 1.6, получаем, что множество $T = \{v \in V_f \mid P_{X_v} \neq P_v\}$ конечно, откуда следует, что R – непусто. Кроме того R , очевидно, является открытым подмножеством, ибо если $g = (g_v) \in R$, то и

$$\prod_{v \in T} g_v P_{X_v} \times \prod_{v \notin T} P_{X_v} \subset R.$$

Тогда из сильной аппроксимационной теоремы следует, что пересечение $G(K) \cap R$ плотно в R и, в частности, не является пустым. Для любого элемента $r \in R \cap G(K)$

имеем:

$$\begin{aligned} rP_X r^{-1} &= r \left(G(K) \cap \prod_{v \in V_f} P_{X_v} \right) r^{-1} \\ &= G(K) \cap r \left(\prod_{v \in V_f} P_{X_v} \right) r^{-1} = G(K) \cap \prod_{v \in V_f} P_v = P, \end{aligned}$$

т.е. P сопряжена со стандартной парахорической подгруппой P_X . Утверждение о единственности X очевидно. Предложение доказано.

2.3. Введем следующие обозначения. Если $X = \{X_v\}_{v \in V_f}$ – тип, то положим Ξ_{X_v} – стабилизатор подмножества X_v в группе Ξ_v и $H^1(K_v, \mu)_{X_v} = \xi_v^{-1}(\Xi_{X_v})$, где ξ_v – гомоморфизм, построенный в пункте 1.8. Пусть также $\lambda: H^1(K, \mu) \rightarrow \prod_{v \in V_f} H^1(K_v, \mu)$ – канонический гомоморфизм. Положим

$$H^1(K, \mu)_X = \lambda^{-1} \left(\prod_{v \in V_f} H^1(K_v, \mu)_{X_v} \right) \cap \text{Im } \rho,$$

где $\rho: \overline{G}(K) \rightarrow H^1(K, \mu)$ – гомоморфизм, индуцированный точной последовательностью $1 \rightarrow \mu \rightarrow G \rightarrow \overline{G} \rightarrow 1$.

ЛЕММА. Пусть $P \leq G(K)$ – парахорическая подгруппа типа $X = \{X_v\}_{v \in V_f}$ и $\Gamma = N_{G(\overline{K})}(P)$. Тогда для любого элемента $\gamma \in \Gamma$ класс коцикла $(a_\sigma) = (\gamma^{-1}\sigma(\gamma))_{\sigma \in \text{Gal}(\overline{K}/K)}$ лежит в $H^1(K, \mu)_X$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО непосредственно вытекает из предложений 1.2, 1.5. Действительно, поскольку Γ – арифметическая подгруппа, то согласно 1.2 $\pi(\Gamma) \leq \overline{G}(K)$, откуда $[(a_\sigma)] \in H^1(K, \mu)$. Кроме того, по построению

$$[(a_\sigma)] \in \text{Im}(\rho: \overline{G}(K) \rightarrow H^1(K, \mu)),$$

ибо $[(a_\sigma)] = \rho(\pi(\gamma))$. Наконец, при сопряжении γ оставляет на месте P , а значит, и ее замыкание P_v . В частности, это означает, что сопрягая элементом γ парахорическую подгруппу P_v , мы не меняем ее тип X_v , откуда $\text{Res}_{K_v}([(a_\sigma)]) \in \xi_v^{-1}(\Xi_{X_v})$ для всех $v \in V_f$, что и требовалось доказать. Лемма доказана.

2.4. Согласно предыдущей лемме имеется канонический гомоморфизм

$$\delta_X: \Gamma \rightarrow H^1(K, \mu)_X.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Гомоморфизм δ_X сюръективен.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $c \in H^1(K, \mu)_X$ — произвольный элемент и (a_σ) — представляющий его коцикл. Поскольку $c \in \text{Im } \rho$, то найдется такой $g \in \overline{G}(K)$, что $\rho(g) = c$ или же $\tilde{g}^{-1}\sigma(\tilde{g}) = a_\sigma$ для всех $\sigma \in \text{Gal}(\overline{K}/K)$, где $\tilde{g} \in \pi^{-1}(g)$ — произвольный прообраз элемента g . Из условия $c \in H^1(K, \mu)_X$ вытекает также, что для любого $v \in V_f$ подгруппа $\tilde{g}P_v\tilde{g}^{-1}$ является парахорической подгруппой того же типа X_v , откуда $\tilde{g}P_v\tilde{g}^{-1} = h_vP_vh_v^{-1}$ для некоторого $h_v \in G(K_v)$. Тогда, применяя сильную аппроксимационную теорему, мы можем найти один элемент $h \in G(K)$, для которого справедливы равенства

$$\tilde{g}P_v\tilde{g}^{-1} = h_vP_vh_v^{-1} = hP_vh^{-1}$$

для всех $v \in V_f$. Отсюда следует, что $h^{-1}\tilde{g} \in N_{G(\overline{K})}(P)$ и

$$(h^{-1}\tilde{g})^{-1}\sigma(h^{-1}\tilde{g}) = \tilde{g}^{-1}(h\sigma(h^{-1}))\sigma(\tilde{g}) = \tilde{g}^{-1}\sigma(\tilde{g}) = a_\sigma,$$

т.е. $\delta_X(h^{-1}\tilde{g}) = c$. Предложение доказано.

2.5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. 1) Тип $X = \{X_v\}_{v \in V_f}$ называется *максимальным*, если X_v — максимальный тип для всех $v \in V_f$.

2) Максимальный тип X называется *θ -максимальным*, если для всех максимальных типов X' , строго содержащих X , включение $H^1(K, \mu)_{X'} \subset H^1(K, \mu)_X$ также строгое.

Для типа $X = \{X_v\}_{v \in V_f}$ положим $\Gamma_X = N_{G(\overline{K})}(P_X)$.

2.6. ТЕОРЕМА (критерий максимальности Рольфса).

- 1) Каждая максимальная арифметическая подгруппа сопряжена элементом из $G(K)$ ровно с одной подгруппой Γ_X .
- 2) Γ_X является максимальной арифметической подгруппой тогда и только тогда, когда X — θ -максимальный тип.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Пусть Γ — максимальная арифметическая подгруппа. Ее образ $\overline{\Gamma} = \pi(\Gamma)$ в силу предложений 1.1, 1.2 является максимальной арифметической подгруппой в $\overline{G}(K)$, и поэтому замыкание $\overline{\Gamma}_v$ подгруппы $\overline{\Gamma}$ в $\overline{G}(K_v)$ есть открытая компактная подгруппа (см. 1.4). Согласно предложению 1.3 $\overline{\Gamma}_v$ содержится в некоторой максимальной компактной подгруппе $M_v \leq \overline{G}(K_v)$. Рассмотрим подгруппу $P_v = \pi^{-1}(M_v) \cap G(K_v)$. Применяя предложение 1.9, имеем: P_v — парахорическая подгруппа максимального типа, и по построению для почти всех $v \in V_f$ справедливо равенство $P_v = G(\theta_v)$. Тем самым, арифметическая подгруппа $P = G(K) \cap \prod_{v \in V_f} P_v$ также является парахорической и имеет максимальный тип.

Из рассуждений в лемме 1.10 следует, что Γ нормализует как группу $G(K)$, так и подгруппу P_v для всех $v \in V_f$, ибо по построению $\Gamma \subseteq \pi^{-1}(M_v)$. Отсюда следует, что Γ нормализует также P , т.е. $\Gamma \subseteq N_{G(\overline{K})}(P)$, и поскольку $N_{G(\overline{K})}(P)$ — арифметическая подгруппа, а Γ по условию максимальна, то обязательно $\Gamma = N_{G(\overline{K})}(P)$. Остается заметить, что если $X = \tau(P)$ — тип парахорической подгруппы P , то из предложения 2.2 следует, что подгруппа P и стандартная парахорическая подгруппа P_X сопряжены в $G(K)$, и тем самым Γ и Γ_X также сопряжены при помощи

элемента из $G(K)$. Что касается утверждения о единственности X , то оно очевидно.

2) Пусть вначале Γ_X – максимальная арифметическая подгруппа. Из доказательства первой части теоремы следует, что ее тип является максимальным, и остается доказать, что он $\mathcal{O}$ -максимален.

Предположим, что это не так. Тогда найдется максимальный тип X' , который строго содержит X , и такой, что $H^1(K, \mu)_X = H^1(K, \mu)_{X'}$.

Рассмотрим диаграмму:

$$\begin{array}{ccc} \Gamma_X & \xrightarrow{\delta_X} & \\ & \searrow & \\ \Gamma_{X'} & \xrightarrow{\delta_{X'}} & H^1(K, \mu)_X = H^1(K, \mu)_{X'}. \end{array}$$

Из способа построения морфизмов δ_X и $\delta_{X'}$ и их сюръективности вытекает, что для любого $a \in \Gamma_X$ существуют $b \in \Gamma_{X'}$ и $g \in G(K)$ такие, что $a = bg$. Тогда подгруппа $a^{-1}P_{X'}a$ является парахорической типа X' , ибо

$$a^{-1}P_{X'}a = g^{-1}b^{-1}P_{X'}bg = g^{-1}P_{X'}g \leq G(K).$$

Кроме того, условие $X \subset X'$ влечет включение $P_X \subset P_{X'}$, и значит,

$$P_X = a^{-1}P_Xa \subset a^{-1}P_{X'}a = g^{-1}P_{X'}g.$$

Таким образом, парахорическая подгруппа $g^{-1}P_{X'}g$ типа X' содержит стандартную парахорическую подгруппу P_X . Отсюда сразу следует, что она также является стандартной [19], т.е. $g^{-1}P_{X'}g = P_{X'}$; в частности, $g \in P_{X'}$, ибо все парахорические подгруппы совпадают со своим нормализатором [19]. Последнее означает, что $a = bg \in \Gamma_{X'}$, откуда $\Gamma_X \subseteq \Gamma_{X'}$, и следовательно, в силу максимальной имеем $\Gamma_X = \Gamma_{X'}$. С другой стороны, $\Gamma_X \cap G(K) = P_X$, $\Gamma_{X'} \cap G(K) = P_{X'}$ и $P_X \neq P_{X'}$, ибо включение $X \subset X'$ – строгое, т.е. $\Gamma_X \neq \Gamma_{X'}$ – противоречие, доказывающее $\mathcal{O}$ -максимальность типа X .

Обратно, пусть X – $\mathcal{O}$ -максимальный тип. Предположим, что Γ_X не является максимальной, и пусть Γ' – максимальная арифметическая подгруппа, содержащая Γ_X (отметим, что такая подгруппа всегда существует, так как любая арифметическая подгруппа содержится лишь в конечном числе арифметических подгрупп; доказательство можно найти, например, в [12]). Из утверждения первой части теоремы следует, что $\Gamma' = N_{G(\overline{K})}(P_{X'})$ для некоторого типа X' . Тогда $\Gamma' \cap G(K) = P_{X'} \supsetneq \Gamma_X \cap G(K) = P_X$, откуда $X' \supsetneq X$.

Далее, по построению $\Gamma_X \subset \Gamma' = \Gamma_{X'}$. Поэтому

$$\delta_X(\Gamma_X) = H^1(K, \mu)_X \subset \delta_{X'}(\Gamma_{X'}) = H^1(K, \mu)_{X'}.$$

С другой стороны, из включения $X \subset X'$ всегда следует включение $H^1(K, \mu)_{X'} \subset H^1(K, \mu)_X$, и поэтому справедливо равенство $H^1(K, \mu)_{X'} = H^1(K, \mu)_X$, что противоречит условию $\mathcal{O}$ -максимальности типа X . Теорема полностью доказана.

§ 3. Описание $\text{Im}(\rho: \overline{G}(K) \rightarrow H^1(K, \mu))$

3.1. Точная последовательность $1 \rightarrow \mu \rightarrow G \rightarrow \overline{G} \rightarrow 1$ индуцирует точную последовательность когомологий, из которой следует, что

$$\text{Im}(\rho: \overline{G}(K) \rightarrow H^1(K, \mu)) = \text{Ker}(H^1(K, \mu) \rightarrow H^1(K, G)).$$

Поскольку для когомологий односвязных алгебраических групп справедлив принцип Хассе, то коцикл $(a_\sigma) \in Z^1(K, \mu)$ тривиален в $H^1(K, G)$ тогда и только тогда, когда для всех архимедовых нормирований v поля K он тривиален в $H^1(K_v, G)$. Поэтому имеем:

$$\text{Im}(\rho: \overline{G}(K) \rightarrow H^1(K, \mu)) = \text{Ker}\left(H^1(K, \mu) \rightarrow \prod_{v \in V_\infty} H^1(K_v, G)\right).$$

Для описания множества, стоящего в правой части приведенного выше равенства, мы воспользуемся явными вычислениями когомологий центров односвязных групп, приведенными в [12, с. 366]. Всюду в дальнейшем через μ_n будем обозначать $\text{Gal}(\overline{K}/K)$ -модуль корней из единицы степени n , через L – минимальное расширение поля K , над которым группа G имеет внутренний тип, через $\mathbf{R}_{L/K}$ – функтор ограничения поля, через $\mathbf{R}_{L/K}^{(1)}$ – ядро соответствующего норменного отображения, а через A – описываемое множество.

3.2. Далее нам понадобятся несколько стандартных фактов о строении простых односвязных K -изотропных групп G . А именно, каждой такой группе можно поставить в соответствие геометрическую картинку, называемую K -индексом Титса [21]: она состоит из соответствующего графа Дынкина, у которого часть вершин обведена кружками.

Обозначим через S – максимальный K -разложимый тор в G . Его централизатор $Z_G(S)$ является почти прямым произведением своего центрального тора S_1 и полупростой K -анизотропной группы $Z_G(S)^{(1)} = [Z_G(S), Z_G(S)]$, называемой полупростым анизотропным ядром группы G . Если G есть группа внутреннего типа, то торы S и S_1 всегда совпадают; в частности, в этом случае $H^1(K, S_1) = 1$.

Нам понадобится также явное описание тора S над замкнутым полем $\overline{K}$. Чтобы получить его, рассмотрим произвольный максимальный тор T группы G , определенный над K и содержащий S . Пусть $\Sigma = R(T, G)$ – система корней группы G относительно T и $\Pi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ – произвольный ее базис. Если $\{X_{\alpha, \alpha \in \Sigma}, H_{\alpha_1}, \dots, H_{\alpha_n}\}$ – базис Шевалле алгебры Ли $\mathfrak{g}$ группы G , то G порождается над $\overline{K}$ соответствующими корневыми подгруппами $u_\alpha = \langle x_\alpha(t) \mid t \in \overline{K} \rangle$, а тор T – элементами вида $h_\alpha(t) = w_\alpha(t)w_\alpha(1)^{-1}$, где $w_\alpha(t) = x_\alpha(t)x_{-\alpha}(-t^{-1})x_\alpha(t)$ [22]. Так как G – односвязная группа, то T прямо порождается одномерными подгруппами $T_{\alpha_i} = \langle h_{\alpha_i}(t) \mid t \in \overline{K}^* \rangle$, т.е. произвольный элемент $t \in T(\overline{K})$ однозначно записывается в виде $t = \prod_{i=1}^n h_{\alpha_i}(t_i)$, $t_i \in \overline{K}^*$ [22].

В приведенных выше обозначениях тор S является связной компонентой решения следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} \alpha_i(t) = 1 & \text{для всех необведенных вершин } \alpha_i \text{ } K\text{-индекса Титса,} \\ \beta(t) = \sigma^*(\beta)(t) & \text{для всех } \beta \in \Pi \text{ и всех } \sigma \in \Gamma = \text{Gal}(\overline{K}/K), \end{cases}$$

где $t \in T$ и через σ^* обозначено соответствующее действие группы Галуа Γ на системе простых корней Π [21].

Если G – группа внутреннего типа, то $\sigma^*(\beta) = \beta$ для всех $\beta \in \Pi$ [21]. Кроме того, поскольку для любых двух корней $\alpha, \beta \in \Sigma$ справедливо соотношение

$$h_\alpha(t)x_\beta(u)h_\alpha(t)^{-1} = x_\beta(t^{\langle \beta, \alpha \rangle} u),$$

где $\langle \beta, \alpha \rangle = 2(\beta, \alpha)/(\alpha, \alpha)$ [21], то первое уравнение приведенной выше системы сводится к

$$\prod_{j=1}^n t_j^{2(\alpha_i, \alpha_j)/(\alpha_j, \alpha_j)} = 1,$$

где $t = \prod_{j=1}^n h_{\alpha_j}(t_j)$.

Перейдем к описанию группы A .

3.3. Тип G_2, F_4, E_8 . Так как $\mu = 1$, то $A = H^1(K, \mu) = 1$.

3.4.1. Тип 1E_6 : $\mu = \mu_3$, и поэтому $H^1(K, \mu)$ можно отождествить с $K^*/(K^*)^3$. Очевидно, что для всех $v \in V_\infty$ имеется равенство

$$H^1(K_v, \mu_3) = K_v^*/(K_v^*)^3 = 1,$$

откуда следует, что

$$A = H^1(K, \mu).$$

3.4.2. Тип 2E_6 : $\mu = \mathbf{R}_{L/K}^{(1)}(\mu_3)$, $[L : K] = 2$. Группа $H^1(K, \mu)$ входит в следующую точную последовательность [12]:

$$1 \rightarrow \mu_3(K)/N_{L/K}(\mu_3(L)) \rightarrow H^1(K, \mu) \rightarrow \text{Ker}(L^*/(L^*)^3 \xrightarrow{N_{L/K}} K^*/(K^*)^3) \rightarrow 1.$$

Так как $[L : K] = 2$, то $\mu_3(K)/N_{L/K}(\mu_3(L)) = 1$, откуда

$$H^1(K, \mu) \simeq \text{Ker}(L^*/(L^*)^3 \xrightarrow{N_{L/K}} K^*/(K^*)^3).$$

Рассмотрим локальную группу $H^1(K_v, \mu)$, где $v \in V_\infty$ и $K_v \simeq \mathbb{R}$. Имеются две возможности: над полем K_v группа G имеет либо внутренний, либо внешний тип. В первом случае согласно 3.4.1 справедливо равенство $H^1(K_v, \mu) = 1$. Во втором случае, очевидно, что

$$\begin{aligned} & \text{Ker}((L \otimes_K K_v)^*/(L \otimes_K K_v)^{*3} \xrightarrow{N_{L \otimes_K K_v/K}} K_v^*/(K_v^*)^3) \\ &= \text{Ker}(\mathbb{C}^*/(\mathbb{C}^*)^3 \xrightarrow{N_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}} \mathbb{R}^*/(\mathbb{R}^*)^3) = 1. \end{aligned}$$

Итак, для всех $v \in V_\infty$ локальные группы $H^1(K_v, \mu)$ тривиальны, и следовательно,

$$A = H^1(K, \mu).$$

3.5. Тип E_7 : $\mu = \mu_2$, $H^1(K, \mu)$ отождествляется с $K^*/(K^*)^2$. Пусть $v \in V_\infty$ и $K_v \simeq \mathbb{R}$. Над полем K_v для K_v -индекса Титса группы G имеются четыре возможности [21].

В случае а) группа G разложима над K_v , откуда центр μ лежит в максимальном K_v -разложимом торе, когомологии которого тривиальны, и следовательно,

$$\text{Ker}(H^1(K_v, \mu) \rightarrow H^1(K_v, G)) = H^1(K_v, \mu). \quad (1)$$

В случае б), применяя алгоритм, приведенный в 3.2, легко убедиться, что

$$S = \langle h_{\alpha_1}(t_1^2/t_2^2)h_{\alpha_2}(t_2)h_{\alpha_3}(t_1)h_{\alpha_4}(t_2^2)h_{\alpha_5}(t_2^3/t_1)h_{\alpha_6}(t_2^4/t_1^2)h_{\alpha_7}(t_3) \mid t_i \in \overline{K_v}^* \rangle.$$

Так как μ порождается элементом $h_{\alpha_2}(-1)h_{\alpha_5}(-1)h_{\alpha_7}(-1)$, то $\mu \leq S$. Отсюда следует, что и здесь справедливо равенство (1).

В случае в) группа G является K_v -анизотропной, и следовательно, морфизм $G(\mathbb{R}) \rightarrow \overline{G}(\mathbb{R})$ сюръективен [12], откуда

$$\text{Ker}(H^1(K_v, \mu) \rightarrow H^1(K_v, G)) = 1. \quad (2)$$

Наконец, рассмотрим случайг). Покажем, что так же, как и в случаях в), морфизм $G(\mathbb{R}) \rightarrow \overline{G}(\mathbb{R})$ сюръективен. Пусть S – максимальный K_v -разложимый тор в G , $\overline{S}$ – его образ в присоединенной группе $\overline{G}$. Из разложения Брюа–Титса следует, что достаточно проверить сюръективность морфизма $Z_G(S)(\mathbb{R}) \rightarrow Z_{\overline{G}}(\overline{S})(\mathbb{R})$. С этой целью рассмотрим следующую коммутативную диаграмму с точными столбцами:

$$\begin{array}{ccc} 1 & \xlongequal{\quad} & 1 \\ \downarrow & & \downarrow \\ S(\mathbb{R}) & \xrightarrow{\gamma_1} & \overline{S}(\mathbb{R}) \\ \downarrow \varphi_1 & & \downarrow \psi_1 \\ Z_G(S)(\mathbb{R}) & \xrightarrow{\gamma_2} & Z_{\overline{G}}(\overline{S})(\mathbb{R}) \\ \downarrow \varphi_2 & & \downarrow \psi_2 \\ [Z_G(S)/S](\mathbb{R}) & \xrightarrow{\gamma_3} & [Z_{\overline{G}}(\overline{S})/\overline{S}](\mathbb{R}). \end{array} \quad (3)$$

Из когомологической тривиальности торов $S, \bar{S}$ следует, что морфизмы γ_2, ψ_2 сюръективны. Поэтому для доказательства сюръективности φ_2 достаточно установить сюръективность γ_3, γ_1 .

Применяя алгоритм из 3.2, получим, что

$$S = \langle h_{\alpha_1}(t_1)h_{\alpha_4}(t_1^2)h_{\alpha_5}(t_1t_2)h_{\alpha_6}(t_2^2)h_{\alpha_7}(t_2)h_{\alpha_1}(t_3)h_{\alpha_3}(t_4) \mid t_i \in \bar{K}^* \rangle.$$

Отсюда следует, что $\mu \not\leq S$, и в частности, γ_1 – изоморфизм. Наконец, сюръективность γ_3 – это общий факт [12], так как $C_G(S)/S, C_{\bar{G}}(\bar{S})/\bar{S}$ – полупростые компактные группы.

Таким образом, суммируя все вместе, получаем следующее описание группы A :

$$A \simeq \{aK^{*2} \in K^*/(K^*)^2 \mid a \text{ положителен в } K_v \text{ для всех } v \in V_\infty \text{ таких, что } K_v \simeq \mathbb{R} \text{ и } K_v\text{-индекс Титса имеет вид } (v, \gamma)\}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Анализ приведенного выше доказательства показывает, что имеет место следующее утверждение. Пусть G – односвязная алгебраическая группа, определенная над полем $\mathbb{R}$, μ – ее центр, $\bar{G}$ – соответствующая присоединенная группа, S – максимальный $\mathbb{R}$ -разложимый тор группы G , $\bar{S}$ – его образ в $\bar{G}$. Тогда из сюръективности морфизма $\gamma_1: S(\mathbb{R}) \rightarrow \bar{S}(\mathbb{R})$ следует сюръективность морфизма $Z_G(S)(\mathbb{R}) \rightarrow Z_{\bar{G}}(\bar{S})(\mathbb{R})$, а значит, и сюръективность $G(\mathbb{R}) \rightarrow \bar{G}(\mathbb{R})$. Последнее означает, что в этом случае справедливо равенство (2). В частности, если $\mu \cap S = 1$, то γ_1 – всегда сюръективный морфизм, и следовательно, справедливо (2).

3.6.1. Тип ${}^1A_{2n}$: $\mu = \mu_{2n+1}$, $H^1(K, \mu)$ можно отождествить с $K^*/(K^*)^{2n+1}$. Поскольку локальные группы $H^1(K_v, \mu)$ тривиальны для всех $v \in V_\infty$, то

$$A = H^1(K, \mu).$$

3.6.2. Тип ${}^2A_{2n}$: $\mu \simeq \mathbf{R}_{L/K}^{(1)}(\mu_{2n+1})$ и группа когомологий центра входит в следующую точную последовательность [12]

$$\begin{aligned} 1 \rightarrow \mu_{2n+1}(K)/N_{L/K}(\mu_{2n+1}(L)) &\rightarrow H^1(K, \mu) \\ &\rightarrow \text{Ker}(L^*/(L^*)^{2n+1} \xrightarrow{N_{L/K}} K^*/(K^*)^{2n+1}) \rightarrow 1. \end{aligned}$$

Так как $[L : K] = 2$, то левый член этой последовательности тривиален, и поэтому можно считать, что

$$H^1(K, \mu) \simeq \text{Ker}(L^*/(L^*)^{2n+1} \xrightarrow{N_{L/K}} K^*/(K^*)^{2n+1}).$$

Пусть $v \in V_\infty$ и $K_v \simeq \mathbb{R}$. Если G над полем K_v имеет внутренний тип, то согласно 3.6.1 группа $H^1(K_v, \mu)$ тривиальна. Если же над K_v группа G остается группой внешнего типа, то

$$(L \otimes_K K_v)^*/(L \otimes_K K_v)^{2n+1} \simeq \mathbb{C}^*/(\mathbb{C}^*)^{2n+1} = 1,$$

и следовательно, $H^1(K_v, \mu)$ также тривиальна. В результате имеем:

$$A = H^1(K, \mu).$$

3.7.1. Тип ${}^1A_{2n-1}$: $\mu = \mu_{2n}$, $H^1(K, \mu) \simeq K^*/(K^*)^{2n}$. Пусть $v \in V_\infty$ и $K_v \simeq \mathbb{R}$. Случай, когда G разложима над K_v , разбирается аналогично случаю групп типа E_7 , и поэтому здесь и далее для групп типов B_n , C_n , D_n рассматриваться не будет.

Пусть G неразложима над K_v . Тогда она изоморфна над K_v группе вида $\mathrm{SL}(1, A)$, где $A = M_n(D)$ и D – тело вещественных кватернионов [21]. Поэтому $H^1(K_v, G)$ можно отождествить с

$$K_v^*/\mathrm{Nrd}(M_n(D)) \simeq K_v^*/\mathrm{Nrd}(D) \simeq \mathbb{R}^*/(\mathbb{R}^*)^2.$$

При этом отождествлении морфизм $H^1(K_v, \mu) \rightarrow H^1(K_v, G)$ соответствует тождественному морфизму $\mathbb{R}^*/(\mathbb{R}^*)^2 \rightarrow \mathbb{R}^*/(\mathbb{R}^*)^{2n}$, и значит, выполняется равенство (2).

Итак, доказано, что

$$A \simeq \{aK^* \in K^*/(K^*)^{2n} \mid a \text{ положителен в } K_v \text{ для всех } v \in V_\infty \text{ таких, что } G \text{ неразложима над } K_v\}.$$

3.7.2. Тип ${}^2A_{2n-1}$: $\mu \simeq \mathbf{R}_{L/K}^{(1)}(\mu_{2n})$ и $H^1(K, \mu)$ входит в следующую точную последовательность:

$$1 \rightarrow \mu_{2n}(K)/\mathrm{N}_{L/K}(\mu_{2n}(L)) \xrightarrow{\varphi_1} H^1(K, \mu) \xrightarrow{\varphi_2} \mathrm{Ker}(L^*/(L^*)^{2n} \xrightarrow{\mathrm{N}_{L/K}} K^*/(K^*)^{2n}) \rightarrow 1. \quad (4)$$

Пусть $v \in V_\infty$ и $K_v \simeq \mathbb{R}$. Для K_v -индекса Титса имеются четыре возможности [21].

Пусть S – максимальный K_v -разложимый тор в G . Случаи а), б) соответствуют разложимому и квазиразложимому случаю, для которых централизатор $Z_G(S)$ является максимальным тором с тривиальными когомологиями. Тем самым для а), б) справедливо равенство (1).

Рассмотрим случай в). Напомним [12], что последовательность (4) индуцировалась точной последовательностью

$$1 \rightarrow \mathbf{R}_{L/K}^{(1)}(\mu_{2n}) \rightarrow \mathbf{R}_{L/K}(\mu_{2n}) \xrightarrow{\mathrm{N}_{L/K}} \mu_{2n} \rightarrow 1. \quad (5)$$

Так как группа G над полем K_v имеет внутренний тип, то

$$(\mathbf{R}_{L \otimes K_v / K_v}(\mu_{2n}))(K_v) = \mu_{2n}(K_v) \times \mu_{2n}(K_v).$$

Отсюда следует, что морфизм $N_{L/K}$ в последовательности (5) сюръективен на K_v -точках. Это означает, что левый член в последовательности (4) при морфизме ограничения Res_{K_v} становится тривиальным, откуда

$$H^1(K_v, \mu) \simeq \text{Ker}((L \otimes_K K_v)^* / (L \otimes_K K_v)^{*2n} \xrightarrow{N_{L \otimes K_v / K_v}} K_v^* / (K_v^*)^{2n}). \quad (6)$$

В свою очередь, так как $L \otimes_K K_v \simeq K_v \times K_v$, то правую часть (6) можно отождествить с $K_v^* / (K_v^*)^{2n} = \mathbb{R}^* / (\mathbb{R}^*)^2$. Тогда, применяя 3.7.1, получаем, что ограничение коцикла $(a_\sigma) \in Z^1(K, \mu)$ тривиально в $H^1(K_v, G)$ тогда и только тогда, когда $\text{Res}_{K_v} [\varphi_2((a_\sigma))]$ – положительное число в K_v (при указанном отождествлении). Отметим, что последнее эквивалентно тому, что $\text{Res}_{K_v}(a_\sigma)$ тривиален в $H^1(K_v, \mu)$.

Перейдем к случаю г). В этом случае группа G над полем K_v имеет внешний тип, откуда $L \otimes_K K_v \simeq \mathbb{C}$, и следовательно,

$$\text{Ker}((L \otimes_K K_v)^* / (L \otimes_K K_v)^{*2n} \xrightarrow{N_{L \otimes K_v / K_v}} K_v^* / (K_v^*)^{2n}) = 1.$$

Поэтому

$$H^1(K_v, \mu) \simeq \mu_{2n}(K_v) / N_{L \otimes K_v / K_v}(\mu_{2n}(L \otimes_K K_v)) = \langle \pm 1 \rangle$$

– группа порядка 2. Пользуясь алгоритмом, указанным в 3.2, легко подсчитать, что

$$S = \langle h_{\alpha_1}(t_1) h_{\alpha_{2n-1}}(t_1) \cdots h_{\alpha_r}(t_r) h_{\alpha_{2n-r}}(t_r) h_{\alpha_{r+1}}(t_r) \cdots h_{\alpha_{2n-r-1}}(t_r) \mid t_i \in \overline{K}^* \rangle.$$

Отсюда следует, что $S \cap \mu = 1$, ибо μ порождается элементом

$$h_{\alpha_1}(\zeta) h_{\alpha_2}(\zeta^2) \cdots h_{\alpha_{2n-1}}(\zeta^{2n-1}),$$

где ζ – первообразный корень из 1 степени $2n$. Тогда из замечания 3.5 вытекает, что морфизм $G(\mathbb{R}) \rightarrow \overline{G}(\mathbb{R})$ – сюръективен, и значит, выполняется равенство (2).

Итак, имеем:

$$A = \{x \in H^1(K, \mu) \mid \text{Res}_{K_v}(x) = 1 \in H^1(K_v, \mu) \text{ для всех } v \in V_\infty \text{ таких, что } K_v \simeq \mathbb{R} \text{ и } G \text{ не является ни разложимой, ни квазиразложимой над } K_v\}.$$

3.8. Тип B_n : $\mu = \mu_2$, $H^1(K, \mu) \simeq K^*/(K^*)^2$. Из описания групп этой серии следует [21], что $G \simeq \text{Spin}(f)$, где $f - (2n + 1)$ -мерная невырожденная квадратичная форма, определенная над полем K .

Пусть $v \in V_\infty$ и $K_v \simeq \mathbb{R}$. Хорошо известно, что образ морфизма

$$\varphi: G(\mathbb{R}) = \text{Spin}(f)(\mathbb{R}) \rightarrow \overline{G}(\mathbb{R}) = \text{SO}(f)(\mathbb{R})$$

состоит из ортогональных преобразований, спинорная норма которых является квадратом. Отсюда следует, что φ – сюръективный морфизм тогда и только тогда, когда f – анизотропна над K_v , или же, что эквивалентно, G – анизотропна над K_v . Поэтому имеем:

$$A = \{a(K^*)^2 \in K^*/(K^*)^2 \mid a \text{ положителен в } K_v \text{ для всех } v \in V_\infty \text{ таких, что } G \text{ анизотропна над } K_v\}.$$

3.9. Тип C_n : $\mu = \mu_2$, $H^1(K, \mu) \simeq K^*/(K^*)^2$. Пусть $v \in V_\infty$, $K_v \simeq \mathbb{R}$ и G не является K_v -разложимой. Тогда над полем K_v группа G изоморфна группе $\text{SU}_n(D, h)$, где D – тело вещественных кватернионов, h – невырожденная эрмитова форма относительно стандартной инволюции τ [21].

Далее следует различать два случая: индекс Витта r формы h а) либо совпадает с $n/2$ (в частности, n должно быть четным), б) либо строго меньше $n/2$. В первом случае K_v -индекс Титса имеет вид

а во втором

$$\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \cdots \quad \alpha_r \quad \cdots \quad \alpha_{n-1} \quad \alpha_n \quad (7)$$

Легко проверить, что в первом случае центр μ лежит в максимальном K_v -разложимом торе S , а во втором – не лежит. Поэтому имеем:

$$A = \{a(K^*)^2 \in K^*/(K^*)^2 \mid a \text{ положителен в } K_v \text{ для всех } v \in V_\infty \text{ таких, что } K_v\text{-индекс Титса имеет вид (7)}\}.$$

3.10.1. Тип ${}^1D_{2n+1}$: $\mu = \mu_4$, $H^1(K, \mu) = K^*/(K^*)^4$. Пусть $v \in V_\infty$ и $K_v \simeq \mathbb{R}$. Если G над K_v анизотропна, то $G(\mathbb{R}) \rightarrow \overline{G}(\mathbb{R})$ – сюръективный морфизм, и значит, справедливо равенство (2).

Пусть G – изотропна над K_v . Тогда для K_v -индекса Титса имеются две возможности:

$$\text{а) } \alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \cdots \quad \alpha_r \quad \cdots \quad \begin{array}{l} \alpha_{2n} \\ \alpha_{2n+1} \end{array} \quad (8)$$

$$\text{б) } \alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \cdots \quad \alpha_r \quad \cdots \quad \begin{array}{l} \alpha_{2n} \\ \alpha_{2n+1} \end{array} \quad (9)$$

В случае а) группа G над полем K_v изоморфна спинорной группе $\text{Spin}(f)$, связанной с K_v -изотропной квадратичной формой f . Тогда морфизм

$$\text{Spin}(f)(\mathbb{R}) \rightarrow \text{SO}(f)(\mathbb{R})$$

несюръективен, что влечет также несюръективность морфизма $G(\mathbb{R}) \rightarrow \overline{G}(\mathbb{R})$, и следовательно, в случае а) справедливо равенство (1), так как $|H^1(K_v, \mu)| = 2$.

В случае б) легко проверить, что $S \cap \mu = 1$, и поэтому справедливо равенство (2).

В результате имеем следующее описание группы A :

$$A = \{a(K^*)^4 \in K^*/(K^*)^4 \mid a \text{ положителен в } K_v \text{ для всех } v \in V_\infty \text{ таких, что либо } G \text{ анизотропна над } K_v, \text{ либо ее } K_v\text{-индекс Титса имеет вид (9)}\}.$$

3.10.2. Тип ${}^2D_{2n+1}$: $\mu = \mathbf{R}_{L/K}^{(1)}(\mu_4)$. Над вещественными пополнениями для K_v -изотропных групп K_v -индекс Титса имеет вид либо (8), либо (9), либо

$$\begin{array}{c} \alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \cdots \quad \alpha_r \quad \cdots \quad \alpha_{2n} \\ \circ \quad \circ \quad \cdots \quad \circ \quad \cdots \quad \circ \end{array} \quad \begin{array}{c} \alpha_{2n} \\ \alpha_{2n+1} \end{array} \quad (10)$$

$$\begin{array}{c} \alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \cdots \quad \alpha_r \quad \cdots \quad \alpha_{2n} \\ \circ \quad \circ \quad \cdots \quad \circ \quad \cdots \quad \circ \end{array} \quad \begin{array}{c} \alpha_{2n} \\ \alpha_{2n+1} \end{array} \quad (11)$$

$$\begin{array}{c} \alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \cdots \quad \alpha_{2n} \\ \circ \quad \circ \quad \cdots \quad \circ \end{array} \quad \begin{array}{c} \alpha_{2n} \\ \alpha_{2n+1} \end{array} \quad (12)$$

Группа $H^1(K, \mu)$ входит в следующую точную последовательность:

$$1 \rightarrow \mu_4(K)/N_{(L/K)}(\mu_4(L)) \rightarrow H^1(K, \mu) \rightarrow \text{Ker}(L^*/(L^*)^4 \xrightarrow{N_{L/K}} K^*/(K^*)^4) \rightarrow 1.$$

Отсюда следует, что $|H^1(K_v, \mu)| = 2$ в случаях (10), (11), (12), и кроме того, так же, как и в 3.10.1, показывается, что в случае (10) морфизм $G(\mathbb{R}) \rightarrow \overline{G}(\mathbb{R})$ несюръективен, а в случаях (11), (12) — сюръективен. Это означает, что для случая (10) выполняется равенство (1), а для (11), (12) — равенство (2).

В результате имеем:

$$A = \{x \in H^1(K, \mu) \mid \text{Res}_{K_v}(x) \text{ — положительное число для всех } v \in V_\infty \text{ таких, что либо } G \text{ анизотропна над } K_v, \text{ либо ее } K_v\text{-индекс Титса имеет вид (9), (11), (12)}\}.$$

Отметим, что слова “ $\text{Res}_{K_v}(x)$ — положительное число” означают, что $H^1(K_v, \mu)$ отождествляется с $\mu_4(K_v)/N_{(L \otimes_K K_v/K_v)}(\mu_4(L \otimes_K K_v)) = \langle \pm 1 \rangle$, если G над K_v имеет внешний тип, и с

$$\begin{aligned} & \text{Ker}((L \otimes_K K_v)^*/((L \otimes_K K_v)^*)^4 \rightarrow K_v^*/(K_v^*)^4) \\ &= \text{Ker}((K_v^* \times K_v^*)/(K_v^{*4} \times K_v^{*4}) \rightarrow K_v^*/(K_v^*)^4) \simeq \mathbb{R}^*/\mathbb{R}^{*4} = \mathbb{R}^*/\mathbb{R}^{*2}, \end{aligned}$$

если G имеет внутренний тип.

3.11.1. Тип ${}^1D_{2n}$. Занумеруем вершины графа Дынкина следующим образом:

Тогда $\mu = \mu_1 \times \mu_2$, где

$$\begin{aligned}\mu_1 &= \langle h_{\alpha_1}(-1)h_{\alpha_3}(-1) \cdots h_{\alpha_{2n-1}}(-1) \rangle, \\ \mu_2 &= \langle h_{\alpha_1}(-1)h_{\alpha_3}(-1) \cdots h_{\alpha_{2n-3}}(-1)h_{\alpha_{2n}}(-1) \rangle.\end{aligned}$$

Отождествим $H^1(K_v, \mu_i)$ с $K^*/(K^*)^2$, а $H^1(K, \mu)$ с $H^1(K, \mu_1) \times H^1(K, \mu_2)$.

Пусть $v \in V_\infty$, $K_v \simeq \mathbb{R}$ и группа G изотропна над K_v , но не разложима. Тогда имеются следующие две возможности.

1) $G \stackrel{K_v}{\simeq} \text{Spin}(f)$, где f — K_v -изотропная, но не разложимая, квадратичная форма размерности $4n$. В этом случае K_v -индекс Титса имеет вид [21]:

Морфизм $G(\mathbb{R}) \rightarrow \overline{G}(\mathbb{R})$ разлагается в композицию морфизмов

$$\varphi_1: \text{Spin}(f)(\mathbb{R}) \rightarrow \text{SO}(f)(\mathbb{R}), \quad \varphi_2: \text{SO}(f)(\mathbb{R}) \rightarrow \text{PSO}(f)(\mathbb{R}),$$

причем очевидно, что первый из них не сюръективен, а второй — сюръективен (см. замечание 3.5); в частности, $[\overline{G}(\mathbb{R}) : (\varphi_1 \circ \varphi_2)(G(\mathbb{R}))] = 2$, откуда

$$|\text{Ker}(H^1(K_v, \mu) \rightarrow H^1(K_v, G))| = 2.$$

В корневых терминах морфизм φ_1 соответствует морфизму

$$G \rightarrow G / \langle h_{\alpha_{2n-1}}(-1)h_{\alpha_{2n}}(-1) \rangle.$$

Поэтому

$$\begin{aligned}\text{Ker}(H^1(K_v, \mu) \rightarrow H^1(K_v, G)) \\ = \{(aK_v^{*2}, bK_v^{*2}) \in K_v^*/(K_v^*)^2 \times K_v^*/(K_v^*)^2 \mid a, b \text{ имеют один знак}\}.\end{aligned}$$

2) $G \simeq \text{Spin}(D, h)$, где D — тело вещественных кватернионов, а h — изотропная косоэрмитова форма относительно стандартной инволюции τ тела D . Если индекс Витта r формы h принимает максимально возможное значение, равное n , то K_v -индекс Титса имеет вид

если же $r < n$, то

В случае (14) так же, как и в 1), показывается, что $[\overline{G}(\mathbb{R}) : \varphi(G(\mathbb{R}))] = 2$, где $\varphi: G \rightarrow \overline{G}$ – канонический морфизм, откуда

$$|\mathrm{Ker}(H^1(K_v, \mu) \rightarrow H^1(K_v, G))| = 2.$$

Чтобы получить точное описание этого ядра, следует рассмотреть два подслучая: n четно и n нечетно.

Если n четно, то, используя алгоритм 3.2, проверяется, что μ_1 лежит в максимальном K_v -разложимом торе S . Это означает, что морфизм $G(\mathbb{R}) \rightarrow (G/\mu_1)(\mathbb{R})$ несюръективен, и значит,

$$\mathrm{Ker}(H^1(K_v, \mu) \rightarrow H^1(K_v, G)) = H^1(K_v, \mu_1).$$

Если же n нечетно, то $\mu_2 \leq S$, откуда

$$\mathrm{Ker}(H^1(K_v, \mu) \rightarrow H^1(K_v, G)) = H^1(K_v, \mu_2).$$

В случае (15) легко проверить, что $S \cap \mu = 1$, и следовательно, выполняется равенство (2).

Подытоживая, имеем: $A = \{((a(K^*)^2, b(K^*)^2) \in K^*/(K^*)^2 \times K^*/(K^*)^2) \mid \text{для всех } v \in V_\infty \text{ таких, что } K_v \simeq \mathbb{R}, \text{ выполняется: } a, b > 0, \text{ если } G - K_v\text{-анизотропна; } a \cdot b > 0, \text{ если } K_v\text{-индекс Титса имеет вид (13); } a, b > 0, \text{ если } K_v\text{-индекс Титса имеет вид (15); } b > 0, \text{ если } K_v\text{-индекс Титса имеет вид (14) и } n \text{ четно; } a > 0, \text{ если } K_v\text{-индекс Титса имеет вид (14) и } n \text{ нечетно}\}$.

3.11.2. Тип ${}^2D_{2n}$: $\mu = \mathbf{R}_{L/K}(\mu_2)$, $H^1(K, \mu) \simeq L^*/(L^*)^2$. Если $v \in V_\infty$, $K_v \simeq \mathbb{R}$ и G над K_v имеет внешний тип, то $H^1(K_v, \mu) = 1$, ибо $L \otimes_K K_v \simeq \mathbb{C}$. Поэтому с учетом 3.11.1 имеем $A = \{(a(L^*)^2 \in L^*/(L^*)^2) \mid \text{для всех } v \in V_\infty \text{ таких, что } K_v \simeq \mathbb{R} \text{ и } G \text{ имеет над } K_v \text{ внутренний тип, выполняется: } a, \sigma(a) > 0, \text{ если } G - K_v\text{-анизотропна; } N_{L/K}(a) > 0, \text{ если } K_v\text{-индекс Титса имеет вид (13); } a, \sigma(a) > 0, \text{ если } K_v\text{-индекс Титса имеет вид (15); } \sigma(a) > 0, \text{ если } K_v\text{-индекс Титса имеет вид (14) и } n \text{ четно; } a > 0, \text{ если } K_v\text{-индекс Титса имеет вид (14) и } n \text{ нечетно}\}$, где через σ обозначается нетривиальный автоморфизм L над K .

3.12. Тип ${}^{3,6}D_4$: $\mu = \mathbf{R}_{P/K}^{(1)}(\mu_2)$, где $P = L$, если L – расширение Галуа над K степени 3, и P – произвольное подполе в L степени 3 над K , если $[L : K] = 6$.

$H^1(K, \mu)$ входит в следующую точную последовательность:

$$1 \rightarrow \mu_2(K)/N_{P/K}(\mu_2(P)) \rightarrow H^1(K, \mu) \rightarrow \mathrm{Ker}(P^*/(P^*)^2 \xrightarrow{N_{P/K}} K^*/(K^*)^2) \rightarrow 1.$$

Левый член этой последовательности тривиален, и поэтому

$$H^1(K, \mu) \simeq \mathrm{Ker}(P^*/(P^*)^2 \rightarrow K^*/(K^*)^2).$$

Ясно, что над архимедовыми пополнениями группа G является группой типа ${}^{1,2}D_4$. Обозначим через σ произвольный элемент группы $\mathrm{Gal}(L/K)$ третьего порядка. Тогда из 3.11.1, 3.11.2 имеем: $A = \{(a(P^*)^2 \in P^*/(P^*)^2) \mid N_{P/K}(a) \in (K^*)^2 \text{ и для всех } v \in V_\infty \text{ таких, что } K_v \simeq \mathbb{R} \text{ и } G \text{ имеет над } K_v \text{ внутренний тип, выполняется: } a, \sigma(a) > 0, \text{ если } G - K_v\text{-анизотропна; } a\sigma(a) > 0, \text{ если } K_v\text{-индекс Титса имеет вид (13); } a, \sigma(a) > 0, \text{ если } K_v\text{-индекс Титса имеет вид (15); } \sigma(a) > 0, \text{ если } K_v\text{-индекс Титса имеет вид (14)}\}$.

§ 4. Классификация МАП групп исключительных типов

4.1. Пусть G — односвязная (абсолютно) простая алгебраическая группа, определенная над K . Далее мы увидим, что чем меньше центр μ группы G , тем проще классификация ее МАП. Поэтому разберем вначале наиболее простой случай групп исключительных типов.

Согласно теореме 2.6 представителями классов сопряженных МАП являются группы вида $\Gamma_X = N_{G(\overline{K})}(P_X)$, где P_X — стандартная парахорическая подгруппа группы $G(K)$ θ -максимального типа X . Отсюда следует, что для получения классификации МАП достаточно научиться описывать всевозможные максимальные типы $X = \{X_v\}_{v \in V_f}$ и среди них уметь выделять θ -максимальные. Для этого, в свою очередь, надо знать строение локальных групп автоморфизмов $\Xi_v = \xi_v(H^1(K_v, \mu))$ (см. 1.8) и их действия на соответствующих локальных диаграммах Дынкина Δ_v [23]. Напомним, что локальная диаграмма Дынкина Δ_v группы $G(K_v)$ получается из графа Кокстера приписыванием некоторым его вершинам положительных чисел или символов “ $\times$ ”, “ s ”, “ hs ”, а некоторым ребрам — направления [23].

4.2. Если группа G разложима или квазиразложима над K_v , то для описания группы Ξ_v проще всего воспользоваться изоморфизмом [23]

$$\Xi_v \simeq \overline{S}(K_v)/(\pi(S(K_v)) \cdot \overline{S}(K_v)_U), \quad (16)$$

где S — централизатор в G максимального K_v -разложимого тора, $\overline{S}$ — его образ в присоединенной группе $\overline{G} = G/\mu$, а

$$\overline{S}(K_v)_U = \{s \in \overline{S}(K_v) \mid \chi(S) \in \theta_v^* \text{ для всех } K\text{-определенных характеров } \chi \in X^*(\overline{S})\}.$$

Почти во всех случаях, зная абстрактное строение Ξ_v , сразу же можно указать образ группы $\xi_v(H^1(K_v, \mu))$ в $\text{Aut } \Delta_v$, т.е. ее действие на локальной диаграмме Дынкина Δ_v .

Чтобы описать группу Ξ_v в общем случае, можно рассмотреть максимальное неразветвленное расширение K_v^{ur} поля K_v и соответствующую диаграмму Δ_v^{ur} . Напомним, (см., например, [23]), что над K_v^{ur} группа либо разложима, либо квазиразложима и можно задать каноническое вложение билдинга $\mathcal{B}$ группы $G(K_v)$ в билдинг $\mathcal{B}_1$ группы $G(K_v^{ur})$ и каноническое действие группы $\Gamma = \text{Gal}(K_v^{ur}/K_v)$ на $\mathcal{B}_1$ такое, что образ $\mathcal{B}$ совпадает с множеством неподвижных точек в $\mathcal{B}_1$ относительно заданного действия группы Γ . Кроме того, если выбрать апартмент $\mathcal{A}_1$ в $\mathcal{B}_1$, связанный с максимальным K_v^{ur} -разложимым тором, содержащим максимальный K_v -разложимый тор, то неподвижные в $\mathcal{A}_1$ точки относительно Γ образуют апартмент $\mathcal{A}$ в билдинге $\mathcal{B}$, а ограничение на $\mathcal{A}$ соответствующих аффинных корней группы $G(K_v^{ur})$ задают аффинные корни группы $G(K_v)$. Поскольку в таблицах работы Титса [23] действие группы Γ на Δ_v^{ur} задано явным образом, то это позволяет редуцировать описание Ξ_v к разложимому и квазиразложимому случаю. Более точно, имеет место следующая коммутативная диаграмма:

$$\begin{array}{ccc}
H^1(K_v^{ur}, \mu) & \xrightarrow{\xi_v^{ur}} & \Xi_v^{ur} \leq \text{Aut}(\Delta_v^{ur}) \\
\uparrow \text{Res}_{K_v^{ur}} & & \uparrow \varphi_2 \\
H^1(K_v, \mu) & \xrightarrow{\varphi_1} & \Xi_1 \leq \text{Aut}(\Delta_v^{ur}) \\
& \searrow \xi_v & \downarrow \varphi_3 \\
& & \Xi_v \leq \text{Aut}(\Delta_v)
\end{array} \tag{17}$$

где $\varphi_1 = \xi_v^{ur} \circ \text{Res}_{K_v^{ur}}$, $\Xi_1 = \text{Im}(\xi_v^{ur} \circ \text{Res}_{K_v^{ur}})$, φ_2 – естественное вложение, а образ $\varphi_3(\lambda)$ элемента $\lambda \in \Xi_1$ действует на i -ю вершину графа Δ_v следующим образом: надо взять произвольный аффинный корень в Δ_v^{ur} , ограничение которого на апартament $\mathcal{A}$ совпадает с выбранным i -м корнем, подействовать на него элементом $\varphi_2(\lambda)$, а затем взять ограничение полученного аффинного корня на апартament $\mathcal{A}$.

4.3. Типы G_2 , F_4 , E_8 . Так как $\mu = 1$, то $H^1(K_v, \mu) = \Xi_v = 1$, и кроме того, для всех $v \in V_f$ группа G разложима над K_v . Поэтому их графы Кокстера имеют соответственно вид [23]

Поскольку $\Xi_v = 1$, то максимальные типы X_v получаются выбрасыванием произвольной вершины α_i из соответствующего графа Кокстера. В частности, для любого $v \in V_f$ для группы G типа G_2 (соответственно, F_4 , E_8) имеются три (соответственно, 5, 9) максимальных типа X_v . Непосредственно из определения 2.5 также следует, что любой максимальный тип $X = \{X_v\}_{v \in V_f}$ является θ -максимальным.

4.4. Тип E_7 : $\mu = \mu_2$, $H^1(K_v, \mu) \simeq K_v^*/(K_v^*)^2$. Если $v \in V_f$, то над полем K_v для K_v -индекса Титса имеются две возможности [21]

Разберем вначале первый случай. В обозначениях пункта 3.2 максимальный K_v -разложимый тор записывается в виде

$$S = \langle h_{\alpha_1}(t_1) \dots h_{\alpha_7}(t_7) \mid t_i \in \overline{K_v^*} \rangle,$$

и центр μ порождается элементом $\alpha = h_{\alpha_2}(-1)h_{\alpha_5}(-1)h_{\alpha_7}(-1)$. Рассмотрим K_v -изоморфизм

$$\lambda: S \rightarrow G_m^7, \quad \prod_{i=1}^7 h_{\alpha_i}(t_i) \mapsto (x_1, \dots, x_7),$$

где $x_1 = t_1$, $x_3 = t_3$, $x_4 = t_4$, $x_6 = t_6$, $x_2 = t_1 t_7$, $x_5 = t_5 t_7$, $x_7 = t_7$. Так как $\lambda(\alpha) = (1, \dots, 1, -1)$, то в координатах $x_1, \dots, x_7$ морфизму $\pi|_S: S \rightarrow \overline{S}$ соответствует морфизм

$$G_m^7 \rightarrow G_m^7, \quad (x_1, \dots, x_7) \mapsto (x_1, \dots, x_6, x_7^2).$$

Тогда из (16) вытекает, что $|\Xi_v| = 2$, причем при отождествлении $H^1(K_v, \mu) = K_v^*/(K_v^*)^2$ единицы $\mathcal{O}_v^*$ переходят в тождественный автоморфизм графа Δ_v , имеющего вид

Из этой картинки следует, что $\Xi_v = \text{Aut } \Delta_v$, и очевидна следующая лемма.

4.4.1. ЛЕММА. *Любой максимальный тип X_v совпадает с одним из следующих множеств:*

$$\begin{aligned} {}^1X_{v,i} &= \Delta_v \setminus \{\alpha_i\}, \quad i = 0, 1, 3, 5, 6, 7, \\ {}^2X_{v,i} &= \begin{cases} \Delta_v \setminus \{\alpha_i\}, & i = 2, 4, \\ \Delta_v \setminus \{\alpha_0, \alpha_7\}, & i = 0, \\ \Delta_v \setminus \{\alpha_1, \alpha_6\}, & i = 1, \\ \Delta_v \setminus \{\alpha_3, \alpha_5\}, & i = 3. \end{cases} \end{aligned}$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Индекс слева вверху здесь и далее будет обозначать порядок стабилизатора в Ξ_v соответствующего подмножества вершин графа Δ_v .

4.4.2. ЛЕММА. *Для всех чисел i выполняются равенства*

$$\begin{aligned} H^1(K_v, \mu)_{1X_{v,i}} &= \{xK_v^{*2} \in K_v^*/(K_v^*)^2 \mid \text{ord}_v(x) \equiv 0 \pmod{2}\}, \\ H^1(K_v, \mu)_{2X_{v,i}} &= K_v^*/(K_v^*)^2. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО непосредственно следует из равенств $\Xi_{1X_{v,i}} = 1$, $\Xi_{2X_{v,i}} = \text{Aut } \Delta_v$.

4.4.3. Перейдем к рассмотрению второго K_v -индекса Титса. Здесь граф Кокстера имеет вид [23]

Ясно, что $\Xi_v = \text{Aut } \Delta_v = 1$, и любой максимальный тип Ξ_v совпадает с одним из следующих множеств

$${}^1X_{v,i} = \Delta_v \setminus \{\alpha_i\}, \quad i = 0, \dots, 4,$$

причем $H^1(K_v, \mu)_{1X_{v,i}} = K_v^*/(K_v^*)^2$ для всех i .

4.4.4. Описание локальных максимальных типов, приведенное в 4.4.1, 4.4.3, позволяет быстро выяснить, когда максимальный тип $X = \{X_v\}_{v \in V_f}$ является $\mathcal{O}$ -максимальным. Действительно, увеличение типа $X \subset X'$ возможно лишь за счет присоединения к множеству X_{v_0} вида $X_{v_0} = {}^2X_{v_0,i}$, $i \neq 2, 4$, дополнительной вершины. При этом уменьшение подгруппы $H^1(K, \mu)_X$ происходит лишь в том случае, если найдется такой $x \in K^*$, что $\text{ord}_{v_0}(x) \equiv 1 \pmod{2}$, а для остальных нормирований v имеем: $x(K_v^*)^2 \in H^1(K_v, \mu)_{X_v}$. Более точно, положим

$$\begin{aligned} V_1 &= \{v \in V_f \mid G \text{ разложима над } K_v \text{ и } X_v = {}^1X_{v,i}\}, \\ V_2 &= \{v \in V_f \mid \text{либо } G \text{ неразложима над } K_v, \\ &\quad \text{либо разложима и } X_v = {}^2X_{v,i}, i = 2, 4\}, \\ V_3 &= \{v \in V_f \mid G \text{ разложима над } K_v \text{ и } X_v = {}^2X_{v,i}, i \neq 2, 4\}, \\ V_4 &= \{v \in V_\infty \mid v \text{ входит в описание группы } A \text{ в 3.5}\}. \end{aligned}$$

Очевидно, что V_2, V_3 – конечные множества. Из 3.4.1 и предыдущего обсуждения вытекает, что имеет место

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Максимальный тип $X = \{X_v\}_{v \in V_f}$ является $\mathcal{O}$ -максимальным тогда и только тогда, когда для любого $v_0 \in V_3$ существует $x \in K^*$ такой, что*

- а) $\text{ord}_v(x) \equiv 0 \pmod{2}$ для всех $v \in V_1$, $\text{ord}_{v_0}(x) \equiv 1 \pmod{2}$,
- б) x – положительный в K_v элемент для всех $v \in V_4$.

4.4.5. Условие а) предложения 4.4.5 эквивалентно следующему утверждению. Пусть Γ_K – группа классов идеалов поля K и для нормирования $v \in V_f$ через I_v будем обозначать соответствующий элемент в Γ_K .

ЛЕММА. *Условие а) выполнено тогда и только тогда, когда для любого $v_0 \in V_3$ имеем $I_{v_0} \in \Gamma_{v_0} \Gamma_K^2$, где Γ_{v_0} – подгруппа группы Γ_K , порожденная I_v для всех $v \in (V_2 \cup V_3) \setminus \{v_0\}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. *Необходимость.* Пусть справедливо условие а) и x – соответствующий элемент. Рассмотрим разложение главного идеала (x) в произведение простых. Если $(x) = \prod_{i=0}^n p_i^{n_i}$ и v_i – нормирование, соответствующее простому идеалу p_i , то для всех $v_i \in V_1$ число n_i четное и $n_0 \equiv 1 \pmod{2}$. Переходя от равенства идеалов к равенству в группе классов идеалов, получим, что $1 = I_{v_0}^{n_0} \cdot \prod_{i=1}^n I_{v_i}^{n_i}$ или же $I_{v_0} \equiv \prod_{i=1}^n I_{v_i}^{n_i} \pmod{\Gamma_K^2}$, что и требовалось.

Достаточность проверяется аналогично. Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Так как V_2, V_3 – конечные множества, то утверждение леммы доставляет эффективный способ проверки свойства $\mathcal{O}$ -максимальности типа $X = \{X_v\}_{v \in V_f}$ для каждой конкретной группы G .

4.5. Тип 1E_6 : $\mu = \mu_3$, $H^1(K_v, \mu) \simeq K_v^*/(K_v^*)^3$. Если $v \in V_f$, то над полем K_v для K_v -индекса Титса имеются две возможности [21]

4.5.1. В разложимом случае граф Кокстера имеет вид

Рассуждая так же, как и в случае типа E_7 , получим следующую лемму.

ЛЕММА. 1) $\Xi_v = \text{Aut } \Delta_v$ и все максимальные типы X_v описываются следующими равенствами:

$$\begin{aligned} {}^1\Xi_{v,i} &= \Delta_v \setminus \{\alpha_i\}, \quad i \neq 4, \\ {}^3\Xi_{v,4} &= \Delta_v \setminus \{\alpha_4\}, \\ {}^3\Xi_{v,0} &= \Delta_v \setminus \{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_6\}, \\ {}^3\Xi_{v,2} &= \Delta_v \setminus \{\alpha_2, \alpha_3, \alpha_5\}. \end{aligned} \tag{18}$$

$$\begin{aligned} 2) \quad H^1(K_v, \mu)_{X_{v,i}} &= \{x(K_v^*)^3 \in K_v^*/(K_v^*)^3 \mid \text{ord}_v(x) \equiv 0 \pmod{3}\}, \\ H^1(K_v, \mu)_{X_{v,i}} &= H^1(K_v, \mu), \quad i = 0, 2, 4. \end{aligned}$$

4.5.2. В неразложимом случае граф Кокстера имеет вид

откуда $\Xi_v = \text{Aut } \Delta_v = 1$. Поэтому все максимальные типы совпадают с ${}^1X_{v,i} = \Delta_v \setminus \{\alpha_i\}$, $i = 0, 1, 2$, и $H^1(K_v, \mu)_{X_{v,i}} = H^1(K_v, \mu)$.

4.5.3. Пусть $X = \{X_v\}_{v \in V_f}$ — максимальный тип. Положим

$$\begin{aligned} V_1 &= \{v \in V_f \mid G \text{ разложима над } K_v \text{ и } X_v = {}^1X_{v,i}\}, \\ V_2 &= \{v \in V_f \mid \text{либо } G \text{ неразложима над } K_v, \text{ либо разложима и } X_v = {}^3X_{v,4}\}, \\ V_3 &= \{v \in V_f \mid G \text{ разложима над } K_v \text{ и } X_v = {}^3X_{v,i}, i = 0, 2\}. \end{aligned}$$

Суммируя приведенную выше информацию с учетом 3.4.1 имеем следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Максимальный тип $X = \{X_v\}_{v \in V_f}$ является $\mathcal{O}$ -максимальным тогда и только тогда, когда для любого $v_0 \in V_3$ существует $x \in K^*$ такой, что $\text{ord}_v(x) \equiv 0 \pmod{3}$ для всех $v \in V_1$ и $\text{ord}_{v_0}(x) \not\equiv 0 \pmod{3}$.

СЛЕДСТВИЕ. Максимальный тип $X = \{X_v\}_{v \in V_f}$ является $\mathcal{O}$ -максимальным тогда и только тогда, когда для любого $v_0 \in V_3$ имеем $I_{v_0} \in \Gamma_{v_0} \Gamma_K^3$, где Γ_{v_0} — подгруппа группы Γ_K , порожденная I_v для всех $v \in (V_2 \cup V_3) \setminus \{v_0\}$.

4.6. Тип 2E_6 . Если $v \in V_f$ и G над K_v имеет внешний тип, то граф Кокстера имеет вид [23]

Отсюда следует, что $\Xi_v = \text{Aut } \Delta_v = 1$, и поэтому максимальные типы X_v задаются равенствами

$${}^1X_{v,i} = \Delta_v \setminus \{\alpha_i\}, \quad i = 0, \dots, 4,$$

и $H^1(K_v, \mu)_{1X_{v,i}} = H^1(K_v, \mu)$.

Перейдем к описанию θ -максимальных типов. Пусть $X = \{X_v\}_{v \in V_f}$ — максимальный тип. Положим

$$\begin{aligned} V_1 &= \{v \in V_f \mid G \text{ разложима над } K_v \text{ и тип } X_v \text{ совпадает с одним} \\ &\quad \text{из множеств } {}^1X_{v,i} \text{ из (18)}\}, \\ V_2 &= \{v \in V_f \mid \text{либо } G \text{ неразложима над } K_v \text{ группа внутреннего типа и} \\ &\quad X_v - \text{любое, либо } G \text{ разложима и } X_v \text{ совпадает с множеством } {}^3X_{v,4} \text{ из (18)}\}, \\ V_3 &= \{v \in V_f \mid G \text{ разложима над } K_v \text{ и тип } X_v \text{ совпадает с одним} \\ &\quad \text{из множеств } {}^3X_{v,i}, i \neq 4, \text{ из (18)}\}. \end{aligned}$$

Пусть L — квадратичное расширение поля K , над которым G имеет внутренний тип. Напомним, что

$$H^1(K, \mu) = \text{Ker}(L^*/(L^*)^3 \rightarrow K^*/(K^*)^3).$$

Очевидно, что если $L \cdot K_v \neq K_v$, то нормирование v поля K имеет единственное продолжение на L , которое будем обозначать той же буквой. Поэтому если $l(L^*)^3 \in H^1(K, \mu)$, то для таких нормирований v справедливо равенство $v(l) \equiv 0 \pmod{3}$. Если же $L \cdot K_v = K_v$, то v имеет два продолжения v^1, v^2 на L , и тогда $v^1(l) + v^2(l) \equiv 0 \pmod{3}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Максимальный тип $X = \{X_v\}_{v \in V_f}$ является θ -максимальным тогда и только тогда, когда для любого $v_0 \in V_3$ существует $x \in L^*$ такой, что*

$$\begin{aligned} \text{ord}_{v^i}(x) &\equiv 0 \pmod{3}, \quad i = 1, 2, \text{ для всех } v \in V_1 \text{ и} \\ \text{ord}_{v_0^1}(x) &\equiv 1 \pmod{3}, \quad \text{ord}_{v_0^2}(x) \equiv 2 \pmod{3}. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из описания локальных групп $H^1(K_v, \mu)_{X_v}$ следует, что

$$H^1(K, \mu)_X = \{l(L^*)^3 \in H^1(K, \mu) \mid \text{ord}_{v^i}(l) \equiv 0 \pmod{3}, i = 1, 2, \text{ для всех } v \in V_1\}.$$

Поскольку тип X можно увеличить лишь за счет компонент $v \in V_3$, то уменьшение $H^1(K, \mu)_X$ происходит лишь тогда, когда для любого $v_0 \in V_3$ найдется $l(L^*)^3 \in H^1(K, \mu)_X$ такой, что $v_0^1(l) \not\equiv 0 \pmod{3}$. Тем самым, остается только установить, что из существования элемента $l \in L^*$ с указанными в утверждении предложения свойствами следует существование $\tilde{l}(L^*)^3 \in H^1(K, \mu)$ с аналогичными свойствами. Пусть $1 \neq \sigma \in \text{Gal}(L/K)$. Тогда для всех $a \in L$ $v_0^2(a) = v_0^1(\sigma(a))$. Рассмотрим элемент $\tilde{l} = \sigma(l)/l$. Очевидно, что $\tilde{l}(L^*)^3 \in H^1(K, \mu)_X$ и, кроме того,

$$v_0^1(\tilde{l}) = v_0^1(\sigma(l)) - v_0^1(l) = v_0^2(l) - v_0^1(l) \equiv 1 \pmod{3},$$

что и требовалось доказать.

СЛЕДСТВИЕ. *Максимальный тип $X = \{X_v\}_{v \in V_f}$ является θ -максимальным тогда и только тогда, когда для любого $v \in V_3$ имеем $I_{v_0^1} I_{v_0^2}^2 \in \Gamma_{v_0} \Gamma_L^3$, где Γ_{v_0} — подгруппа группы Γ_L , порожденная I_{v^i} , $i = 1, 2$, для всех $v \in (V_2 \cup V_3) \setminus \{v_0\}$.*

Для доказательства следует повторить рассуждение из леммы 4.4.5.

§ 5. Классификация МАП групп типов B_n, C_n

5.1. Типы B_n, C_n рассматриваются аналогично типам $E_7, {}^1E_6$. Поэтому приведем лишь окончательный ответ без дополнительных пояснений.

Тип B_n . Для K_v -индекса Титса имеются две возможности [21]

Локальные диаграммы Дынкина имеют соответственно вид

В первом случае $|\Xi_v| = |\text{Aut } \Delta_v| = 2$, и поэтому максимальные типы X_v совпадают с

$$\begin{aligned} {}^1X_{v,i} &= \Delta_v \setminus \{\alpha_i\}, \quad i = 0, 1, \\ {}^2X_{v,i} &= \begin{cases} \Delta_v \setminus \{\alpha_i\}, & i = 2, \dots, n, \\ \Delta_v \setminus \{\alpha_0, \alpha_1\}, & i = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Очевидно также, что для ${}^jX_{v,i}$ справедливы равенства

$$\begin{aligned} H^1(K, \mu)_{2X_{v,i}} &= K_v^*/(K_v^*)^2, \\ H^1(K, \mu)_{1X_{v,i}} &= \{x(K_v^*)^2 \in K_v^*/(K_v^*)^2 \mid \text{ord}_v(x) \equiv 0 \pmod{2}\}. \end{aligned}$$

Во втором случае $\Xi_v = \text{Aut } \Delta_v = 1$, откуда любой максимальный тип X_v совпадает с одним из следующих:

$${}^1X_{v,i} = \Delta_v \setminus \{\alpha_i\}, \quad i = 0, \dots, n-1,$$

причем $H^1(K, \mu)_{1X_{v,i}} = K_v^*/(K_v^*)^2$.

Пусть $X = \{X_v\}_{v \in V_f}$ — максимальный тип. Положим

$$\begin{aligned} V_1 &= \{v \in V_f \mid G \text{ разложима над } K_v \text{ и } X_v = {}^1X_{v,i}\}, \\ V_2 &= \{v \in V_f \mid \text{либо } G \text{ неразложима над } K_v, \text{ либо } G \text{ разложима и} \\ &\quad X_v = {}^2X_{v,i}, i = 2, \dots, n\}, \\ V_3 &= \{v \in V_f \mid G \text{ разложима над } K_v \text{ и } X_v = {}^2X_{v,0}\}, \\ V_4 &= \{v \in V_\infty \mid v \text{ входит в описание группы } A \text{ в 3.8}\}. \end{aligned}$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Максимальный тип $X = \{X_v\}_{v \in V_f}$ является θ -максимальным тогда и только тогда, когда для любого $v \in V_3$ существует такой $x \in K^*$, что

- а) $\text{ord}_v(x) \equiv 0 \pmod{2}$ для всех $v \in V_1$,
 $\text{ord}_{v_0}(x) \equiv 1 \pmod{2}$,
- б) x — положительный элемент в K_v для всех $v \in V_4$.

Условие а) можно сформулировать в следующем виде.

ЛЕММА. Условие а) выполняется тогда и только тогда, когда $I_{v_0} \in \Gamma_{v_0} \Gamma_K^2$ для любого $v_0 \in V_3$, где Γ_{v_0} – подгруппа группы Γ_K , порожденная I_v для всех $v \in (V_2 \cup V_3) \setminus \{v_0\}$.

5.2. Тип C_n . Для K_v -индекса Титса имеются три возможности

Во втором случае $n = 2m + 1$ – нечетное число, а в третьем $n = 2m$ – четное. Локальные диаграммы Дынкина имеют соответственно вид

если $m > 1$. Если же $m = 1$, то во втором и третьем случаях локальная диаграмма Дынкина имеет вид

Во всех случаях, кроме K_v -разложимого, $\Xi_v = \text{Aut } \Delta_v = 1$, поэтому максимальные типы X_v задаются равенствами

$${}^1X_{v,i} = \Delta_v \setminus \{\alpha_i\},$$

причем $H^1(K, \mu)_{1X_{v,i}} = K_v^* / (K_v^*)^2$.

В K_v -разложимом случае $\Xi_v = \text{Aut } \Delta_v$, откуда для максимальных типов X_v существуют следующие возможности:

$$\begin{aligned} {}^1X_{v,i} &= \Delta_v \setminus \{\alpha_i\}, \quad i = 0, \dots, n \quad (i \neq [\frac{n}{2}] + 1, \text{ если } n \text{ нечетное}), \\ {}^2X_{v,i} &= \Delta_v \setminus \{\alpha_i, \alpha_{n-i}\}, \quad i = 0, \dots, [\frac{n}{2}], \\ {}^2X_{v, [\frac{n}{2}] + 1} &= \Delta_v \setminus \{\alpha_{[\frac{n}{2}] + 1}\}, \quad \text{если } n \text{ нечетное.} \end{aligned}$$

Пусть $X = \{X_v\}_{v \in V_f}$ – максимальный тип. Положим

$$\begin{aligned} V_1 &= \{v \in V_f \mid G \text{ разложима над } K_v \text{ и } X_v = {}^1X_{v,i}\}, \\ V_2 &= \{v \in V_f \mid \text{либо } G \text{ неразложима над } K_v, \text{ либо } G \text{ разложима и} \\ &\quad X_v = {}^2X_{v, [\frac{n}{2}] + 1}, \text{ если } n \text{ нечетное}\}, \\ V_3 &= \{v \in V_f \mid G \text{ разложима над } K_v \text{ и } X_v = {}^2X_{v,i}, i = 0, \dots, [\frac{n}{2}]\}, \\ V_4 &= \{v \in V_\infty \mid v \text{ входит в описание группы } A \text{ в 3.9}\}. \end{aligned}$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Максимальный тип $X = \{X_v\}_{v \in V_f}$ является $\mathcal{O}$ -максимальным тогда и только тогда, когда для любого $v_0 \in V_3$, существует такой $x \in K^*$, что*

- а) $\text{ord}_v(x) \equiv 0 \pmod{2}$ для всех $v \in V_1$,
 $\text{ord}_{v_0}(x) \equiv 1 \pmod{2}$,
- б) x — положительный элемент в K_v для всех $v \in V_4$.

ЛЕММА. *Условие а) выполняется тогда и только тогда, когда $I_{v_0} \in \Gamma_{v_0} \Gamma_K^2$ для любого $v_0 \in V_3$, где Γ_{v_0} — подгруппа группы Γ_K , порожденная I_v для всех $v \in (V_2 \cup V_3) \setminus \{v_0\}$.*

Список литературы

1. Бондаренко А. А. К классификации максимальных арифметических подгрупп в ортогональных группах типа D_l // Докл. АН БССР. 1974. Т. 18. №9. С. 773–776.
2. Бондаренко А. А. К проблеме максимальности арифметических подгрупп в ортогональных группах типа B_n // Матем. заметки. 1974. Т. 16. №1. С. 151–161.
3. Бондаренко А. А. Классификация максимальных арифметических подгрупп ортогональных групп типа D_l // Докл. АН БССР. 1975. Т. 19. №11. С. 969–972.
4. Бондаренко А. А. К классификации максимальных арифметических подгрупп в разложимых группах // Матем. сб. 1977. Т. 102. №2. С. 155–172.
5. Бондаренко А. А. Классификация максимальных арифметических подгрупп неопределенных ортогональных групп типа B_l // Матем. сб. 1985. Т. 127. №1. С. 72–91.
6. Бондаренко А. А. О максимальности арифметических подгрупп неопределенных ортогональных групп типа D_l // Матем. сб. 1990. Т. 181. №3. С. 388–401.
7. Бондаренко А. А. Классификация максимальных арифметических подгрупп неопределенных ортогональных групп типа C_l // Докл. АН Беларуси. 1994. Т. 38. №3. С. 29–32.
8. Платонов В. П. К проблеме максимальности арифметических групп // Докл. АН СССР. 1971. Т. 200. №3. С. 530–533.
9. Платонов В. П. Арифметическая теория алгебраических групп // УМН. 1982. Т. 37. №3. С. 3–54.
10. Bruhat F., Tits J. Groupes reductifs sur un corps local // Publ. Math. I. H. E. S. 1972. V. 41. P. 5–252.
11. Bruhat F., Tits J. Groupes reductifs sur un corps local. Chap. II. Schemas en groupes. Existence d'une donnée radicielle valuée // Publ. Math. I. H. E. S. 1984. V. 60. P. 5–184.
12. Платонов В. П., Рапунчук А. С. Алгебраические группы и теория чисел. М.: Наука, 1991.
13. Rohlfs J. Die maximalen arithmetische definierten Untergruppen zerfallender einfacher Gruppen // Math. Ann. 1979. V. 244. P. 219–231.
14. Margulis G. A., Rohlfs J. On the proportionality of covolumes of discrete subgroups // Math. Ann. 1986. V. 275. P. 197–205.
15. Allan N. D. The problem of the maximality of arithmetic groups // Proc. Symp. Pure Math. 1966. V. 9. P. 104–109.
16. Allan N. D. On the maximality of $\text{Sp}(L)$ in $\text{Sp}_n(K)$ // Rev. Colomb. Math. 1970. V. 4. №1. P. 7–15.
17. Allan N. D. On the commensurability class of the Siegel modular group // Bull. Amer. Math. Soc. 1968. V. 74. №1. P. 114–118.
18. Borel A. Density and maximality of arithmetic subgroups // J. Reine Angew. Math. 1966. V. 224. P. 78–89.
19. Бурбаки Н. Группы и алгебры Ли. Гл IV–VI. М.: Мир, 1972.
20. Рагунатан М. С. Дискретные подгруппы групп Ли. М.: Мир, 1977.

- 21. *Титс Ж.* Классификация полупростых алгебраических групп // Математика. 1968. Т. 12. № 2. С. 110–143.
- 22. *Стейнберг Р.* Лекции о группах Шевалле. М.: Мир, 1975.
- 23. *Tits J.* Reductive groups over local fields // Proc. Symp. Pure Math. 1979. V. 33. P. 29–69.

Институт математики АН Беларуси, Минск

Поступила в редакцию
30.12.1996