Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. П. Старовойтов, Н. А. Старовойтова, Аппроксимации
Паде функций Миттаг-Леффлера, *Матем. сб.*, 2007,
том 198, номер 7, 109–122

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm2662>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 12:31:26

УДК 517.51+517.53

А. П. Старовойтов, Н. А. Старовойтова

Аппроксимации Паде функций Миттаг-Леффлера

Установлено, что для функций Миттаг-Леффлера F_γ при $m \leq n$ и $n \rightarrow \infty$ аппроксимации Паде $\{\pi_{n,m}(\cdot; F_\gamma)\}$, которые являются локально наилучшими рациональными аппроксимациями, приближают F_γ равномерно на компакте $D = \{z : |z| \leq 1\}$ со скоростью, асимптотически равной наилучшей. В частности, для функций Миттаг-Леффлера доказаны аналогии хорошо известных теорем Д. Браесса и Л. Трефезена, относящихся к аппроксимации функции $\exp z$.

Библиография: 28 названий.

§ 1. Введение

Предполагая, что параметр $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$, рассмотрим однопараметрическое семейство целых функций $\mathcal{F} = \{F_\gamma\}$, представимых в виде

$$F_\gamma(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(\gamma)_k}, \quad (1)$$

где $(\gamma)_0 = 1$, $(\gamma)_k = \gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+k-1)$, если $k \geq 1$. Ряды вида (1) принято называть *гипергеометрическими рядами*, а их суммы – *гипергеометрическими функциями*. Принимая во внимание равенства $(\gamma)_k = \Gamma(\gamma+k)/\Gamma(\gamma)$, где $\Gamma(z)$ – гамма-функция Эйлера, видим, что гипергеометрические функции (1) являются функциями Миттаг-Леффлера (см. [1; гл. 5, § 2.7, равенство (16)]). В частности, к таким функциям относится $F_1(z) = e^z = \exp z$.

Каждой $F_\gamma \in \mathcal{F}$ поставим в соответствие таблицу Паде $[\pi_{n,m}(\cdot; F_\gamma)]_{n,m=0}^\infty$, элементами которой являются дроби

$$\pi_{n,m}(z; F_\gamma) = \frac{p_{n,m}(z; F_\gamma)}{q_{m,n}(z; F_\gamma)} = \frac{p_n(z; F_\gamma)}{q_m(z; F_\gamma)}$$

вида

$$r_{n,m}(z) = \frac{a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n}{b_0 + b_1 z + \cdots + b_m z^m}, \quad (2)$$

имеющие максимально возможный порядок касания к ряду (1) в классе рациональных функций степени не выше (n, m) . Для функции F_γ будем также рассматривать ее таблицу Чебышёва $[r_{n,m}^*(\cdot; F_\gamma)]_{n,m=0}^\infty$, состоящую из рациональных функций вида (2), наилучшим образом приближающих F_γ в равномерной норме и определяющихся (вообще говоря, не единственным образом) из равенства

$$R_{n,m}(F_\gamma; D) = \inf\{\|F_\gamma - r\| : r \in \mathcal{R}_{n,m}\} = \|F_\gamma - r_{n,m}^*\|,$$

где $\|g\| = \sup\{|g(z)| : z \in D\}$, $D = \{z : |z| \leq 1\}$, а $\mathcal{R}_{n,m}$ – множество всех рациональных функций, представимых в виде (2) (если рациональная функция наилучшего приближения не единственна, то в качестве $r_{n,m}^*$ возьмем одну из таких функций).

В настоящей работе для функций Миттаг-Леффлера (1) установлены аналоги хорошо известных в теории аппроксимаций теорем, относящихся к экспоненте. В этой связи напомним, что отыскание дробей (2), имеющих максимально возможный порядок касания к ряду $\sum_{k=0}^{\infty} z^k/k!$, впервые было предпринято в диссертации [2]. А. Паде, рассматривая непрерывные дроби для $\exp z$, конструктивным образом определил рациональные функции $\pi_{n,m}(z; e^\xi)$, обладающие указанными выше свойствами, нашел их явный вид и доказал равномерную сходимость на компактах в $\mathbb{C}$ дробей $\pi_{n,m}(z; e^\xi)$ к e^z при $n/m \rightarrow \omega$, $\omega \in [0, \infty]$. Однако явный вид многочленов, впоследствии оказавшихся числителем $p_n(\cdot; e^z)$ и знаменателем $q_m(\cdot; e^z)$ дробей Паде $\pi_{n,m}(\cdot; e^z)$, был известен еще Эрмиту. Удачная форма представления этих многочленов позволила ему в 1877 г. доказать трансцендентность числа e (см., например, [3]).

Первые результаты об асимптотическом поведении строк таблиц Паде и Чебышёва экспоненты были получены Э. Саффом [4], [5]. Дроби $\pi_{n,m}(z; f)$ являются локально наилучшими в классе $\mathcal{R}_{n,m}$ рациональными аппроксимациями степенного ряда, представляющего функцию f . Из результатов Э. Саффа, в частности, следует, что при фиксированном m и $n \rightarrow \infty$ бесконечно малые величины $\|e^z - \pi_{n,m}(z; e^\xi)\|$ и $\|e^z - r_{n,m}^*(z; e^\xi)\|$ эквивалентны¹. Следовательно, для e^z локальные экстремальные аппроксимационные свойства ее дробей Паде носят глобальный характер. Позже этот эффект Саффа был установлен и для других целых функций (см. [6]–[8]). Соответствующие утверждения в этих работах также относятся в основном к строкам таблиц Паде и Чебышёва. В [9], [10] (см. также работу [11]) для широкого класса целых функций ($\sin z$, $\cos z$, $\operatorname{ch} z$, $\operatorname{sh} z$, бесселевы функции, интеграл вероятности, функции Миттаг-Леффлера и др.) эффект глобальности экстремальных свойств дробей Паде был установлен для таких последовательностей таблиц Паде, когда $n+m \rightarrow \infty$ и выполнено условие

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m^4}{n} = 0. \quad (3)$$

Заметим, что из цитируемых далее результатов Д. Браесса и Л. Трефезена следует, что для экспоненты эффект Саффа при $n+m \rightarrow \infty$ имеет место тогда и только тогда, когда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m}{n} = 0. \quad (4)$$

В частности, для диагональных последовательностей элементов таблиц Паде и Чебышёва при $n \rightarrow \infty$ бесконечно малые величины $\|e^z - \pi_{n,n}(z; e^\xi)\|$ и

¹Бесконечно малые (б.м.) величины $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\{\beta_n\}_{n=0}^{\infty}$ будем называть эквивалентными ($\alpha_n \sim \beta_n$), если $\alpha_n/\beta_n \rightarrow 1$ при $n \rightarrow \infty$. Будем говорить, что б.м. величины $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\{\beta_n\}_{n=0}^{\infty}$ имеют одинаковый порядок при $n \rightarrow \infty$ ($\alpha_n \asymp \beta_n$), если существуют такие положительные постоянные A и B , для которых $A\alpha_n \leq \beta_n \leq B\alpha_n$ при $n = 0, 1, 2, \dots$.

$\|e^z - r_{n,n}^*(z; e^\xi)\|$ не являются эквивалентными. В этой связи можно предположить, что константа 4 в показателе степени в равенстве (3) не является наименьшей константой, при которой (3) гарантирует наличие эффекта Саффа у последовательности $\{\pi_{n,m}(\cdot; f)\}$, не только для $f(z) = e^z$, но и для некоторых других целых функций f . Как увидим в дальнейшем, для функций Миттаг-Леффлера наше предположение находит подтверждение.

Вернемся к экспоненте. В. Н. Русак неоднократно обращал наше внимание на то обстоятельство, что к настоящему времени она остается единственной нетривиальной функцией, для которой таблицы Паде и Чебышёва исследованы в полном объеме. В случае таблицы Паде соответствующее утверждение в виде гипотезы было сформулировано Г. Мейнардусом. Гипотеза Г. Мейнардуса была доказана Д. Браессом [12] (подробнее см. [13], [14]): для каждого $z \in D$ при $n + m \rightarrow \infty$

$$e^z - \pi_{n,m}(z; e^\xi) = \frac{(-1)^m m! n! e^{2mz/(n+m)}}{(n+m)!(n+m+1)!} z^{n+m+1} (1 + o(1)). \quad (5)$$

Доказательство асимптотического равенства (5) в [12] существенно опирается на интегральные представления числителя и знаменателя аппроксимации Паде $\pi_{n,m}(z; e^\xi)$ в виде

$$p_n(z; e^\xi) = \int_0^\infty t^m (t+z)^n e^{-t} dt, \quad (6)$$

$$q_m(z; e^\xi) = \int_0^\infty t^n (t-z)^m e^{-t} dt. \quad (7)$$

Равенства (6), (7) хорошо известны. Они установлены О. Перроном [15]. С их помощью, например, элементарным образом доказывается иррациональность числа π (см. [16; гл. 2, § 2, теорема 2.1]). Заметим, что аналоги представлений Перрона для других функций, в частности для функций Миттаг-Леффлера, насколько нам известно, отсутствуют.

Поведение последовательностей элементов таблицы Чебышёва экспоненты полностью описано Л. Трефезеном [17]: при $n + m \rightarrow \infty$

$$R_{n,m}(e^z; D) = \|e^z - r_{n,m}^*(z; e^\xi)\| = \frac{m! n!}{(n+m)!(n+m+1)!} (1 + o(1)). \quad (8)$$

В дальнейшем асимптотические равенства вида (5) и (8) при фиксированном m и $n \rightarrow \infty$ были установлены в цитируемых выше работах [7], [8] для широкого класса функций, содержащего $\mathcal{F}$. При выполнении условия (3) и $n \rightarrow \infty$, в частности для функций $F_\gamma \in \mathcal{F}$, аналогичные соотношения были получены в [9], [10].

Вопросы, относящиеся к сходимости последовательностей элементов таблиц Паде и Чебышёва экспоненты на различных множествах комплексной плоскости, рассматривались в работах Э. Саффа, Р. Варги и других математиков (см., например, [18]). Не останавливаясь подробно на этих результатах, отметим лишь известную задачу (поставленную Р. Варгой и тесно связанную с численными методами решения уравнения теплопроводности) о скорости рациональной аппроксимации функции e^{-x} на полуоси $[0, \infty)$. Как известно, ее полное

решение, подтверждающее справедливость двух гипотез, высказанных ранее А. Магнусом, было найдено А. А. Гончаром, Е. А. Рахмановым [19] и А. И. Аптекаревым [20] на основе конструкции многоточечных аппроксимаций Паде. Работам [19], [20] предшествовали многочисленные публикации, посвященные этой задаче. В них, в частности, предложено много методов исследования и приведена обширная библиография по рациональной аппроксимации $\exp z$ и ее аппроксимациям Паде (см., например, [21]–[23]). Подробный обзор этих результатов имеется и в цитируемых выше статьях А. А. Гончара, Е. А. Рахманова [19] и А. И. Аптекарева [20] (см. также работы [24]–[26]).

Перейдем теперь непосредственно к формулировкам основных результатов настоящей работы.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $F_\gamma \in \mathcal{F}$. Тогда при $m \leq n$ и $n \rightarrow \infty$ равномерно по $z \in D$

$$F_\gamma(z) - \pi_{n,m}(z; F_\gamma) = \frac{(-1)^m m! (\gamma)_n e^{2mz/(n+m)}}{(\gamma)_{n+m} (\gamma)_{n+m+1}} z^{n+m+1} (1 + o(1)). \quad (9)$$

Основываясь на тождестве $e^{-z} = 1/e^z$ и определении аппроксимаций Паде, легко показать, что $\pi_{n,m}(z; e^\xi) = 1/\pi_{m,n}(-z; e^\xi)$. Следовательно, для экспоненты достаточно иметь представление знаменателя (7) ее дроби Паде, чтобы получить представление ее числителя (6), а при исследовании всей таблицы Паде без потери общности достаточно рассмотреть поведение ее последовательностей элементов, лежащих не ниже главной диагонали, т.е. в случае $m \leq n$. Поэтому классический результат Д. Браесса является частным случаем теоремы 1.

При доказательстве теоремы 1, в частности, установлено, что для любых $z \in \mathbb{C}$ и $m \leq n$

$$q_m(z; F_\gamma) = \int_0^\infty t^{n+\gamma-1} (t-z)^m e^{-t} dt. \quad (10)$$

Здесь нормировка многочленов $q_m(z; F_\gamma)$ совпадает с перроновской. Если положить в (10) $\gamma = 1$, то получим (7). Весьма вероятно, что такое же компактное представление имеет место и для числителя $p_n(z; F_\gamma)$ дроби $\pi_{n,m}(z; F_\gamma)$. Интересно было бы получить такое представление. При выбранном нами способе доказательства теоремы 1, в отличие от работы [12], представление числителя, аналогичное (10), оказалось невостребованным.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $F_\gamma \in \mathcal{F}$. Тогда при $n \rightarrow \infty$ и $m = o(n)$

$$R_{n,m}(F_\gamma; D) \sim \frac{m! (\gamma)_n}{(\gamma)_{n+m} (\gamma)_{n+m+1}}. \quad (11)$$

Если же $m \leq n$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} m/n = \theta$, $0 < \theta \leq 1$, то при $n \rightarrow \infty$

$$R_{n,m}(F_\gamma; D) \asymp \frac{m! (\gamma)_n}{(\gamma)_{n+m} (\gamma)_{n+m+1}}. \quad (12)$$

Сравнивая теоремы 1 и 2, нетрудно увидеть, что, как и в случае экспоненты, при выполнении условий (4) для функций Миттаг-Леффлера имеет место эффект Саффа. В случае, когда $\lim_{n \rightarrow \infty} m/n = \theta$, $0 < \theta \leq 1$, мы можем лишь утверждать, что б.м. величины $\|F_\gamma - \pi_{n,m}(\cdot; F_\gamma)\|$ и $\|F_\gamma - r_{n,m}^*(\cdot; F_\gamma)\|$ имеют

одинаковые порядки. Достаточно правдоподобно, что эти б.м. величины не являются эквивалентными, т.е. эффект Саффа в этом случае имеет место лишь в ослабленном виде.

§ 2. Доказательство теоремы 1

Введем в рассмотрение определители Адамара функции F_γ

$$D_{n,m} = \begin{vmatrix} \frac{1}{(\gamma)_{n-m+1}} & \frac{1}{(\gamma)_{n-m+2}} & \cdots & \frac{1}{(\gamma)_n} \\ \frac{1}{(\gamma)_{n-m+2}} & \frac{1}{(\gamma)_{n-m+3}} & \cdots & \frac{1}{(\gamma)_{n+1}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{(\gamma)_n} & \frac{1}{(\gamma)_{n+1}} & \cdots & \frac{1}{(\gamma)_{n+m-1}} \end{vmatrix}.$$

Многочлены Паде $p_n(z; F_\gamma)$ и $q_m(z; F_\gamma)$ определяются с точностью до постоянного множителя. Будем называть *стандартной* такую их нормировку, при которой $q_m(0; F_\gamma) = D_{n,m}$. Далее будет установлено (см. равенство (15)), что $D_{n,m} \neq 0$. Рассмотрим также определители

$$D_{n,m,k} = \begin{vmatrix} \frac{1}{(\gamma)_{n-m+1}} & \frac{1}{(\gamma)_{n-m+2}} & \cdots & \frac{1}{(\gamma)_n} & \frac{1}{(\gamma)_{n+1}} \\ \frac{1}{(\gamma)_{n-m+2}} & \frac{1}{(\gamma)_{n-m+3}} & \cdots & \frac{1}{(\gamma)_{n+1}} & \frac{1}{(\gamma)_{n+2}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{(\gamma)_n} & \frac{1}{(\gamma)_{n+1}} & \cdots & \frac{1}{(\gamma)_{n+m-1}} & \frac{1}{(\gamma)_{n+m}} \\ \frac{1}{(\gamma)_{n+k}} & \frac{1}{(\gamma)_{n+k+1}} & \cdots & \frac{1}{(\gamma)_{n+m+k-1}} & \frac{1}{(\gamma)_{n+m+k}} \end{vmatrix}.$$

ЛЕММА 1. Если $F_\gamma \in \mathcal{F}$, то при стандартной нормировке многочленов Паде, $m \leq n$ и $n \rightarrow \infty$ равномерно по $z \in D$

$$q_m(z; F_\gamma)F_\gamma(z) - p_n(z; F_\gamma) = D_{n,m,1}e^{mz/(n+m)}z^{n+m+1}(1 + o(1)).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно теореме Паде (см. [10; гл. 1, § 1.1, формула (1.11)]) при выбранной нормировке

$$q_m(z; F_\gamma)F_\gamma(z) - p_n(z; F_\gamma) = \sum_{k=1}^{\infty} D_{n,m,k} z^{n+m+k}. \quad (13)$$

Нам необходимы явные выражения для определителей $D_{n,m}$ и $D_{n,m,k}$. Вынесем за знак определителя $D_{n,m}$ элементы последней строки. В результате получим

$$D_{n,m} = P \begin{vmatrix} (\gamma + n - m + 1)_{m-1} & (\gamma + n - m + 2)_{m-1} & \cdots & (\gamma + n)_{m-1} \\ (\gamma + n - m + 2)_{m-2} & (\gamma + n - m + 3)_{m-2} & \cdots & (\gamma + n + 1)_{m-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (\gamma + n - 1)_1 & (\gamma + n)_1 & \cdots & (\gamma + n + m - 2)_1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix},$$

где $P = \prod_{j=0}^{m-1} 1/(\gamma)_{n+j}$. Обозначим определитель в левой части последнего равенства через $K(n, m)$. Вычтем из первого столбца этого определителя второй столбец, из второго столбца вычтем третий и т.д., наконец из $(m-1)$ -го столбца вычтем m -й столбец. Тогда, учитывая равенства $(\gamma+j)_i - (\gamma+j+1)_i = -i(\gamma+j+1)_{i-1}$, будем иметь

$$K(n, m) = (-1)^{m-1} (m-1)! K(n, m-1). \quad (14)$$

Поскольку $K(n, 2) = -1$, то из предыдущих рекуррентных соотношений окончательно получим

$$D_{n,m} = (-1)^{m(m-1)/2} \prod_{j=1}^{m-1} j! \prod_{j=0}^{m-1} \frac{1}{(\gamma)_{n+j}}. \quad (15)$$

Очевидно, что $D_{n,m,1} = D_{n+1,m+1}$. Поэтому из (15) следует

$$\frac{D_{n,m,1}}{D_{n,m}} = \frac{D_{n+1,m+1}}{D_{n,m}} = \frac{(-1)^m m! (\gamma)_n}{(\gamma)_{n+m} (\gamma)_{n+m+1}}. \quad (16)$$

Чтобы найти явные выражения для определителей $D_{n,m,k}$ при $k \geq 2$, поступим аналогичным образом: вынесем за знак определителя элементы последней строки, а затем в полученном определителе из первого столбца вычтем второй, из второго столбца вычтем третий и т.д. Тогда

$$\begin{aligned} D_{n,m,k} &= P_1 \begin{vmatrix} (\gamma+n-m+1)_{m+k-1} & (\gamma+n-m+2)_{m+k-1} & \dots & (\gamma+n+1)_{m+k-1} \\ (\gamma+n-m+2)_{m+k-2} & (\gamma+n-m+3)_{m+k-2} & \dots & (\gamma+n+2)_{m+k-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (\gamma+n)_k & (\gamma+n+1)_k & \dots & (\gamma+n+m)_k \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix} \\ &= (-1)^m P_1 \prod_{j=1}^m (j+k-1) \begin{vmatrix} (\gamma+n-m+2)_{m+k-2} & \dots & (\gamma+n+1)_{m+k-2} & \cdot \\ (\gamma+n-m+3)_{m+k-3} & \dots & (\gamma+n+2)_{m+k-3} & \cdot \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (\gamma+n+1)_{k-1} & \dots & (\gamma+n+m)_{k-1} & \cdot \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &= (-1)^m P_1 \prod_{j=1}^m (j+k-1) \prod_{j=1}^m (\gamma+n+j)_{k-1} K(n+1, m), \end{aligned}$$

где $P_1 = \prod_{j=0}^m 1/(\gamma)_{n+k+j}$. Учитывая рекуррентные соотношения (14), окончательно получим

$$D_{n,m,k} = (-1)^{m(m+1)/2} \prod_{j=1}^{m-1} j! \prod_{j=1}^m (j+k-1) (\gamma+n+j)_{k-1} \prod_{j=0}^m \frac{1}{(\gamma)_{n+k+j}}. \quad (17)$$

Из (17) вытекает

$$\frac{D_{n,m,k}}{D_{n,m,1}} = \frac{(k)_m}{m!} \frac{\prod_{j=1}^m (\gamma+n+j)_{k-1} \prod_{j=0}^m (\gamma)_{n+j+1}}{\prod_{j=0}^m (\gamma)_{n+k+j}}. \quad (18)$$

Представим правую часть (13) в виде

$$\sum_{k=1}^{\infty} D_{n,m,k} z^{n+m+k} = D_{n,m,1} z^{n+m+1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{D_{n,m,k}}{D_{n,m,1}} z^{k-1}.$$

Тогда, учитывая (18), с помощью элементарных преобразований получим

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{D_{n,m,k}}{D_{n,m,1}} z^{k-1} - e^{(m+1)z/(n+m+\gamma+1)} = \sum_{k=3}^{\infty} \frac{\Delta(n,m,k)}{(k-1)!} z^{k-1}, \quad (19)$$

где

$$\Delta(n,m,k) = \frac{(m+1)_{k-1}}{(n+m+\gamma+1)_{k-1}} - \left(\frac{m+1}{n+m+\gamma+1} \right)^{k-1}.$$

Функция $\phi(x) = (m+x)/(n+m+\gamma+x)$ возрастает при $x \geq 0$, если n достаточно большое. Поэтому

$$\begin{aligned} |\Delta(n,m,k)| &\leq \left(\frac{m+k-1}{n+m+\gamma+k-1} \right)^{k-1} - \left(\frac{m+1}{n+m+\gamma+1} \right)^{k-1} \\ &\leq \frac{(k-2)(n+\gamma)}{(n+m+\gamma+k-1)(n+m+\gamma+1)} (k-1) \left(\frac{m+k-1}{n+m+\gamma+k-1} \right)^{k-2} \\ &\leq \frac{(k-1)^2(n+\gamma)}{(n+m+\gamma+1)^2}. \end{aligned}$$

Отсюда и из (19) в силу ограниченности модуля функции $e^{(m+1)z/(n+m+\gamma+1)}$ по совокупности параметров n, m и $z \in D$ получаем, что при $n \rightarrow \infty$

$$\sum_{k=1}^{\infty} D_{n,m,k} z^{n+m+k} = D_{n,m,1} z^{n+m+1} e^{(m+1)z/(n+m+\gamma+1)} (1 + o(1)).$$

Учитывая, что $e^{(m+1)z/(n+m+\gamma+1)} = e^{mz/(n+m)} (1 + o(1))$ при $n \rightarrow \infty$, из последнего равенства получаем утверждение леммы. Лемма 1 доказана.

ЛЕММА 2. При стандартной нормировке многочленов Паде и $n \leq m$ справедливо тождество

$$q_m(z; F_\gamma) = \frac{D_{n,m}}{\Gamma(n+m+\gamma)} \int_0^\infty t^{n+\gamma-1} (t-z)^m e^{-t} dt.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При выбранной нормировке многочленов Паде имеет место тождество (см. [18; гл. 1, § 2, формула (2.1)])

$$q_m(z; F_\gamma) = \begin{vmatrix} \frac{1}{(\gamma)_{n-m+1}} & \frac{1}{(\gamma)_{n-m+2}} & \cdots & \frac{1}{(\gamma)_n} & \frac{1}{(\gamma)_{n+1}} \\ \frac{1}{(\gamma)_{n-m+2}} & \frac{1}{(\gamma)_{n-m+3}} & \cdots & \frac{1}{(\gamma)_{n+1}} & \frac{1}{(\gamma)_{n+2}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{(\gamma)_n} & \frac{1}{(\gamma)_{n+1}} & \cdots & \frac{1}{(\gamma)_{n+m-1}} & \frac{1}{(\gamma)_{n+m}} \\ z^m & z^{m-1} & \dots & z & 1 \end{vmatrix}.$$

Если b_j – коэффициент при z^j многочлена $q_m(z; F_\gamma)$, то рассмотрим следующий определитель, в котором столбец, выделенный полужирным шрифтом, отсутствует:

$$(-1)^j b_j = \begin{vmatrix} \frac{1}{(\gamma)_{n-m+1}} & \cdots & \frac{\mathbf{1}}{(\gamma)_{n-j+1}} & \cdots & \frac{1}{(\gamma)_{n+1}} \\ \frac{1}{(\gamma)_{n-m+2}} & \cdots & \frac{\mathbf{1}}{(\gamma)_{n-j+2}} & \cdots & \frac{1}{(\gamma)_{n+2}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{(\gamma)_n} & \cdots & \frac{\mathbf{1}}{(\gamma)_{n-j+m}} & \cdots & \frac{1}{(\gamma)_{n+m}} \end{vmatrix}.$$

Для его вычисления поступим так же, как в [18] при вычислении соответствующего определителя для $\exp z$. В результате несложных вычислений получим

$$(-1)^j b_j = D_{n,m} C_j^m \frac{\Gamma(n+m+\gamma-j)}{\Gamma(n+m+\gamma)},$$

где $C_j^m = m!/(j!(m-j)!)$ – биномиальные коэффициенты. Следовательно,

$$\begin{aligned} q_m(z; F_\gamma) &= D_{n,m} \sum_{k=0}^m C_k^m \frac{\Gamma(n+m+\gamma-k)}{\Gamma(n+m+\gamma)} (-z)^k \\ &= \frac{D_{n,m}}{\Gamma(n+m+\gamma)} \int_0^\infty t^{n+\gamma-1} \sum_{k=0}^m C_k^m t^{m-k} (-z)^k e^{-t} dt \\ &= \frac{D_{n,m}}{\Gamma(n+m+\gamma)} \int_0^\infty t^{n+\gamma-1} (t-z)^m e^{-t} dt. \end{aligned}$$

Лемма 2 доказана.

ЛЕММА 3. При $m \leq n$ и $n \rightarrow \infty$ равномерно по $z \in D$

$$q_m(z; F_\gamma) = D_{n,m} e^{-mz/(n+m)} (1 + o(1)). \quad (20)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из леммы 2 вытекает, что

$$\frac{q_m(-z; F_\gamma)}{D_{n,m}} = \sum_{k=0}^m C_k^m \frac{\Gamma(n+m+\gamma-k)}{\Gamma(n+m+\gamma)} z^k = \sum_{k=0}^m \frac{(m-k+1)_k}{(n+m+\gamma-k)_k} \frac{z^k}{k!}.$$

Для $k = 2, 3, \dots, m$

$$\begin{aligned} \frac{m^k}{(n+m+\gamma-1)^k} &\geq \frac{(m-k+1)_k}{(n+m+\gamma-k)_k} \\ &\geq \frac{m^k}{(n+m+\gamma-1)^k} \left(1 - \frac{1}{m}\right) \left(1 - \frac{2}{m}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{m}\right) \\ &\geq \frac{m^k}{(n+m+\gamma-1)^k} \left(1 - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{i}{m}\right) = \frac{m^k}{(n+m+\gamma-1)^k} \left(1 - \frac{k(k-1)}{2m}\right). \end{aligned} \quad (21)$$

Значит, для каждого $k = 2, 3, \dots, m$ найдется такое θ_k , $0 \leq \theta_k \leq 1$, при котором

$$\frac{(m-k+1)_k}{(n+m+\gamma-k)_k} = \frac{m^k}{(n+m+\gamma-1)^k} \left(1 - \theta_k \frac{k(k-1)}{2m}\right).$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \frac{q_m(-z; F_\gamma)}{D_{n,m}} &= \sum_{k=0}^m \frac{1}{k!} \left(\frac{mz}{n+m+\gamma-1} \right)^k - \sum_{k=2}^m \theta_k \frac{k(k-1)}{2mk!} \left(\frac{mz}{n+m+\gamma-1} \right)^k \\ &= \sum_{k=0}^m \frac{1}{k!} \left(\frac{mz}{n+m+\gamma-1} \right)^k \\ &\quad - \frac{mz^2}{2(n+m+\gamma-1)^2} \sum_{k=2}^m \frac{\theta_k}{(k-2)!} \left(\frac{mz}{n+m+\gamma-1} \right)^{k-2}. \end{aligned}$$

Отсюда получим, что

$$\begin{aligned} e^{mz/(n+m+\gamma-1)} - \frac{q_m(-z; F_\gamma)}{D_{n,m}} &= \frac{mz^2}{2(n+m+\gamma-1)^2} \\ &\times \sum_{k=2}^m \frac{\theta_k}{(k-2)!} \left(\frac{mz}{n+m+\gamma-1} \right)^{k-2} + \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{mz}{n+m+\gamma-1} \right)^k. \end{aligned}$$

Для всех $k \geq m+1$

$$\begin{aligned} \frac{1}{k!} \left(\frac{mz}{n+m+\gamma-1} \right)^k &= \frac{mz^2}{2(n+m+\gamma-1)^2} \frac{2m}{k(k-1)} \frac{1}{(k-2)!} \left(\frac{mz}{n+m+\gamma-1} \right)^{k-2} \\ &= \frac{mz^2}{2(n+m+\gamma-1)^2} \frac{\theta_k}{(k-2)!} \left(\frac{mz}{n+m+\gamma-1} \right)^{k-2}, \end{aligned}$$

где $0 \leq \theta_k = 2m/(k(k-1)) \leq 1$. Поэтому

$$\begin{aligned} e^{mz/(n+m+\gamma-1)} - \frac{q_m(-z; F_\gamma)}{D_{n,m}} &= \frac{mz^2}{2(n+m+\gamma-1)^2} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\theta_k}{(k-2)!} \left(\frac{mz}{n+m+\gamma-1} \right)^{k-2}, \end{aligned}$$

и, следовательно, при достаточно больших n

$$\left| q_m(z; F_\gamma) - D_{n,m} e^{-mz/(n+m+\gamma-1)} \right| \leq \frac{D_{n,m}}{n+m} e^{|z|} |z|^2.$$

Учитывая, что $e^{-mz/(n+m+\gamma-1)} = e^{-mz/(n+m)}(1 + o(1))$ при $n \rightarrow \infty$, отсюда получаем (20). Лемма 3 доказана.

Перейдем непосредственно к доказательству теоремы 1. Из леммы 1 и леммы 3 при $m \leq n$ и $n \rightarrow \infty$ следует, что

$$F_\gamma(z) - \pi_{n,m}(z; F_\gamma) = \frac{D_{n,m,1}}{D_{n,m}} e^{2mz/(n+m)} z^{n+m+1} (1 + o(1)).$$

Учитывая равенство (16), отсюда и получим (9). Теорема 1 доказана.

§ 3. Доказательство теоремы 2

При достаточно больших n рассмотрим аналитическую в точках $z \in D$ функцию $\varphi(z) := F_\gamma(z) - \pi_{n,m}(z; F_\gamma)$. Покажем, что

$$\min_{|z|=1} |\varphi(z)| \leq R_{n,m}(F_\gamma; D) \leq \max_{|z|=1} |\varphi(z)|. \quad (22)$$

Поскольку правое неравенство в (21) вполне очевидно, остановимся на доказательстве только левого неравенства. Для этого нам необходима следующая лемма Гончара–Дзядыка [27; лемма 3.1].

ЛЕММА 4. *Если аналитическая в односвязной области G и непрерывная на $\bar{G}$ функция φ имеет в G по крайней мере $n + 1$ нуль с учетом кратности, то при произвольном $m \geq 0$ справедливо неравенство*

$$R_{n,m}(\varphi; \bar{G}) \geq \min_{\partial G} |\varphi(z)|.$$

Из теоремы 1 следует, что в круге $\{z : |z| < 1\}$ с учетом кратности φ имеет $n + m + 1$ нуль. Поэтому, применяя лемму 4, получим

$$\begin{aligned} R_{n,m}(F_\gamma; D) &= \|F_\gamma - r_{n,m}^*\| = \|F_\gamma - \pi_{n,m} - (r_{n,m}^* - \pi_{n,m})\| \\ &= \|\varphi - \tilde{r}_{n+m,2m}\| \geq R_{n+m,2m}(\varphi; D) \geq \min_{|z|=1} |\varphi(z)|. \end{aligned}$$

Неравенство (21) доказано.

Теперь, если $\lim_{n \rightarrow \infty} m/n = 0$, то из (21) и (9) следует, что

$$R_{n,m}(F_\gamma; D) \sim \frac{m! (\gamma)_n}{(\gamma)_{n+m} (\gamma)_{n+m+1}} =: \Upsilon(n, m, \gamma).$$

Если же $\lim_{n \rightarrow \infty} m/n = \theta$, $0 < \theta \leq 1$, то для достаточно больших n будем иметь

$$\frac{1}{2} e^{-2\theta} \Upsilon(n, m, \gamma) \leq R_{n,m}(F_\gamma; D) \leq 2e^{2\theta} \Upsilon(n, m, \gamma).$$

Теорема 2 доказана.

§ 4. Некоторые обобщения

В этом параграфе мы покажем, что с помощью достаточно простых рассуждений класс степенных рядов, для которых имеют место аналогии теорем 1 и 2, можно существенно расширить. Прежде всего, из определения аппроксимаций Паде следует, что если положить

$$F_\gamma^-(z) := F_\gamma(-z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(\gamma)_k} z^k,$$

то $\pi_{n,m}(z; F_\gamma^-) = \pi_{n,m}(-z; F_\gamma)$. Поэтому справедлива

ТЕОРЕМА 3. При $m \leq n$ и $n \rightarrow \infty$ равномерно по $z \in D$

$$F_{\gamma}^{-}(z) - \pi_{n,m}(z; F_{\gamma}^{-}) = \frac{(-1)^{n+1} m! (\gamma)_n e^{-2mz/(n+m)}}{(\gamma)_{n+m} (\gamma)_{n+m+1}} z^{n+m+1} (1 + o(1)).$$

Рассмотрим теперь семейство целых функций $\mathcal{F}_d = \{F_{d,\gamma}^{\pm}\}$, представимых в виде

$$F_{d,\gamma}^{\pm}(z) := z^{l_0} F_{\gamma}^{\pm}(z^d) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\pm 1)^k}{(\gamma)_k} z^{l_k},$$

где l_k – арифметическая прогрессия, членами которой являются целые неотрицательные числа, а показатель прогрессии $d \in \mathbb{N}$, т.е. $l_k = l_0 + dk$, $k = 0, 1, 2, \dots$. По определению считаем, что $F_{\gamma}^{+}(z) = F_{\gamma}(z)$. При выполнении условий теорем 1, 3 при $n \rightarrow \infty$ равномерно по $z \in D$

$$F_{\gamma}^{\pm}(\xi) - \pi_{n,m}(\xi; F_{\gamma}^{\pm}) = \frac{(-1)^m m! (\gamma)_n e^{\pm 2m\xi/(n+m)}}{(\gamma)_{n+m} (\gamma)_{n+m+1}} (\pm \xi)^{n+m+1} (1 + o(1)).$$

Полагая в последнем равенстве $\xi = z^d$, а затем умножая его на z^{l_0} , получим

$$\begin{aligned} F_{d,\gamma}^{\pm}(z) - z^{l_0} \pi_{n,m}(z^d; F_{\gamma}^{\pm}) \\ = \frac{(-1)^m (\pm 1)^{n+m+1} m! (\gamma)_n e^{\pm 2mz/(n+m)}}{(\gamma)_{n+m} (\gamma)_{n+m+1}} z^{l_n + dm + d} (1 + o(1)). \end{aligned}$$

Отсюда, в частности, следует, что при $0 \leq i + j \leq d - 1$

$$\pi_{l_n+i, dm+j}(z; F_{d,\gamma}^{\pm}) = z^{l_0} \pi_{n,m}(z^d; F_{\gamma}^{\pm}).$$

Таким образом, имеет место

ТЕОРЕМА 4. Пусть $F_{d,\gamma}^{\pm} \in \mathcal{F}_d$. Тогда при $m \leq n$ и $n \rightarrow \infty$ равномерно по $z \in D$

$$\begin{aligned} F_{d,\gamma}^{\pm}(z) - \pi_{l_n+i, dm+j}(z; F_{d,\gamma}^{\pm}) \\ = \frac{(-1)^m (\pm 1)^{n+m+1} m! (\gamma)_n e^{\pm 2mz/(n+m)}}{(\gamma)_{n+m} (\gamma)_{n+m+1}} z^{l_n + dm + d} (1 + o(1)), \end{aligned}$$

где $0 \leq i + j \leq d - 1$.

Следующая теорема доказывается с помощью леммы Гончара–Дзядыка аналогично теореме 2.

²С помощью теоремы Паде–Бейкера о блочной структуре таблицы Паде [18; гл. 1, § 1.4, теорема 1.4.3] можно показать, что в оставшемся нерассмотренным случае, когда $i + j = d$ и $i, j \neq d$, аппроксимации Паде $\pi_{l_n+i, dm+j}(z; F_{d,\gamma}^{\pm})$ в смысле принятого нами определения по Бейкеру [18; гл. 1, § 1.4, равенство (4.6)] не существуют. А классические аппроксимации Паде $\tilde{\pi}_{l_n+i, dm+j}(z; F_{d,\gamma}^{\pm})$ существуют и в этом случае и совпадают с $\pi_{l_n, dm}(z; F_{d,\gamma}^{\pm})$.

ТЕОРЕМА 5. Пусть $F_{d,\gamma}^{\pm} \in \mathcal{F}_d$. Тогда при $n \rightarrow \infty$ и $m = o(n)$

$$R_{l_n+i, dm+j}(F_{d,\gamma}^{\pm}; D) \sim \frac{m!(\gamma)_n}{(\gamma)_{n+m}(\gamma)_{n+m+1}}.$$

Если же $m \leq n$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} m/n = \theta$, $0 < \theta \leq 1$, то при $n \rightarrow \infty$

$$R_{l_n+i, dm+j}(F_{d,\gamma}^{\pm}; D) \asymp \frac{m!(\gamma)_n}{(\gamma)_{n+m}(\gamma)_{n+m+1}},$$

где $0 \leq i + j \leq d - 1$.

Авторы посвящают настоящую работу 70-летию В. Н. Русака и благодарят его за многолетнее творческое сотрудничество.

В заключение отметим, что результаты статьи частично анонсированы в работах [10], [28].

Список литературы

- [1] А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев, *Интегралы и ряды. Элементарные функции*, Наука, М., 1981; англ. пер. A. P. Prudnikov, Yu. A. Brychkov, O. I. Marichev, *Integrals and series*, Vol. 1. Elementary functions, Gordon & Breach Science Publ., New York, 1986.
- [2] H. Padé, “Mémoire sur les développements en fractions continues de la fonction exponentielle, pouvant servir d’introduction à la théorie des fractions continues algébriques”, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* (3), **16** (1899), 395–426.
- [3] Ф. Клейн, *Элементарная математика с точки зрения высшей*, т. 1. Арифметика, алгебра, анализ, ГТТИ, М.–Л., 1933; пер. с нем. F. Klein, *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus Erster Band*, Arithmetik, Algebra, Analysis, Springer-Verlag, Berlin, 1924.
- [4] E. B. Saff, “The convergence of rational functions of best approximation to the exponential function. II”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **32**:1 (1972), 187–194.
- [5] E. B. Saff, “On the degree of best rational approximation to the exponential function”, *J. Approximation Theory*, **9**:2 (1973), 97–101.
- [6] D. S. Lubinsky, “Padé tables of entire functions of very slow and smooth growth, II”, *Constr. Approx.*, **4**:1 (1988), 321–339.
- [7] A. L. Levin, D. S. Lubinsky, “Rows and diagonals of the Walsh array for entire functions with smooth Maclaurin series coefficients”, *Constr. Approx.*, **6**:3 (1990), 257–286.
- [8] Л. Л. Березкина, В. Н. Русак, “О наилучших рациональных аппроксимациях некоторых целых функций”, *Изв. АН БССР*, 1990, № 4, 27–32.
- [9] В. Н. Русак, Та Хонг Куанг, “Асимптотика параболических звеньев рациональной таблицы Чебышёва для аналитических функций”, *Докл. АН БССР*, **34**:10 (1990), 869–871.
- [10] В. Н. Русак, А. П. Старовойтов, “Аппроксимации Паде для целых функций с регулярно убывающими коэффициентами Тейлора”, *Матем. сб.*, **193**:9 (2002), 63–92; англ. пер. V. N. Rusak, A. P. Starovoitov, “Padé approximants for entire functions with regularly decreasing Taylor coefficients”, *Sb. Math.*, **193**:9 (2002), 1303–1332.
- [11] A. L. Levin, D. S. Lubinsky, “Best rational approximations of entire functions whose Maclaurin series coefficients decrease rapidly and smoothly”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **293**:2 (1986), 533–545.

- [12] D. Braess, “On the conjecture of Meinardus on rational approximation of e^x , II”, *J. Approx. Theory*, **40**:4 (1984), 375–379.
- [13] P. P. Petrushev, V. A. Popov, *Rational approximation of real functions*, Encyclopedia Math. Appl., **28**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1987.
- [14] G. G. Lorentz, M. von Golitschek, Yu. Makovoz, *Constructive approximation. Advanced problems*, Grundlehren Math. Wiss., **304**, Springer-Verlag, Berlin, 1996.
- [15] O. Perron, *Die Lehre von den Kettenbrüchen. Band II. Analytisch-funktionentheoretische Kettenbrüche*, B. G. Teubner, Stuttgart, 1957.
- [16] Е. М. Никишин, В. Н. Сорокин, *Рациональные аппроксимации и ортогональность*, Наука, М., 1988; англ. пер. Е. М. Nikishin, V. N. Sorokin, *Rational approximations and orthogonality*, Transl. Math. Monogr., **92**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1991.
- [17] L. N. Trefethen, “The asymptotic accuracy of rational best approximations to e^z on a disk”, *J. Approx. Theory*, **40**:4 (1984), 380–383.
- [18] Дж. Бейкер мл., П. Грейвс-Моррис, *Аппроксимации Паде*, 1. Основы теории. 2. Обобщения и приложения, Мир, М., 1986; пер. с англ.: G. A. Baker, jr., P. Graves-Morris, *Padé approximants. Part I, Basic theory*, Encyclopedia Math. Appl., **13**, Addison-Wesley Publ., Reading, Mass., 1981; *Padé approximants. Part II, Extensions and applications*, Encyclopedia Math. Appl., **14**, Addison-Wesley Publ., Reading, Mass., 1981.
- [19] А. А. Гончар, Е. А. Рахманов, “Равновесные распределения и скорость рациональной аппроксимации аналитических функций”, *Матем. сб.*, **134(176)**:3(11) (1987), 306–352; англ. пер.: A. A. Gonchar, E. A. Rakhmanov, “Equilibrium distributions and degree of rational approximation of analytic functions”, *Math. USSR-Sb.*, **62**:2 (1989), 305–348.
- [20] А. И. Аптекарев, “Точные константы рациональных аппроксимаций аналитических функций”, *Матем. сб.*, **193**:1 (2002), 3–72; англ. пер.: A. I. Aptekarev, “Sharp constants for rational approximations of analytic functions”, *Sb. Math.*, **193**:1 (2002), 1–72.
- [21] R. S. Varga, *Topics in polynomial and rational interpolation and approximation*, Sem. Math. Sup., **81**, Les Presses de l’Université de Montréal, Montreal, QC, 1982.
- [22] R. S. Varga, “Scientific computation on some mathematical conjectures”, *Approximation theory, V* (Proc. 5th Int. Symp., College Station, Tex., 1986), Academic Press, Boston, MA, 1986, 191–209.
- [23] L. N. Trefethen, M. H. Gutknecht, “The Carathéodory–Fejér method for real rational approximation”, *SIAM J. Numer. Anal.*, **20**:2 (1983), 420–436.
- [24] А. И. Аптекарев, “Асимптотика определителей Адамара и сходимость строк аппроксимаций Паде для суммы экспонент”, *Матем. сб.*, **113(155)**:4(12) (1980), 520–537; англ. пер.: A. I. Aptekarev, “Asymptotics of Hadamard determinants and the convergence of rows of Padé approximants for sums of exponentials”, *Math. USSR-Sb.*, **41**:4 (1982), 427–441.
- [25] А. П. Старовойтов, Н. А. Старовойтова, “Асимптотика определителей Адамара и поведение строк таблиц Паде и Чебышёва для суммы экспонент”, *Матем. сб.*, **187**:2 (1996), 141–157; англ. пер.: A. P. Starovoitov, N. A. Starovoitova, “Asymptotic behaviour of the Hadamard determinants and the behaviour of the rows of the Padé and Chebyshev tables for a sum of exponentials”, *Sb. Math.*, **187**:2 (1996), 297–313.
- [26] F. Wielonsky, “Riemann–Hilbert analysis and uniform convergence of rational interpolants to the exponential function”, *J. Approx. Theory*, **131**:1 (2004), 100–148.

- [27] В. К. Дзядык, “Об асимптотике диагональных аппроксимаций Паде функций $\sin z$, $\cos z$, $\operatorname{sh} z$ и $\operatorname{ch} z$ ”, *Матем. сб.*, **108(150)**:2 (1979), 247–267; англ. пер.: V. K. Dzjadyk, “On the asymptotics of diagonal Padé approximants of the functions $\sin z$, $\cos z$, $\sinh z$ and $\cosh z$ ”, *Math. USSR-Sb.*, **36**:2 (1980), 231–249.
- [28] А. П. Старовойтов, Н. А. Старовойтова, “Аппроксимации Паде одного класса целых функций”, *Доклады НАН Беларуси*, **50**:6 (2006), 28–30.

А. П. Старовойтов (A. P. Starovoitov)

Гомельский государственный университет

им. Фр. Скорины, Беларусь

E-mail: svoitov@gsu.unibel.by

Поступила в редакцию

08.08.2006 и 11.04.2007

Н. А. Старовойтова (N. A. Starovoitova)

Гомельский государственный университет

им. Фр. Скорины, Беларусь

E-mail: svoitov@gsu.unibel.by