Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. Ф. Красичков-Терновский, Фундаментальный принцип для инвариантных подпространств аналитических функций. III, *Матем. сб.*, 1997, том 188, номер 10, 25–68

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm263>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.5.30

26 апреля 2023 г., 12:55:40

УДК 517.53

И. Ф. Красичков-Терновский

Фундаментальный принцип для инвариантных подпространств аналитических функций. III

В топологическом произведении пространств аналитических функций рассматривается замкнутое подпространство, инвариантное относительно оператора дифференцирования. Исследуется задача представления элементов этого подпространства в виде ряда по корневым элементам оператора дифференцирования.

Библиография: 21 название.

Настоящая статья является продолжением статей [1], [2] и использует обозначения последних. Пусть $G = (G_1, \dots, G_q)$ – выпуклая q -область, т.е. упорядоченная система выпуклых областей в $\mathbb{C}$. С q -областью G ассоциируется топологическое произведение

$$H = H(G_1) \times \dots \times H(G_q)$$

пространств функций, голоморфных, соответственно, в областях $G_1, \dots, G_q$. В пространстве H действует оператор D покомпонентного дифференцирования. Рассмотрим замкнутое подпространство $W \subset H$, инвариантное относительно D . Для $\lambda \in \mathbb{C}$ обозначим через $W(\lambda)$ подпространство элементарных эксп- q -многочленов с показателем λ , содержащихся в W . *Элементарным проектором p_λ , отвечающим λ* , называется линейный непрерывный оператор $p_\lambda: W \rightarrow W$ со следующими свойствами:

- 1°. $\text{Im } p_\lambda = W(\lambda)$;
- 2°. $p_\lambda^2 = p_\lambda$;
- 3°. p_λ коммутирует с D .

Если ранг аннуляторного подмодуля $I = \text{An } W$ равен q , то точки λ , для которых $W(\lambda) \neq \{0\}$, образуют последовательность $\Lambda = \{\lambda_i\}$, и для каждой $\lambda_i \in \Lambda$ существует элементарный проектор $p_{\lambda_i}: W \rightarrow W$ [2, предложение 4.6]. В этом случае каждому элементу $f \in W$ можно поставить в соответствие стандартный ряд

$$\sum p_{\lambda_i}(f). \quad (1)$$

Фундаментальный принцип состоит в том, что в определенных ситуациях частичные суммы ряда (1) сходятся к f для любого $f \in W$. В упрощенной и приближительной форме основной результат статьи (теорема 3.1) можно описать следующим образом. Пусть аннуляторный подмодуль I подпространства W удовлетворяет следующим двум условиям:

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 93-01-00259) и Академии наук Республики Башкортостан (грант № 130).

- 1) I является устойчивым подмодулем;
- 2) I содержит независимую систему элементов

$$u^{(1)}, \dots, u^{(q)}, \quad (2)$$

которая является $\mathcal{D}$ -ограниченной и допускает ω -оценку (см. п. 2.1) вдоль системы $\{\Gamma_n\}$ замкнутых контуров. Тогда если элемент $f \in W$ допускает аналитическое продолжение в более широкую q -область $G' \supset G$, то последовательность частичных сумм

$$\sum_{\lambda_i \in \Gamma_n} p_{\lambda_i}(f)$$

сходится к f в q -области Ω , которая определяется характером ω -оценки и $\mathcal{D}$ -ограниченности, а также геометрией q -области G' . Этому утверждению предшествует подготовка, проведенная в §§ 1, 2; в предположении, что аннуляторный подмодуль I содержит семейство независимых систем

$$\{u^{1\alpha}, \dots, u^{q\alpha}\}, \quad \alpha \in A,$$

каждая из которых допускает свою $\omega^{(\alpha)}$ -оценку, установлено, что сходимость частичных сумм (1) имеет место в объединении выпуклых q -областей $\omega^{(\alpha)}$, $\alpha \in A$, полностью определяемых $\omega^{(\alpha)}$ -оценками (теорема 2.2). В том случае, когда система замкнутых контуров $\{\Gamma_n\}$ состоит из окружностей $|z| = r_n$, $r_n \rightarrow \infty$, фундаментальный принцип допускает дальнейшее развитие (теорема 4.1). Это связано с тем, что мы располагаем простым способом построения функций экспоненциального типа с оптимальным поведением вдоль системы окружностей (п. 4.2). Это обстоятельство позволяет выделить в аннуляторном подмодуле независимые системы, допускающие дополнительные ω -оценки и позволяющие расширить область сходимости Ω .

Статья завершается исследованием фундаментального принципа на открытом q -множестве G . Пусть $\{G^{(\alpha)}\}$, $\alpha \in A$, – система выпуклых q -областей $G^{(\alpha)} \subset G$. Каждому α соответствует инвариантное подпространство $W^{(\alpha)} \subset H(G^{(\alpha)})$, в котором имеет место фундаментальный принцип. Предположим, что W – инвариантное подпространство в H , для которого имеют место непрерывные вложения $W \subset W^{(\alpha)}$, $\alpha \in A$. Мы указываем условия, при которых фундаментальный принцип распространяется с пространств $W^{(\alpha)}$ на подпространство W (теоремы 5.1, 5.2).

В заключение отметим, что даже в случае $q = 1$ результаты этой статьи представляют собой далеко идущее обобщение результатов Диксона [3] и Леонтьева [4].

§ 1. Последовательность интерполяторов

1.1. Оценка интерполятора. Пусть I – подмодуль в P ранга k , I_0 – мероморфное расширение I в P [2, п. 3.1], $u^{(1)}, \dots, u^{(k)}$ – независимая система элементов из I с определителем

$$\Delta = \begin{vmatrix} u_{i_1}^{(1)} & \dots & u_{i_1}^{(k)} \\ \dots & \dots & \dots \\ u_{i_k}^{(1)} & \dots & u_{i_k}^{(k)} \end{vmatrix}, \quad (1)$$

отличным от тождественного нуля.

Пусть Γ – гладкий замкнутый контур, ограничивающий область $K \subset \mathbb{C}$. Рассмотрим интерполятор Int_Γ , построенный по системе $u^{(1)}, \dots, u^{(k)}$ и строкам с номерами $i_1, \dots, i_k$ [2, п. 3.4]:

$$\text{Int}_\Gamma \varphi = \sum_{p=1}^k \left(\Gamma_{\text{л}\Gamma} \frac{\Delta_p(\varphi)}{\Delta} \right) u^{(p)}. \quad (2)$$

Здесь $\Delta_p(\varphi)$ – определитель, полученный из (1) заменой p -го столбца на столбец из соответствующих компонент элемента φ . Заметим, что при $q = 1$ независимая система состоит из одного элемента $u \neq 0$, а интерполятор (2) приобретает вид

$$\text{Int}_\Gamma \varphi = \left(\Gamma_{\text{л}\Gamma} \frac{\varphi}{u} \right) u.$$

Для мероморфной функции $f \in \mathcal{M}$ с полюсами вне Γ положим

$$(R_\Gamma f)(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\xi)}{\lambda - \xi} d\xi, \quad \lambda \notin \Gamma.$$

Нетрудно проверить, что

$$(\Gamma_{\text{л}\Gamma} f)(\lambda) = \begin{cases} (R_\Gamma f)(\lambda) + f(\lambda), & \lambda \in K, \\ (R_\Gamma f)(\lambda), & \lambda \notin \overline{K}, \end{cases}$$

где K – область, охватываемая контуром Γ . Пусть полюсы мероморфных функций $\Delta_p(\varphi)/\Delta$, $p = 1, \dots, k$, лежат вне Γ . Для $\varphi \in I_0$ положим

$$I_\Gamma(\varphi) = \sum_{p=1}^k \left(R_\Gamma \frac{\Delta_p(\varphi)}{\Delta} \right) u^{(p)}.$$

Из выражения (2) для $\text{Int}_\Gamma \varphi$ и предложения 3.1 [2] следует

$$(\text{Int}_\Gamma \varphi)(\lambda) = \begin{cases} I_\Gamma(\varphi)(\lambda) + \varphi(\lambda), & \lambda \in K, \\ I_\Gamma(\varphi)(\lambda), & \lambda \notin \overline{K}, \end{cases}$$

или, что то же самое,

$$\varphi(\lambda) - (\text{Int}_\Gamma \varphi)(\lambda) = \begin{cases} -I_\Gamma(\varphi)(\lambda), & \lambda \in K, \\ \varphi(\lambda) - I_\Gamma(\varphi)(\lambda), & \lambda \notin \overline{K}. \end{cases} \quad (3)$$

Наша ближайшая цель – оценить $\varphi(\lambda) - (\text{Int}_\Gamma \varphi)(\lambda)$. Нам понадобятся следующие соглашения.

1°. Для q -функции $f = (f_1, \dots, f_q)$, голоморфной в окрестности контура Γ , обозначим

$$\|f\|_\Gamma = \sum_{\substack{p=1, \dots, k \\ i=i_1, \dots, i_k}} \sup_{\xi \in \Gamma} \frac{|\Delta_{ip}(\xi)|}{|\Delta(\xi)|} |f_i(\xi)|,$$

где Δ_{ip} – алгебраическое дополнение элемента определителя (1), стоящего на пересечении i -й строки и p -го столбца (строки определителя (1) нумеруются числами $i_1, i_2, \dots, i_k$). Легко проверить, что $\| \cdot \|_\Gamma$ обладает свойствами полунормы:

$$\begin{aligned} \|f' + f''\|_\Gamma &\leq \|f'\|_\Gamma + \|f''\|_\Gamma, \\ \|\lambda f\|_\Gamma &= |\lambda| \|f\|_\Gamma. \end{aligned}$$

2°. Для q -вектора $z = (z_1, \dots, z_q) \in \mathbb{C}^q$ символ $|z|$ обозначает q -вектор $(|z_1|, \dots, |z_q|)$.

3°. Для q -векторов $x = (x_1, \dots, x_q), y = (y_1, \dots, y_q) \in \mathbb{R}^q$ неравенство $x \leq y$ обозначает совокупность q неравенств $x_1 \leq y_1, \dots, x_q \leq y_q$.

4°. Для набора q -векторов

$$x^{(1)} = (x_1^{(1)}, \dots, x_q^{(1)}), \dots, x^{(k)} = (x_1^{(k)}, \dots, x_q^{(k)}) \in \mathbb{R}^q$$

символ $\max_{p=1, \dots, k} x^{(p)}$ обозначает q -вектор

$$x = (x_1, \dots, x_q),$$

где $x_i = \max_{p=1, \dots, k} x_i^{(p)}$.

5°. Для q -функции $u = (u_1, \dots, u_q)$ и $r > 0$ символ $\max_{\xi \in D_r(\lambda)} |u(\xi)|$ обозначает q -функцию $v = (v_1, \dots, v_q)$, где

$$v_1(\lambda) = \sup_{\xi \in D_r(\lambda)} |u_1(\xi)|, \dots, v_q(\lambda) = \sup_{\xi \in D_r(\lambda)} |u_q(\xi)|,$$

$D_r(\lambda)$ – замкнутый круг с центром в λ и радиусом r .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.1. При $\varphi \in I_0$ и любом $r > 0$ справедливо неравенство

$$\begin{aligned} &|\varphi(\lambda) - (\text{Int}_\Gamma \varphi)(\lambda)| \\ &\leq \max_{\xi \in D_r(\lambda)} |\varphi_K(\xi)| + \frac{3l(\Gamma)}{\pi r} \|\varphi\|_\Gamma \cdot \max_{p=1, \dots, k} \max_{\xi \in D_r(\lambda)} |u^{(p)}(\xi)|, \end{aligned} \quad (4)$$

где

$$\varphi_K(\xi) = \begin{cases} 0, & \xi \in K, \\ \varphi(\xi), & \xi \notin K, \end{cases}$$

$l(\Gamma)$ – длина контура Γ , K – область, охватываемая Γ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем $\varphi \in I_0$. Предположим, что полюсы функций $\Delta_p(\varphi)/\Delta$, $p = 1, \dots, k$, лежат вне Γ . Рассмотрим круг $D_\rho(\lambda)$, $\rho > 0$. Сначала предположим, что $D_\rho(\lambda)$ не пересекается с Γ . Из (3) следует

$$|\varphi(\lambda) - (\text{Int}_\Gamma \varphi)(\lambda)| \leq |\varphi(\lambda)| + \frac{l(\Gamma)}{2\pi\rho} \sum_{p=1}^k M_\Gamma^{(p)}(\varphi) |u^{(p)}(\lambda)|, \quad (5)$$

где

$$M_\Gamma^{(p)}(\varphi) = \sup_{\xi \in \Gamma} \left| \frac{\Delta_p(\varphi)(\xi)}{\Delta(\xi)} \right|.$$

Пусть теперь $D_\rho(\lambda)$ пересекается с Γ и $\lambda \in K$. Представим Γ в виде объединения $\Gamma = \Gamma' \cup \Gamma''$, где

$$\Gamma' = \Gamma \cap D_\rho(\lambda), \quad \Gamma'' = \Gamma \setminus D_\rho(\lambda).$$

Часть окружности $\partial D_\rho(\lambda)$, лежащую вне K , обозначим γ . Она может распадаться на не более чем счетное число дуг, на которых задается ориентация, соответствующая обходу $\partial D_\rho(\lambda)$ против часовой стрелки. Имеем

$$I_\Gamma = I_{\Gamma'} + I_{\Gamma''}, \quad (6)$$

где

$$I_{\Gamma'}(\lambda) = \sum_{p=1}^k \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma'} \frac{\Delta_p(\varphi)(\xi)}{\Delta(\xi)(\lambda - \xi)} d\xi \cdot u^{(p)}(\lambda), \quad (7)$$

$$I_{\Gamma''}(\lambda) = \sum_{p=1}^k \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma''} \frac{\Delta_p(\varphi)(\xi)}{\Delta(\xi)(\lambda - \xi)} d\xi \cdot u^{(p)}(\lambda). \quad (8)$$

Оценим $I_{\Gamma'}$. Поскольку $\varphi \in I_0$, по предложению 3.1 [2] имеем

$$\sum_{p=1}^k \frac{\Delta_p(\varphi)}{\Delta} u^{(p)} = \varphi.$$

Имея это в виду, представим $I_{\Gamma'}$ в виде

$$I_{\Gamma'} = I'_{\Gamma'} + I''_{\Gamma'}, \quad (9)$$

где

$$I'_{\Gamma'}(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma'} \sum_{p=1}^k \frac{u^{(p)}(\lambda) - u^{(p)}(\xi)}{\lambda - \xi} \frac{\Delta_p(\varphi)(\xi)}{\Delta(\xi)} d\xi, \quad (10)$$

$$I''_{\Gamma'}(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma'} \frac{\varphi(\xi)}{\lambda - \xi} d\xi. \quad (11)$$

Далее,

$$|I'_{\Gamma'}(\lambda)| \leq \frac{l(\Gamma)}{2\pi} \sum_{p=1}^k M_{\Gamma}^{(p)}(\varphi) \sup_{\xi \in D_{\rho}(\lambda)} \left| \frac{u^{(p)}(\lambda) - u^{(p)}(\xi)}{\lambda - \xi} \right|.$$

Используем оценку

$$\begin{aligned} \left| \frac{u^{(p)}(\lambda) - u^{(p)}(\xi)}{\lambda - \xi} \right| &\leq \max_{z \in [\xi, \lambda]} \left| \frac{du^{(p)}(z)}{dz} \right| \\ &= \max_{z \in [\xi, \lambda]} \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_{2\rho}(\lambda)} \frac{u^{(p)}(t)}{(t - z)^2} dt \right| \\ &\leq \frac{2}{\rho} \max_{\xi \in D_{2\rho}(\lambda)} |u^{(p)}(\xi)|. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$|I'_{\Gamma'}(\lambda)| \leq \frac{l(\Gamma)}{\pi\rho} \sum_{p=1}^k M_{\Gamma}^{(p)}(\varphi) \max_{\xi \in D_{2\rho}(\lambda)} |u^{(p)}(\xi)|. \quad (12)$$

Оценим $I''_{\Gamma'}$. Учитывая, что $\lambda \in K$, имеем

$$I''_{\Gamma'}(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma'} \frac{\varphi(\xi)}{\lambda - \xi} d\xi = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\varphi(\xi)}{\lambda - \xi} d\xi,$$

откуда

$$|I''_{\Gamma'}(\lambda)| \leq \max_{\xi \in D_{\rho}(\lambda) \setminus K} |\varphi(\xi)| = \max_{\xi \in D_{\rho}(\lambda)} |\varphi_K(\xi)|. \quad (13)$$

В итоге из (9), (12), (13) следует

$$I_{\Gamma'}(\lambda) \leq \max_{\xi \in D_{\rho}(\lambda)} |\varphi_K(\xi)| + \frac{l(\Gamma)}{\pi\rho} \sum_{p=1}^k M_{\Gamma}^{(p)}(\varphi) \max_{\xi \in D_{2\rho}(\lambda)} |u^{(p)}(\xi)|. \quad (14)$$

При оценке $I_{\Gamma''}$ учитываем, что $|\xi - \lambda| \geq \rho$ при $\xi \in \Gamma''$. Используя выражение (8) для $I_{\Gamma''}(\lambda)$, имеем

$$|I_{\Gamma''}(\lambda)| \leq \frac{l(\Gamma)}{2\pi\rho} \sum_{p=1}^k M_{\Gamma}^{(p)}(\varphi) |u^{(p)}(\lambda)|. \quad (15)$$

Используя соотношение

$$|\varphi(\lambda) - (\text{Int}_{\Gamma} \varphi)(\lambda)| = |I_{\Gamma}(\lambda)|, \quad \lambda \in K,$$

и оценки (6), (14), (15), получаем неравенство

$$\begin{aligned} |\varphi(\lambda) - (\text{Int}_{\Gamma} \varphi)(\lambda)| &\leq \max_{\xi \in D_{\rho}(\lambda)} |\varphi_K(\xi)| \\ &\quad + \frac{3}{2} \frac{l(\Gamma)}{\pi\rho} \sum_{p=1}^k M_{\Gamma}^{(p)}(\varphi) \max_{\xi \in D_{2\rho}(\lambda)} |u^{(p)}(\xi)|. \end{aligned} \quad (16)$$

Оценим $\varphi - \text{Int}_\Gamma \varphi$ при $\lambda \notin \overline{K}$. Имея в виду (3), пишем

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda) - (\text{Int}_\Gamma \varphi)(\lambda) &= \varphi(\lambda) - I_\Gamma(\lambda) = \varphi(\lambda) - (I_{\Gamma'}(\lambda) + I_{\Gamma''}(\lambda)) \\ &= \varphi(\lambda) - (I'_{\Gamma'}(\lambda) + I''_{\Gamma'}(\lambda) + I_{\Gamma''}(\lambda)), \end{aligned}$$

где $I_{\Gamma'}$, $I_{\Gamma''}$, $I'_{\Gamma'}$, $I''_{\Gamma'}$ определяются, соответственно, формулами (7), (8), (10), (11). Интегралы $I'_{\Gamma'}(\lambda)$, $I_{\Gamma''}(\lambda)$ оцениваются как и прежде; для них справедливы неравенства (12) и (15). По-прежнему, обозначаем через γ часть окружности $\partial D_\rho(\lambda)$, лежащую вне K . Учитывая, что $\lambda \notin \overline{K}$, имеем

$$\varphi(\lambda) - I''_{\Gamma'}(\lambda) = \varphi(\lambda) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma'} \frac{\varphi(\xi)}{\xi - \lambda} d\xi = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{\varphi(\xi)}{\xi - \lambda} d\xi.$$

Отсюда

$$|\varphi(\lambda) - I''_{\Gamma'}(\lambda)| \leq \max_{\xi \in D_\rho(\lambda)} |\varphi_K(\xi)|. \quad (17)$$

Из оценок (12), (15), (17) следует, что при $\lambda \notin \overline{K}$, $D_\rho(\lambda) \cap \Gamma \neq \emptyset$ выполняется оценка (16). По непрерывности неравенство (16) распространяется на все λ . Полагая $r = 2\rho$, из неравенства (16) получаем

$$|\varphi(\lambda) - (\text{Int}_\Gamma \varphi)(\lambda)| \leq \max_{\xi \in D_r(\lambda)} |\varphi_K(\xi)| + \frac{3l(\Gamma)}{\pi r} \sum_{p=1}^k M_\Gamma^{(p)}(\varphi) \max_{\xi \in D_r(\lambda)} |u^{(p)}(\xi)|.$$

Неравенство (14) следует из того, что

$$\sum M_\Gamma^{(p)}(\varphi) \leq \|\varphi\|_\Gamma.$$

Неравенство (4) доказано в предположении, что полюсы функций $\Delta_p(\varphi)/\Delta$, $p = 1, \dots, k$, лежат вне Γ . Если хотя бы один полюс лежит в Γ , то $\sum M_\Gamma^{(p)}(\varphi)$, и тем более $\|\varphi\|_\Gamma$, принимает значение ∞ . В этом случае неравенство (4) выполняется тривиальным образом.

1.2. Обозначения для сокращения записи. Для q -множества $\mathcal{D} = (D_1, \dots, D_q)$ символы $h_{\mathcal{D}}(\lambda)$, $\exp h_{\mathcal{D}}(\lambda)$ обозначают векторы

$$\begin{aligned} h_{\mathcal{D}}(\lambda) &:= (h_{D_1}(\lambda), \dots, h_{D_q}(\lambda)), \\ \exp h_{\mathcal{D}}(\lambda) &:= (\exp h_{D_1}(\lambda), \dots, \exp h_{D_q}(\lambda)), \end{aligned}$$

где $h_{D_i}(\lambda) = \sup_{z \in D_i} \text{Re } \lambda z$ — опорная функция (в смысле комплексного анализа) множества D_i . В соответствии с обозначениями 2° , 3° , введенными в п. 1.1, для целой q -функции $u(\lambda) = (u_1(\lambda), \dots, u_q(\lambda))$ и q -компакта $K = (K_1, \dots, K_q)$ неравенство

$$|u(\lambda)| \leq \text{const} \exp h_K(\lambda)$$

равносильно q неравенствам

$$|u_1(\lambda)| \leq \text{const} \exp h_{K_1}(\lambda), \dots, |u_q(\lambda)| \leq \text{const} \exp h_{K_q}(\lambda).$$

Рассмотрим последовательность

$$\{u^{(1n)}, \dots, u^{(kn)}\}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (18)$$

систем $u^{(1n)}, \dots, u^{(kn)}$ целых q -функций. Пусть $\mathcal{D}$ — q -компакт. Последовательность (18) $\mathcal{D}$ -ограничена, если равномерно по n выполняются неравенства

$$|u^{(kn)}(\lambda)| \leq \text{const} \exp h_{\mathcal{D}}(\lambda), \quad n = 1, 2, \dots \quad (19)$$

Рассмотрим возрастающую последовательность областей $K_1 \subset K_2 \subset \dots$ с гладкими границами $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots$, исчерпывающую $\mathbb{C}$. Обозначим $l(\Gamma_n)$ — длину Γ_n , $\rho(\Gamma_n)$ — расстояние от Γ_n до начала, т.е. $\rho(\Gamma_n) = \min\{|z| : z \in \Gamma_n\}$. Систему контуров $\{\Gamma_n\}$ назовем *правильной*, если

$$\ln l(\Gamma_n) = o(\rho(\Gamma_n)), \quad n \rightarrow \infty. \quad (20)$$

Пусть $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_q)$ — выпуклая q -область. Последовательность (18) *допускает ω -оценку вдоль системы контуров $\{\Gamma_n\}$* , если для каждого $n = 1, 2, \dots$ существует набор чисел $i_1^{(n)}, \dots, i_k^{(n)}$, $1 \leq i_1^{(n)} < \dots < i_k^{(n)} \leq q$, такой, что

$$\begin{aligned} \max_{p=1, \dots, k} \left| \frac{\Delta_{ip}^{(n)}(\lambda)}{\Delta^{(n)}(\lambda)} \right| &\leq e^{-h_{\omega_i}(\lambda) + \varepsilon_n |\lambda|}, \\ \lambda &\in \Gamma_n, \quad i = i_1^{(n)}, \dots, i_q^{(n)}, \end{aligned} \quad (21)$$

где ε_n , $n = 1, 2, \dots$, — последовательность положительных чисел, стремящаяся к нулю,

$$\Delta^{(n)} = \begin{vmatrix} u_{i_1}^{(1n)} & \dots & u_{i_1}^{(kn)} \\ \dots & \dots & \dots \\ u_{i_k}^{(1n)} & \dots & u_{i_k}^{(kn)} \end{vmatrix},$$

$\Delta_{ip}^{(n)}$ — алгебраическое дополнение элемента в i -й строке и p -м столбце определителя $\Delta^{(n)}$ (строки нумеруются числами $i_1^{(n)}, \dots, i_k^{(n)}$). Из неравенства (21) следует, что $\Delta^{(n)}(\lambda) \neq 0$ и, следовательно, система (18) независима.

1.3. Последовательность интерполяторов. Пусть $G = (G_1, \dots, G_q)$ — открытое q -множество, $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_q)$ — выпуклая q -область, $\mathcal{D} = (D_1, \dots, D_q)$ — выпуклый q -компакт, $\omega \subset \mathcal{D}$, $P = P(G)$, I — замкнутый подмодуль в P ранга k , $I_0(\omega)$ — мероморфное расширение I в $P(\omega)$, т.е. совокупность элементов u из $P(\omega)$, представимых в виде конечных линейных комбинаций

$$u = \sum m_i u^{(i)}, \quad u^{(i)} \in I, \quad m_i \in \mathcal{M}.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.2. Пусть I содержит последовательность (18), $\mathcal{D}$ -ограниченную и допускающую ω -оценку вдоль правильной системы контуров $\{\Gamma_n\}$, $n = 1, 2, \dots$,

$$\text{Int}_{\Gamma_n}^{(n)} \varphi = \sum_{p=1}^k \left(\Gamma_{\text{л}\Gamma_n} \frac{\Delta_p^{(n)}(\varphi)}{\Delta^{(n)}} \right) u^{(pn)}$$

– интерполятор, построенный по системе $u^{(1n)}, \dots, u^{(kn)}$ и строкам с номерами $i_1^{(n)}, \dots, i_k^{(n)}$. Тогда для любого элемента $\varphi \in I_0(\omega)$ существуют ограниченное множество $B \subset P$ и число $\varepsilon > 0$ такие, что

$$\varphi - \text{Int}_{\Gamma_n}^{(n)} \varphi \in \text{const } e^{-\varepsilon \rho(\Gamma_n)} B, \quad n = 1, 2, \dots$$

Доказательство использует следующий факт об ограниченных множествах в P . Пусть $\mathcal{D} = (D_1, \dots, D_q)$ – выпуклый q -компакт,

$$B(\mathcal{D}) = \{ \varphi \in O^q(\mathbb{C}) : \ln |\varphi(\lambda)| \leq h_{\mathcal{D}}(\lambda) \}.$$

ЛЕММА. Если $\mathcal{D} \subset G$, то множество $B(\mathcal{D})$ ограничено в P .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала предположим, что G – выпуклая q -область. Множество $B(\mathcal{D})$ представляется в виде декартова произведения

$$B(\mathcal{D}) = B(D_1) \times \dots \times B(D_q), \quad (22)$$

где

$$B(D_i) = \{ \varphi \in O^q(\mathbb{C}) : \ln |\varphi(\lambda)| \leq h_{D_i}(\lambda) \}.$$

Известно (см., например, [12, § 3]), что $B(D_i)$ ограничено в $P(G_i)$, т.е. поглощается любой окрестностью нуля в $P(G_i)$ (см., например, [5, гл. III]). Значит, произведение (22) поглощается произведением

$$V_1 \times \dots \times V_q, \quad (23)$$

где V_i – окрестность нуля в $P(G_i)$. Отсюда следует, что $B(\mathcal{D})$ поглощается любой окрестностью нуля $V \subset P$, так как множества вида (23) образуют фундаментальную систему окрестностей нуля в топологическом произведении

$$P = P(G_1) \times \dots \times P(G_q).$$

Таким образом, для случая выпуклой q -области лемма доказана.

Рассмотрим теперь общий случай. По условию $\mathcal{D} \subset G$. Из топологических соображений следует, что существует выпуклая q -область G' , для которой $\mathcal{D} \subset G' \subset G$. По доказанному множество $B(\mathcal{D})$ ограничено в $P(G')$. Вложение $G' \subset G$ влечет непрерывные вложения $H(G) \subset H(G')$, $H^*(G') \subset H^*(G)$ и $P(G') \subset P(G)$. В силу последнего непрерывного вложения каждое множество, ограниченное в $P(G')$, является ограниченным в $P(G)$. Значит, $B(\mathcal{D})$ ограничено в $P(G)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 1.2. Пусть $\varphi \in I_0(\omega)$. Положив в предложении 1.1 $r = 1$, получим неравенство

$$|\varphi(\lambda) - (\text{Int}_{\Gamma_n}^{(n)} \varphi)(\lambda)| \leq \max_{\xi \in D_1(\lambda)} |\varphi_{K_n}(\lambda)| + \frac{3l(\Gamma_n)}{\pi} \|\varphi\|_{\Gamma_n}^{(n)} U^{(n)}(\lambda), \quad (24)$$

где

$$\begin{aligned} \|\varphi\|_{\Gamma}^{(n)} &= \sum_{\substack{i=i_1^{(n)}, \dots, i_k^{(n)} \\ p=1, \dots, k}} \max_{\Gamma_n} \left| \frac{\Delta_{ip}^{(n)}(\xi)}{\Delta^{(n)}(\xi)} \varphi_i(\xi) \right|, \\ U^{(n)}(\lambda) &= \max_{p=1, \dots, k} \max_{\xi \in D_1(\lambda)} |u^{(pn)}(\xi)|. \end{aligned}$$

Оценим правую часть (24). Поскольку по условию $\varphi \in P(\omega)$, существует выпуклый q -компакт $K \Subset \omega$ такой, что

$$|\varphi(\lambda)| \leq \text{const} \exp h_K(\lambda).$$

Существует достаточно малое $\varepsilon > 0$, для которого

$$h_K(\lambda) \leq h_\omega(\lambda) - 3\varepsilon|\lambda|.$$

Из вышеизложенного следует

$$|\varphi(\lambda)| \leq \text{const} \exp(h_\omega(\lambda) - 3\varepsilon|\lambda|). \quad (25)$$

Обозначим $\chi_{\mathbb{C} \setminus K_n}$ характеристическую функцию множества $\mathbb{C} \setminus K_n$. Теперь, учитывая (25), оценим $|\varphi_{K_n}(\lambda)|$:

$$|\varphi_{K_n}(\lambda)| = \chi_{\mathbb{C} \setminus K_n}(\lambda) |\varphi(\lambda)| \leq \text{const} \chi_{\mathbb{C} \setminus K_n}(\lambda) \exp(h_\omega(\lambda) - 3\varepsilon|\lambda|).$$

Так как

$$\chi_{\mathbb{C} \setminus K_n}(\lambda) e^{-3\varepsilon|\lambda|} \leq e^{-3\varepsilon\rho(\Gamma_n)},$$

то, продолжив оценку, получим

$$|\varphi_{K_n}(\lambda)| \leq \text{const} e^{-3\varepsilon\rho(\Gamma_n)} \exp h_\omega(\lambda). \quad (26)$$

Оценим $\|\varphi\|_{\Gamma_n}^{(n)}$. В силу ω -оценки существует последовательность $\varepsilon_n \rightarrow 0$ такая, что выполняется неравенство

$$\begin{aligned} \left| \frac{\Delta_{ip}^{(n)}(\lambda)}{\Delta^{(n)}(\lambda)} \right| &\leq \exp(-h_{\omega_i}(\lambda) + \varepsilon_n|\lambda|), \quad \lambda \in \Gamma_n, \\ i &= i_1^{(n)}, \dots, i_k^{(n)}, \quad p = 1, \dots, k, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (27)$$

Далее, неравенство (25) равносильно q неравенствам

$$|\varphi_i(\lambda)| \leq \text{const} \exp(h_{\omega_i}(\lambda) - 3\varepsilon|\lambda|), \quad i = 1, \dots, q,$$

где ω_i — i -я компонента ω . Отсюда и из (27) получаем

$$\begin{aligned} \sup_{\Gamma_n} \left| \frac{\Delta_{ip}^{(n)}(\xi)}{\Delta^{(n)}(\xi)} \varphi_i(\xi) \right| &\leq \text{const} \sup_{\Gamma_n} \exp(-h_{\omega_i}(\xi) + h_{\omega_i}(\xi) - 3\varepsilon|\xi| + \varepsilon_n|\xi|) \\ &\leq \text{const} \sup_{\Gamma_n} \exp(\varepsilon_n|\xi| - 3\varepsilon|\xi|) \leq \text{const} \exp(-2\varepsilon\rho(\Gamma_n)), \\ i &= i_1^{(n)}, \dots, i_k^{(n)}, \quad p = 1, \dots, k, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Из этих неравенств следует

$$\|\varphi\|_{\Gamma_n}^{(n)} \leq \text{const} \exp(-2\varepsilon\rho(\Gamma_n)). \quad (28)$$

Оценим $U^{(n)}(\lambda)$. Воспользуемся тем, что последовательность (18) $\mathcal{D}$ -ограничена сверху, т.е. равномерно по n выполняются неравенства

$$|u^{(pn)}(\lambda)| \leq \text{const} \exp h_{\mathcal{D}}(\lambda), \quad p = 1, \dots, k.$$

Имеем

$$\begin{aligned} \max_{\xi \in D_1(\lambda)} |u^{(pn)}(\xi)| &\leq \text{const} \exp\left(\max_{\xi \in D_1(\lambda)} h_{\mathcal{D}}(\xi)\right) \\ &\leq \text{const} \exp(h_{\mathcal{D}}(\lambda) + c), \end{aligned}$$

где

$$c = \max_i \max_{|\xi| \leq 1} h_{D_i}(\xi), \quad i = 1, \dots, q.$$

Следовательно,

$$U^{(n)}(\lambda) \leq \text{const} \exp h_{\mathcal{D}}(\lambda), \quad n = 1, 2, \dots \quad (29)$$

Поскольку $\omega \subset \mathcal{D}$, справедливо неравенство

$$h_{\omega}(\lambda) \leq h_{\mathcal{D}}(\lambda).$$

Используя неравенства (26), (28), (29), а также условие (20), из (24) получаем

$$\begin{aligned} |\varphi(\lambda) - (\text{Int}_{\Gamma_n}^{(n)} \varphi)(\lambda)| &\leq \text{const} e^{-2\varepsilon\rho(\Gamma_n) + o(\rho(\Gamma_n))} \exp h_{\mathcal{D}}(\lambda) \\ &\leq \text{const} e^{-\varepsilon\rho(\Gamma_n)} \exp h_{\mathcal{D}}(\lambda). \end{aligned}$$

Полученное неравенство равносильно включению

$$\varphi - \text{Int}_{K_n}^{(n)} \varphi \in \text{const} e^{-\varepsilon\rho(\Gamma_n)} B, \quad n = 1, 2, \dots,$$

где $B = B(\mathcal{D})$. Остается отметить, что по лемме B — ограниченное множество в P .

§ 2. Фундаментальный принцип для q -множеств Рунге

В этом параграфе формулируется фундаментальный принцип для инвариантного подпространства, аннуляторный подмодуль которого имеет ранг q . Формулировка использует терминологию, относящуюся к последовательностям систем, которая была введена в п. 1.2. Чтобы придать ясность изложению, уместно для интересующего нас случая $k = q$ воспроизвести ее снова.

2.1. Обозначения и терминология. Пусть

$$K_1 \Subset K_2 \Subset \dots$$

— возрастающая последовательность ограниченных областей в $\mathbb{C}$ с гладкими границами $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots$. На протяжении этого параграфа будем предполагать, что система контуров $\{\Gamma_n\}$ фиксирована и является *правильной*, т.е.

$$\ln l(\Gamma_n) = o(\rho(\Gamma_n)), \quad n \rightarrow \infty,$$

где $l(\Gamma_n)$ — длина Γ_n , $\rho(\Gamma_n) = \min\{|z| : z \in \Gamma_n\}$. Рассмотрим последовательность

$$\{u^{(1n)}, \dots, u^{(qn)}\}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (1)$$

систем $u^{(1n)}, \dots, u^{(qn)} \in O^q(\mathbb{C})$. Пусть $\mathcal{D} = (D_1, \dots, D_q)$ — выпуклый q -компакт. Последовательность (1) *$\mathcal{D}$ -ограничена*, если равномерно по n выполняется неравенство

$$|u^{(kn)}(\lambda)| \leq \text{const} \exp h_{\mathcal{D}}(\lambda).$$

Пусть $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_q)$ — выпуклая q -область. Последовательность (1) допускает ω -оценку вдоль системы контуров $\{\Gamma_n\}$, если

$$\max_{p=1, \dots, q} \left| \frac{\Delta_{ip}^{(n)}(\lambda)}{\Delta^{(n)}(\lambda)} \right| \leq e^{-h_{\omega_i}(\lambda) + \varepsilon_n |\lambda|}, \quad (2)$$

$$\lambda \in \Gamma_n, \quad n = 1, 2, \dots, \quad i = 1, \dots, q.$$

Здесь ε_n , $n = 1, 2, \dots$, — последовательность положительных чисел, стремящаяся к нулю,

$$\Delta^{(n)} = \begin{vmatrix} u_1^{(1n)} & \dots & u_1^{(qn)} \\ \dots & \dots & \dots \\ u_q^{(1n)} & \dots & u_q^{(qn)} \end{vmatrix},$$

$\Delta_{ip}^{(n)}$ — алгебраическое дополнение элемента в i -й строке и p -м столбце определителя $\Delta^{(n)}$. Из неравенства (2) следует, что $\Delta^{(n)}(\lambda) \neq 0$ и, следовательно, система (1) является независимой. Если $q = 1$, то последовательность (1) превращается в обычную последовательность $\{u^{(n)}\}$, $n = 1, 2, \dots$, $\Delta^{(n)} = u^{(n)}$, $\Delta_{ip} = 1$ и условие (2) принимает вид

$$\ln |u^{(n)}(\lambda)| \geq h_{\omega}(\lambda) + o(|\lambda|),$$

$$\lambda \in \Gamma_n, \quad n = 1, 2, \dots$$

Представляет интерес случай, когда последовательность (1) состоит из одной и той же повторяющейся системы

$$u^{(1)}, \dots, u^{(q)}, \quad (3)$$

т.е. $u^{(1n)} = u^{(1)}, \dots, u^{(qn)} = u^{(q)}$. Тогда условие (2) принимает вид

$$\ln \left| \frac{\Delta_{ip}(\lambda)}{\Delta(\lambda)} \right| + h_{\omega_i}(\lambda) \leq o(|\lambda|), \quad (4)$$

$$\lambda \rightarrow \infty, \quad \lambda \in \bigcup \Gamma_n, \quad i, p = 1, \dots, q.$$

В частности, если $q = 1$, то система (3) состоит из одной функции u , и условие (4) превращается в стандартную оценку снизу (см. [3], [4]):

$$\ln |u(\lambda)| \geq h_{\omega}(\lambda) + o(|\lambda|),$$

$$\lambda \rightarrow \infty, \quad \lambda \in \bigcup \Gamma_n.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. Пусть последовательность (1) одновременно $\mathcal{D}$ -ограничена и допускает ω -оценку вдоль системы контуров $\{\Gamma_n\}$. Тогда $\omega \subset \mathcal{D}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По условию существует последовательность положительных чисел ε_n , стремящаяся к нулю, для которой выполняются неравенства (2). По известному правилу разложения определителя по строкам имеем

$$\sum_{p=1}^q \frac{\Delta_{ip}^{(n)}}{\Delta^{(n)}} u_i^{(pn)} = 1, \quad i = 1, \dots, q,$$

откуда

$$\max_p \left| \frac{\Delta_{ip}^{(n)}(\lambda)}{\Delta^{(n)}(\lambda)} \right| \max_p |u_i^{(pn)}(\lambda)| \geq \frac{1}{q}.$$

Используя оценку (2) и $\mathcal{D}$ -ограниченность последовательности (1), получаем

$$\text{const } e^{-h_{\omega_i}(\lambda) + o(|\lambda|)} e^{h_{D_i}(\lambda)} \geq \frac{1}{q},$$

$$\lambda \rightarrow \infty, \quad \lambda \in \bigcup \Gamma_n,$$

что возможно только при условии $\omega_i \subset D_i, i = 1, \dots, q$.

Пусть Ω – открытое q -множество. Рассмотрим последовательность элементов $f_n, n = 1, \dots$, из $H(\Omega)$. Последовательность f_n сходится к элементу $f \in H(\Omega)$ равномерно внутри Ω , если эта последовательность сходится к f в топологии $H(\Omega)$, т.е. равномерно на каждом q -компакте $K \subset \Omega$ [1, п. 2.3]. В дальнейшем мы будем иметь дело с равномерной сходимостью внутри Ω , сопровождаемой оценкой для остаточного члена $R_n = f - f_n$. Имея в виду, что система контуров $\{\Gamma_n\}$ раз и навсегда зафиксирована, дадим следующее определение. Последовательность f_n сходится к f экспоненциально внутри Ω , если для любой окрестности нуля $V \subset H(\Omega)$ существует $\varepsilon > 0$ такое, что

$$f - f_n \in \text{const } e^{-\varepsilon \rho(\Gamma_n)} V, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (5)$$

где константа не зависит от n . Такую сходимость будем обозначать символом $\xrightarrow[\Omega]$.

2.2. Формулировка фундаментального принципа. Пусть G – q -многообразие Рунге, W – инвариантное подпространство в $H(G)$ с аннуляторным подмодулем I , Λ – спектральное множество W [2, п. 2.7]. Рассмотрим семейства $\{\omega^{(\alpha)}\}$, $\{\mathcal{D}^{(\alpha)}\}$, $\alpha \in A$, выпуклых q -областей $\omega^{(\alpha)}$ и выпуклых q -компактов $\mathcal{D}^{(\alpha)}$, причем $\omega^{(\alpha)}, \mathcal{D}^{(\alpha)} \subset G$.

ТЕОРЕМА 2.2 (фундаментальный принцип). *Предположим, что выполняются следующие условия:*

- 1°. *подмодуль I является квазиустойчивым;*
- 2°. *для любого $\alpha \in A$ подмодуль I содержит последовательность $\{u^{(1n\alpha)}, \dots, u^{(qn\alpha)}\}$, $n = 1, 2, \dots$, $\mathcal{D}^{(\alpha)}$ -ограниченную и допускающую $\omega^{(\alpha)}$ -оценку вдоль системы контуров $\{\Gamma_n\}$, $n = 1, 2, \dots$.*

Тогда для любого $f \in W$

$$\sum_{\lambda_i \in \Gamma_n} p_{\lambda_i}(f) \xrightarrow{\Omega} f, \quad n \rightarrow \infty, \quad (6)$$

где

$$\Omega = \bigcup_{\alpha \in A} \omega^{(\alpha)}.$$

Доказательство этой теоремы требует подготовки, которую мы проведем в пп. 2.3–2.5.

2.3. Экспоненциальная сходимость. Экспоненциальная сходимость внутри открытого q -многообразия проявляет устойчивость относительно линейных комбинаций: *если $f_n \xrightarrow{\Omega} f$, $f'_n \xrightarrow{\Omega} f$, $a, a' \in \mathbb{C}$, то $af_n + a'f'_n \xrightarrow{\Omega} af + a'f'$.* Также экспоненциальная сходимость сохраняется при сужении области: *если $f_n \xrightarrow{\Omega} f$ и $\omega \subset \Omega$, то $f_n \xrightarrow{\omega} f$.* Эти утверждения достаточно простые и не нуждаются в доказательствах. Технически более сложно обосновывается сохранение экспоненциальной сходимости при переходе к объединению открытых q -множеств.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3. *Пусть $\{\Omega^{(\alpha)}\}$, $\alpha \in A$, – семейство открытых q -множеств, $\Omega \in \bigcup \Omega^{(\alpha)}$, $f, f_n \in H(\Omega)$, $n = 1, 2, \dots$. Тогда если $f_n \xrightarrow{\Omega^{(\alpha)}} f \quad \forall \alpha \in A$, то $f_n \xrightarrow{\Omega} f$.*

ЛЕММА. *Для любого q -компакта $K \subset \Omega$ существует конечное число q -компактов $K^{(1)}, \dots, K^{(n)}$ таких, что $K \subset \bigcup_{i=1}^n K^{(i)}$ и $K^{(i)} \subset \Omega^{(\alpha_i)}$, $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in A$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Фиксируем произвольное $i = 1, \dots, q$. Пусть $K_i, \Omega_i^{(\alpha)}$ – i -е компоненты $K, \Omega^{(\alpha)}$. Система открытых множеств $\{\Omega_i^{(\alpha)}\}$, $\alpha \in A$, покрывает K_i . Поэтому существует конечное подмножество $A_i \subset A$ и семейство компактов $\{K_{i\alpha}\}$, $\alpha \in A_i$ [6, гл. V, п. 26], такие, что

$$K_i \subset \bigcup K_{i\alpha}, \quad \alpha \in A_i, \quad K_{i\alpha} \subset \Omega_i^{(\alpha)}.$$

Пусть $K^{(\alpha)}$ — q -компакт, принадлежащий $\Omega^{(\alpha)}$, и такой, что $K_i^{(\alpha)} = K_{i\alpha}$. Семейство q -компактов $\tau_i = \{K^{(\alpha)}\}$, $\alpha \in A_i$, обладает следующими свойствами:

- 1) объединение i -х компонент этих компактов содержит K_i ;
- 2) $K^{(\alpha)} \subset \Omega^{(\alpha)} \quad \forall \alpha \in A_i$.

Такого рода семейство q -компактов τ_i можем построить для любого $i = 1, \dots, q$. Рассмотрим объединение $\tau = \bigcup_{i=1}^q \tau_i$. Из построения τ следует, что объединение i -х компонент q -компактов из τ содержит K_i , $i = 1, \dots, q$, и для любого компакта $K' \in \tau$ существует $\alpha \in A$ такое, что $K' \subset \Omega^{(\alpha)}$. Чтобы завершить доказательство, осталось приписать компактам из τ подходящие надстрочные индексы.

2.4. Доказательство предложения 2.3. Пусть последовательность $\{f_n\}$ сходится к f экспоненциально внутри $\Omega^{(\alpha)}$ для любого $\alpha \in A$. Нужно показать, что экспоненциальная сходимость распространяется внутрь Ω . Пусть $K = (K_1, \dots, K_q)$ — q -компакт в Ω . Рассмотрим окрестность нуля в $H(\Omega)$ вида

$$V_K = \left\{ f = (f_1, \dots, f_q) \in H(\Omega) : \max_{K_i} |f_i| \leq 1, i = 1, \dots, q \right\}.$$

Семейство множеств вида $\{\delta V_K\}$, где $\delta > 0$, а K — q -компакт в Ω , образует фундаментальную систему окрестностей нуля в $H(\Omega)$. Поэтому достаточно доказать утверждение: *для любого q -компакта $K \subset \Omega$ существует $\varepsilon > 0$ такое, что выполняются включения (5) с $V = \delta V_K$* . Фиксируем q -компакт $K \subset \Omega$. Семейство открытых q -множеств $\{\Omega^{(\alpha)}\}$, $\alpha \in A$, покрывает q -компакт K . По лемме существуют q -компакты

$$K^{(1)} \subset \Omega^{(\alpha_1)}, \dots, K^{(N)} \subset \Omega^{(\alpha_N)} \quad (7)$$

такие, что

$$K \subset \bigcup_{j=1}^N K^{(j)}. \quad (8)$$

Рассмотрим множества

$$V_{K^{(j)}} = \left\{ f \in H(\Omega) : \max_{K_i^{(j)}} |f_i| \leq 1, i = 1, \dots, q \right\},$$

$$V_{K^{(j)}}^{(\alpha_j)} = \left\{ f \in H(\Omega^{(\alpha_j)}) : \max_{K_i^{(j)}} |f_i| \leq 1, i = 1, \dots, q \right\}.$$

Очевидно, что

$$V_{K^{(j)}} = V_{K^{(j)}}^{(\alpha_j)} \cap H(\Omega). \quad (9)$$

Из (8) следует

$$\delta V_K \supset \bigcap_{j=1}^N \delta V_{K^{(j)}}.$$

Далее, в силу вложений (7) множество $\delta V_{K^{(j)}}^{(\alpha_j)}$ является окрестностью нуля в $P(\Omega^{(\alpha_j)})$. По условию $f_n \xrightarrow[\omega(\alpha)]{} f$ для любого $\alpha \in A$, в частности, для $\alpha = \alpha^{(1)}, \dots, \alpha^{(N)}$. Поэтому существуют $\varepsilon_j > 0$, $\mu_j < \infty$ такие, что

$$f - f_n \in \mu_j e^{-\varepsilon_j \rho(\Gamma_n)} V_{K^{(j)}}^{(\alpha_j)}, \quad j = 1, \dots, N.$$

Однако по условию $f - f_n \in H(\Omega)$, поэтому в силу (9)

$$f - f_n \in \mu_j e^{-\varepsilon_j \rho(\Gamma_n)} \delta V_{K^{(j)}}, \quad j = 1, \dots, N.$$

Пусть $\varepsilon = \min \varepsilon_i$, $\mu = \max \mu_i$. Тогда

$$f - f_n \in \mu e^{-\varepsilon \rho(\Gamma_n)} \delta V_{K^{(j)}}, \quad j = 1, \dots, N,$$

и, следовательно,

$$f - f_n \in \mu e^{-\varepsilon \rho(\Gamma_n)} \bigcap_{j=1}^N \delta V_{K^{(j)}} \subset \mu e^{-\varepsilon \rho(\Gamma_n)} \delta V_K.$$

Тем самым сходимость (6) доказана.

2.5. Сходимость последовательности операторов. Рассмотрим последовательность (1) независимых систем $u^{(1n)}, \dots, u^{(qn)} \in P$. Если эта последовательность $\mathcal{D}$ -ограничена, где $\mathcal{D}$ – выпуклый q -компакт, принадлежащий G , то, используя известную теорему Поля [7, гл. 1], нетрудно показать, что для любой промежуточной выпуклой q -области, $G^0, \mathcal{D} \subset G^0 \subset G$, все члены последовательности (1) принадлежат $P(G^0)$. Это означает, что каждая система $u^{(1n)}, \dots, u^{(qn)}$, входящая в последовательность (1), является допустимой [2, п. 3.2]. По этой системе можно строить интерполятор: $\text{Int}_{\Gamma_n}^{(n)}: P \rightarrow P$ [2, п. 3.4] и оператор $p^{(n)}: H \rightarrow H$, прямой по отношению к $\text{Int}_{\Gamma^{(n)}}^{(n)}$ [2, п. 1.3].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.4. Пусть $\omega, \mathcal{D}$ – выпуклые q -компа́кты, $\omega, \mathcal{D} \subset G$. Предположим, что последовательность (1) $\mathcal{D}$ -ограничена и допускает ω -оценку вдоль системы контуров $\{\Gamma_n\}$. Тогда для любой $f \in H$

$$p^{(n)}(f) \xrightarrow[\omega]{} f.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем $f \in H$. Оператор $\text{Int}_{\Gamma_n}^{(n)}$ является дуальным по отношению к $p^{(n)}$, поэтому в силу соотношения двойственности [2, предложение 1.2]

$$\langle S, p^{(n)}(f) - f \rangle = \langle f^\odot, \text{Int}_{\Gamma_n}^{(n)} \varphi - \varphi \rangle. \quad (10)$$

По предложению 2.1 выполняется вложение $\omega \subset \mathcal{D}$. Таким образом, по отношению к q -множествам ω , $\mathcal{D}$, G последовательность (1) удовлетворяет условиям предложения 1.2. Согласно утверждению этого предложения (в случае $k = q$) для любого элемента $\varphi \in P(\omega)$ существуют ограниченное множество $B \subset P$ и число $\delta > 0$ такие, что

$$\text{Int}_{\Gamma_n}^{(n)} \varphi - \varphi \in \text{const } e^{-\delta \rho(\Gamma_n)} B. \quad (11)$$

Поскольку $f^\odot$ – линейный непрерывный функционал на P , имеем

$$\sup_{\psi \in B} |\langle f^\odot, \psi \rangle| = M < \infty.$$

Отсюда и из (11) следует

$$|\langle f^\odot, \text{Int}_{\Gamma_n}^{(n)} \varphi - \varphi \rangle| \leq \text{const } e^{-\delta \rho(\Gamma_n)} M.$$

Принимая во внимание (10), заключаем, что для любого линейного непрерывного функционала S на $H(\omega)$ существует $\delta > 0$ такое, что

$$|\langle S, p^{(n)}(f) - f \rangle| \leq \text{const } e^{-\delta \rho(\Gamma_n)}. \quad (12)$$

Пусть $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \dots$ – произвольная убывающая последовательность чисел, стремящаяся к нулю. Из (12) следует, что для любого функционала $S \in H^*(\omega)$ существует константа $c = c(S) < \infty$ такая, что

$$|\langle S, p^{(n)}(f) - f \rangle| \leq c e^{-\varepsilon_n \rho(\Gamma_n)}.$$

Это означает, что последовательность

$$(p^{(n)}(f) - f) e^{\varepsilon_n \rho(\Gamma_n)}$$

является слабо ограниченной в $H(\omega)$. Известно, что слабо ограниченные множества в локально выпуклом пространстве являются и сильно ограниченными [5, гл. III], т.е. поглощаются окрестностями нуля. Поэтому для любой окрестности нуля $V \subset H(\omega)$ существует константа $C < \infty$ такая, что

$$(p^{(n)}(f) - f) e^{\varepsilon_n \rho(\Gamma_n)} \in CV$$

или, что то же самое,

$$(p^{(n)}(f) - f) \in C e^{-\varepsilon_n \rho(\Gamma_n)} V. \quad (13)$$

В качестве V возьмем абсолютно выпуклую и замкнутую окрестность нуля в $H(\omega)$. Пусть p_V – соответствующий функционал Минковского (см. [8, гл. IX]). Включение (13) эквивалентно неравенству

$$p_V(p^{(n)}(f) - f) \leq C e^{-\varepsilon_n \rho(\Gamma_n)}.$$

Отсюда, поскольку константа $C < \infty$ существует для любой сколь угодно медленно убывающей последовательности $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \dots > 0$, следует, что существуют $\varepsilon > 0$ и $l < \infty$ такие, что

$$p_V(p^{(n)}(f) - f) \leq l e^{-\varepsilon \rho(\Gamma_n)}.$$

Так как V — замкнутое абсолютно выпуклое множество, это неравенство эквивалентно включению

$$p^{(n)}(f) - f \in l e^{-\varepsilon \rho(\Gamma_n)} V.$$

Остается напомнить, что в локально выпуклом пространстве замкнутые абсолютно выпуклые окрестности нуля образуют базис окрестностей нуля [5, гл. I, п. 3].

При $q = 1$ предложение 2.4 содержит результат Леонтьева [4, теорема 1].

2.6. Доказательство теоремы 2.2. Зафиксируем $\alpha \in A$. По условию подмодуль I содержит последовательность

$$\{u^{(1n\alpha)}, \dots, u^{(qn\alpha)}\}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (14)$$

$\mathcal{D}^{(\alpha)}$ -ограниченную и допускающую $\omega^{(\alpha)}$ -оценку вдоль системы контуров $\{\Gamma_n\}$.

Рассмотрим интерполятор $\text{Int}_{\Gamma_n}^{(n\alpha)}: P \rightarrow P$, построенный по системе элементов $u^{(1n\alpha)}, \dots, u^{(qn\alpha)}$ [2, п. 3.4]. Так как G — q -множество Рунге, то существует оператор $p^{(n\alpha)}: H \rightarrow H$, прямой по отношению к $\text{Int}_{\Gamma_n}^{(n\alpha)}$ [2, п. 1.3]. Фиксируем произвольный элемент $f \in W$. При фиксированном $\alpha \in A$ последовательность (14) удовлетворяет условиям предложения 2.4. Поэтому последовательность

$$\{p^{(n\alpha)}(f)\}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

сходится к f экспоненциально внутри $\omega^{(\alpha)}$. По предложению 5.1 [2] сужение оператора $p^{(n\alpha)}$ на W совпадает с проектором

$$p_{\Gamma_n} = \sum_{\lambda_i \in \Gamma_n} p_{\lambda_i}.$$

При этом в силу того, что подмодуль $I = \text{An } W$ является квазиустойчивым, этот проектор является единственным [2, предложение 4.5]. Таким образом, поскольку $f \in W$, имеем $p^{(n\alpha)}(f) = p_{\Gamma_n}(f) \quad \forall \alpha \in A$. Это значит, что последовательность

$$p_{\Gamma_n}(f) = \sum_{\lambda_i \in \Gamma_n} p_{\lambda_i}(f)$$

сходится к f экспоненциально внутри $\omega^{(\alpha)}$ для любого $\alpha \in A$. По предложению 2.3 эта сходимость распространяется на объединение Ω областей $\omega^{(\alpha)}$, $\alpha \in A$.

§ 3. Фундаментальный принцип для выпуклой q -области

3.1. Геометрическая разность q -множеств. Пусть $K = (K_1, \dots, K_q)$ – q -множество, $A \subset \mathbb{C}$. Множество

$$K + A := (K_1 + A, \dots, K_q + A)$$

назовем A -сдвигом q -множества K . В частности, если $a \in \mathbb{C}$, то

$$K + a := (K_1 + a, \dots, K_q + a).$$

Пусть K, K' – q -множества. Множество

$$K' \ast K := \{a \in \mathbb{C} : K + a \subset K'\}$$

называется *геометрической разностью q -множеств K' и K* . Очевидно,

$$(K' \ast K) + K \subset K'.$$

В дальнейшем $(K' \ast K)_0$ обозначает связную компоненту $K' \ast K$, содержащую начало. Свойства геометрической разности выпуклых множеств в $\mathbb{R}^n$ исследованы в [9].

3.2. Формулировка основного результата. Пусть G, ω – выпуклые q -области, $\mathcal{D}$ – выпуклый q -компакт и $\omega, \mathcal{D} \subset G$. Далее, пусть W – инвариантное подпространство в $H(G)$, $I = \text{An } W$, $\text{Rank } I = q$, $\Lambda = \{\lambda_i\}$ – спектральное множество подпространства W . Символ $\xrightarrow[\Omega]$ обозначает экспоненциальную сходимость внутри Ω , описанную в п. 2.1.

ТЕОРЕМА 3.1. *Предположим, что выполняются следующие условия:*

- 1°. *подмодуль I является устойчивым;*
- 2°. *подмодуль I содержит последовательность*

$$\{u^{(1n)}, \dots, u^{(qn)}\}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (1)$$

$\mathcal{D}$ -ограниченную и допускающую ω -оценку вдоль правильной системы контуров $\{\Gamma_n\}$.

Тогда если элемент $F \in W$ допускает аналитическое продолжение в q -область $G' \supset G$, то

$$\sum_{\lambda_i \in \Gamma_n} p_{\lambda_i}(F) \xrightarrow[\Omega]{} F, \quad n \rightarrow \infty, \quad (2)$$

где $\Omega = (G' \ast \mathcal{D})_0 + \omega$, p_{λ_i} , $i = 1, 2, \dots$, – элементарные проекторы в G .

Теорема 3.1 выводится из теоремы 2.2. Однако этот вывод требует значительной подготовки.

3.3. Инвариантное подпространство продолжений. Пусть G, G' – q -многожества Рунге и $G \subset G'$, W – инвариантное подпространство в $H(G)$, $I = \text{An } W$. Рассмотрим совокупность W' элементов f из $H(G')$, сужения $f|_G$ которых на G принадлежат W . Легко проверить, что W' является инвариантным подпространством в $H(G')$. Пусть $I' = \text{An } W'$. Возникает вопрос, как связаны I и I' .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2. *Подмодуль I' есть замыкание подмодуля I в $P(G')$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим инвариантное подпространство $\widehat{W} \subset H(G')$. Обозначим $\widehat{W}|_G$ совокупность сужений элементов из $\widehat{W}$ на G . Очевидно, что $\widehat{W}|_G$ подпространство (не обязательно замкнутое) в $H(G)$. Пусть $\widehat{I} = \text{An } \widehat{W}$. Докажем следующее вспомогательное утверждение.

ЛЕММА. *Для того чтобы $\widehat{W}|_G \subset W$, необходимо и достаточно, чтобы $I \subset \widehat{I}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ. Необходимость. Пусть $\widehat{W}|_G \subset W$. Рассмотрим произвольный элемент $\varphi \in I$ и соответствующий функционал $S \in H^*(G)$. Функционал S аннулирует W , т.е. $\langle S, f \rangle = 0 \ \forall f \in W$. В частности, поскольку $\widehat{f}|_G \in W$ при $\widehat{f} \in \widehat{W}$, имеем $\langle S, \widehat{f} \rangle = 0 \ \forall \widehat{f} \in \widehat{W}$. Значит, S аннулирует $\widehat{W}$ и, следовательно, $\varphi \in \widehat{I}$. Тем самым установлено вложение $I \subset \widehat{I}$.

Достаточность. Пусть $I \subset \widehat{I}$. Зафиксируем произвольный элемент $\widehat{f} \in \widehat{W}$. Пусть $f = \widehat{f}|_G$, $W^0 = \{S \in H^* : \langle S, f \rangle = 0 \ \forall f \in W\}$. Рассмотрим произвольный функционал $S \in W^0$. Его характеристический элемент φ принадлежит I и в силу вложения $I \subset \widehat{I}$ принадлежит $\widehat{I}$. Значит, S аннулирует $\widehat{W}$, в частности, $\langle S, \widehat{f} \rangle = 0$. Но носитель S лежит в G . Поэтому $\langle S, f \rangle = \langle S, \widehat{f} \rangle = 0$. Поскольку это верно для любого $S \in W^0$, по теореме Хана–Банаха $f \in W$. Таким образом, если $\widehat{f} \in \widehat{W}$, то $\widehat{f}|_G \in W$. Тем самым вложение $\widehat{W}|_G \subset W$ установлено.

Продолжим доказательство предложения 3.2. Подпространство $W' \subset H(G')$ обладает *свойством максимальной* в следующем смысле: если $\widehat{W}$ – инвариантное подпространство в $H(G')$, для которого $\widehat{W}|_G \subset W$, то $\widehat{W} \subset W'$. Это следует из того, что W' – совокупность *всех* элементов f' из $H(G')$, для которых $f'|_G \in W$. Свойство максимальной подпространства W' влечет *свойство минимальности* его аннуляторного подмодуля: если $\widehat{I}$ – замкнутый подмодуль в $P(G')$ и $\widehat{I} \supset I$, то $\widehat{I} \supset I'$. Действительно, пусть $\widehat{W}$ – инвариантное подпространство в $H(G')$, аннуляторный подмодуль которого совпадает с $\widehat{I}$. По лемме вложение $\widehat{I} \supset I$ влечет вложение $\widehat{W}|_G \subset W$. В силу свойства максимальной W' имеем $\widehat{W} \subset W'$. Это влечет $\widehat{I} \supset I'$. Свойство минимальности I' установлено. Пусть $\bar{I}$ – замыкание I в $P(G')$. Поскольку I' – замкнутый подмодуль в $P(G')$, содержащий I , справедливо вложение $\bar{I} \subset I'$. С другой стороны, I' обладает свойством минимальности и $\bar{I} \supset I$; поэтому $\bar{I} \supset I'$. Значит, $I' = \bar{I}$. Предложение 3.2 доказано.

3.4. Замыкание инвариантных подпространств в ослабленной топологии. Пусть $G, \widehat{G}$ – q -многожества Рунге и $\widehat{G} \subset G$. Положим $H = H(G)$, $\widehat{H} = H(\widehat{G})$, $P = P(G)$, $\widehat{P} = P(\widehat{G})$. Имеют место непрерывные вложения $H \subset \widehat{H}$, $\widehat{P} \subset P$. Пусть W – инвариантное подпространство в H с аннуляторным подмодулем $I \subset P$. Рассмотрим замыкание $\widehat{W}$ подпространства W в топологии $\widehat{H}$, $\widehat{W}$ будет

инвариантным подпространством в $\widehat{H}$. Пусть $\widehat{I}$ – аннуляторный подмодуль $\widehat{W}$. Как связаны подмодули I и $\widehat{I}$? Ответ дает следующее предложение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.3. *Имеет место соотношение*

$$\widehat{I} = \widehat{P} \cap I.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\varphi \in \widehat{P} \cap I$, т.е. $\varphi \in \widehat{P}$, $\varphi \in I$. Первое включение означает, что φ является характеристическим элементом функционала $\widehat{S} \in \widehat{H}^*$, а второе –, что $\widehat{S}$ аннулирует W . Так как $\widehat{S}$ непрерывен в топологии $\widehat{H}$, а $\widehat{W}$ – замыкание W в этой топологии, то $\widehat{S}$ аннулирует $\widehat{W}$. Иными словами, $\widehat{S} \in \widehat{W}^0$, что равносильно включению $\varphi \in \widehat{I}$. Тем самым установлено, что $\widehat{P} \cap I \subset \widehat{I}$.

Докажем обратное вложение. Пусть $\varphi \in \widehat{I}$, т.е. φ есть характеристический элемент функционала $\widehat{S}$ из $\widehat{H}^*$, аннулирующего $\widehat{W}$. Так как $W \subset \widehat{W}$, функционал $\widehat{S}$ будет аннулировать и W . Иными словами, $\widehat{S} \in W^0$, что равносильно включению $\varphi \in I$. Кроме того, ясно, что $\widehat{\varphi} \in \widehat{P}$. Из вышеизложенного следует, что $\varphi \in \widehat{P} \cap I$. Тем самым установлено вложение $\widehat{I} \subset \widehat{P} \cap I$. Предложение 3.3 доказано.

3.5. Сужение элементарного проектора.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.4. *Пусть G, G' – открытые q -множества, причем $G \subset G'$, W, W' – инвариантные подпространства в $H(G), H(G')$ с одинаковыми спектрами и $W' \subset W$. Тогда сужение элементарного проектора $p_\lambda: W \rightarrow W$ на W' есть элементарный проектор в W' .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Учитывая, что спектры подпространств W и W' совпадают, нетрудно проверить, что сужение p'_λ оператора p_λ на W' будет обладать свойствами 1°, 2°, 3°, входящими в определение элементарного проектора [2, п. 4.1]. В силу непрерывности вложения $W' \subset W$ оператор p'_λ будет непрерывно отображать W' в W . Но образ p'_λ есть конечномерное подпространство $W(\lambda)$ [2, следствие предложения 2.8], принадлежащее одновременно и W и W' . Поскольку топологии, индуцируемые в $W(\lambda)$ из W и W' совпадают, p'_λ действует непрерывно из W' в W' .

3.6. Устойчивость подмодулей относительно умножения на экспоненту. Пусть G – открытое q -множество, $u = (u_1, \dots, u_q)$ – элемент из $P(G)$, $D_1, \dots, D_q$ – сопряженные диаграммы его компонент $u_1, \dots, u_q$, соответственно [7, гл. I, § 20]. Выпуклый q -компакт $D = (D_1, \dots, D_q)$ мы называем *сопряженной диаграммой элемента u* . Пусть I – замкнутый подмодуль в P и u – элемент из I с сопряженной диаграммой D . Положим $u^{(\alpha)}(\lambda) = u(\lambda)e^{\alpha\lambda}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.5. *Если $u \in I$, то $u^{(\alpha)} \in I \quad \forall \alpha \in (G * D)_0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В работе [19, лемма 2] доказано следующее утверждение: *если элемент u принадлежит I и существует непрерывный путь γ с началом в точке $\xi = 0$ и концом $\xi = \alpha$ такой, что*

$$u(\lambda)e^{\xi\lambda} \in P \quad \forall \xi \in \gamma,$$

то

$$u(\lambda)e^{\alpha\lambda} \in I.$$

Это утверждение доказано в предположении, что G — односвязная q -область. Однако соответствующие рассуждения проходят без изменений и в общем случае. Множество $A = (G * D)_0$ есть область, любая точка α которой является концом некоторого непрерывного пути $\gamma \subset A$, выходящего из начала. Поскольку при этом $D + \xi \subset G$ для любого $\xi \in \gamma$, то $u(\lambda)e^{\xi\lambda} \in P \quad \forall \xi \in \gamma$. Применяя цитированное выше утверждение, заключаем, что $u^{(\alpha)} \in I$.

3.7. Доказательство теоремы 3.1. Фиксируем элемент $F \in W$. Нужно показать, что имеет место сходимость (2). Пусть $A = (G' * \mathcal{D})_0$, $A_0 = (G * \mathcal{D})_0$, $G_0 = \mathcal{D} + A_0$. Очевидно, что A_0 — выпуклая подобласть A , а G_0 — выпуклая q -подобласть G . Рассмотрим инвариантное подпространство $W_0 \subset H(G_0)$ — замыкание W в топологии $H(G_0)$. Согласно предложению 3.3 аннуляторный подмодуль I_0 подпространства W_0 есть пересечение $I \cap P(G_0)$. Так как I устойчивый подмодуль, а $P(G_0)$ — устойчивый модуль [1, §3], то их пересечение I_0 — устойчивый подмодуль. Поскольку $\mathcal{D} \subset G_0$, последовательность (1) принадлежит $P(G_0)$ (см. лемму п. 1.3); по условию та же последовательность принадлежит I ; значит, она принадлежит I_0 . Рассмотрим последовательность

$$\{u^{(1n\alpha)}, \dots, u^{(qn\alpha)}\}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (3)$$

где

$$u^{(kn\alpha)}(\lambda) = u^{(kn)}(\lambda)e^{\alpha\lambda}, \quad k = 1, \dots, q.$$

В силу предложения 3.5 эта последовательность принадлежит I_0 при любом $\alpha \in A_0$. Пусть $\mathcal{D}^{(\alpha)} = \mathcal{D} + \alpha$, $\omega^{(\alpha)} = \omega + \alpha$. Исходя из того, что последовательность (1) $\mathcal{D}$ -ограничена и допускает ω -оценку, нетрудно проверить, что последовательность (3) является $\mathcal{D}^{(\alpha)}$ -ограниченной и допускает $\omega^{(\alpha)}$ -оценку. Таким образом, q -область G_0 и подмодуль I_0 удовлетворяют условиям теоремы 2.2. На основании этой теоремы заключаем, что имеет место сходимость

$$\sum_{\lambda_i \in \Gamma_n} p_{\lambda_i}^{(0)}(F) \xrightarrow{\Omega_0} F, \quad (4)$$

где $p_{\lambda_i}^{(0)}$ — элементарный проектор в W_0 , $\Omega_0 = \omega + A_0$. Пусть p_{λ_i} , $i = 1, 2, \dots$, — элементарные проекторы в W , они существуют и единственны в силу предложений 4.5, 4.6 из [2]. Подпространства W, W_0 имеют одинаковые спектры¹ и при этом $W \subset W_0$. Согласно предложению 3.4 имеем

$$p_{\lambda_i}^{(0)}|_W = p_{\lambda_i},$$

в частности,

$$p_{\lambda_i}^{(0)}(F) = p_{\lambda_i}(F), \quad i = 1, 2, \dots \quad (5)$$

¹См. доказательство в § 6.

Пусть A_1 – выпуклая подобласть A такая, что $A_0 \cap A_1 \neq \emptyset$. Положим $G_1 = \mathcal{D} + A_1$. В силу выпуклости G_0 и G_1 объединение $G_{01} = G_0 \cup G_1$ есть q -множество Рунге. Пусть W_{01} – инвариантное подпространство в $H(G_{01})$, состоящее из всех элементов $f \in W_0$, допускающих аналитическое продолжение в G_{01} . Согласно предложению 3.2 аннуляторный подмодуль I_{01} подпространства W_{01} есть замыкание I_0 в $P(G_{01})$. Поскольку I_0 устойчивый подмодуль, его замыкание I_{01} – также устойчивый подмодуль [1, теорема 3.4]. Этот подмодуль вместе с I_0 содержит последовательность (3) при любом $\alpha \in A_0$. Учитывая, что $A_0 \cup A_1$ связно и содержится в $(G_{01} \setminus \mathcal{D})_0$, на основании предложения 3.5 заключаем, что подмодуль I_{01} содержит последовательность (3) при любом $\alpha \in A_1$. Далее, пусть W_1 – инвариантное подпространство в $H(G_1)$, полученное замыканием W_{01} в $H(G_1)$. Аннуляторный подмодуль I_1 подпространства W_1 есть пересечение $I_{01} \cap P(G_1)$ (предложение 3.3). В силу устойчивости I_{01} и $P(G_1)$ это пересечение также устойчиво; следовательно, I_1 – устойчивый подмодуль. Поскольку как $P(G_1)$, так и I_{01} содержат последовательность (3) при $\alpha \in A_1$, подмодуль I_1 содержит (3) при тех же α . Последовательность (3) $\mathcal{D}^{(\alpha)}$ -ограничена и допускает $\omega^{(\alpha)}$ -оценку. Из вышеизложенного следует, что q -область G_1 и подмодуль I_1 удовлетворяют условиям теоремы 2.2. Заметим, что элемент F принадлежит W_{01} и, следовательно, принадлежит W_1 . Применяя теорему 2.2 к области G_1 , подмодулю I_1 и элементу F , получаем, что имеет место сходимость

$$\sum_{\lambda_i \in \Gamma_n} p_{\lambda_i}^{(1)}(F) \xrightarrow{\Omega_1} F, \quad (6)$$

где $p_{\lambda_i}^{(1)}$ – элементарные проекторы в W_1 , $\Omega_1 = \omega + A_1$. Сравним $p_{\lambda_i}^{(0)}(F)$ и $p_{\lambda_i}^{(1)}(F)$. Заметим, что спектры подпространств W_0 , W_{01} , W_1 совпадают со спектром W ; кроме того, имеют место вложения $W_{01} \subset W_0$, $W_{01} \subset W_1$. В этой ситуации в силу предложения 3.4 имеем

$$p_{\lambda_i}^{(0)}|_{W_{01}} = p_{\lambda_i}^{(01)}, \quad p_{\lambda_i}^{(1)}|_{W_{01}} = p_{\lambda_i}^{(01)}, \quad i = 1, 2, \dots,$$

где $p_{\lambda_i}^{(01)}$ – элементарный проектор в W_{01} . Учитывая, что $F \in W_{01}$, получаем

$$p_{\lambda_i}^{(1)}(F) = p_{\lambda_i}^{(01)}(F) = p_{\lambda_i}^{(0)}(F).$$

Эти соотношения вместе с соотношениями (5) показывают, что суммы в (2), (4), (6) идентичны, т.е. речь идет о последовательности частичных сумм стандартного ряда для F , сходящейся к F одновременно внутри Ω_0 и Ω_1 с экспоненциальной оценкой остаточного члена. Пусть A_2 – еще одна подобласть A , пересекающаяся с A_1 . При помощи тех же рассуждений, что и выше, примененных к областям $G_1 = \mathcal{D} + A_1$, $G_2 = \mathcal{D} + A_2$, установим, что последовательность

$$\sum_{\lambda_i \in \Gamma_n} p_{\lambda_i}(F) \quad (7)$$

сходится к F экспоненциально внутри $\Omega_2 = \omega + A_2$. Продолжая этот процесс, можем построить конечную цепь сцепленных выпуклых подобластей

$$A_0, A_1, \dots, A_n \subset A, \quad A_i \cap A_{i+1} \neq \emptyset, \quad i = 0, \dots, n-1, \quad (8)$$

такую, что последовательность (7) сходится к F экспоненциально внутри каждой из областей $\Omega_0 = \omega + A_0, \dots, \Omega_n = \omega + A_n$. Пользуясь произволом в построении цепи (8), можем для произвольной выпуклой подобласти $B \subset A$ построить цепь (8), в которой последний член A_n совпадает с B . По доказанному последовательность (7) сходится к F экспоненциально внутри $\omega + B$. Область $\Omega = \omega + A$ можно представить как объединение областей вида $\omega + B$, где B – выпуклая подобласть A . На основании предложения 2.3 заключаем, что экспоненциальная сходимость последовательности (7) распространяется на Ω .

ЗАМЕЧАНИЕ. Доказательство остается справедливым и в случае, когда G' – “многолистная” q -область, принадлежащая “римановой поверхности” элемента F . В качестве G' удобно брать след, оставляемый $\mathcal{D}$ при параллельном смещении по римановой поверхности F . Если проекция этого следа на комплексную q -плоскость $(\underbrace{\mathbb{C}, \dots, \mathbb{C}}_{q\text{-раз}})$ представляется в виде $\mathcal{D} + A$, то последовательность (7) будет равномерно сходиться в q -области $\Omega = \omega + A$. След, таким образом, оказывается “однолистным”. В рамках спектрального синтеза подобное явление исследовано в [10], [11].

§ 4. Фундаментальный принцип в случае оценок вдоль системы окружностей

4.1. Уточнение фундаментального принципа. В случае, когда контуры Γ_n представляют собой окружности $|\lambda| = r_n, r_n \rightarrow \infty$, можно ω -оценку заменить оценкой более общего типа. Пусть $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_q)$ – выпуклая q -область, а ω' – компакт в $\mathbb{C}$. Рассмотрим последовательность

$$\{u^{(1n)}, \dots, u^{(qn)}\}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (1)$$

Будем говорить, что эта последовательность *допускает* (ω, ω') -оценку *вдоль системы контуров* $\{\Gamma_n\}$, если

$$\ln \left| \frac{\Delta_{ip}^{(n)}(\lambda)}{\Delta^{(n)}(\lambda)} \right| + h_{\omega_i}(\lambda) - h_{\omega'}(\lambda) \leq \varepsilon_n |\lambda|, \quad (2)$$

$$\lambda \in \Gamma_n, \quad n = 1, 2, \dots, \quad i, p = 1, \dots, q,$$

где $\varepsilon_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть $I = \text{An } W$ удовлетворяет следующим условиям:

- 1°. I – устойчивый подмодуль;
- 2°. I содержит $\mathcal{D}$ -ограниченную последовательность (1), $\mathcal{D} \subset G$, допускающую (ω, ω') -оценку вдоль системы окружностей $\Gamma_n = \{z : |z| = r_n\}$, $r_n \rightarrow \infty$.

Тогда если элемент $F = W$ допускает аналитическое продолжение в $G' \supset G$, то

$$\sum_{\lambda_i \in \Gamma_n} p_{\lambda_i}(F) \xrightarrow{\Omega} F,$$

где

$$\Omega = (G' \pm (\mathcal{D} + \omega'))_0 + \omega.$$

Доказательство этой теоремы будет дано в п. 4.4; пп. 4.2, 4.3 посвящены подготовке к доказательству.

4.2. Две леммы.

ЛЕММА 1. *Для любых выпуклых компактов $B, B', B \Subset B'$, существует последовательность целых функций $\{\varphi_n\}$, $n = 1, 2, \dots$, удовлетворяющая следующим условиям:*

1°. *последовательность $\{\varphi_n\}$ является B' -ограниченной, т.е. выполняется оценка*

$$|\varphi_n(\lambda)| \leq \text{const} \exp h_{B'}(\lambda); \quad (3)$$

2°. *последовательность $\{\varphi_n\}$ допускает строгую B -оценку снизу вдоль системы окружностей $\Gamma_n = \{\lambda : |\lambda| = r_n\}$, $r_n \rightarrow \infty$, т.е.*

$$\begin{aligned} \ln |\varphi_n(\lambda)| &\geq h_B(\lambda), \\ \lambda &\in \Gamma_n, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть B'' – промежуточный выпуклый компакт такой, что $B \Subset B'' \Subset B'$. Построим целую функцию вполне регулярного роста φ с сопряженной диаграммой B'' . Эта функция вне множества кружков E нулевой линейной плотности допускает оценку [7, гл. III]

$$\ln |\varphi(\lambda)| = h_{B''}(\lambda) + o(|\lambda|), \quad \lambda \rightarrow \infty, \quad \lambda \notin E.$$

Отсюда следуют следующие свойства этой функции:

- а) $|\varphi(\lambda)| \leq \text{const} \exp(h_{B''}(\lambda) + o(|\lambda|))$, $\lambda \rightarrow \infty$;
- б) существуют $\rho_n \geq r_n$, $n = 1, 2, \dots$, такие, что $\rho_n/r_n \rightarrow 1$, $n \rightarrow \infty$, и

$$\ln |\varphi(\lambda)| = h_{B''}(\lambda) + o(|\lambda|) \quad (5)$$

при $\lambda \rightarrow \infty$, $|\lambda| = \rho_n$. Поскольку $B'' \supset B$, при некотором $\delta > 0$ справедливо неравенство

$$h_{B''}(\lambda) \geq h_B(\lambda) + \delta|\lambda|.$$

Отсюда и из (5) при достаточно больших n , скажем, $n > n_0$, выполняются неравенства

$$\ln |\varphi(\lambda)| \geq h_B(\lambda), \quad |\lambda| = \rho_n. \quad (6)$$

При $n = 1, \dots, n_0$ числа ρ_n подбираем так, чтобы окружности $|\lambda| = \rho_n$ не содержали нулей φ . Тогда, умножая, если это необходимо, функцию φ на достаточно большую константу, добьемся, чтобы неравенства (6) выполнялись для всех $n = 1, 2, \dots$. Пусть $\varphi_n(\lambda) = \varphi(\lambda \rho_n / r_n)$. Учитывая, что $\rho_n / r_n \rightarrow 1$, имеем

$$\begin{aligned} |\varphi_n(\lambda)| &= \left| \varphi \left(\frac{\lambda \rho_n}{r_n} \right) \right| \leq \text{const} \exp \left(h_{B''} \left(\frac{\lambda \rho_n}{r_n} \right) + o(|\lambda|) \right) \\ &= \text{const} \exp \left(\frac{\rho_n}{r_n} h_{B''}(\lambda) + o(|\lambda|) \right) \leq \text{const} \exp h_{B'}(\lambda), \end{aligned}$$

где константа не зависит от n . Тем самым установлено, что последовательность $\{\varphi_n\}$ является B' -ограниченной. Теперь оценим эту последовательность снизу вдоль последовательности окружностей $\Gamma_n = \{\lambda : |\lambda| = r_n\}$. Учитывая, что $|\lambda \rho_n / r_n| = \rho_n$ при $z \in \Gamma_n$, в силу (6) имеем

$$\ln |\varphi_n(\lambda)| = \ln \left| \varphi \left(\frac{\lambda \rho_n}{r_n} \right) \right| \geq h_B \left(\frac{\lambda \rho_n}{r_n} \right) = \frac{\rho_n}{r_n} h_B(\lambda) \geq h_B(\lambda),$$

так как $\rho_n \geq r_n$. Значит, последовательность $\{\varphi_n\}$ допускает строгую B -оценку снизу.

ЛЕММА 2. Пусть G – открытое q -множество, u – элемент из $P(G)$ с сопряженной диаграммой $D_u \subset G$, φ – целая функция экспоненциального типа с сопряженной диаграммой $D_\varphi \subset (G * D_u)_0$, I – замкнутый подмодуль в $P(G)$. Тогда если $u \in I$, то $u\varphi \in I$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем точку $a \in D_\varphi$. Рассмотрим элемент $v(\lambda)$ такой, что $v(\lambda) = u(\lambda) \exp a\lambda$. Поскольку $a \in D_\varphi \subset (G * D_u)_0$, элемент v принадлежит I (предложение 3.5). Полагая $\psi(\lambda) = \varphi(\lambda) \exp(-a\lambda)$, имеем $\varphi u = \psi v$. При этом $D_v \subset G$ и $D_v + D_\psi = D_u + D_\varphi \subset G$. Заметим, что сопряженная диаграмма D_ψ функции ψ содержит начало. Подберем выпуклую q -область G' и выпуклую область $G'' \subset \mathbb{C}$ таким образом, чтобы $G' \supset D_v$, $G'' \supset D_\psi$ и $G' + G'' \subset G$. Ясно, что G'' содержит начало. В этой ситуации известно, что существует последовательность многочленов p_n , $n = 1, 2, \dots$, сходящаяся к ψ в топологии $P(G'')$ [12, § 4]. Отсюда, используя известное весовое описание топологии в модулях, ассоциированных с выпуклыми областями [12, § 3], нетрудно вывести, что $p_n v \rightarrow \psi v$ в топологии $P(G' + G'')$. Но в силу вложения $G' + G'' \subset G$ пространство $P(G' + G'')$ непрерывно вложено в $P(G)$. Поэтому последовательность $p_n v$ сходится к ψv в топологии $P(G)$. Каждый член этой последовательности принадлежит замкнутому подмодулю I ; значит, $\psi v \in I$. Остается отметить, что $\varphi u = \psi v$.

4.3. Три свойства геометрической разности.

СВОЙСТВО 1. Пусть $D_1 \supset D_2 \supset \dots$ – убывающая последовательность q -компактов, $D = \bigcap_{n=1}^{\infty} D_n$, $G = (G_1, \dots, G_q)$ – открытое q -множество. Тогда

$$G * D = \bigcup_{n=1}^{\infty} (G * D_n).$$

Доказательство использует известный факт о компактах в топологическом пространстве.

ЛЕММА. Пусть K есть предел убывающей последовательности компактов

$$K_1 \supset K_2 \supset \dots$$

в топологическом пространстве. Тогда для любого открытого множества $V \supset K$ существует номер n_0 такой, что $K_n \subset V$ при $n \geq n_0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим замкнутые множества $F_n = (\mathbb{C} \setminus V) \cap K_n$. Если вложение $K_n \subset V$ нарушается для бесконечного множества значений n , то семейство $\{F_n\}$ замкнутых подмножеств компакта K_1 центрировано и имеет непустое пересечение вне V ; противоречие с тем, что это пересечение лежит в V .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СВОЙСТВА 1. Установим вложение

$$G * D \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (G * D_n). \quad (7)$$

Пусть $G = (G_1, \dots, G_q)$, $D = (D_1, \dots, D_q)$, $D_n = (D_{1n}, \dots, D_{qn})$. Теперь предположим, что $x \in G * D$. Тогда $x + D \subset G$, что равносильно q вложениям $x + D_i \subset G_i$, $i = 1, \dots, q$. Множество $x + D_i$ может быть представлено в виде предела убывающей последовательности компактов $x + D_{i1} \supset x + D_{i2} \supset \dots$. По лемме существует номер n_i такой, что $x + D_{in} \subset G_i$ при $n \geq n_i$. При $n \geq n_0 = \max n_i$ эти вложения будут выполняться одновременно. Совокупность этих вложений можно записать в виде $x + D_n \subset G$, $n \geq n_0$, или, что то же самое, в виде $x \in G * D_n$. Тем самым вложение (7) установлено. Обратное вложение следует из вложений

$$G * D \supset G * D_n,$$

вытекающих из вложений $D \subset D_n$, $n = 1, 2, \dots$.

СВОЙСТВО 2. Пусть U – выпуклая область, K – выпуклый компакт в $\mathbb{C}$. Тогда

$$(U + K) * K = U.$$

СВОЙСТВО 3. Пусть U – выпуклая область, K – выпуклый компакт в $\mathbb{C}$. Тогда

$$h_U * K(\lambda) \leq h_U(\lambda) - h_K(\lambda).$$

Доказательство свойств 2, 3 проводится стандартными рассуждениями (см. [9, § 2]).

4.4. Доказательство теоремы 4.1. Пусть B, B' – выпуклые компакты, удовлетворяющие условиям:

- 1) $B \subseteq B'$;
 - 2) $(G * (B' + D))_0 \neq \emptyset$, $(\omega + B) * \omega' \neq \emptyset$.
- (8)

Пользуясь условием 1), согласно лемме 1 построим последовательность $\{\varphi_n\}$ целых функций, допускающих оценки (3), (4). Рассмотрим последовательность

$$\{v^{(1n)}, \dots, v^{(qn)}\}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (9)$$

где

$$v^{(kn)}(\lambda) = u^{(kn)}\varphi_n(\lambda).$$

Так как $\mathcal{D} + B' \subset G$, то $v^{(kn)} \in P(G)$. Учитывая, что $u^{(kn)} \in I$, по лемме 2 заключаем, что $v^{(kn)} \in I$. Далее, в силу $\mathcal{D}$ -ограниченности (1) и B' -ограниченности $\{\varphi_n\}$ последовательность (9) будет $(\mathcal{D} + B')$ -ограниченной. Покажем, что эта последовательность вдоль $\{\Gamma_n\}$ допускает $\omega(B)$ -оценку, где

$$\begin{aligned}\omega(B) &= (\omega_1(B), \dots, \omega_q(B)), \\ \omega_i(B) &= (\omega_i + B) \ast \omega', \quad i = 1, \dots, q.\end{aligned}$$

Пусть $\widehat{\Delta}^{(n)}$ – определитель, составленный из векторов-столбцов элементов $v^{(1n)}, \dots, v^{(qn)}$, $\widehat{\Delta}_{ij}^{(n)}$ – алгебраическое дополнение элемента в i -й строке и j -м столбце определителя $\widehat{\Delta}^{(n)}$. Легко проверить, что

$$\frac{\widehat{\Delta}_{ij}^{(n)}}{\widehat{\Delta}^{(n)}} = \frac{\Delta_{ij}^{(n)}}{\Delta^{(n)}} \frac{1}{\varphi_n}.$$

Отсюда, учитывая (4), при $\lambda \in \Gamma_n$ имеем

$$\begin{aligned}\ln \left| \frac{\widehat{\Delta}_{ij}^{(n)}(\lambda)}{\widehat{\Delta}^{(n)}(\lambda)} \right| + h_{\omega_i(B)}(\lambda) &= \ln \left| \frac{\Delta_{ij}^{(n)}(\lambda)}{\Delta^{(n)}(\lambda)} \right| - \ln |\varphi_n(\lambda)| + h_{\omega_i(B)}(\lambda) \\ &\leq \ln \left| \frac{\Delta_{ij}^{(n)}(\lambda)}{\Delta^{(n)}(\lambda)} \right| - h_B(\lambda) + h_{\omega_i(B)}(\lambda).\end{aligned}\tag{10}$$

Заметим, что $\omega_i(B) = (\omega_i + B) \ast \omega'$, $i = 1, \dots, q$. Отсюда, воспользовавшись свойством 3 геометрической разности, получаем

$$\begin{aligned}h_{\omega_i(B)}(\lambda) &\leq h_{\omega_i+B}(\lambda) - h_{\omega'}(\lambda) \\ &= h_{\omega_i}(\lambda) + h_B(\lambda) - h_{\omega'}(\lambda).\end{aligned}$$

Продолжая неравенство (10) и учитывая (2), получаем

$$\begin{aligned}\ln \left| \frac{\widehat{\Delta}_{ij}^{(n)}(\lambda)}{\widehat{\Delta}^{(n)}(\lambda)} \right| + h_{\omega_i(B)}(\lambda) &\leq \ln \left| \frac{\Delta_{ij}^{(n)}(\lambda)}{\Delta^{(n)}(\lambda)} \right| + h_{\omega_i}(\lambda) - h_{\omega'}(\lambda) \leq o(|\lambda|), \\ i &= 1, \dots, q.\end{aligned}$$

Итак, последовательность (9) является $(\mathcal{D} + B')$ -ограниченной и допускает $\omega(B)$ -оценку вдоль $\{\Gamma_n\}$. По теореме 3.1 последовательность

$$\sum_{\lambda_i \in \Gamma_n} p_{\lambda_i}(F) \tag{11}$$

сходится к F экспоненциально внутри области

$$\Omega(B', B) = (G' \ast (\mathcal{D} + B'))_0 + \omega(B),$$

причем это верно для любых выпуклых компактов $B, B', B \in B'$, удовлетворяющих условиям (8). Если хотя бы одно из этих условий не выполнено, то $\Omega(B', B) = \emptyset$. Принимая соглашение, что на пустом множестве любая сходимость имеет место, заключаем, что последовательность (11) сходится экспоненциально внутри $\Omega(B', B)$ для любых выпуклых компактов $B, B', B \in B'$. Пусть $d_n = \{z : |z| \leq 1/n\}$, $n = 1, 2, \dots$. Положим $B' = B + d_n$. В силу свойства 1 геометрической разности область $(G \circledast (\mathcal{D} + B))_0$ есть объединение областей $(G \circledast (\mathcal{D} + B + d_n))_0$; по этой причине область $\Omega(B, B)$ есть объединение областей $\Omega(B + d_n, B)$. Внутри каждой из последних областей имеет место экспоненциальная сходимость. По предложению 2.3 эта сходимость распространяется и на $\Omega(B, B)$. Теперь будем брать в качестве B компакты $\omega' + d_n$. Экспоненциальная сходимость будет иметь место в каждой из областей

$$\Omega_n = (G' \circledast (\mathcal{D} + d_n + \omega'))_0 + \omega(d_n + \omega').$$

По свойству 2 геометрической разности

$$(\omega_i + d_n + \omega') \circledast \omega' = \omega_i + d_n.$$

Следовательно,

$$\omega(d_n + \omega') = \omega + d_n \supset \omega.$$

Кроме того, объединение областей

$$(G' \circledast (\mathcal{D} + \omega' + d_n))_0 + \omega,$$

взятое по $n = 1, 2, \dots$, совпадает с

$$(G' \circledast (\mathcal{D} + \omega'))_0 + \omega.$$

Таким образом, объединение областей Ω_n , $n = 1, 2, \dots$, содержит область

$$\Omega = (G' \circledast (\mathcal{D} + \omega'))_0 + \omega.$$

В силу предложения 2.3 экспоненциальная сходимость распространяется на Ω .

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Теорема 4.1 доказана в предположении, что система контуров $\{\Gamma_n\}$ состоит из окружностей. Это ограничение связано не столько с существом дела, сколько с методом доказательства леммы 1. Используя известные приемы (см. [13], [14]) построения целых функций с заданными асимптотическими свойствами, можно, по-видимому, доказывать лемму 1 при менее жестких ограничениях на $\{\Gamma_n\}$. Нам кажется весьма вероятной гипотеза, что утверждение леммы 1 (а также и теоремы 4.1) сохранится, если контуры Γ_n принадлежат классу C^2 и их кривизна ограничена в совокупности, т.е. $\sup_n c(\Gamma_n) < \infty$, $c(\Gamma_n)$ — кривизна Γ_n .

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Приемы проверки устойчивости подмодуля $I \subset P(G)$ изложены в статье [15, §2].

4.5. Фундаментальный принцип для системы комплексных плоскостей. В качестве применения теоремы 4.1 установим фундаментальный принцип в случае $G = \mathbb{C}_q$, где

$$\mathbb{C}_q = \left\{ \underbrace{\mathbb{C}, \dots, \mathbb{C}}_{q \text{ раз}} \right\}.$$

ТЕОРЕМА 4.2. Пусть W – инвариантное подпространство в $H(\mathbb{C}_q)$ с аннуляторным подмодулем I ранга q . Тогда существует последовательность окружностей

$$\Gamma_n = \{z : |z| = r_n\}, \quad r_1 < r_2 < \dots,$$

такая, что для любого элемента $F \in W$

$$\sum_{\lambda_i \in \Gamma_n} p_{\lambda_i}(F) \xrightarrow{\mathbb{C}_q} F.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Известно [15, теорема 11], что всякое инвариантное подпространство $W \subset H(\mathbb{C}_q)$ допускает спектральный синтез. Это эквивалентно тому, что подмодуль I является обильным и, тем более, устойчивым. Пусть $u^{(1)}, \dots, u^{(q)}$ – независимая система элементов из I , Δ – ее определитель. Этот определитель представляет собой целую функцию экспоненциального типа. Известно [7, гл. 1], что существует последовательность окружностей

$$\Gamma_n = \{z : |z| = r_n\}, \quad r_1 < r_2 < \dots, \quad r_n \rightarrow \infty,$$

такая, что

$$\ln |\Delta(\lambda)| \geq -a|\lambda|, \quad a < \infty,$$

$$|\lambda| = r_n, \quad n = 1, 2, \dots$$

Поскольку алгебраические дополнения Δ_{ij} , $i, j = 1, \dots, q$, также целые функции экспоненциального типа, существует $b < \infty$ такое, что

$$\ln |\Delta_{ij}(\lambda)| \leq b|\lambda|, \quad i, j = 1, \dots, q.$$

Отсюда следуют неравенства

$$\ln \left| \frac{\Delta_{ij}(\lambda)}{\Delta(\lambda)} \right| \leq c|\lambda|, \quad |\lambda| = r_n, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (12)$$

где $c = a + b$. Пусть $\omega = \{\omega_1, \dots, \omega_q\}$, где $\omega_i = \{z : |z| < c + \delta\}$, $\delta > 0$; $\omega' = \{z : |z| \leq \delta\}$. Неравенства (12) можно записать в виде

$$\ln \left| \frac{\Delta_{ij}(\lambda)}{\Delta(\lambda)} \right| + h_{\omega_i}(\lambda) - h_{\omega'}(\lambda) \leq 0.$$

Это означает, что последовательность (1), состоящая из повторений системы $u^{(1)}, \dots, u^{(q)}$, допускает (ω, ω') -оценку вдоль системы окружностей $\{\Gamma_n\}$. Ясно, что для некоторого q -компакта $\mathcal{D}$ эта последовательность будет $\mathcal{D}$ -ограниченной. По теореме 4.1 последовательность

$$\sum_{\lambda_i \in \Gamma_n} p_i(F)$$

сходится экспоненциально внутри области

$$\Omega = (\mathbb{C}_q * (\mathcal{D} + \omega'))_0 + \omega.$$

Остается отметить, что $\Omega = \mathbb{C}_q$.

4.6. Фундаментальный принцип в терминах одной независимой системы. Рассмотрим систему

$$u^{(1)}, \dots, u^{(q)} \quad (13)$$

элементов из $P(G)$. Пусть $D^{(1)}, \dots, D^{(q)}$ – сопряженные диаграммы этих элементов (п. 3.6). *Сопряженной диаграммой системы* (13) называется наименьшая выпуклая оболочка q -компактов $D^{(1)}, \dots, D^{(q)}$, т.е. наименьшее выпуклое q -множество, содержащее $D^{(1)}, \dots, D^{(q)}$. Это q -множество представляет собой выпуклый q -компакт, компоненты которого – выпуклые оболочки одноименных компонент $D^{(1)}, \dots, D^{(q)}$. Пусть $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_q)$ – выпуклая q -область, а ω' – выпуклый компакт в $\mathbb{C}$. Система (13) допускает (ω, ω') -оценку вдоль последовательности контуров $\{\Gamma_n\}$, если

$$\ln \left| \frac{\Delta_{ij}(\lambda)}{\Delta(\lambda)} \right| + h_{\omega_i}(\lambda) - h_{\omega'}(\lambda) \leq \varepsilon_n |\lambda|, \quad (14)$$

$$\lambda \in \Gamma_n, \quad n = 1, 2, \dots$$

Здесь Δ – определитель, составленный из векторов-столбцов $u^{(1)}, \dots, u^{(q)}$, Δ_{ij} – алгебраическое дополнение элемента в i -й строке и j -м столбце определителя Δ .

ТЕОРЕМА 4.3. Пусть подмодуль $I = \text{An} W$ удовлетворяет следующим условиям:

- 1°. подмодуль I является устойчивым;
- 2°. подмодуль I содержит систему элементов $u^{(1)}, \dots, u^{(q)}$, допускающую (ω, ω') -оценку вдоль последовательности окружностей $\Gamma_n = \{z : |z| = r_n\}$, $r_n \rightarrow \infty$.

Тогда для любого $f \in W$

$$\sum_{\lambda_i \in \Gamma_n} p_{\lambda_i}(f) \xrightarrow{\Omega} f, \quad n \rightarrow \infty, \quad (15)$$

где $\Omega = (G' * (D + \omega'))_0 + \omega$, $\mathcal{D}$ – сопряженная диаграмма системы $u^{(1)}, \dots, u^{(q)}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathcal{D}$ – выпуклый q -компакт такой, что $D \in \mathcal{D} \subset G$. Очевидно, система $u^{(1)}, \dots, u^{(q)}$ будет $\mathcal{D}$ -ограниченной. Образует последовательность вида (1), состоящую из повторяющейся системы:

$$u^{(1n)} = u^{(1)}, \dots, u^{(qn)} = u^{(q)}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Эта последовательность $\mathcal{D}$ -ограничена и допускает (ω, ω') -оценку снизу вдоль системы $\{\Gamma_n\}$. По теореме 4.1 последовательность

$$\sum_{\lambda_i \in \Gamma_n} p_{\lambda_i}(F)$$

сходится экспоненциально к F внутри q -области

$$\Omega(\mathcal{D}) = (G' * (\mathcal{D} + \omega'))_0 + \omega.$$

Это верно для любого выпуклого компакта $\mathcal{D}$ такого, что $D \in \mathcal{D} \subset G$. По предложению 2.3 экспоненциальная сходимость распространяется на объединение областей $\Omega(\mathcal{D})$, взятое по указанным $\mathcal{D}$. Учитывая свойство 1 геометрической разности, нетрудно показать, что это объединение совпадает с $\Omega = (G' * (D + \omega'))_0 + \omega$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Устойчивость подмодуля $I = \text{An } W$ можно заменить условием: W допускает спектральный синтез. Действительно, тогда аннуляторный подмодуль I будет обильным [2, п. 2.5] и, тем более, устойчивым.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Если подмодуль I содержит другую систему $\hat{u}^{(1)}, \dots, \hat{u}^{(q)}$, допускающую $(\hat{\omega}, \hat{\omega}')$ -оценку вдоль той же последовательности $\{\Gamma_n\}$, то

$$\sum_{\lambda_i \in \Gamma_n} p_{\lambda_i}(f) \xrightarrow[\hat{\Omega}]{} f,$$

где

$$\hat{\Omega} = (G' * (\hat{D} + \hat{\omega}'))_0 + \hat{\omega}, \quad (16)$$

$\hat{D}$ – сопряженная диаграмма системы $\hat{u}^{(1)}, \dots, \hat{u}^{(q)}$. Так как при этом стандартный ряд остается тем же (он не зависит от выбора независимой системы элементов из I), то сходимость имеет место в q -области $\Omega \cup \hat{\Omega}$. Перебирая всевозможные системы $\hat{u}^{(1)}, \dots, \hat{u}^{(q)}$, содержащиеся в I , и исследуя соответствующие $(\hat{\omega}, \hat{\omega}')$ -оценки, мы получаем наибольшую q -область экспоненциальной сходимости последовательности

$$\sum_{\lambda_i \in \Gamma_n} p_{\lambda_i}(f)$$

в виде объединения соответствующих областей вида (16).

$$S^{(1)} * f = 0, \dots, S^{(q)} * f = 0, \quad (17)$$
$$(S * f)(h) = \sum_{i=1}^q \langle S_i, f_i(z + h) \rangle.$$
$$\begin{aligned} S_1^{(1)} * f_1 + \cdots + S_q^{(1)} * f_q &= 0 \\ \vdots \\ S_1^{(q)} * f_1 + \cdots + S_q^{(q)} * f_q &= 0. \end{aligned} \tag{18}$$
$$\Delta = \begin{vmatrix} \varphi_1^{(1)} & \dots & \varphi_1^{(q)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_q^{(1)} & \dots & \varphi_q^{(q)} \end{vmatrix}.$$

ТЕОРЕМА 4.4. Пусть $\Delta \neq 0$ и система $\varphi^{(1)}, \dots, \varphi^{(q)}$ допускает (ω, ω') -оценку вдоль системы окружностей

$$\Gamma_n = \{z : |z| = r_n\}, \quad r_n \rightarrow \infty.$$

$$\sum_{\lambda_i \in \Gamma_n} p_{\lambda_i}(f) \xrightarrow{\Omega} f,$$
$$\Omega = (G' \stackrel{*}{\leftarrow} (D + \omega'))_0 + \omega,$$

$\Lambda = \{\lambda_i\}$ – последовательность нулей определителя Δ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Известно (см. [15, §5]), что аннуляторный подмодуль I инвариантного подпространства W решений $f \in H$ системы (18) порождается $\varphi^{(1)}, \dots, \varphi^{(q)}$. Условие $\Delta \neq 0$ равносильно независимости системы $\varphi^{(1)}, \dots, \varphi^{(q)}$, поэтому ранг I равен q . Индексное множество подмодуля I совпадает с последовательностью $\Lambda = \{\lambda_i\}$ нулей определителя Δ . По предложению 2.7 [2] спектральное множество подпространства W есть Λ . Возникает ситуация, в которой применима теорема 4.3. Применение этой теоремы приводит к цели.

При $q = 1$ теорема 4.4 содержит результаты Диксона [3] и Леонтьева [4]. Утверждение, подобное утверждению теоремы 4.4, содержится в диссертации Мерзлякова [16].

В заключение отметим, что вопросы аппроксимации решений сверточных уравнений вида (18) в рамках спектрального синтеза рассматривались в работах [15], [17]–[20], а в вещественном случае – в статье [21].

§ 5. Фундаментальный принцип для открытого q -множества

Если открытое q -множество G не является областью (компоненты G не обязательно связаны), то фундаментальный принцип для инвариантного подпространства $W \subset H(G)$ реализуется при условии, что аннуляторный подмодуль I этого подпространства является квазиустойчивым (теорема 2.2). Проверка квазиустойчивости может быть связана со значительными трудностями. В настоящем параграфе формулируется вариант фундаментального принципа, в котором условие квазиустойчивости заменено специальным условием проекционной согласованности.

5.1. Мотив. Пусть G есть объединение двух выпуклых q -областей $G^{(1)}, G^{(2)}$, $W^{(1)}, W^{(2)}$ – инвариантные подпространства с одинаковым спектром в $H(G^{(1)})$, $H(G^{(2)})$, соответственно. Рассмотрим инвариантное подпространство $W \subset H(G)$, состоящее из элементов $f \in H(G)$, удовлетворяющих условию

$$f|_{G^{(i)}} = W^{(i)}, \quad i = 1, 2.$$

Пусть в каждом из подпространств $W^{(1)}, W^{(2)}$ реализуется фундаментальный принцип. Можно ли утверждать, что тогда фундаментальный принцип реализуется в W ?

Ответ отрицателен хотя бы по той причине, что наличие спектрального синтеза в каждом из подпространств $W^{(1)}, W^{(2)}$, вообще говоря, не влечет спектральный синтез в W , т.е. не всякий элемент $f \in W$ можно аппроксимировать конечными линейными комбинациями $\exp$ - q -многочленов, содержащимися в W . Соответствующий пример, относящийся к случаю $q = 1$, содержится в [10, §12]. Если такая аппроксимация для элемента $f \in W$ возможна, то этот элемент удовлетворяет условию *проекционной согласованности*: элементарные проекторы

$$p_\lambda^{(1)}: W^{(1)} \rightarrow W^{(1)}, \quad p_\lambda^{(2)}: W^{(2)} \rightarrow W^{(2)}$$

на элементе f принимают одинаковые значения, т.е. $p_\lambda^{(1)}(f) = p_\lambda^{(2)}(f) \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}$. Действительно, $p_\lambda^{(1)}, p_\lambda^{(2)}$ принимают одинаковые значения на корневых элементах оператора D , содержащихся в W , и потому в силу линейности и непрерывности они принимают одинаковые значения и на пределах линейных комбинаций этих

элементов. Вышеизложенное соображение наводит на мысль, что фундаментальный принцип нужно формулировать не для всего подпространства W , а для его части, состоящей из элементов, удовлетворяющих условию проекционной согласованности.

5.2. Фундаментальный принцип. Пусть G – открытое q -множество, $\{G^{(\alpha)}\}$, $\alpha \in A$, – семейство выпуклых q -областей $G^{(\alpha)} \subset G$. Предположим, что каждому $\alpha \in A$ соответствует инвариантное подпространство $W^{(\alpha)} \subset H(G^{(\alpha)})$ и аннуляторный подмодуль $I^{(\alpha)} \subset P(G^{(\alpha)})$ этого пространства. Будем предполагать, что подпространства $W^{(\alpha)}$ имеют один и тот же спектр. Таким образом, для любого $\alpha \in \mathbb{C}$ запас $W(\lambda)$ эксп- q -многочленов с показателем λ , содержащихся в $W^{(\alpha)}$, не зависит от α . Пусть каждый подмодуль $I^{(\alpha)}$ устойчив и имеет ранг q . В этом случае известно [2, предложение 4.6], что для каждого $\lambda \in \mathbb{C}$ существует единственный элементарный проектор $p_\lambda^{(\alpha)}: W^{(\alpha)} \rightarrow W^{(\alpha)}$. Рассмотрим подпространство $W_0 \subset H(G)$, состоящее из всех элементов $f \in H(G)$, удовлетворяющих условиям:

- 1°. $f|_{G^{(\alpha)}} \in W^{(\alpha)} \quad \forall \alpha \in A$;
- 2°. $p_\lambda^{(\alpha)}(f) = p_\lambda^{(\beta)}(f) \quad \forall \alpha, \beta \in A, \forall \lambda \in \mathbb{C}$.

Из условий 1°, 2° нетрудно вывести, что W_0 – замкнутое инвариантное подпространство, спектр которого совпадает со спектром любого подпространства $W^{(\alpha)}$. Более того, из определения W_0 следует, что сужение на W_0 оператора $p_\lambda^{(\alpha)}$ не зависит от α и, следовательно, определяет линейный непрерывный оператор $p_\lambda: W_0 \rightarrow W_0$. Легко проверить, что этот оператор удовлетворяет условиям 1°, 2°, 3°, входящим в определение элементарного проектора [2, п. 4.1], и, следовательно, является элементарным проектором. Пусть Λ – спектральное множество W_0 . Теперь каждому элементу $f \in W_0$ мы можем поставить в соответствие стандартный ряд

$$f \sim \sum_{\lambda \in \Lambda} p_\lambda(f).$$

Кроме семейства $\{G^{(\alpha)}\}$, $\alpha \in A$, введем в рассмотрение семейства $\{\omega^{(\alpha)}\}$, $\{\mathcal{D}^{(\alpha)}\}$, $\alpha \in A$, выпуклых q -областей $\omega^{(\alpha)}$ и выпуклых q -компактов $\mathcal{D}^{(\alpha)}$, подчиненных условию

$$\omega^{(\alpha)} \subset \mathcal{D}^{(\alpha)} \subset G^{(\alpha)} \subset G.$$

ТЕОРЕМА 5.1. Пусть для каждого $\alpha \in A$ подмодуль $I^{(\alpha)}$ является устойчивым, имеет ранг q и содержит последовательность независимых систем

$$\{u^{(1n\alpha)}, \dots, u^{(qn\alpha)}\}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

$\mathcal{D}^{(\alpha)}$ -ограниченную и допускающую $\omega^{(\alpha)}$ -оценку вдоль системы контуров $\{\Gamma_n\}$. Тогда для любого элемента $f \in W_0$

$$\sum_{\lambda_i \in \Gamma_n} p_\lambda(f) \xrightarrow{\Omega} f,$$

где

$$\Omega = \bigcup_{\alpha \in A} (G * \mathcal{D}^{(\alpha)})_0 + \omega^{(\alpha)}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем $\alpha \in A$. Открытое q -множество $G = (G_1, \dots, G_q)$ может быть представлено в виде объединения q -областей вида $G' = (G'_1, \dots, G'_q)$, где $G'_1, \dots, G'_q$ — компоненты связности, соответственно, $G_1, \dots, G_q$. q -область G' удобно называть *компонентой связности q -множества G* . Поскольку выпуклая q -область $G^{(\alpha)}$ принадлежит G , она обязательно должна принадлежать некоторой компоненте связности, скажем, $G'^{(\alpha)}$, q -множества G . Применяя теорему 3.1 при $\omega = \omega^{(\alpha)}$, $\mathcal{D} = \mathcal{D}^{(\alpha)}$, $G = G^{(\alpha)}$, получаем, что для любого $f \in W^{(\alpha)}$

$$\sum_{\lambda_i \in \Gamma_n} p_{\lambda_i}^{(\alpha)}(f) \xrightarrow{\Omega^{(\alpha)}} f, \quad (1)$$

где

$$\Omega^{(\alpha)} = (G'^{(\alpha)} * \mathcal{D}^{(\alpha)})_0 + \omega^{(\alpha)}.$$

Пусть $f \in W_0$. Тогда $p_{\lambda_i}^{(\alpha)}(f) = p_{\lambda_i}(f)$ и, значит, (1) можно переписать в виде

$$\sum_{\lambda_i \in \Gamma_n} p_{\lambda_i}(f) \xrightarrow{\Omega^{(\alpha)}} f.$$

Это верно для любого $\alpha \in A$. Поэтому согласно предложению 2.3 последовательность

$$\sum_{\lambda_i \in \Gamma_n} p_{\lambda_i}(f)$$

сходится к f экспоненциально внутри $\Omega = \bigcup_{\alpha \in A} \Omega^{(\alpha)}$. Для завершения доказательства остается заметить, что

$$\Omega^{(\alpha)} = (G'^{(\alpha)} * D^{(\alpha)})_0 + \omega^{(\alpha)} = (G * D^{(\alpha)})_0 + \omega^{(\alpha)}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Если в формулировке теоремы 5.1 система контуров $\{\Gamma_n\}$ состоит из окружностей $\Gamma_n = \{z : |z| = r_n\}$, $r_n \rightarrow \infty$, и каждая система $u^{(1\alpha)}, \dots, u^{(q\alpha)}$, $\alpha \in A$, вместо $\omega^{(\alpha)}$ -оценки допускает $(\omega^{(\alpha)}, \omega'^{(\alpha)})$ -оценку, то, используя теорему 4.1 (вместо теоремы 3.1), можно показать, что последовательность

$$\sum_{\lambda_i \in \Gamma_n} p_{\lambda_i}(f)$$

сходится к $f \in W$ экспоненциально внутри

$$\Omega = \bigcup_{\alpha \in A} (G * (D^{(\alpha)} + \omega'^{(\alpha)}))_0 + \omega^{(\alpha)}.$$

5.3. Аннуляторный подмодуль подпространства W_0 . В этом пункте указывается процедура построения аннуляторного подмодуля I_0 подпространства W_0 по подмодулям $I^{(\alpha)}$. Введем следующие обозначения:

G — q -множество Рунге;

$I^{(A)}$ — подмодуль в $P(G)$, состоящий из всевозможных конечных сумм

$$\varphi = \varphi^{(\alpha_1)} + \dots + \varphi^{(\alpha_n)}, \quad \varphi^{(\alpha_i)} \in I^{(\alpha_i)}, \quad i = 1, \dots, n;$$

$J^{(\alpha)}$ — совокупность элементов из $P(G^{(\alpha)})$, которые могут быть представлены в виде конечных линейных комбинаций

$$\sum_{i=1}^n r_i u^{(i)}, \quad (2)$$

где $u^{(1)}, \dots, u^{(n)} \in I^{(\alpha)}$, r_i — рациональные функции;

$J^{(A)}$ — совокупность элементов из $P(G)$, обладающих свойствами:

1) $\varphi \in I_{\text{loc}}^{(A)}$,

2) φ может быть представлен в виде конечной суммы

$$\varphi = \varphi^{(\alpha_1)} + \dots + \varphi^{(\alpha_n)}, \quad \varphi^{(\alpha_i)} \in J^{(\alpha_i)}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (3)$$

Легко проверить, что $J^{(A)}$ обладает структурой подмодуля $P(G)$. Рассмотрим инвариантное подпространство $W \subset H(G)$, удовлетворяющее условию

$$W|_{G^{(\alpha)}} \subset W^{(\alpha)} \quad \forall \alpha \in A. \quad (4)$$

Подпространство W удовлетворяет условию *проекционной согласованности*, если

$$p_\lambda^{(\alpha)}|_W = p_\lambda^{(\beta)}|_W \quad \forall \alpha, \beta \in A, \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}. \quad (5)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.2. Пусть инвариантное подпространство $W \subset H(G)$ удовлетворяет условию (4). Для того чтобы это подпространство удовлетворяло условию проекционной согласованности, необходимо и достаточно, чтобы аннуляторный подмодуль I этого подпространства содержал $J^{(A)}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Пусть W удовлетворяет условиям (4), (5). Нужно доказать, что $J^{(A)} \subset I$. Прежде всего отметим, что условие (4) равносильно вложениям $I^{(\alpha)} \subset I \quad \forall \alpha \in A$ (см. лемму п. 3.3). Поскольку по условию спектры подпространств $W^{(\alpha)}$ совпадают, их аннуляторные подмодули имеют одинаковые дивизоры [2, предложение 2.4] и, следовательно, одно и то же локальное описание [2, предложение 2.1]; в частности, отсюда следует, что

$$I^{(A)}(\lambda) = I_{\text{loc}}^{(\alpha)}(\lambda) \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}.$$

Рассмотрим элемент $\varphi \in J^{(A)}(\lambda)$. Этот элемент есть сумма (3), в которой $\varphi^{(\alpha_i)}$ представлены в виде линейной комбинации элементов из $I^{(\alpha_i)}$ с рациональными коэффициентами. Раскладывая эти коэффициенты на простейшие дроби, мы можем

представить $\varphi^{(\alpha_i)}$ в виде конечной суммы однополюсных элементов, т.е. линейных комбинаций, в которых рациональные коэффициенты могут иметь полюс только в одной точке. Из вышеизложенного следует, что достаточно доказать включение $\varphi \in I$ для однополюсного элемента (3), где $\varphi^{(\alpha_i)}$ — однополюсные элементы из $I^{(\alpha_i)}$ с возможным полюсом в одной точке, скажем, λ . Выберем в каждом подмодуле $I^{(\alpha_i)}$ независимую систему $u^{(1i)}, \dots, u^{(qi)}$ и построим соответствующий интерполятор $\text{Int}_\lambda^{(\alpha_i)}$, $i = 1, \dots, n$. Мы утверждаем, что

$$\varphi^{(\alpha_i)} \equiv \text{Int}_\lambda^{(\alpha_i)} \varphi^{(\alpha_i)} \pmod{I^{(\alpha_i)}}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (6)$$

Действительно, $\varphi^{(\alpha_i)}$, $\text{Int}_\lambda^{(\alpha_i)} \varphi^{(\alpha_i)}$ представляют собой линейные комбинации элементов из $I^{(\alpha_i)}$ с рациональными коэффициентами, имеющими единственный возможный полюс в точке λ . Поэтому $\varphi^{(\alpha_i)}$, $\text{Int}_\lambda^{(\alpha_i)} \varphi^{(\alpha_i)} \equiv 0 \pmod{I^{(\alpha_i)}(\xi)}$ при $\xi \neq \lambda$. Кроме того, по свойству 1 [2, п. 3.2] элементарного интерполятора

$$\varphi^{(\alpha_i)} - \text{Int}_\lambda^{(\alpha_i)} \varphi^{(\alpha_i)} \equiv 0 \pmod{I^{(\alpha_i)}(\lambda)}.$$

Таким образом,

$$\varphi^{(\alpha_i)} - \text{Int}_\lambda^{(\alpha_i)} \varphi^{(\alpha_i)} \in I^{(\alpha_i)}_{\text{loc}}.$$

Далее, очевидно, что при достаточно большом целом m

$$(z - \lambda)^m (\varphi^{(\alpha_i)} - \text{Int}_\lambda^{(\alpha_i)} \varphi^{(\alpha_i)}) \in I^{(\alpha_i)}.$$

Отсюда, учитывая устойчивость $I^{(\alpha_i)}$, выводим

$$\varphi^{(\alpha_i)} - \text{Int}_\lambda^{(\alpha_i)} \varphi^{(\alpha_i)} \in I^{(\alpha_i)},$$

что равносильно (6). Из сравнений (6) следует, что

$$\varphi = \varphi^{(\alpha_1)} + \dots + \varphi^{(\alpha_n)} \equiv \text{Int}_\lambda^{(\alpha_1)} \varphi^{(\alpha_1)} + \dots + \text{Int}_\lambda^{(\alpha_n)} \varphi^{(\alpha_n)} \pmod{I^{(A)}}.$$

Пусть $S, S^{(\alpha_1)}, \dots, S^{(\alpha_n)}$ — функционалы из $H^*(G)$, характеристические элементы которых совпадают с $\varphi, \varphi^{(\alpha_1)}, \dots, \varphi^{(\alpha_n)}$, соответственно. Зафиксируем элемент $F \in W$. Соответствующий функционал $F^\odot = \chi(F)$ [2, п. 1.1] аннулирует $I^{(\alpha)}$ при любом $\alpha \in A$ и, следовательно, аннулирует $I^{(A)}$. Используя соотношения двойственности [2, § 1, предложения 1.1, 1.2], имеем

$$\begin{aligned} \langle S, F \rangle &= \langle F^\odot, \varphi \rangle = \left\langle F^\odot, \sum_{i=1}^n \varphi^{(\alpha_i)} \right\rangle = \left\langle F^\odot, \sum_{i=1}^n \text{Int}_\lambda^{(\alpha_i)} \varphi^{(\alpha_i)} \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \langle F^\odot, \text{Int}_\lambda^{(\alpha_i)} \varphi^{(\alpha_i)} \rangle = \sum_{i=1}^n \langle S^{(\alpha_i)}, p_\lambda^{(\alpha_i)}(F) \rangle. \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались тем, что сужение на W оператора $u^{(\alpha_i)}$, прямого по отношению к $\text{Int}_\lambda^{(\alpha_i)}$, совпадает с $p_\lambda^{(\alpha_i)}$ [2, предложение 4.6]. Фиксируем $\alpha_0 \in A$ и

систему $u^{(1)}, \dots, u^{(q)} \in I^{(\alpha_0)}$. Пусть p_λ — элементарный проектор, построенный по этой системе. В силу условия проекционной согласованности (5) $p_\lambda^{(\alpha)}(F) = p_\lambda(F) \forall \alpha \in A$. Поэтому

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \langle S^{(\alpha_i)}, p_\lambda^{(\alpha_i)}(F) \rangle &= \sum_{i=1}^n \langle S^{(\alpha_i)}, p_\lambda(F) \rangle = \sum_{i=1}^n \langle F^\odot, \text{Int}_\lambda \varphi^{(\alpha_i)} \rangle \\ &= \left\langle F^\odot, \text{Int}_\lambda \left(\sum_{i=1}^n \varphi^{(\alpha_i)} \right) \right\rangle = \langle F^\odot, \text{Int}_\lambda \varphi \rangle. \end{aligned}$$

Так как $I^{(\alpha_0)}$ устойчив и $\varphi \in I^{(A)}(\lambda) = I^{(\alpha_0)}(\lambda)$, справедливо включение $\text{Int}_\lambda \varphi \in I^{(\alpha_0)}$ (см. [2, п. 3.2, замечание к свойству 3]). Это позволяет заключить, что $\langle F^\odot, \text{Int}_\lambda \varphi \rangle = 0$. Таким образом, $\langle S, F \rangle = 0$ для любого элемента $F \in W$. Это значит, что $S \in W^0$ и, следовательно, $\varphi \in I$. Тем самым вложение $J^{(A)} \subset I$ доказано.

Достаточность. Пусть $J^{(A)} \subset I$. Нужно доказать, что W удовлетворяет условию проекционной согласованности. Зафиксируем $\alpha, \beta \in A$. Выберем независимые системы $u^{(1\alpha)}, \dots, u^{(q\alpha)}, u^{(1\beta)}, \dots, u^{(q\beta)}$ в $I^{(\alpha)}, I^{(\beta)}$, соответственно, по этим системам построим элементарные интерполяторы $\text{Int}_\lambda^{(\alpha)}, \text{Int}_\lambda^{(\beta)}$. Для произвольного элемента $\varphi \in P(G)$ рассмотрим элемент $\psi = \text{Int}_\lambda^{(\alpha)} \varphi - \text{Int}_\lambda^{(\beta)} \varphi$. Очевидно, $\psi \in J^{(\alpha)} + J^{(\beta)}$. Кроме того, $\text{Int}_\lambda^{(\alpha)} \varphi \equiv \text{Int}_\lambda^{(\beta)} \varphi \pmod{I(\xi)}$ для любого $\xi \in \mathbb{C}$ [2, п. 3.2] и, следовательно, $\psi \in I_{\text{loc}}$. Это значит, что $\psi \in J^{(A)}$ и, тем более, $\psi \in I$. Отсюда для любого элемента $F \in W$ и любого функционала $S \in H^*(G)$ с характеристическим элементом φ имеем

$$\langle S, p_\lambda^{(\alpha)}(F) \rangle = \langle F^\odot, \text{Int}_\lambda^{(\alpha)} \varphi \rangle = \langle F^\odot, \text{Int}_\lambda^{(\beta)} \varphi \rangle = \langle S, p_\lambda^{(\beta)}(F) \rangle.$$

Это верно для любого линейного непрерывного функционала S , поэтому $p_\lambda^{(\alpha)}(F) = p_\lambda^{(\beta)}(F)$. Поскольку в рассуждении $\alpha, \beta \in A, F \in W, \lambda \in \mathbb{C}$ произвольны, заключаем, что W удовлетворяет условию (5).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.3. *Аннуляторный подмодуль I_0 подпространства W_0 совпадает с замыканием $J^{(A)}$ в топологии $P(G)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Подпространство W_0 удовлетворяет условиям (4) и (5). Поэтому по предложению 5.2 $J^{(A)} \subset I_0$, и в силу замкнутости I_0 замыкание J подмодуля $J^{(A)}$ принадлежит I_0 . Пусть W — инвариантное подпространство в $H(G)$ с $\text{An } W = J$. Поскольку $J \supset I^{(\alpha)}$ при любом $\alpha \in A$, подпространство W удовлетворяет условию (4). Кроме того, $J \supset J^{(A)}$. По предложению 5.2 W удовлетворяет условию проекционной согласованности (5). Из определения W_0 теперь следует, что $W \subset W_0$. Для аннуляторных подмодулей имеем противоположное вложение $J \supset I_0$. Вложения $J \subset I_0$ и $J \supset I_0$ влекут $I_0 = J$.

5.4. Условие квазиустойчивости. Представляет интерес ситуация, когда аннуляторный подмодуль подпространства W_0 является квазиустойчивым [1, § 4]. Пусть q -множество Рунге $G = (G_1, \dots, G_q)$ конечно несвязно, т.е. каждая компонента G_i этого множества может быть представлена в виде объединения конечного числа попарно непересекающихся односвязных областей G_{ij} , $j = 1, \dots, n_i$. Соответствующее множество индексных пар (i, j) обозначим Γ . Рассмотрим систему $\{G^{(\alpha)}\}$, $\alpha \in A$, q -областей $G^{(\alpha)} \subset G$. Пусть $G^{(\alpha)} = \{G_1^{(\alpha)}, \dots, G_q^{(\alpha)}\}$. Будем говорить, что система $\{G^{(\alpha)}\}$, $\alpha \in A$, удовлетворяет условию разделения, если каждая область G_{ij} содержит не более одной области $G_i^{(\alpha)}$, $i = 1, \dots, q$, $\alpha \in A$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.4. Пусть G – конечно несвязное q -множество Рунге. Предположим, что система q -областей $\{G^{(\alpha)}\}$, $G^{(\alpha)} \subset G$, $\alpha \in A$, удовлетворяет условию разделения. Тогда аннуляторный подмодуль I_0 подпространства W_0 совпадает с наименьшим замкнутым квазиустойчивым подмодулем, содержащим подмодули $I^{(\alpha)}$, $\alpha \in A$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $J_0^{(A)}$ совокупность элементов ψ из $P(G)$, обладающих свойствами:

- 1) $\psi = \frac{p}{q}\varphi$, где $\varphi \in I^{(A)}$, p, q – многочлены;
- 2) $\psi \in I_{\text{loc}}^{(A)}$.

Множество $J_0^{(A)}$ обладает структурой квазиустойчивого подмодуля в $P(G)$. Согласно замечанию к предложению 4.5 [1] наименьший замкнутый квазиустойчивый подмодуль, содержащий $I^{(\alpha)}$, $\alpha \in A$, совпадает с замыканием $J_0^{(A)}$ в топологии $P(G)$. С другой стороны, согласно предложению 5.3 аннуляторный подмодуль $I_0 = \text{An } W_0$ совпадает с замыканием в $P(G)$ подмодуля $J^{(A)}$. Поэтому достаточно показать, что в рассматриваемой ситуации $J_0^{(A)} = J^{(A)}$. Легко видеть, что каждый элемент $\psi \in J^{(A)}$ можно представить в виде $\psi = \frac{p}{q}\varphi$, где $\varphi \in I^{(A)}$. Отсюда следует, что $J^{(A)} \subset J_0^{(A)}$. Доказательство обратного вложения требует подготовки. Пусть

$$\begin{aligned} \varphi &= \varphi^{(\alpha_1)} + \dots + \varphi^{(\alpha_n)}, \quad \varphi^{(\alpha_i)} \in P(G^{(\alpha)}), \\ \varphi &= (\varphi_1, \dots, \varphi_q), \\ \varphi^{(\alpha)} &= (\varphi_1^{(\alpha)}, \dots, \varphi_q^{(\alpha)}), \quad \alpha = \alpha_1, \dots, \alpha_n. \end{aligned} \quad (7)$$

Воспользуемся теперь условием разделения: каждое множество G_{ij} , $(i, j) \in \Gamma$, содержит не более одной области $G_i^{(\alpha)}$. Положим $\psi_{ij} = \varphi_i^{(\alpha)}$, если $G_{ij} \supset G_i^{(\alpha)}$, и $\psi_{ij} = 0$, если G_{ij} не содержит никакой области $G_i^{(\alpha)}$. После таких переобозначений соотношение (7) можно переписать в виде q соотношений

$$\varphi_i = \sum_{j=1}^{n_i} \psi_{ij}, \quad i = 1, \dots, q,$$

или, если воспользоваться гомоморфизмом χ , введенном в [1, п. 4.2], в виде $\varphi = \chi((\varphi_{ij}))$. Согласно следствию 1 предложения 4.1 [1] имеет место импликация

$$\frac{\varphi}{\lambda - \lambda_0} \in P(G) \Rightarrow (\lambda - \lambda_0) \mid \psi_{ij} \quad \forall (i, j) \in \Gamma.$$

Если при этом $\psi_{ij} = \varphi_j^{(\alpha)} \in P(G^{(\alpha)})$, то в силу устойчивости модулей, ассоциированных с областями [1, п. 3.3], получаем, что консеквент импликации принимает форму

$$\frac{\varphi_j^{(\alpha)}}{\lambda - \lambda_0} \in P(G_j^{(\alpha)}), \quad j = 1, \dots, q,$$

или, что то же самое,

$$\frac{\varphi^{(\alpha)}}{\lambda - \lambda_0} \in P(G^{(\alpha)}).$$

Таким образом, для суммы (7) справедлива импликация

$$\frac{\varphi}{\lambda - \lambda_0} \in P(G) \implies \frac{\varphi^{(\alpha)}}{\lambda - \lambda_0} \in P(G^{(\alpha)}), \quad \alpha = \alpha_1, \dots, \alpha_n. \quad (8)$$

Пусть r – рациональная функция. Последовательно используя импликацию (8) для двучленов $\lambda - \lambda_1, \dots, \lambda - \lambda_N$, где $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ – полюсы r , получаем импликацию

$$r\varphi \in P(G) \implies r\varphi^{(\alpha)} \in P(G^{(\alpha)}), \quad \alpha = \alpha_1, \dots, \alpha_n.$$

Теперь можем приступить к доказательству вложения

$$J_0^{(A)} \subset J^{(A)}. \quad (9)$$

Пусть $\psi \in J_0^{(A)}$, т.е. ψ есть элемент из $P(G)$, принадлежащий локально $I^{(A)}$ и допускающий представление $\psi = r\varphi$, где r – рациональная функция, а

$$\varphi = \varphi^{(\alpha_1)} + \dots + \varphi^{(\alpha_n)}, \quad \varphi^{(\alpha)} \in I^{(\alpha)}, \quad \alpha = \alpha_1, \dots, \alpha_n.$$

Так как по условию $r\varphi \in P(G)$, то по доказанному

$$r\varphi^{(\alpha)} \in P(G^{(\alpha)}), \quad \alpha = \alpha_1, \dots, \alpha_n.$$

Более того, включение $\varphi^{(\alpha)} \in I^{(\alpha)}$ влечет $r\varphi^{(\alpha)} \in J^{(\alpha)}$ и, следовательно, имеет место представление

$$\psi = \psi^{(\alpha_1)} + \dots + \psi^{(\alpha_n)},$$

где $\psi^{(\alpha)} = r\varphi^{(\alpha)} \in J^{(\alpha)}$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. Учитывая, что $\psi \in I_{\text{loc}}^{(A)}$, заключаем, что $\psi \in J^{(A)}$. Тем самым вложение (9) доказано. Вместе с ним доказано, что $J_0^{(A)} = J^{(A)}$.

§ 6. Дополнение

Пусть G, G' — односвязные q -области, $G' \subset G$,

$$H = H(G), \quad H' = H(G'), \quad P = P(G), \quad P' = P(G').$$

Отметим, что вложение $G' \subset G$ влечет непрерывные вложения $H \subset H', P' \subset P$. Далее, пусть W — инвариантное подпространство в H , W' — замыкание W в H' , I, I' — аннуляторные подмодули подпространств W, W' , соответственно. В п. 3.7 при доказательстве теоремы 3.1 использовался следующий факт: *если I — устойчивый подмодуль и $\text{Rank } I = \text{Rank } I' = q$, то $\text{Sp } W' = \text{Sp } W$* . Этот факт нуждается в обосновании. Ниже доказывается более общее утверждение, представляющее самостоятельный интерес.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.1. *Если подмодуль I является устойчивым и $\text{Rank } I' = \text{Rank } I$, то*

$$\text{Sp } W' = \text{Sp } W. \quad (1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу предложения 2.4 [2] соотношение (1) равносильно соотношению

$$\text{Div } I' = \text{Div } I \quad (2)$$

и в силу предложения 2.1 [2] — соотношению

$$I' = I. \quad (3)$$

Последнее означает, что локальные подмодули, порождаемые I и I' , совпадают, т.е. $I'(\lambda) = I(\lambda) \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}$. Таким образом, нужно доказать соотношение (3). В соответствии с предложением 3.3 $I' = I \cap P$, откуда в силу вложения $P' \subset P$ имеем $I' \subset I$. Это сразу влечет вложения $I'(\lambda) \subset I(\lambda) \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}$. Цель будет достигнута, если будут доказаны обратные вложения $I(\lambda) \subset I'(\lambda)$. Зафиксируем произвольное λ . Рассмотрим локальный подмодуль $I'(\lambda)$, порождаемый I' в точке λ . Пусть φ — произвольный элемент из $I(\lambda)$. Покажем, что $\varphi \in I'(\lambda)$. Обозначим через k общее значение рангов I и I' . По определению ранга подмодуль I' содержит независимую систему $u^{(1)}, \dots, u^{(k)}$. Поскольку $I' \subset I$, эта система принадлежит также I и, тем более, локальному подмодулю $I(\lambda)$. Подмодуль $I(\lambda)$ имеет тот же ранг k , что и I (см. [1, п. 2.7]). Поэтому расширенная система $u^{(1)}, \dots, u^{(k)}, \varphi$ зависима над $O(\lambda)$, т.е. существуют элементы $c_1, \dots, c_k, c$ кольца $O(\lambda)$ такие, что

$$c\varphi = \sum_{i=1}^k c_i u^{(i)}.$$

При этом $c \neq 0$, так как в противном случае система $u^{(1)}, \dots, u^{(k)}$ была бы зависимой. В некоторой окрестности точки λ ростки $c_1, \dots, c_k, c$ можно отождествить с

представляющими их функциями; поэтому, если эта окрестность достаточно мала, имеет место представление

$$\varphi = \sum_{i=1}^k C_i u^{(i)},$$

где коэффициенты C_i голоморфны всюду в указанной окрестности с возможным исключением точки λ , где они могут иметь особенность типа полюса. Представим φ в виде суммы

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi_1, \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= \sum_{i=1}^k (\Gamma_{\lambda} C_i) u^{(i)}, \\ \varphi_1 &= \sum_{i=1}^k (\text{Pr}_{\lambda} C_i) u^{(i)}. \end{aligned}$$

Очевидно, что φ_1 представляет росток из $I'(\lambda)$. Покажем, что то же самое можно сказать о φ_0 . С этой целью заметим, что q -функция φ_0 есть линейная комбинация $u^{(1)}, \dots, u^{(k)}$ с рациональными коэффициентами с единственным возможным полюсом в точке λ . Таким образом, φ_0 может быть представлена в виде $\varphi = v/(z - \lambda)^m$, где v — линейная комбинация $u^{(1)}, \dots, u^{(k)}$ с полиномиальными коэффициентами. Ясно, что $v \in I$. Из соотношения (4) следует, что φ_0 голоморфна в окрестности точки λ_0 . В силу устойчивости модуля P' [2, §3] заключаем, что $\varphi_0 = v/(z - \lambda)^m \in P'$. Далее, в силу включений $\varphi \in I(\lambda)$, $\varphi_1 \in I(\lambda)$ то же соотношение (4) влечет, что $\varphi_0 \in I(\lambda)$. Отсюда на основании устойчивости I заключаем, что $\varphi_0 \in I$. Итак, φ_0 принадлежит одновременно I и P' . Следовательно, $\varphi_0 \in I \cap P' = I'$. Тем более, $\varphi_0 \in I'(\lambda)$. Теперь соотношение (4) влечет $\varphi \in I'(\lambda)$. Поскольку это верно для любого элемента $\varphi \in I(\lambda)$, заключаем, что $I(\lambda) \subset I'(\lambda)$. Тем самым установлено, что $I'(\lambda) = I(\lambda)$. Остается отметить, что это соотношение справедливо для любого $\lambda \in \mathbb{C}$.

СЛЕДСТВИЕ. Если подмодуль I является устойчивым и $\text{Rank } I' = \text{Rank } I$, то $I'(\lambda) = I(\lambda) \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}$.

Это утверждение фактически содержится в доказательстве предложения 6.1. Оно следует из равносильности соотношений (1)–(3).

В заключение автор выражает благодарность Российскому фонду фундаментальных исследований и Академии наук Республики Башкортостан за поддержку при выполнении этой работы.

Список литературы

1. Красичков-Терновский И. Ф. Фундаментальный принцип для инвариантных подпространств аналитических функций. I // Матем. сб. 1997. Т. 188. № 2. С. 25–56.
2. Красичков-Терновский И. Ф. Фундаментальный принцип для инвариантных подпространств аналитических функций. II // Матем. сб. 1997. Т. 188. № 6. С. 57–98.
3. Dickson D. G. Analytic mean periodic functions // Trans. Amer. Math. Soc. 1964. V. 110. № 2. P. 361–374.
4. Леонтьев А. Ф. О представлении функций последовательностями полиномов Дирихле // Матем. сб. 1966. Т. 70. № 1. С. 132–144.
5. Робертсон А., Робертсон Б. Топологические векторные пространства. М.: Мир, 1967.
6. Келли Д. Л. Общая топология. М.: Наука, 1968.
7. Левин Б. Я. Распределение корней целых функций. М.: Гос. изд. тех. литературы, 1956.
8. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ в нормированных пространствах. М.: Физматгиз, 1959.
9. Понтрягин Л. С. Линейные дифференциальные игры преследования // Матем. сб. 1980. Т. 112. № 3. С. 307–330.
10. Красичков-Терновский И. Ф. Инвариантные подпространства аналитических функций. III. О распространении спектрального синтеза // Матем. сб. 1972. Т. 88. № 3. С. 331–352.
11. Красичков-Терновский И. Ф. Спектральный синтез на системах выпуклых областей. Распространение синтеза // Матем. сб. 1980. Т. 112. № 1. С. 94–114.
12. Красичков-Терновский И. Ф. Инвариантные подпространства аналитических функций. I. Спектральный синтез на выпуклых областях // Матем. сб. 1972. Т. 87. № 4. С. 459–489.
13. Юлмухаметов Р. С. Аппроксимация субгармонических функций // Anal. Math. 1985. Т. 11. № 3. С. 257–282.
14. Юлмухаметов Р. С. Аппроксимация однородных субгармонических функций // Матем. сб. 1987. Т. 134. № 4. С. 511–529.
15. Красичков-Терновский И. Ф. Спектральный синтез аналитических функций на системах выпуклых областей // Матем. сб. 1980. Т. 111. № 1. С. 3–41.
16. Мерзляков С. Г. Системы уравнений свертки в пространствах векторнозначных функций // Дис. ... канд. физ.-матем. наук. Уфа: Башкирский филиал АН СССР, 1984.
17. Красичков-Терновский И. Ф. Спектральный синтез на системах неограниченных выпуклых областей // Матем. сб. 1980. Т. 111. № 3. С. 384–401.
18. Красичков-Терновский И. Ф. Для каждого инвариантного подпространства, допускающего спектральный синтез, существует метод аппроксимации // Сиб. матем. журн. 1981. Т. XXII. № 3. С. 74–90.
19. Krasichkov-Ternovskii I. F. Spectral synthesis on a system of unbounded domains starlike in a common direction // Anal. Math. 1993. V. 19. № 3. P. 217–223.
20. Мерзляков С. Г. Спектральный синтез для оператора дифференцирования на системах криволинейных полос // Матем. сб. 1995. Т. 186. № 5. С. 85–102.
21. Parreau F., Weit Y. Schwartz's theorem on mean periodic vector-valued functions // Bull. Soc. Math. France. 1989. V. 117. № 3. P. 319–325.

Институт математики с ВЦ, Уфа

Поступила в редакцию
20.01.1997