Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. Н. Пустовойтов, Оценка наилучших приближений периодических функций тригонометрическими полиномами через усредненные разности и многомерная теорема Джексона, *Матем. сб.*, 1997, том 188, номер 10, 95–108

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm265>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.60.19

26 апреля 2023 г., 16:40:45

УДК 517.5

Н. Н. Пустовойтов

**Оценка наилучших приближений
периодических функций тригонометрическими
полиномами через усредненные разности
и многомерная теорема Джексона**

В первом параграфе данной работы изучаются наилучшие приближения периодических функций одной вещественной переменной тригонометрическими полиномами. Указанные приближения оцениваются через усредненные разности. Во втором параграфе дается многомерное обобщение оценок из первого раздела. Как следствие этого результата получается многомерная теорема Джексона.

Библиография: 7 названий.

§ 1.

Будем рассматривать 2π -периодические функции одной вещественной переменной $f(x)$. Считаем, что

$$\|f\|_p = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^p dx \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty,$$

$$\|f\|_\infty = \operatorname{vrai\,sup}_{x \in [0, 2\pi]} |f(x)|.$$

При $1 \leq p < \infty$ будем изучать функции $f(x) \in L_p$, т.е. такие функции, у которых $\|f\|_p < \infty$. При $p = \infty$ будем изучать непрерывные функции $f(x) \in C$.

Исследуемые функции приближаются тригонометрическими полиномами

$$P_n(x) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx}, \quad c_k = \bar{c}_{-k},$$

т.е. тригонометрическими полиномами с вещественными коэффициентами.

Мы изучим оценки наилучших приближений

$$E_n(f)_p = \inf_{P_n(x)} \|f(x) - P_n(x)\|_p$$

через усредненные разности порядка l , т.е. через величины

$$\Phi_l(f; t)_p = \frac{1}{t} \int_0^t \|\Delta_h^l f(\cdot)\|_p dh.$$

Аналогичные величины для $0 < p < 1$ были рассмотрены Руновским [1], [2]. В работе [3] доказано, что наилучшие приближения функции полиномами по системе Хаара оцениваются через усредненные разности ($0 < p < 1$).

Рассмотрим также модули непрерывности порядка l , задаваемые равенством

$$\omega_l(f; t)_p = \sup_{|h| \leq t} \|\Delta_h^l f(\cdot)\|_p, \quad 1 \leq p \leq \infty.$$

Очевидно, $\Phi_l(f; t)_p \leq \omega_l(f; t)_p$ при всех $l \geq 1$.

Величины $\Phi_l(f; t)_p$ обладают следующими свойствами.

- 1) $\lim_{t \rightarrow 0} \Phi_l(f; t)_p = 0$. (Это свойство легко вытекает из правила Лопиталя.)
- 2) $\Phi_l(f; t)_p$ непрерывна при $t > 0$.
- 3) $\Phi_l(f_1 + f_2; t)_p \leq \Phi_l(f_1; t)_p + \Phi_l(f_2; t)_p$.
- 4) $\Phi_l(f; t)_p \leq 2^l \|f\|_p$.
- 5) $\Phi_l(f; nt)_p \leq n^l \Phi_l(f; t)_p$, $n \in \mathbb{N}$.

Докажем это свойство.

$$\Phi_l(f; nt)_p = \frac{1}{nt} \int_0^{nt} \|\Delta_h^l f(\cdot)\|_p dh = \frac{1}{t} \int_0^t \|\Delta_{n\tau}^l f(\cdot)\|_p d\tau.$$

Мы сделали замену $h = n\tau$. Далее, применяя равенство

$$\Delta_{n\tau}^l f(x) = \sum_{i_1=0}^{n-1} \cdots \sum_{i_l=0}^{n-1} \Delta_{\tau}^l f(x + (i_1 + \cdots + i_l)\tau),$$

получаем свойство 5).

6) $\Phi_l(f; t)_p$ почти возрастает, т.е. существует константа c , не зависящая от t , и такая, что для всех $0 < t_1 < t_2$ выполняется неравенство

$$\Phi_l(f; t_1)_p \leq c \Phi_l(f; t_2)_p.$$

Это свойство следует из сформулированной ниже теоремы 1. Действительно,

$$\Phi_l(f; t_1)_p \leq \omega_l(f; t_1)_p \leq \omega_l(f; t_2)_p \leq c \Phi_l(f; t_2)_p.$$

Оценки наилучших приближений через усредненные разности рассматривались в уже упомянутых работах [1]–[3] (при $0 < p < 1$). В работе Ульянова [4] в леммах 3 и 3' такие оценки фактически доказаны для случая $1 \leq p \leq \infty$, $l = 1$.

Следующая теорема показывает слабую эквивалентность величин $\Phi_l(f; t)_p$ и $\omega_l(f; t)_p$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $f(x)$ является 2π -периодической функцией из L_p , $1 \leq p < \infty$, либо из C , $p = \infty$. Тогда

$$\Phi_l(f; t)_p \leq \omega_l(f; t)_p \ll \Phi_l(f; t)_p.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Первое неравенство очевидно, а второе выполняется с некоторой константой, не зависящей от t .

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Доказательство теоремы 1 аналогично доказательству теоремы 3.1 из [2].

Из теоремы 1 и теоремы Джексона вытекает

ТЕОРЕМА 2. Для любой 2π -периодической функции $f \in L_p$, $1 \leq p < \infty$, либо $f \in C$, $p = \infty$, верно неравенство $E_n(f)_p \leq c \Phi_l(f; 2\pi/n)_p$, где c не зависит от n .

§ 2.

Перейдем к многомерному случаю.

В этом параграфе мы будем рассматривать функции от d вещественных переменных $f(\mathbf{x}) = f(x_1, \dots, x_d)$, имеющие период 2π по каждой переменной.

Пусть $\pi_d = [0, 2\pi]^d$, тогда

$$\|f\|_p = \left(\frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\pi_d} |f(\mathbf{x})|^p d\mathbf{x} \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty,$$

$$\|f\|_\infty = \operatorname{vrai\,sup}_{\mathbf{x} \in \pi_d} |f(\mathbf{x})|, \quad p = \infty.$$

Будем, по-прежнему, считать, что $f(\mathbf{x}) \in L_p$ при $1 \leq p < \infty$ и $f(\mathbf{x}) \in C$ при $p = \infty$. Для d -мерного вектора $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_d)$ с целыми неотрицательными компонентами через $\rho(\mathbf{s})$ будем обозначать двоичную пачку:

$$\rho(\mathbf{s}) = \{\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_d) : k_j - \text{целые, } 2^{s_j-1} \leq |k_j| < 2^{s_j}, j = 1, \dots, d\}.$$

Пусть $\varkappa_n, n \in \mathbb{N}$, — такие множества, что

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \varkappa_n = \mathbb{R}_+^d, \quad \varkappa_n \subset \varkappa_{n+1}.$$

Предположим, что множества $\varkappa_n$ таковы, что для любого $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_d) \in \varkappa_n$ справедливо вложение

$$\prod_{j=1}^d [0, s_j] \subset \varkappa_n.$$

Обозначим $\theta_n = \varkappa_{n+1} \setminus \varkappa_n$. Считаем, что для любого вектора $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_d)$, $s_j \in \mathbb{Z}_+$, такого, что $\mathbf{s} \in \varkappa_n$, и для любого индекса $1 \leq j_0 \leq d$ существует $\tilde{s}_{j_0} \in \mathbb{Z}_+$, для которого $(s_1, \dots, s_{j_0-1}, \tilde{s}_{j_0}, s_{j_0+1}, \dots, s_d) \in \theta_n$. Кроме того, предполагаем существование числа $r > 0$, не зависящего от n , и такого, что для любого $\mathbf{s} \in \theta_n$ и для любого индекса $1 \leq j_0 \leq d$ вектор $(s_1, \dots, s_{j_0-1}, s_{j_0} + r, s_{j_0+1}, \dots, s_d)$ не принадлежит множеству θ_n .

Исходя из множества $\varkappa_n$, определим множества

$$Q_n = \bigcup_{\mathbf{s} \in \varkappa_n} \rho(\mathbf{s}).$$

Как легко видеть, множества Q_n центрально симметричны.

Будем приближать функции $f(\mathbf{x})$ тригонометрическими полиномами с гармониками из Q_n , т.е. полиномами

$$P_n(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k} \in Q_n} c_{\mathbf{k}} e^{i(\mathbf{k}, \mathbf{x})},$$

где $c_{-k_1, \dots, -k_d} = \bar{c}_{k_1, \dots, k_d}$, вектор $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_d)$ имеет целочисленные координаты. Для таких полиномов будем писать

$$P_n(\mathbf{x}) \in T(Q_n).$$

Определим наилучшие приближения функции $f(\mathbf{x})$

$$E_{Q_n}(f)_p = \inf_{P_n \in T(Q_n)} \|f - P_n\|_p.$$

Смешанная разность порядка l функции $f(\mathbf{x})$ определяется следующим образом ($\mathbf{h} = (h_1, \dots, h_d)$):

$$\Delta_{\mathbf{h}}^l f(\mathbf{x}) = \Delta_{h_1}^l \cdots \Delta_{h_d}^l f(\mathbf{x}), \quad (1)$$

т. е. это разность порядка l с шагом h_j по переменной x_j .

Изучим оценку наилучшего приближения $E_{Q_n}(f)_p$ через усредненные смешанные разности, т. е. величины

$$\begin{aligned} \Phi^l(f; \mathbf{t})_p &= \Phi^l(f; (t_1, \dots, t_d))_p \\ &= \frac{1}{t_1 \cdots t_d} \int_0^{t_1} \cdots \int_0^{t_d} \|\Delta_{\mathbf{h}}^l f(\cdot)\|_p dh_1 \cdots dh_d. \end{aligned}$$

Для этих величин справедливы свойства 1)–4), сформулированные в § 1. Свойство 5) запишется иначе:

$$5') \Phi^l(f; (k_1 t_1, \dots, k_d t_d))_p \leq (\prod_{j=1}^d k_j)^l \Phi^l(f; \mathbf{t})_p.$$

Свойство 6) примет следующий вид.

6') Существует константа c , не зависящая от $\mathbf{t}$ и такая, что если $\mathbf{t}^{(1)} = (t_1^{(1)}, \dots, t_d^{(1)})$, $\mathbf{t}^{(2)} = (t_1^{(2)}, \dots, t_d^{(2)})$, $t_j^{(1)} \leq t_j^{(2)}$, $j = 1, \dots, d$, то $\Phi^l(f; \mathbf{t}^{(1)})_p \leq c \Phi^l(f; \mathbf{t}^{(2)})_p$.

Это свойство легко получается из его одномерного аналога, из свойства 6).

Отметим, что при фиксированных t_i , $i \neq j$, функция $\Phi^l(f; t_1, \dots, t_{j-1}, t_j, t_{j+1}, \dots, t_d)_p$ как функция от t_j обладает всеми свойствами одномерных усредненных разностей.

Теорема 1 легко обобщается на многомерный случай. Определим смешанный модуль непрерывности порядка l следующим образом:

$$\Omega^l(f; \mathbf{t})_p = \sup_{\substack{|h_j| \leq t_j \\ j=1, \dots, d}} \|\Delta_{\mathbf{h}}^l f(\mathbf{x})\|_p, \quad (2)$$

где разности $\Delta_{\mathbf{h}}^l f(\mathbf{x})$ определяются равенством (1).

ТЕОРЕМА 3. Пусть $f(\mathbf{x}) \in L_p$, $1 \leq p < \infty$, либо $f(\mathbf{x}) \in C$, $p = \infty$, и пусть $f(\mathbf{x})$ имеет период 2π по каждой переменной. Тогда

$$\Phi^l(f; \mathbf{t})_p \leq \Omega^l(f; \mathbf{t})_p \ll \Phi^l(f; \mathbf{t})_p,$$

причем константа во втором неравенстве не зависит от $\mathbf{t}$.

Перейдем к оценке наилучших приближений. Всюду ниже $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_d)$ будет обозначать вектор с целыми неотрицательными компонентами.

Пусть $e \subseteq \{1, \dots, d\}$. Количество элементов множества e удовлетворяет условию $|e| = \nu \leq d$. Для такого множества определим

$$\Phi_e^l(f; \mathbf{t})_p = \left(\prod_{j \in e} t_j \right)^{-1} \int_0^{t_{j_1}} \dots \int_0^{t_{j_\nu}} \|\Delta_{\mathbf{h}}^l(e) f(\mathbf{x})\|_p dh_{j_1} \dots dh_{j_\nu},$$

где

$$\Delta_{\mathbf{h}}^l(e) f(\mathbf{x}) = \left(\prod_{j \in e} \Delta_{h_j}^l \right) f(\mathbf{x})$$

— разность порядка l лишь по переменным x_j , $j \in e$, с шагом h_j . Положим

$$\theta_n^{(e)} = \{\mathbf{s} \in \theta_n : s_j = 0, j \notin e\}.$$

Если $e = \{1, \dots, d\}$, то e указывать не будем.

ТЕОРЕМА 4. Пусть функция $f(\mathbf{x}) = f(x_1, \dots, x_d)$ является 2π -периодической по каждой переменной. Пусть, далее, $f(\mathbf{x}) \in L_p$, $1 \leq p < \infty$, либо $f(\mathbf{x}) \in C$, $p = \infty$. Тогда

$$E_{Q_n}(f)_p \ll \sum_{1 \leq |e| \leq d} \left(\sum_{\mathbf{s} \in \theta_n^{(e)}} (\Phi_e^l(f; 2^{-\mathbf{s}})_p)^{p_0} \right)^{1/p_0}, \quad 1 \leq p < \infty,$$

$$E_{Q_n}(f)_\infty \ll \sum_{1 \leq |e| \leq d} \sum_{\mathbf{s} \in \theta_n^{(e)}} \Phi_e^l(f; 2^{-\mathbf{s}})_\infty,$$

где $2^{-\mathbf{s}} = (2^{-s_1}, \dots, 2^{-s_d})$, $p_0 = \min\{p, 2\}$. Указанные неравенства выполняются с константами, не зависящими от n .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Случай А) $1 < p < \infty$. Доказательство аналогично доказательству многомерной теоремы Джексона из работы [5].

Сначала рассмотрим функции $f(\mathbf{x}) \in L_p^0$, т.е. такие $f(\mathbf{x})$, что

$$\int_0^{2\pi} f(\mathbf{x}) dx_j = 0, \quad j = 1, \dots, d.$$

Пусть $1 < p \leq 2$. Тогда $p_0 = p$. Как известно, наилучшие по порядку приближения в рассматриваемом случае дают суммы Фурье. Поэтому для $f \in L_p$ имеем

$$E_{Q_n}(f)_p \ll \left\| \sum_{\mathbf{m} \notin \mathcal{K}_n} \delta_{\mathbf{m}}(f; \mathbf{x}) \right\|_p,$$

где

$$\delta_{\mathbf{m}}(f; \mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k} \in \rho(\mathbf{m})} \hat{f}(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k}, \mathbf{x})},$$

$\hat{f}(\mathbf{k})$ — коэффициенты Фурье функции $f(\mathbf{x})$, $\mathbf{m} = (m_1, \dots, m_d)$, $m_j \in \mathbb{Z}_+$. В силу условий, наложенных на множества $\mathcal{K}_n$, найдется число $\alpha_1 = \alpha_1(l, d)$ такое, что

для любого $\mathbf{m} \notin \mathcal{K}_{n+\alpha_1}$, $m_j > l + 3$, существует $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_d) \in \theta_n$ такое, что $m_j \geq s_j + l + 3$, $j = 1, \dots, d$. Обозначим это $\mathbf{s}$ через $\mathbf{s}(\mathbf{m})$.

Если для некоторого вектора $\mathbf{m} = (m_1, \dots, m_d)$ с целыми неотрицательными компонентами, $\mathbf{m} \in \mathcal{K}_{n+\alpha_1}$, найдется индекс $1 \leq j_0 \leq d$ такой, что $m_{j_0} \leq l + 3$, то можно утверждать, что существует $1 \leq j_1 \leq d$, для которого $m_{j_1} > l + 3$. Более точно, множество $\{1, \dots, d\}$ можно разбить на два непересекающихся множества e_1 и e_2 такие, что $m_j \leq l + 3$ для $j \in e_1$ и $m_j > l + 3$ для $j \in e_2$, причем множество e_2 непусто.

Можно указать такое $\alpha_2 = \alpha_2(l, d)$, что при $\mathbf{m} \notin \mathcal{K}_{n+\alpha_2}$, для которого $m_j \leq l + 3$, $j \in e_1$, и $m_j > l + 3$, $j \in e_2$, будет существовать $\mathbf{s} \in \theta_n^{(e_2)}$ такое, что $m_j \geq s_j + l + 3$, $j \in e_2$. Это $\mathbf{s}$ мы также будем обозначать $\mathbf{s}(\mathbf{m})$.

Возьмем $\alpha = \max\{\alpha_1, \alpha_2\}$. Обозначим

$$\begin{aligned} A_{nl}(\alpha) &= \{\mathbf{m} : m_j > 0 - \text{целые, } m_j > l + 3, j = 1, \dots, d, \mathbf{m} \notin \mathcal{K}_{n+\alpha}\}, \\ B_{nl}(\alpha) &= \{\mathbf{m} : m_j \geq 0 - \text{целые, } m_j \leq l + 3, j \in e_1 \neq \emptyset, \\ &\quad m_j > l + 3, j \in e_2, \mathbf{m} \notin \mathcal{K}_{n+\alpha}\}. \end{aligned}$$

Далее, очевидно,

$$\begin{aligned} E_{Q_n}(f)_p &\ll \left\| \sum_{\mathbf{m} \in \mathcal{K}_{n+\alpha} \setminus \mathcal{K}_n} \delta_{\mathbf{m}}(f; \mathbf{x}) \right\|_p \\ &+ \left\| \sum_{\mathbf{m} \in A_{nl}(\alpha)} \delta_{\mathbf{m}}(f; \mathbf{x}) \right\|_p + \left\| \sum_{\mathbf{m} \in B_{nl}(\alpha)} \delta_{\mathbf{m}}(f; \mathbf{x}) \right\|_p. \end{aligned} \quad (3)$$

Оценим второе слагаемое. Как показано в [5], числа $(\lambda_{k_j}^{(l)})^{-1}$, обратные числам

$$\lambda_{k_j}^{(l)} = 2^{s_j(\mathbf{m})} \int_0^{2^{-s_j(\mathbf{m})}} (e^{ik_j t_j} - 1)^l dt_j, \quad [2^{m_j-1}] \leq |k_j| < 2^{m_j},$$

являются множителями Марцинкевича. По теореме о множителях Марцинкевича (см. [6, теорема Б]) второе слагаемое оценивается следующим образом:

$$\left\| \sum_{\mathbf{m} \in A_{nl}(\alpha)} \delta_{\mathbf{m}}(f; \mathbf{x}) \right\|_p \ll \left\| \sum_{\mathbf{m} \in A_{nl}(\alpha)} \sum_{\mathbf{k} \in \rho(\mathbf{m})} \hat{f}(\mathbf{k}) \prod_{j=1}^d \lambda_{k_j}^{(l)} e^{i(\mathbf{k}, \mathbf{x})} \right\|_p = I.$$

Обозначим

$$\Phi_{\mathbf{s}}(\mathbf{x}) = \int_0^{2^{-s_1}} \dots \int_0^{2^{-s_d}} \Delta_{\mathbf{t}}^l f(\mathbf{x}) dt.$$

Считаем, далее, $\|\mathbf{s}\|_1 = s_1 + \dots + s_d$. Используя теорему Литтлвуда–Пэли, получаем

$$\begin{aligned} I &\ll \left\| \left(\sum_{\mathbf{m} \in A_{nl}(\alpha)} |2^{\|\mathbf{s}(\mathbf{m})\|_1} \delta_{\mathbf{m}}(\Phi_{\mathbf{s}(\mathbf{m})}; \mathbf{x})|^2 \right)^{1/2} \right\|_p \\ &\ll \left(\sum_{\mathbf{s} \in \theta_n} \left\| \left(\sum_{\mathbf{m}} |\delta_{\mathbf{m}}(2^{\|\mathbf{s}\|_1} \Phi_{\mathbf{s}}; \mathbf{x})|^2 \right)^{1/2} \right\|_p^p \right)^{1/p}. \end{aligned}$$

Здесь внутренняя сумма берется по всем векторам $\mathbf{m} = (m_1, \dots, m_d)$ с целыми неотрицательными компонентами. Применяя к этому выражению теорему Литтлвуда–Пэли, а затем обобщенное неравенство Минковского, мы получаем

$$\left\| \sum_{\mathbf{m} \in A_{nl}(\alpha)} \delta_{\mathbf{m}}(f; \mathbf{x}) \right\|_p \ll \left(\sum_{\mathbf{s} \in \theta_n} (\Phi^l(f; 2^{-\mathbf{s}})_p)^p \right)^{1/p}.$$

Оценим последнее слагаемое в неравенстве (3). Воспользуемся, как и при оценке второго слагаемого, множителями Марцинкевича $(\lambda_{k_j}^{(l)})^{-1}$, однако будем применять мультипликаторные преобразования лишь по переменным x_j , $j \in e_2$ (т.е. для таких j , что $m_j \geq (\mathbf{s}(\mathbf{m}))_j + l + 3$ при $\mathbf{m} \in B_{nl}(\alpha)$).

Введем следующие обозначения: для $\mathbf{s} \in \theta_n^{(e_2)}$ положим

$$\sigma(\mathbf{s}) = \prod_{j \in e_2} [0, 2^{-s_j}],$$

$\mathbf{t}(e_i)$ обозначает d -мерный вектор $(t_1, \dots, t_d)$, у которого $t_j > 0$ при $j \in e_i$ и $t_j = 0$ при $j \notin e_i$ ($i = 1, 2$). Положим

$$d\mathbf{t}(e_i) = \prod_{j \in e_i} dt_j.$$

По теореме Марцинкевича о мультипликаторах имеем

$$\left\| \sum_{\mathbf{m} \in B_{nl}(\alpha)} \delta_{\mathbf{m}}(f; \mathbf{x}) \right\|_p \ll \left\| \sum_{\mathbf{m} \in B_{nl}(\alpha)} 2^{\|\mathbf{s}(\mathbf{m})\|_1} \delta_{\mathbf{m}}(\Phi_{\mathbf{s}(\mathbf{m})}; \mathbf{x}) \right\|_p.$$

Здесь $\mathbf{s}(\mathbf{m}) \in \theta_n^{(e_2)}$,

$$\Phi_{\mathbf{s}(\mathbf{m})}(\mathbf{x}) = \int_{\sigma(\mathbf{s}(\mathbf{m}))} \Delta_{\mathbf{t}}^l(e_2) f(\mathbf{x}) d\mathbf{t}(e_2).$$

Так как $f \in L_p^0$, то верно равенство

$$f(\mathbf{x}) = \frac{(-1)^l}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Delta_{t_j}^l f(\mathbf{x}) dt_j, \quad j = 1, \dots, d,$$

где разность $\Delta_{t_j}^l$ берется по соответствующей переменной x_j . Положим, далее, $|e_2| = \nu$. В силу вышесказанного

$$\Phi_{\mathbf{s}(\mathbf{m})}(\mathbf{x}) = \frac{(-1)^{l(d-\nu)}}{(2\pi)^{d-\nu}} \int_{\pi_{d-\nu}} \left(\int_{\sigma(\mathbf{s}(\mathbf{m}))} \Delta_{\mathbf{t}}^l f(\mathbf{x}) d\mathbf{t}(e_2) \right) d\mathbf{t}(e_1).$$

Пусть $\mathbf{s} \in \theta_n^{(e_2)}$. Возьмем вектор $\mathbf{s}' = (s'_1, \dots, s'_d)$ такой, что $s'_j = s_j$, $j \in e_2$, и $s'_j = 1$, $j \in e_1$. Множество всех векторов $\mathbf{s}'$ таких, что $\mathbf{s} \in \theta_n^{(e_2)}$, обозначим $\gamma_n(e_2)$.

Аналогично доказательству оценки второго слагаемого после применения теоремы Литтлвуда–Пэли и обобщенного неравенства Минковского мы приходим к неравенству

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{\mathbf{m} \in B_{nl}(\alpha)} \delta_{\mathbf{m}}(f; \mathbf{x}) \right\|_p &\ll \left(\sum_{\mathbf{s} \in \gamma_n(e_2)} (\Phi^l(f; 2^{-\mathbf{s}})_p)^p \right)^{1/p} \\ &\ll \left(\sum_{\mathbf{s} \in \theta_n} (\Phi^l(f; 2^{-\mathbf{s}})_p)^p \right)^{1/p}. \end{aligned}$$

Последнее неравенство легко следует из свойств 5') и 6') функции $\Phi^l(f; \mathbf{t})_p$.

Из условий, наложенных на множества θ_n , и из свойств функции $\Phi^l(f; \mathbf{t})_p$ вытекает следующая оценка первого слагаемого:

$$\left\| \sum_{\mathbf{m} \in \mathcal{K}_{n+\alpha} \setminus \mathcal{K}_n} \delta_{\mathbf{m}}(f; \mathbf{x}) \right\|_p \ll \left(\sum_{\mathbf{s} \in \theta_n} (\Phi^l(f; 2^{-\mathbf{s}})_p)^p \right)^{1/p}.$$

Из доказанных оценок следует, что

$$E_{Q_n}(f)_p \ll \left(\sum_{\mathbf{s} \in \theta_n} (\Phi^l(f; 2^{-\mathbf{s}})_p)^p \right)^{1/p}.$$

Случай $1 < p \leq 2$ рассмотрен.

Продолжим рассмотрение случая А). По-прежнему, считаем $f(\mathbf{x}) \in L_p^0$.

Пусть теперь $2 < p < \infty$. В этом случае $p_0 = 2$, неравенство (3) остается верным. Покажем, как оценивается второе слагаемое в правой части (3). Справедливо следующее:

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{\mathbf{m} \in A_{nl}(\alpha)} \delta_{\mathbf{m}}(f; \mathbf{x}) \right\|_p &\ll \left\| \left(\sum_{\mathbf{m} \in A_{nl}(\alpha)} |2^{\|\mathbf{s}(\mathbf{m})\|_1} \delta_{\mathbf{m}}(\Phi_{\mathbf{s}(\mathbf{m})}; \mathbf{x})|^2 \right)^{1/2} \right\|_p \\ &\ll \left(\left\| \sum_{\mathbf{s} \in \theta_n} \sum_{\mathbf{m}} |2^{2\|\mathbf{s}\|_1} \delta_{\mathbf{m}}(\Phi_{\mathbf{s}}; \mathbf{x})|^2 \right\|_{p/2} \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

(Первое неравенство получается аналогично случаю $1 < p \leq 2$, при получении второго неравенства учитываем, что $p > 2$.) Затем, применяя неравенство Минковского, теорему Литтлвуда–Пэли и, наконец, обобщенное неравенство Минковского, приходим к оценке

$$\left\| \sum_{\mathbf{m} \in A_{nl}(\alpha)} \delta_{\mathbf{m}}(f; \mathbf{x}) \right\|_p \ll \left(\sum_{\mathbf{s} \in \theta_n} (\Phi^l(f; 2^{-\mathbf{s}})_p)^2 \right)^{1/2}.$$

С учетом того, что $p > 2$, оценка последнего слагаемого из правой части (3) примет вид:

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{\mathbf{m} \in B_{nl}(\alpha)} \delta_{\mathbf{m}}(f; \mathbf{x}) \right\|_p &\ll \left(\sum_{\mathbf{s} \in \gamma_n(e_2)} (\Phi^l(f; 2^{-\mathbf{s}})_p)^2 \right)^{1/2} \\ &\ll \left(\sum_{\mathbf{s} \in \theta_n} (\Phi^l(f; 2^{-\mathbf{s}})_p)^2 \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Наконец, первое слагаемое оценивается с помощью свойств $\Phi^l(f; \mathbf{t})_p$ и условий, которым удовлетворяют множества θ_n .

С учетом всего сказанного имеем

$$E_{Q_n}(f)_p \ll \left(\sum_{\mathbf{s} \in \theta_n} (\Phi^l(f; 2^{-\mathbf{s}})_p)^2 \right)^{1/2}.$$

Случай $2 < p < \infty$, $f \in L_p^0$ рассмотрен. Переход от L_p^0 к L_p осуществляется аналогично тому, как это было сделано в работе [5]. Случай А) рассмотрен полностью.

Случай Б) $p = 1, \infty$. В этих случаях доказательство аналогично доказательству многомерной теоремы Джексона из [7].

Для вектора с натуральными компонентами $\mathbf{m} = (m_1, \dots, m_d)$ обозначим через $U(\mathbf{m})$ множество функций

$$u(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^d \sum_{\nu_j=-m_j}^{m_j} e^{i\nu_j x_j} C(x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_d),$$

где $C(x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_d)$ — непрерывная и 2π -периодическая по каждой переменной функция. Для $f(\mathbf{x}) \in L_p^0$ докажем следующую лемму.

ЛЕММА 1. *Для всякой функции $f(\mathbf{x}) \in L_p^0$, $1 \leq p \leq \infty$, имеющей период 2π по каждой переменной, существует функция $u(\mathbf{x}) \in U(\mathbf{m})$, для которой*

$$\|f - u\|_p \ll \Phi^l\left(f; \frac{1}{\mathbf{m}}\right)_p,$$

где $1/\mathbf{m} = (1/m_1, \dots, 1/m_d)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 1. Положим

$$u_1(\mathbf{x}) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_0^{|t_1|} ((-1)^l f(\mathbf{x}) - \Delta_{h_1}^l f(\mathbf{x})) dh_1 \right) J_{m_1}^{l+1}(t_1) dt_1.$$

Как легко видеть, $u_1(\mathbf{x}) \in U(\mathbf{m})$ (здесь $J_{m_1}^{l+1}(t_1)$ — (одномерное) ядро Джексона порядка m_1). Далее, пусть

$$f_1(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) - \frac{u_1(\mathbf{x})}{\beta_1(m_1; l)} \cdot (-1)^l,$$

где

$$\beta_1(m_1; l) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |t_1| J_{m_1}^{l+1}(t_1) dt_1.$$

Из свойств ядра Джексона следует, что $\beta_1(m_1; l) \asymp 1/m_1$.

Справедливо следующее:

$$\begin{aligned}
& \left\| \left(\prod_{j=2}^d \frac{1}{t_j} \right) \int_0^{t_2} \cdots \int_0^{t_d} \Delta_{h_2}^l \cdots \Delta_{h_d}^l f_1(\mathbf{x}) dh_2 \cdots dh_d \right\|_p \\
&= \left\| \left(\prod_{j=2}^d \frac{1}{t_j} \right) \int_0^{t_2} \cdots \int_0^{t_d} \left(\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{\beta_1(m_1; l)} \int_0^{|t_1|} \Delta_{\mathbf{h}}^l f(\mathbf{x}) dh_1 \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \times J_{m_1}^{l+1}(t_1) dt_1 \right) dh_2 \cdots dh_d \right\|_p \\
&\ll \int_{-\pi}^{\pi} m_1 |t_1| \Phi^l(f; (|t_1|, t_2, \dots, t_d))_p J_{m_1}^{l+1}(t_1) dt_1 \\
&= \int_{-1/m_1}^{1/m_1} m_1 |t_1| \Phi^l(f; (|t_1|, t_2, \dots, t_d))_p J_{m_1}^{l+1}(t_1) dt_1 \\
&\quad + \int_{1/m_1 \leq |t_1| \leq \pi} m_1 |t_1| \Phi^l(f; (|t_1|, t_2, \dots, t_d))_p J_{m_1}^{l+1}(t_1) dt_1 \\
&\ll m_1 \cdot \frac{1}{m_1} \cdot \Phi^l \left(f; \left(\frac{1}{m_1}, t_2, \dots, t_d \right) \right)_p \int_{-\pi}^{\pi} J_{m_1}^{l+1}(t_1) dt_1 \\
&\quad + m_1^{l+1} \Phi^l \left(f; \left(\frac{1}{m_1}, t_2, \dots, t_d \right) \right)_p \int_{-\pi}^{\pi} |t_1|^{l+1} J_{m_1}^{l+1}(t_1) dt_1 \\
&\ll \Phi^l \left(f; \left(\frac{1}{m_1}, t_2, \dots, t_d \right) \right)_p.
\end{aligned}$$

Здесь мы использовали оценку $\beta_1(m_1; l)$, обобщенное неравенство Минковского и свойства функции $\Phi^l(f; \mathbf{t})_p$, а также свойства ядра Джексона.

Далее, положим

$$u_2(\mathbf{x}) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_0^{|t_2|} ((-1)^l f_1(\mathbf{x}) - \Delta_{h_2}^l f_1(\mathbf{x})) dh_2 \right) J_{m_2}^{l+1}(t_2) dt_2.$$

Пусть

$$f_2(\mathbf{x}) = f_1(\mathbf{x}) - \frac{u_2(\mathbf{x})}{\beta_2(m_2; l)} \cdot (-1)^l,$$

где

$$\beta_2(m_2; l) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |t_2| J_{m_2}^{l+1}(t_2) dt_2.$$

Аналогично предыдущему получим неравенство

$$\begin{aligned}
& \left\| \left(\prod_{j=3}^d \frac{1}{t_j} \right) \int_0^{t_3} \cdots \int_0^{t_d} \Delta_{h_3}^l \cdots \Delta_{h_d}^l f_2(\mathbf{x}) dh_3 \cdots dh_d \right\|_p \\
&\ll \Phi^l \left(f; \left(\frac{1}{m_1}, \frac{1}{m_2}, t_3, \dots, t_d \right) \right)_p.
\end{aligned}$$

Продолжая дальше этот процесс, мы приходим к функции

$$f_d(\mathbf{x}) = f_{d-1}(\mathbf{x}) - \frac{u_d(\mathbf{x})}{\beta_d(m_d; l)} \cdot (-1)^l,$$

причем

$$\|f_d(\mathbf{x})\|_p \ll \Phi^l \left(f; \left(\frac{1}{m_1}, \dots, \frac{1}{m_d} \right) \right)_p.$$

Так как

$$f(\mathbf{x}) = f_d(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^d \frac{u_j(\mathbf{x})}{\beta_j(m_j, l)} \cdot (-1)^l,$$

где

$$(-1)^l \sum_{j=1}^d \frac{u_j(\mathbf{x})}{\beta_j(m_j; l)} \in U(\mathbf{m}),$$

мы приходим к утверждению леммы 1.

Продолжим доказательство теоремы 4. Пусть $V_N(t)$ – (одномерное) ядро Валле-Пуссена порядка $2N - 1$; пусть, далее, $A_0 = V_0 = 1$, $A_m = V_{2m-1} - V_{2m-2}$, m – натуральное, $V_{2-1} = V_0$.

Для вектора $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_d)$ с целыми неотрицательными компонентами положим

$$A_{\mathbf{s}} = \prod_{j=1}^d A_{s_j}.$$

Введем обозначения:

$$V_{Q_n}^d = \sum_{\mathbf{s} \in \mathcal{K}_n} A_{\mathbf{s}},$$

$V_{Q_n}^d(f; \mathbf{x})$ – свертка функции $f(\mathbf{x}) = f(x_1, \dots, x_d)$ с ядром $V_{Q_n}^d(\mathbf{x})$.

Оценим норму ($p = 1, \infty$)

$$\|f(\mathbf{x}) - V_{Q_n}^d(f; \mathbf{x})\|_p. \quad (4)$$

Считаем, что $f(\mathbf{x}) \in L_p^0$. Будем доказывать утверждение теоремы индукцией по размерности d . Для $d = 1$ получим

$$\sum_{s=0}^n A_s = V_{2^{n-1}}.$$

Как известно, суммы Валле-Пуссена дают наилучшие по порядку приближения. С учетом этого и в силу теоремы 2 верно неравенство

$$\|f(x) - V_{2^{n-1}}(f; x)\|_p \ll \Phi_l(f; 2^{-n})_p.$$

Предположим, что требуемая оценка для (4) верна для размерностей $1, \dots, d-1$. Докажем ее для размерности d . Обозначая через I_j тождественный оператор, действующий по переменной x_j , мы можем записать

$$\begin{aligned} I - V_{Q_n}^d &= \prod_{j=1}^d I_j - \sum_{\mathbf{s} \in \varkappa_n} A_{\mathbf{s}} \\ &= \left(\prod_{j=1}^{d-1} I_j - V_{Q_n}^{d-1} \right) I_d + \sum_{\mathbf{s}^d: (s_1, \dots, s_{d-1}, 0) \in \varkappa_n} A_{\mathbf{s}^d} (I_d - V_{2^{s_n(\mathbf{s}^d)-1}}). \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь $\mathbf{s}^d = (s_1, \dots, s_{d-1})$,

$$V_{Q_n}^{d-1} = \sum_{\mathbf{s}^d: (s_1, \dots, s_{d-1}, 0) \in \varkappa_n} A_{\mathbf{s}^d}, \quad s_n(\mathbf{s}^d) = \max\{s_d \in \mathbb{Z}_+ : \mathbf{s} \in \varkappa_n\}.$$

Из леммы 1 можно вывести следующую оценку для каждого слагаемого во второй сумме в правой части (5)

$$\|A_{\mathbf{s}^d} (I_d - V_{2^{s_n(\mathbf{s}^d)-1}}) f\|_p \ll \Phi^l(f; 2^{-(\mathbf{s}^d, s_n(\mathbf{s}^d))})_p. \quad (6)$$

Пусть $f(\mathbf{x}) \in L_p^0$. Следовательно,

$$\Delta_{h_1}^l \cdots \Delta_{h_{d-1}}^l f(\mathbf{x}) = (-1)^l \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Delta_{\mathbf{h}}^l f(\mathbf{x}) dh_d.$$

Из этого равенства, в свою очередь, следует, что

$$\begin{aligned} &\left\| \left(\prod_{j=1}^{d-1} \frac{1}{t_j} \right) \int_0^{t_1} \cdots \int_0^{t_{d-1}} \Delta_{h_1}^l \cdots \Delta_{h_{d-1}}^l f(\mathbf{x}) dh_1 \cdots dh_{d-1} \right\|_p \\ &\leq \Phi^l(f; (t_1, \dots, t_{d-1}, 2\pi))_p. \end{aligned} \quad (7)$$

В силу предположения индукции и свойств функции $\Phi^l(f; \mathbf{t})_p$ из (7) следует оценка

$$\left\| \left(\prod_{j=1}^{d-1} I_j - V_{Q_n}^{d-1} \right) I_d f \right\|_p \ll \sum_{\mathbf{s} \in \theta_n, s_d=0} \Phi^l(f; 2^{-\mathbf{s}})_p. \quad (8)$$

Из неравенств (6) и (8) получаем

$$\|f(\mathbf{x}) - V_{Q_n}^d(f; \mathbf{x})\|_p \ll \sum_{\mathbf{s} \in \theta_n} \Phi^l(f; 2^{-\mathbf{s}})_p.$$

Переход от L_p^0 к L_p осуществляется так же, как в [7]. Теорема 4 полностью доказана.

§ 3.

В этом параграфе будет сформулирована многомерная теорема Джексона.

По-прежнему, $E_{Q_n}(f)_p$ означает наилучшее приближение функции $f(\mathbf{x})$ из L_p тригонометрическими полиномами с гармониками из множеств Q_n .

В случае, когда Q_n — гиперболические кресты, многомерная теорема Джексона для $p = \infty$ была доказана в [7], а для $1 < p < \infty$ она была доказана в [5]. Случай $p = 1$ не был доказан.

Мы же рассмотрим вместо гиперболических крестов множества Q_n , порожденные поверхностями уровня функции $\Omega^l(f; \mathbf{t})_p$, где

$$\Omega^l(f; \mathbf{t})_p = \sup_{|h_j| \leq t_j} \|\Delta_{\mathbf{h}}^l f(\mathbf{x})\|_p$$

— модуль непрерывности порядка l функции $f(\mathbf{x})$ (см. (1) и (2)).

Для $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_d)$, по-прежнему, считаем $2^{-\mathbf{s}} = (2^{-s_1}, \dots, 2^{-s_d})$. Для натурального числа N положим

$$\begin{aligned} \varkappa(N) &= \left\{ \mathbf{s} = (s_1, \dots, s_d) : s_j \geq 0 \text{ — целые, } \Omega^l(f; 2^{-\mathbf{s}})_p \geq \frac{1}{N} \right\}, \\ Q(N) &= \bigcup_{\mathbf{s} \in \varkappa(N)} \rho(\mathbf{s}), \quad \theta(N) = \varkappa(2^l N) \setminus \varkappa(N). \end{aligned}$$

Из свойств функции $\Omega^l(f; \mathbf{t})_p$

$$\begin{aligned} 1) \quad & \Omega^l(f; (t_1^{(1)}, \dots, t_d^{(1)}))_p \leq \Omega^l(f; (t_1^{(2)}, \dots, t_d^{(2)}))_p, \quad t_j^{(1)} \leq t_j^{(2)}, \\ 2) \quad & \Omega^l(f; (k_1 t_1, \dots, k_d t_d))_p \leq \prod_{j=1}^d k_j^l \Omega^l(f; \mathbf{t})_p, \quad k_j \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

легко следует, что для любого $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_d) \in \varkappa(N)$, для любого $1 \leq j_0 \leq d$ существует $\tilde{s}_{j_0}$ такое, что

$$(s_1, \dots, s_{j_0-1}, \tilde{s}_{j_0}, s_{j_0+1}, \dots, s_d) \in \theta(N).$$

Гиперболические кресты — это множества, порожденные поверхностями уровня функции

$$\Omega(\mathbf{t}) = \prod_{j=1}^d t_j^{r_j}.$$

Для такого $\Omega(\mathbf{t})$ класс H_p^Ω совпадает с классом Никольского H_p^r . Как известно, подпространства тригонометрических полиномов со спектром из гиперболических крестов в ряде случаев оптимальны по порядку в смысле поперечников по Колмогорову для классов Никольского H_p^r (см. [6]).

ТЕОРЕМА 5 (многомерная теорема Джексона). *Пусть функция $f(\mathbf{x}) = f(x_1, \dots, x_d)$ имеет период 2π по каждой переменной. Пусть, далее, $f(\mathbf{x}) \in L_p$,*

$1 \leq p < \infty$, либо $f(x) \in C, p = \infty$. Тогда существует константа c , не зависящая от N , такая, что

$$E_{Q(N)}(f)_p \leq c \cdot \frac{1}{N} |\theta(N)|^{1/p_0}, \quad 1 \leq p < \infty,$$

$$E_{Q(N)}(f)_\infty \leq c \cdot \frac{1}{N} |\theta(N)|,$$

где $p_0 = \min\{p; 2\}$, $|\theta(N)|$ — количество элементов множества $\theta(N)$.

Эта теорема вытекает из теоремы 4.

Список литературы

1. Рунковский К. В. Об одной оценке для интегрального модуля гладкости // Изв. вузов. Сер. матем. 1992. № 1. С. 78–80.
2. Рунковский К. В. О приближении семействами линейных полиномиальных операторов в пространствах L_p , $0 < p < 1$ // Матем. сб. 1994. Т. 185. № 8. С. 81–102.
3. Стороженко Э. А., Кротов В. Г., Освальд П. Прямые и обратные теоремы типа Джексона в пространствах L_p , $0 < p < 1$ // Матем. сб. 1975. Т. 98(140). С. 395–415.
4. Ульянов П. Л. Теоремы вложения и соотношения между наилучшими приближениями (модулями непрерывности) в разных метриках // Матем. сб. 1970. Т. 81. № 1. С. 104–131.
5. Пустовойтов Н. Н. Многомерная теорема Джексона в пространстве L_p // Матем. заметки. 1992. Т. 52. № 1. С. 105–113.
6. Темляков В. Н. Приближение функций с ограниченной смешанной производной // Труды МИАН. 1986. Т. 178. С. 1–112.
7. Темляков В. Н. О приближении функций нескольких переменных тригонометрическими полиномами с гармониками из гиперболических крестов // Укр. матем. журн. 1989. Т. 41. № 4. С. 518–524.

Московская государственная академия
автомобильного и тракторного машиностроения

Поступила в редакцию
08.02.1996