Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Я. Хелемский, Аппроксимативно конечномерные C^* -алгебры с проективными гильбертовыми модулями, их диаграммы Браттели и K_0 -группы, *Матем. сб.*, 1997, том 188, номер 10, 131–148

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm267>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.207.199.55

26 апреля 2023 г., 13:01:18

УДК 512.553.7+512.556

А. Я. Хелемский

**Аппроксимативно конечномерные C^* -алгебры
с проективными гильбертовыми модулями,
их диаграммы Браттели и K_0 -группы**

Статья посвящена гомологической классификации аппроксимативно конечномерных C^* -алгебр. Описаны алгебры из этого класса, для которых существует хотя бы один нетривиальный гильбертов модуль, и те, для которых существует хотя бы один верный (точный) гильбертов модуль. Описание дано в терминах диаграмм Браттели рассматриваемых алгебр и в терминах упорядоченных K_0 -групп этих алгебр.

Библиография: 20 названий.

Введение

Настоящая работа относится к гомологической классификации операторных алгебр — области, развившейся из изучения дифференцирований этих алгебр, их автоморфизмов, расширений и деформаций. Наиболее известными результатами в данной области являются, по-видимому, теорема Конна, описывающая алгебры фон Нойманна с тривиальными нормальными когомологиями [1], и теорема Хаагерупа, завершающая исследования по характеристике аменабельных (т.е. обладающих тривиальными дуальными когомологиями) C^* -алгебр [2].

Здесь мы рассматриваем некоторые аспекты следующего типового вопроса: как устроены C^* -алгебры, обладающие тем или иным запасом проективных гильбертовых модулей? Помимо стандартных приложений к группам когомологий C^* -алгебр с операторными коэффициентами (ср. [3]) такой вопрос имеет самостоятельный интерес: речь идет о важнейшем гомологическом свойстве, рассмотренном для одного из важнейших классов модулей. В рамках указанной проблематики естественно выделяются два более конкретных вопроса. А именно, как охарактеризовать те C^* -алгебры A , для которых, соответственно,

- 1) существует хотя бы один нетривиальный проективный гильбертов A -модуль?
- 2) существует хотя бы один верный (точный) проективный гильбертов A -модуль?

В работе [4] (см. также [5]) подобные задачи были решены для “классического” случая алгебр фон Нойманна и нормальных гильбертовых модулей над ними. Соответствующие результаты существенно опирались на стандартные факты структурной теории этих алгебр, в частности, теорему о разложении на типы и ее многочисленные следствия (см., например, [6, гл. VI и IX]).

Работы выполнены при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-01-01036), а также программы ИНТАС (грант № 93-1376).

© А. Я. Хелемский 1997

В настоящей работе ответ на вопросы 1) и 2) дан в классе алгебр, представляющих в данной области следующую степень сложности после алгебр фон Нойманна. Это аппроксимативно конечномерные C^* -алгебры, называемые для краткости *АФ-алгебрами*. Основные результаты работы – теоремы 1 и 2 – показывают, что АФ-алгебры с требуемыми гомологическими свойствами характеризуются довольно просто формулируемыми условиями на их структуру. Эти условия допускают ряд эквивалентных формулировок, в том числе на обоих языках, адекватно описывающих строение АФ-алгебр: в терминах диаграмм Браттели и в терминах упорядоченных K_0 -групп. Что касается последних, то оказывается, что АФ-алгебра имеет тем больший запас проективных гильбертовых модулей, чем больше в ее K_0 -группе минимальных положительных элементов. (В частности, по этой причине простые унитарные АФ-алгебры вообще не имеют нетривиальных проективных гильбертовых модулей.) При наличии указанных элементов нужные модули строятся с помощью некоторой конструкции, использующей специальный вид диаграммы Браттели рассматриваемой алгебры.

§ 1. Напоминания о проективных модулях, диаграммах Браттели и K_0 -группах

Как обычно, C^* -алгебра всех ограниченных (соответственно, компактных) операторов в гильбертовом пространстве H обозначается через $\mathcal{B}(H)$ (соответственно, $\mathcal{K}(H)$). Вместо $\mathcal{K}(\ell_2)$ мы будем писать просто $\mathcal{K}$.

Пусть A – (пока произвольная) банахова алгебра. Везде далее, говоря “ A -модуль”, мы имеем в виду левый банахов модуль над A , а говоря “морфизм A -модулей”, – *непрерывный морфизм*. Под *нетривиальным модулем* мы понимаем модуль с ненулевым внешним умножением, а под *верным модулем* – такой A -модуль X , что для любого $a \in A$, $a \neq 0$, существует $x \in X$, для которого $a \cdot x \neq 0$; последнее в точности означает, что ассоциированное с таким модулем представление является верным (точным).

Далее, A -модуль P называется *проективным* (в [7] – топологически проективным), если каждый сюръективный морфизм из произвольного A -модуля на P , обладающий правым обратным линейным ограниченным оператором, обладает и правым обратным морфизмом A -модулей. Проективные модули, играющие стандартную роль “гомологически лучших” модулей, могут быть определены многими эквивалентными способами, в том числе в терминах дифференцирований и в терминах групп когомологий (см., например, [8]). Ниже мы будем пользоваться эквивалентными определениями, дающими действенный метод проверки этого свойства с помощью так называемых свободных модулей, т.е. A -модулей вида $A_+ \hat{\otimes} E$, где A_+ – унитаризация алгебры A , $\hat{\otimes}$ – символ проективного тензорного произведения, E – (произвольное) банахово пространство, а внешнее умножение корректно определено равенством $a \cdot (b \otimes x) = ab \otimes x$, $a \in A$, $b \in A_+$, $x \in E$. A именно, заданный A -модуль P *проективен тогда и только тогда, когда он является ретрактом (т.е. прямым модульным слагаемым) хотя бы одного свободного A -модуля, и в то же время тогда и только тогда, когда он является ретрактом (конкретного) свободного модуля $A_+ \hat{\otimes} P$.*

Теперь пусть A – C^* -алгебра (или, в более общем случае, инволютивная банахова алгебра). Тогда среди A -модулей особое значение приобретают те, которые

должным образом реагируют на инволюцию. А именно, A -модуль H называется *гильбертовым*, если его подлежащее пространство – гильбертово и при этом выполнено тождество $\langle a \cdot x, y \rangle = \langle x, a^* \cdot y \rangle$, $a \in A$, $x, y \in H$. Разумеется, гильбертовы модули – это в точности те модули, чьи ассоциированные представления (ср., например, [8]) являются инволютивными представлениями алгебры A в гильбертовых пространствах. В частности, верный гильбертов модуль над C^* -алгеброй A – это такой модуль, что ассоциированное с ним представление реализует A в виде операторной C^* -алгебры.

(Оговоримся, что слова “гильбертов модуль” употребляются в литературе во многих различных смыслах. Наши гильбертовы модули – это почти те же, что, скажем, у Дугласа и Полсена [9], но отличаются от “гильбертовых C^* -модулей” Пэшке (см., например, [10].)

Наконец, сосредоточимся на АФ-алгебрах. Это, по определению, C^* -алгебры, представимые в виде замыкания объединения некоторой возрастающей последовательности своих конечномерных C^* -подалгебр или, что эквивалентно, в виде прямого предела некоторой последовательности конечномерных алгебр в категории $C^*\text{-alg}$ C^* -алгебр и их инволютивных гомоморфизмов. Основы теории АФ-алгебр заложены в статье Браттели [11], который предложил эффективный графический способ описания таких алгебр – то, что теперь называется *диаграммами Браттели*. Напомним (в чуть модифицированном виде), что это такое.

Говорят, что задана диаграмма Браттели $\mathcal{D}$, если, во-первых, задан ориентированный (мульти)граф указанного ниже вида и, во-вторых, каждой вершине этого графа сопоставлено целое положительное число, называемое ее *размерностью* и удовлетворяющее указанным ниже условиям. Граф, множество вершин которого мы обозначим через $V(\mathcal{D})$, а множество стрелок (ориентированных ребер) – через $\downarrow(\mathcal{D})$, имеет следующее строение. $V(\mathcal{D})$ состоит из упорядоченных пар целых положительных чисел таких, что для любого $n = 1, 2, \dots$ вершины n -й строки (т.е. пары из $V(\mathcal{D})$, начинающиеся с n) образуют непустое конечное множество вида $(n, 1), (n, 2), \dots, (n, k_n)$ ($k_n > 0$ зависит от n). Далее, множество стрелок, выходящих из вершин n -й строки (обозначается $\downarrow_n(\mathcal{D})$, $n = 1, 2, \dots$), конечно, все его стрелки ведут в $(n + 1)$ -ю строку, и из каждой вершины выходит хотя бы одна стрелка. Наконец, обозначая через $[n, l]$ размерность вершины (n, l) , а через $\begin{bmatrix} n & l \\ n + 1 & m \end{bmatrix}$ число стрелок, ведущих из (n, l) в $(n + 1, m)$, мы требуем, чтобы для каждого $n = 1, 2, \dots$ выполнялось неравенство

$$\sum_{l=1}^{k_n} \begin{bmatrix} n & l \\ n + 1 & m \end{bmatrix} [n, l] \leq [n + 1, m]. \quad (1)$$

Каждая диаграмма Браттели с помощью некоторой стандартной процедуры порождает определенную АФ-алгебру. Такая процедура была описана в [11] в терминах матричных алгебр; нам необходимо изложить ее в терминах операторных алгебр. Построение состоит из этапов 1°–4°.

1°. Для каждой $(n, l) \in V(\mathcal{D})$ зафиксируем (произвольное) гильбертово пространство $H_{n,l}$ размерности $[n, l]$ и возьмем гильбертову прямую сумму

$$H_n = \bigoplus_{l=1}^{k_n} H_{n,l}.$$

Рассмотрим C^* -алгебру A_n , состоящую из всех действующих в H_n операторов с инвариантными подпространствами $H_{n,l}$, $l = 1, \dots, k_n$. Очевидно, естественное вложение $H_{n,l}$ в H_n , обозначаемое далее $\varepsilon_{n,l}$, определяет инволютивный изоморфизм $a \mapsto \varepsilon_{n,l} a \varepsilon_{n,l}^*$ между C^* -алгеброй $\mathcal{B}(H_{n,l})$ и C^* -подалгеброй $A_{n,l}$ в A_n , состоящей из операторов, равных нулю на $H_n \ominus H_{n,l}$. При этом A_n разлагается в C^* -прямую сумму $\bigoplus_{l=1}^{k_n} A_{n,l}$.

2°. Каждой $\alpha \in \downarrow(\mathcal{D})$ — пусть она ведет из (n, l) в $(n+1, m)$ — сопоставим некоторый оператор i_α , изометрически отображающий $H_{n,l}$ в $H_{n+1,m}$. Неравенство (1) в качестве условия на размерности пространств позволяет это сделать и при том так, чтобы для $\alpha, \beta \in \downarrow(\mathcal{D})$, $\alpha \neq \beta$, выполнялось $H_\alpha \perp H_\beta$, где $H_\alpha = \text{Im } i_\alpha$. Зафиксируем любое подобное сопоставление $\alpha \mapsto i_\alpha$ и обозначим через $j_\alpha: H_n \rightarrow H_{n+1}$ частично изометрический оператор $\varepsilon_{n+1,m} i_\alpha \varepsilon_{n,l}^*$.

3°. Теперь для каждого $n = 1, 2, \dots$, $\alpha \in \downarrow_n(\mathcal{D})$ и $a \in A_n$ рассмотрим оператор $j_\alpha a j_\alpha^*: H_{n+1} \rightarrow H_{n+1}$. Очевидно, он принадлежит алгебре A_{n+1} , и при этом отображение $\varkappa_\alpha: A_n \rightarrow A_{n+1} : a \mapsto j_\alpha a j_\alpha^*$ есть инволютивный гомоморфизм C^* -алгебр. Положим $\varkappa_n = \sum_\alpha \varkappa_\alpha$, где сумма взята по всем $\alpha \in \downarrow_n(\mathcal{D})$; это также инволютивный гомоморфизм, причем, как легко видеть, изометрический.

4°. Наконец, в категории C^* -**alg** рассмотрим последовательность

$$A_1 \xrightarrow{\varkappa_1} A_2 \longrightarrow \dots \longrightarrow A_n \xrightarrow{\varkappa_n} A_{n+1} \longrightarrow \dots$$

Как и всякая прямая система в этой категории она имеет прямой предел — некоторую C^* -алгебру A , снабженную семейством инволютивных гомоморфизмов $\varkappa^n: A_n \rightarrow A$ (см., например, [12]). При этом в рассматриваемом случае изометричность $\varkappa_n$ влечет изометричность $\varkappa^n$, а A совпадает с замыканием объединения C^* -алгебр $\varkappa^n(A_n)$, $n = 1, 2, \dots$ (Далее алгебры $\varkappa^n(A_n)$ будут обозначаться через A^n , а их C^* -подалгебры $\varkappa^n(A_{n,l})$ — через $A^{n,l}$.) Тем самым A — АФ-алгебра.

Построенную таким образом алгебру A мы будем называть АФ-алгеброй, ассоциированной с диаграммой Браттели $\mathcal{D}$, и обозначать $A(\mathcal{D})$. Очевидно, с точностью до инволютивного изоморфизма она не зависит от конкретного выбора пространств $H_{n,l}$ и операторов i_α , удовлетворяющих указанным условиям. В дальнейшем, говоря об $A(\mathcal{D})$, мы будем считать, что все эти “ингредиенты”, участвующие в нашем построении, фиксированы.

Теорема Браттели [11] утверждает (в эквивалентной формулировке), что *всякая АФ-алгебра A имеет с точностью до инволютивного изоморфизма вид $A(\mathcal{D})$ для некоторой диаграммы $\mathcal{D}$* . Последнюю мы будем называть *диаграммой Браттели данной алгебры*. Разумеется, у A существует много различных диаграмм Браттели, но все они “в существенном сходны” (см. точную формулировку соответствующего результата в [11]).

Введем несколько понятий, относящихся к обсуждаемым диаграммам. *Ветвью диаграммы Браттели $\mathcal{D}$* назовем последовательность ее вершин вида (n, l_n) , $(n+1, l_{n+1}), \dots$ такую, что две соседних вершины соединены хотя бы одной стрелкой. Ветвь назовем *увядающей*, если из каждой ее вершины исходит (куда бы то ни было) всего одна стрелка, и *увядающей*, если указанное свойство выполнено для всех вершин, начиная с некоторой.

В дальнейшем нам предстоит использовать несколько известных результатов об АФ-алгебрах. Для удобства будущих ссылок мы их выделим как “утверждения”

(A , B и т.д.). Первое из них описывает замкнутые двусторонние идеалы в $A(\mathcal{D})$ в терминах $\mathcal{D}$. Подмножество Λ в $V(\mathcal{D})$ назовем *наследственным*, если для любой стрелки, ведущей, скажем, из (n, l) в $(n+1, m)$, $(n, l) \in \Lambda$ влечет $(n+1, l_{n+1}) \in \Lambda$. Для наследственного Λ обозначим через $I^0(\Lambda)$ алгебраическую сумму всех $A^{n,l}$, $(n, l) \in \Lambda$, а через $I(\Lambda)$ — ее замыкание в A .

УТВЕРЖДЕНИЕ А [11]. *Подмножество I в A является замкнутым двусторонним идеалом этой алгебры тогда и только тогда, когда оно имеет вид $I(\Lambda)$ для некоторого наследственного подмножества Λ в $V(\mathcal{D})$.*

В частности, мы можем зафиксировать произвольную $(n, l) \in V(\mathcal{D})$ и рассмотреть множество всех вершин, принадлежащих всем ветвям в $\mathcal{D}$, начинающимся с (n, l) . Идеал, соответствующий такому Λ , будет обозначаться через $I^{n,l}$.

Кроме диаграмм Браттели в формулировках теорем этой работы будут участвовать и упорядоченные K_0 -группы АФ-алгебр. Основные определения и факты, относящиеся к этим группам, изложены, например, в [12]–[14]. Мы лишь напомним, что в случае АФ-алгебры A группу $K_0(A)$ — независимо от того, унитарна A или нет — можно определить как группу Гротендика полугруппы $K_0^+(A)$, состоящей из классов эквивалентности проекторов в C^* -тензорном произведении $A \otimes \mathcal{K}$. (Сумма двух классов в $K_0^+(A)$ определяется как класс суммы двух взаимно ортогональных проекторов, представляющих исходные классы.) Под эквивалентностью понимается стандартная *эквивалентность Мюррея–фон Нойманна*: проекторы $p, q \in A \otimes \mathcal{K}$ эквивалентны ($p \sim q$), если для некоторого $V \in A \otimes \mathcal{K}$ выполнено $V^*V = p$ и $VV^* = q$. В этой связи весьма важно

УТВЕРЖДЕНИЕ Б. *Пусть B — C^* -алгебра, совпадающая с замыканием объединения некоторого возрастающего семейства своих C^* -подалгебр B_n , $n = 1, 2, \dots$. Тогда каждый проектор в B эквивалентен некоторому проектору в B_n для некоторого n .*

Напомним, что в случае АФ-алгебры эквивалентность Мюррея–фон Нойманна совпадает со стабильной эквивалентностью, вследствие чего канонический гомоморфизм полугрупп $K_0^+(A) \rightarrow K_0(A)$ инъективен и, следовательно, $K_0^+(A)$ отождествляется с подполугруппой в $K_0(A)$. Более того, эта *полугруппа*, объявленная множеством положительных элементов, *задает в $K_0(A)$ структуру упорядоченной группы* (соответствующее отношение порядка мы будем обозначать через $\leq$). Как обычно, через $[p] \in K_0^+(A) \subset K_0(A)$ мы обозначаем класс эквивалентности проектора $p \in A \otimes \mathcal{K}$ и пишем $p \prec q$, если проектор p эквивалентен некоторому подпроектору проектора q . Очевидно, $p \prec q$ (в $A \otimes \mathcal{K}$) означает в точности $[p] \leq [q]$ (в $K_0(A)$). В сказанном выше содержится

УТВЕРЖДЕНИЕ В. *Если A — АФ-алгебра и p — ненулевой проектор в $A \otimes \mathcal{K}$, то $[p]$ — ненулевой элемент в $K_0(A)$.*

Наконец, выделим менее очевидное утверждение, также отражающее специфику АФ-алгебр. Зафиксировав одномерный проектор, скажем r , в $\mathcal{K}$, отождествим заданную C^* -алгебру A с подалгеброй в $A \otimes \mathcal{K}$ посредством инволютивного гомоморфизма $a \mapsto a \otimes r$.

УТВЕРЖДЕНИЕ Г. Пусть A – АФ-алгебра. Тогда для любого ненулевого проектора $p \in A \otimes \mathcal{K}$ существует ненулевой проектор $q \in A$ такой, что $q \prec p$ (иными словами $[p] \leq [q]$).

Это утверждение в той эквивалентной формулировке, что множество $\{[p] : p \in A\}$ “доставляет шкалу в $K_0(A)$ ”, содержится, например, в [13].

§ 2. Формулировка и обсуждение основных результатов.

Гомологическая характеристика конечномерных C^* -алгебр

В теоремах 1, 2 A – это АФ-алгебра, а $\mathcal{D}$ – ее (любая) диаграмма Браттели.

ТЕОРЕМА 1. Следующие условия эквивалентны существованию хотя бы одного нетривиального проективного гильбертова A -модуля:

- (i) $\mathcal{D}$ содержит увядающую ветвь;
- (ii) существуют замкнутый двусторонний идеал I в A и инволютивное представление $T: A \rightarrow \mathcal{B}(H)$, где H – некоторое гильбертово пространство, такие, что T осуществляет биекцию между I и $\mathcal{K}(H)$;
- (iii) в A существует минимальный проектор;
- (iv) в упорядоченной группе $K_0(A)$ существует минимальный положительный элемент.

ТЕОРЕМА 2. Следующие условия эквивалентны существованию хотя бы одного верного проективного гильбертова A -модуля:

- (i) каждая вершина в $\mathcal{D}$ служит началом некоторой увядающей ветви;
- (ii) для каждого ненулевого замкнутого двустороннего идеала J в A существуют ненулевой замкнутый двусторонний идеал I , содержащийся в J , и инволютивное представление $T: A \rightarrow \mathcal{B}(H)$, где H – некоторое гильбертово пространство, такие, что T осуществляет биекцию между I и $\mathcal{K}(H)$;
- (iii) каждый ненулевой замкнутый двусторонний идеал в A содержит минимальный проектор;
- (iiia) каждый ненулевой проектор в A содержит минимальный подпроектор;
- (iv) в упорядоченной группе $K_0(A)$ каждому ненулевому положительному элементу предшествует некоторый минимальный положительный элемент.

Доказательство этих теорем, вместе с необходимой подготовкой, займет оставшиеся параграфы статьи. Оно будет проведено параллельно для обеих теорем по схемам, соответственно,

$$\begin{array}{ccc}
 (i) \Rightarrow (ii) & & (i) \Rightarrow (ii) \\
 \Uparrow \quad \Downarrow & & \Uparrow \quad \Downarrow \\
 (iv) \Leftrightarrow (iii) \Leftarrow (*), & & (iv) \Leftrightarrow (iiia) \Leftrightarrow (iii) \Leftarrow (*),
 \end{array}$$

где $(*)$ означает утверждение о существовании проективного гильбертова модуля с соответствующими свойствами – нетривиального в теореме 1 и верного в теореме 2.

Обсудим результаты. Прежде всего отметим, что условие (ii) первой теоремы немедленно влечет

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть A – простая АФ-алгебра, отличная от $\mathcal{K}$ (например, равномерно гиперфинитная алгебра). Тогда ни один нетривиальный гильбертов A -модуль не является проективным.

Тот же факт вытекает и из известного строения диаграмм Браттели указанных алгебр, равно как и из вида их K_0 -групп (ср. [13]). В качестве иллюстрации напомним, что самая известная из унитарных простых АФ-алгебр – алгебра фермионов (она же CAR-алгебра) – обладает диаграммой Браттели, в которой каждая строка содержит всего одну вершину и из каждой вершины ведут ровно две стрелки; в то же время K_0 -группа этой алгебры есть группа двоично-рациональных действительных чисел с естественным порядком.

Еще одна иллюстрация касается коммутативных АФ-алгебр. Как известно, всякая такая алгебра инволютивно изоморфна алгебре $C_0(\Omega)$ всех непрерывных исчезающих на бесконечности функций, заданных на локально компактном вполне несвязном пространстве Ω . Нетрудно проверить, что K_0 -группа подобной алгебры – это группа $\mathbb{Z}$ -значных локально постоянных функций на Ω , равных нулю на бесконечности. Вместе с условием (ii) теорем 1, 2 это дает

СЛЕДСТВИЕ 2. Коммутативная АФ-алгебра с (гельфандовским) спектром Ω обладает нетривиальными проективными гильбертовыми модулями тогда и только тогда, когда Ω содержит изолированные точки, и обладает верными проективными модулями тогда и только тогда, когда подмножество изолированных точек плотно в Ω .

Разумеется, тот же вывод можно сделать из других условий теорем 1 и 2; заметим, что в данной ситуации гильбертовы пространства, фигурирующие в условии (ii), одномерны.

Обе теоремы могут быть сформулированы на языке групп когомологий банаховых алгебр с операторными коэффициентами. Напомним, что для банаховой алгебры A пространство $\mathcal{B}(X, Y)$ всех ограниченных операторов между банаховыми A -модулями X и Y наделяется структурой банахова A -бимодуля с внешними умножениями $(a \cdot \varphi)(x) = a \cdot \varphi(x)$ и $(\varphi \cdot a)(x) = \varphi(a \cdot x)$, $a \in A$, $\varphi \in \mathcal{B}(X, Y)$, $x \in X$. Вместе с известным эквивалентным определением проективности на языке групп когомологий $\mathcal{H}^n(A, \cdot)$ с коэффициентами в подобных бимодулях (см., например, [3]) сформулированные теоремы влекут

СЛЕДСТВИЕ 3. i) Каждое из четырех условий теоремы 1 равносильно тому, чтобы существовал нетривиальный гильбертов A -модуль H такой, что $\mathcal{H}^n(A, \mathcal{B}(H, Y)) = 0$ для любого A -модуля Y и любого $n > 0$ (или, эквивалентно, такой, что все непрерывные дифференцирования алгебры A со значениями в $\mathcal{B}(H, Y)$, где Y – любой A -модуль, являются внутренними);

ii) то же, с заменой слов “теоремы 1” на “теоремы 2” и “нетривиальный” на “верный”.

Что происходит за пределами класса АФ-алгебр? Разумеется, утверждения обеих теорем, касающихся диаграмм Браттели и упорядоченных K_0 -групп, теряют смысл, а эквивалентность $(*) \Leftrightarrow (iii)$, как легко видеть, перестает быть верной.

Однако импликация (ii) $\Rightarrow$ (*), как будет показано в §4, верна для всех C^* -алгебр. По всей видимости, верно и обратное, причем формулировка соответствующего критерия может быть упрощена (ср. далее замечание в §5). А именно, выскажем

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ. Пусть A – произвольная C^* -алгебра. Тогда

- i) для того чтобы существовал хотя бы один нетривиальный проективный гильбертов A -модуль, необходимо и достаточно, чтобы в A существовал замкнутый двусторонний идеал, инволютивно изоморфный $\mathcal{K}(H)$ для некоторого гильбертова пространства H ;
- ii) для того чтобы существовал хотя бы один верный проективный гильбертов A -модуль, необходимо и достаточно, чтобы любой замкнутый двусторонний идеал в A содержал замкнутый двусторонний идеал, инволютивно изоморфный $\mathcal{K}(H)$ для некоторого гильбертова пространства H .

ЗАМЕЧАНИЕ. Наряду с вопросами 1) и 2), поставленными во введении, естественно возникает и третий вопрос: как охарактеризовать те C^* -алгебры A , для которых все гильбертовы A -модули проективны? Оказывается, такое условие характеризует в точности конечномерные C^* -алгебры, причем ответ получается простым объединением нескольких известных результатов. Действительно, пусть X – неприводимый банахов модуль над C^* -алгеброй A . Тогда в силу [15, теорема 2.9.5] X изоморфен банахову A/N_f -модулю A/N_f , где $N_f = \{a \in A : f(a^*a) = 0\}$ для некоторого чистого состояния f на A . Поэтому в силу полноты пространства A/N_f относительно нормы $\|\cdot\|$, согласованной со скалярным произведением $\langle a + N_f, b + N_f \rangle = f(b^*a)$ [15, следствие 2.8.5], и теоремы Банаха об обратном операторе, факторнорма в A/N_f эквивалентна норме $\|\cdot\|$. (В действительности, как показал Такесаки [16], обе нормы совпадают, но нам это не понадобится.) Сказанное означает, что всякий неприводимый банахов модуль над C^* -алгеброй изоморфен гильбертову. Следовательно, если всякий гильбертов A -модуль проективен, то и всякий неприводимый банахов A -модуль проективен и к тому же обладает свойством аппроксимации Гротендика, а это согласно теореме Селиванова [17] означает, что A конечномерна. Обратное утверждение см., например, [8, теорема VII.1.7.4].

Любопытно сравнить сделанное наблюдение с ранее замеченным фактом, что алгебр фон Нойманна, все нормальные гильбертовы модули над которыми проективны, существенно больше, чем конечномерных: они описываются как прямые l_∞ суммы произвольных (имеющих любую мощность) семейств полных матричных C^* -алгебр [4].

Обсудив объявленные результаты, мы переходим к их доказательству.

§3. Представления, порожденные ветвями, и импликация (i) $\Rightarrow$ (ii)

Пусть $\mathcal{D}$ – диаграмма Браттели и $(n, l_n), (n+1, l_{n+1}), \dots$ – ее некоторая ветвь, которую мы для краткости обозначим через W . Выберем ровно по одной стрелке, скажем α_m , среди стрелок, ведущих из (m, l_m) в $(m+1, l_{m+1})$, $m = n, n+1, \dots$

Напомним о пространствах и операторах, зафиксированных в ходе построения алгебры $A = A(\mathcal{D})$, рассмотрим последовательность конечномерных гильберто-

вых пространств и операторов

$$H_{n,l_n} \xrightarrow{i_n} H_{n+1,l_{n+1}} \longrightarrow \cdots \longrightarrow H_{m,l_m} \xrightarrow{i_m} H_{m+1,l_{m+1}} \longrightarrow \cdots,$$

где i_m – краткое обозначение для i_{α_m} (см. §1). Эта последовательность является прямой системой в категории **Ban**₁ банаховых пространств и сжимающих операторов и в качестве таковой обладает прямым пределом (см., например, [18, гл. 3]). В данной ситуации прямой предел есть некоторое гильбертово пространство H вместе с изометрическими операторами $i^m: H_{m,l_m} \rightarrow H$, $i^{m+1}i_m = i^m$; при этом H совпадает с замыканием возрастающего семейства своих конечномерных подпространств $H^{m,l_m} = i^m(H_{m,l_m})$ (везде $m = n, n+1, \dots$).

Наша ближайшая цель – построить некоторое инволютивное представление алгебры A в H и тем самым задать в H структуру гильбертова A -модуля.

Сначала, зафиксировав некоторое $m \geq n$, возьмем конечномерную алгебру A_m (см. §1). Произвольно выбрав $a \in A_m$ для всех $k \geq m$ определим по индукции операторы $a_k \in A_k$, положив $a_m = a$ и $a_{k+1} = \varkappa_k(a_k)$. Рассмотрим для каждого k оператор $\sigma_k^m(a) = \varepsilon_{k,l_k}^* a_k \varepsilon_{k,l_k} \in \mathcal{B}(H_{k,l_k})$; очевидно, с точностью до соответствующего отождествления это проекция a_k на прямое слагаемое A_{k,l_k} в A_k .

Элементарные выкладки, использующие определение гомоморфизмов $\varkappa_k$ с помощью операторов j_β , $\beta \in \downarrow_k(\mathcal{D})$ (см. §1) и очевидное равенство $j_\beta^* \varepsilon_{k+1,l_{k+1}} i_k = 0$ при $\beta \neq \alpha_k$, показывают, что для всех $k \geq m$ выполнено $\sigma_{k+1}^m(a) i_k = i_k \sigma_k^m(a)$. Это означает, что диаграмма

$$\begin{array}{ccccccc} H_{m,l_m} & \xrightarrow{i_m} & H_{m+1,l_{m+1}} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & H_{k,l_k} & \xrightarrow{i_k} \\ & \searrow \tau_m^m(a) & & \searrow \tau_{m+1}^m(a) & & \searrow \tau_k^m(a) & & \\ & & & & & & & H \end{array}$$

в которой $\tau_k^m(a)$ определен как $i_k^* \sigma_k^m(a)$, коммутативна. Кроме того, очевидно, норма всех $\tau_k^m(a)$ не превосходит $\|a\|$, т.е. все эти операторы оказываются сжимающими после умножения на одну и ту же константу ($\|a\|^{-1}$ при $a \neq 0$). Поэтому свойство универсальности прямых пределов (в **Ban**₁) определяет единственный оператор $T_m(a): H \rightarrow H$ такой, что для каждого $k \geq m$ диаграмма

$$\begin{array}{ccc} & & H \\ & \nearrow i_k & \downarrow T_m(a) \\ H_{k,l_k} & & H \\ & \searrow \tau_k^m(a) & \end{array}$$

коммутативна и $\|T_m(a)\| \leq \|a\|$. (Говоря неформально, на каждом H^{k,l_k} при отождествлении последнего с H_{k,l_k} $T_m(a)$ совпадает с $\sigma_k^m(a)$.) Легко проверяется, что отображение $T_m: A_m \rightarrow \mathcal{B}(H): a \mapsto T_m(a)$ является инволютивным гомоморфизмом алгебр (т.е. представлением алгебры A_m в H).

Теперь рассмотрим одновременно все T_m , $m \geq n$, и заметим, что для любых $m, k, k > m$, выполнено $\tau_k^{\mu+1}(\varkappa_m(a)) = \tau_k^\mu(a)$. Отсюда вытекает, что предыдущая

$m = n, n+1, \dots$, в A возрастает, и, следовательно, I^{m, l_n} является замыканием их объединения.

Далее, для тех же m и a элементарные выкладки, использующие уже отмеченное равенство $\varkappa_m(a) = j_m a j_m^*$ и очевидное соотношение $i_m = \varepsilon_{m+1, l_{m+1}}^* j_m \varepsilon_{m, l_m}$, дают $\sigma_{m+1}^m(a) = i_m \sigma_m^m(a) i_m^*$; аналогично, $\sigma_{m+2}^m(a) = i_{m+1} \sigma_{m+1}^m(a) i_{m+1}^*$ и т.д. Отсюда легко следует равенство $\tau_k^m(a) = i^m \sigma_m^m(a) i_m^* i_{m+1}^* \dots i_{r-1}^*$ для любого $k > m$, а это, в свою очередь, влечет то, что для действующего в H оператора $a' = i^m \sigma_m^m(a) (i^m)^*$ при всех $k \geq m$ выполнено $a' i^k = \tau_k^m(a)$. Тем самым a' есть не что иное, как $T_m(a)$.

Итак, представление $T_m: A_m \rightarrow \mathcal{B}(H)$ переводит каждый $a \in A_{m, l_m}$ в $i^m \sigma_m^m(a) (i^m)^*$. Это означает, что T_m осуществляет инволютивный изоморфизм подалгебры A_{m, l_m} в A_m на подалгебру $\mathcal{K}_m(H)$ в $\mathcal{B}(H)$, состоящую из всех операторов, обладающих инвариантным $[m, l_m]$ -мерным подпространством $H^m = i^m(H_{m, l_m})$ и равных нулю на $H \ominus H_m$. Таким образом, $T: A \rightarrow \mathcal{B}(H)$ осуществляет (изометрический) инволютивный изоморфизм между A^{m, l_m} ($A^{m, l_m} = \varkappa^m(A_{m, l_m})$) и $\mathcal{K}_m(H)$. Но, разумеется, замыкание объединения возрастающего семейства конечномерных подалгебр $\mathcal{K}_m(H)$, $m = n, n+1, \dots$, в $\mathcal{B}(H)$ совпадает с $\mathcal{K}(H)$. Тем самым T осуществляет изометрический инволютивный изоморфизм между плотной подалгеброй $\bigcup_{m=n}^{\infty} A^{m, n+1}$ в I^{n, l_n} (см. выше) и плотной подалгеброй в $\mathcal{K}(H)$. Дальше ясно.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Справедлива импликация (i) $\Rightarrow$ (ii) в теоремах 1 и 2.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для теоремы 1 указанная импликация очевидным образом содержится в предыдущем предложении. Перейдем к теореме 2. Возьмем замкнутый двусторонний идеал J в $A(\mathcal{D})$. Согласно утверждению А (см. §1) J содержит, по крайней мере, одну из алгебр $A^{n, l}$, $(n, l) \in V(\mathcal{D})$, а вместе с ней все алгебры $A^{m, k}$ для вершин (m, k) , которые принадлежат хотя бы одной ветви, начинающейся с (n, l) . Но условие (i) в теореме 2 означает, что среди таких (m, k) существует вершина, начинающая увядшую ветвь. Поскольку соответствующий идеал $I^{m, k}$ содержится в J , предложение 1, примененное к последней ветви, немедленно дает нужную импликацию.

§ 4. Гильбертовы модули над C^* -алгебрами с идеалами типа $\mathcal{K}(H)$ и импликация (ii) $\Rightarrow$ (*)

Следующее предложение навеяно старой теоремой Калимана и Селиванова [19] о том, что для операторной алгебры A , действующей в банаховом пространстве E и содержащей все конечномерные операторы, E является проективным A -модулем.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Пусть A — C^* -алгебра, I_ν , $\nu \in \Lambda$, — семейство ненулевых замкнутых двусторонних идеалов в A и $T_\nu: A \rightarrow \mathcal{B}(H_\nu)$ — заданное для каждого $\nu \in \Lambda$ инволютивное представление, биективно отображающее I_ν на $\mathcal{K}(H_\nu)$. Тогда гильбертов A -модуль $H = \bigoplus_\nu H_\nu$, ассоциированный с прямой суммой $T = \bigoplus_\nu T_\nu$ представлений T_ν , проективен. Если, кроме того, каждый ненулевой замкнутый двусторонний идеал в A содержит хотя бы один из идеалов I_ν , то H является верным A -модулем.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку банахов модуль и его унитизация одновременно проективны или нет, мы можем, не теряя общности, считать, что A и все гомоморфизмы T_ν унитарны.

В каждом H_ν зафиксируем по вектору e_ν , $\|e_\nu\| = 1$. Наряду с H рассмотрим свободный унитарный A -модуль $A \widehat{\otimes} \ell_2(\Lambda)$, где $\ell_2(\Lambda)$ – гильбертово пространство квадратично суммируемых (“дискретных”) функций на Λ . Последнее обладает естественным базисом δ_ν , $\nu \in \Lambda$, состоящим из характеристических функций одноточечных подмножеств $\{\nu\}$ в Λ .

Рассмотрим оператор $\tau: A \widehat{\otimes} \ell_2(\Lambda) \rightarrow H$, корректно определенный сопоставлением $a \otimes \xi \mapsto \sum_\nu \xi_\nu a \cdot e_\nu$, $a \in A$, $\xi = \{\xi_\nu : \nu \in \Lambda\} \in \ell_2(\Lambda)$. Очевидно, τ – (непрерывный) морфизм банаховых A -модулей.

Теперь обозначим через $S_\nu: \mathcal{K}(H_\nu) \rightarrow I_\nu$, $\nu \in \Lambda$, изометрический оператор, обратный к осуществляемой представлением T_ν биекции. Для каждого $\nu \in \Lambda$ и $X \in H_\nu$ рассмотрим одномерный оператор $x \circ e_\nu: y \mapsto \langle y, e_\nu \rangle x$ в H_ν и положим $\rho_\nu: H_\nu \rightarrow A \widehat{\otimes} \ell_2(\Lambda): x \mapsto [S_\nu(x \circ e_\nu)] \otimes \delta_\nu$. Очевидно, ρ_ν – изометрический оператор. Далее, для всех $a \in A$ и $x \in H_\nu$ в силу гомоморфности T_ν и принадлежности $aS_\nu(x \circ e_\nu)$ к I_ν выполнено

$$S_\nu(T_\nu(a)(x) \circ e_\nu) = S_\nu(T_\nu(a)T_\nu S_\nu(x \circ e_\nu)) = S_\nu T_\nu(aS_\nu(x \circ e_\nu)) = aS_\nu(x \circ e_\nu).$$

Поэтому

$$\rho_\nu(a \cdot x) = \rho_\nu(T_\nu(a)(x)) = [S_\nu(T_\nu(a)(x) \circ e_\nu)] \otimes \delta_\nu = [aS_\nu(x \circ e_\nu)] \otimes \delta_\nu = \rho_\nu(x)$$

и, тем самым, ρ_ν – морфизм A -модулей.

Обозначим через H^0 алгебраическую сумму подпространств H_ν , $\nu \in \Lambda$, в H и рассмотрим линейный оператор $\rho^0: H^0 \rightarrow A \widehat{\otimes} \ell_2(\Lambda)$, совпадающий на каждом H_ν с ρ_ν . Возьмем произвольный $y \in H^0$; для некоторых $\nu_1, \dots, \nu_n \in \Lambda$ он имеет вид $y = \sum_{k=1}^n x_k$, $x_k \in H_{\nu_k}$. Тогда, очевидно, $\rho^0(y)$ имеет вид $\sum_{k=1}^n a_k \otimes \|x_k\| \delta_{\nu_k}$, где $a_k \in I_{\nu_k}$ и $\|a_k\| = 1$.

Оценим норму $\rho^0(y)$, применив прием, восходящий к [20]. Непосредственно проверяемое равенство

$$\rho^0(y) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\sum_{l=1}^n \xi^{-lk} a_l \right) \otimes \left(\sum_{l=1}^n \xi^{lk} \|x_l\| \delta_{\nu_l} \right),$$

где ξ – первообразный корень n -й степени из 1, обеспечивает неравенство

$$\|\rho^0(y)\| \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left\| \sum_{l=1}^n \xi^{-lk} a_l \right\| \left\| \sum_{l=1}^n \xi^{lk} \|x_l\| \delta_{\nu_l} \right\|.$$

Зафиксировав любое l , положим для краткости $b_k = \xi^{-lk} a_k$. Идеалы I_ν в силу изоморфности алгебрам компактных операторов просты; поэтому они попарно пересекаются только по нулю и, следовательно, произведение любых элементов

различных идеалов есть тоже нуль. Отсюда, с учетом самосопряженности наших идеалов, для любого $m = 1, 2, \dots$ выполнено

$$\left[\left(\sum_{k=1}^n b_k \right)^* \left(\sum_{k=1}^n b_k \right) \right]^{2^m} = \left(\sum_{k=1}^n b_k^* b_k \right)^{2^m} = \sum_{k=1}^n (b_k^* b_k)^{2^m}.$$

Поэтому C^* -тождество дает

$$\left\| \sum_{k=1}^n b_k \right\| = \sqrt[2^m]{\left\| \sum_{k=1}^n (b_k^* b_k)^{2^m} \right\|} \leq \sqrt[2^m]{\sum_{k=1}^n \|b_k^* b_k\|^{2^m}} = \sqrt[2^m]{n},$$

откуда в силу произвольности m выполнено $\left\| \sum_{k=1}^n b_k \right\| \leq 1$.

Мы показали, что для любого $l = 1, \dots, n$ выполнено $\left\| \sum_{k=1}^n \xi^{-lk} a_k \right\| \leq 1$. В то же время, очевидно,

$$\left\| \sum_{l=1}^n \xi^{lk} \|x_l\| \rho_{\nu_l} \right\| = \sqrt{\sum_{l=1}^n \|x_l\|^2} = \|y\|.$$

Отсюда $\rho^0(y) \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n 1 \cdot \|y\| = \|y\|$.

Мы получили, что ρ^0 – ограниченный оператор из плотного в H подпространства H^0 в банахово пространство; в качестве такового он однозначно продолжается до непрерывного оператора $\rho: H \rightarrow A \widehat{\otimes} \ell_2(\Lambda)$. При этом из того, что ρ_ν – морфизм A -модулей для каждого $\nu \in \Lambda$, очевидным образом следует, что таким же свойством обладает и ρ . Наконец, заметим, что для всякого $x \in H_\nu, \nu \in \Lambda$, выполнено

$$\begin{aligned} \tau \rho_\nu(x) &= \tau([S_\nu(x \circ e_\nu)] \otimes \delta_\nu) = [S_\nu(x \circ e_\nu)] e_\nu \\ &= (T_\nu[S_\nu(x \circ e_\nu)])(e_\nu) = (x \circ e_\nu)(e_\nu) = x. \end{aligned}$$

Отсюда по линейности $\tau \rho^0(x) = x$ для всех H^0 и по непрерывности $\tau \rho(x) = x$ для всех $x \in H$.

Итак, к морфизму A -модулей τ существует правый обратный морфизм, а именно, ρ . Это означает (ср. §1), что гильбертов A -модуль H является ретрактом свободного модуля $A \widehat{\otimes} \ell_2(\Lambda)$ и, следовательно, проективен.

Теперь заметим, что $\text{Ker } T \cap I_\nu = \{0\}$ для любого $\nu \in \Lambda$. Поэтому, если выполнено условие, сформулированное в конце предложения, то $\text{Ker } T$, будучи замкнутым двусторонним идеалом в A , может быть только нулем. Дальше ясно.

Из доказанного немедленно вытекает

СЛЕДСТВИЕ 3. *Справедлива импликация (ii) $\Rightarrow$ (*) в теоремах 1 и 2.*

Подчеркнем, что в каждой из теорем указанная импликация верна для произвольных, не обязательно аппроксимативно конечномерных, C^* -алгебр.

ЗАМЕЧАНИЕ. В предложении 3 было постулировано, что изоморфизмы идеалов I_ν и $\mathcal{K}(H_\nu), \nu \in \Lambda$, осуществляются с помощью некоторых представлений алгебры A . В действительности, если известен лишь сам факт изоморфизма идеала I в A с $\mathcal{K}(H)$, то существует и представление алгебры A в H , осуществляющее этот изоморфизм. Но это утверждение требует для своего доказательства достаточно сильных средств теории C^* -алгебр (таких, как достаточность множества неприводимых представлений), и нам оно не понадобится: в рассматриваемом нами случае АФ-алгебр требуемые представления строятся указанными выше сравнительно элементарными средствами.

**§ 5. Морфизмы гильбертовых модулей
в базовую алгебру и импликация (*) $\Rightarrow$ (iii)**

Выделим простое вспомогательное утверждение.

ЛЕММА 1. Пусть B – конечномерная C^* -алгебра, b – ее ненулевой элемент. Тогда в B существует элемент c , $\|c\| = 1$, и проектор p такие, что $cb = \|b\|p$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Напомним, что B представима как C^* -прямая сумма вида $\bigoplus_{k=1}^n \mathcal{B}(H_k)$, где H_k – конечномерные гильбертовы пространства. Отсюда, как легко видеть, b^*b имеет вид $\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^{m_k} \lambda_{kl} p_{kl}$, где p_{kl} – попарно ортогональные проекторы в B_k , все коэффициенты λ_{kl} положительны, и наибольший из них – скажем, при проекторе p – равен $\|b^*b\| = \|b\|^2$. Остается положить

$$c = \frac{1}{\|b\|} p b^*.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Пусть A – АФ-алгебра, не содержащая минимальных проекторов, H – гильбертов A -модуль. Тогда любой (непрерывный) морфизм банаховых A -модулей из H в A есть тождественный нуль.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть, напротив, морфизм $\varphi: H \rightarrow A$ отличен от нуля. Для любого $\varepsilon > 0$ существует $x \in H$, $\|x\| = 1$, такой, что для $a = \varphi(x)$ выполнено $\|a\| > \|\varphi\| - \varepsilon$. Далее, согласно определению АФ-алгебры существуют конечномерная C^* -подалгебра B в A и $b \in B$ такой, что $\|a - b\| < \varepsilon$; разумеется, мы можем считать, что $b \neq 0$. Возьмем для этого b , указанные в лемме c и p , и положим $y = c \cdot x$. В силу мультипликативного неравенства для внешнего умножения в гильбертовых модулях $\|y\| \leq \|c\| \|x\| = 1$.

Поскольку в A нет минимальных проекторов, p представим как $p_1 + p_2$ с $p_1, p_2 \neq 0$ и $p_1 p_2 = p_2 p_1 = 0$. Но тогда в силу определения гильбертовых модулей (см. §1) векторы $p_1 \cdot y$ и $p_2 \cdot y$ ортогональны и, следовательно,

$$\|p_1 \cdot y\|^2 + \|p_2 \cdot y\|^2 = \|p \cdot y\|^2 \leq 1.$$

Поэтому хотя бы для одного из $i = 1, 2$ выполнено $\|z\| < 1/\sqrt{2}$, где $z = p_i y$ при этом i .

Однако в то же время

$$\begin{aligned} \|\varphi\| \|z\| &\geq \|\varphi(z)\| = \|p_i \varphi(y)\| = \|p_i c a\| \geq \|p_i c b\| - \|p_i c(a - b)\| \\ &\geq \|b\| - \|a - b\| > \|a\| - 2\varepsilon > \|\varphi\| - 3\varepsilon. \end{aligned}$$

Тем самым, для произвольно малого $\varepsilon > 0$ выполнено $\|\varphi\| - 3\varepsilon < \|\varphi\|/\sqrt{2}$. Противоречие.

Если X – банахов A -модуль, а I – левый идеал в A , то через $I \cdot X$ мы будем обозначать замыкание линейной оболочки элементов вида $a \cdot x$, $a \in I$, $x \in X$. Очевидно, $I \cdot X$ – замкнутый подмодуль в X .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Пусть A – АФ-алгебра, J – ее замкнутый двусторонний идеал, не содержащий минимальных проекторов, H – гильбертов A -модуль. Тогда любой морфизм банаховых A -модулей из H в A равен нулю на $J \cdot H$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть φ – заданный морфизм. Из $\varphi(a \cdot x) = a\varphi(x)$, $a \in J$, $x \in H$, следует, что сужение φ на $J \cdot H$ есть морфизм банаховых J -модулей из $J \cdot H$ в J . Но, как сразу следует из утверждения А, J сам является АФ-алгеброй. Остается в предложении 4 рассмотреть J вместо A и $J \cdot H$ вместо H .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. Пусть A – АФ-алгебра, J – ее замкнутый двусторонний идеал. Пусть, далее, для некоторого проективного гильбертова A -модуля H выполнено $J \cdot H \neq \{0\}$. Тогда J содержит минимальный проектор.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будучи проективным, H есть ретракт свободного A -модуля $A_+ \widehat{\otimes} H$ (см. §1); следовательно, существует инъективный морфизм A -модулей $\rho: H \rightarrow A_+ \widehat{\otimes} H$.

Согласно условию найдутся $a \in J$ и $x \in H$ такие, что $a \cdot x \neq 0$; отсюда $u = \rho(a \cdot x) \neq 0$. Поскольку H обладает свойством аппроксимации Гротендика, существует ограниченный функционал f на H такой, что оператор

$$1 \widehat{\otimes} f: A_+ \widehat{\otimes} H \rightarrow A_+ \widehat{\otimes} \mathbb{C} = A_+$$

отличен от нуля на u (ср., например, [3, IV.4.2]). Отсюда следует, что $\varphi = (1 \widehat{\otimes} f)\rho: H \rightarrow A_+$ – морфизм A_+ -модулей, отличный от нуля на $a \cdot x \in J \cdot H$. Остается, рассмотрев A_+ в качестве исходной АФ-алгебры, применить предложение 5.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. Справедлива импликация $(*) \Rightarrow$ (iii) в теоремах 1 и 2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассматривая теорему 1, достаточно положить в предыдущем предложении $J = A$. Что касается теоремы 2, то требуемая импликация сразу следует из этого же предложения и определения верного модуля.

§6. Конец доказательства

Все или почти все из простых наблюдений, сделанных в этом параграфе, должны быть известны специалистам, но дать явные ссылки, по-видимому, невозможно. Поэтому мы ради удобства читателя приведем соответствующие рассуждения.

В следующих четырех предложениях $\mathcal{D}$ – диаграмма Браттели и $A = A(\mathcal{D})$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8. Пусть $(n, l_n) \in V(\mathcal{D})$, p – проектор, принадлежащий A^{n, l_n} и минимальный в этой алгебре. Тогда

- i) если $(n+1, l_{n+1})$ – вершина, в которую ведет хотя бы одна стрелка из (n, l_n) , то для всякого проектора q , минимального в $A^{n+1, l_{n+1}}$, выполнено $q \prec p$;
- ii) проектор p , рассмотренный в A_{n+1} , минимален в этой алгебре тогда и только тогда, когда из (n, l_n) выходит только одна стрелка диаграммы.

Оба факта достаточно легко следуют из данного в §1 определения гомоморфизма $\varkappa_\alpha: A_n \rightarrow A_{n+1}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9. Пусть $(n, l_n), (n+1, l_{n+1}), \dots$ ветвь в $\mathcal{D}$ такая, что алгебра A^{n, l_n} содержит проектор, минимальный в A . Тогда эта ветвь – увядающая.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Указанный проектор – пусть это p – будучи минимальным в A , является таковым в A^{n, l_n} и в A^{n+1} . Поэтому в силу предложения 8ii) из (n, l_n) исходит – и обязательно ведет в $(n+1, l_{n+1})$ – всего одна стрелка. Поскольку это означает, что $p \in A^{n+1, l_{n+1}}$, мы вправе применить то же рассуждение, выбрав в качестве исходной вершину $(n+1, l_{n+1})$, а затем $(n+2, l_{n+2})$ и т.д. Дальше ясно.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 10. Пусть замкнутый двусторонний идеал J в A содержит минимальный проектор. Тогда последний эквивалентен (автоматически минимальному в A) проектору, принадлежащему одной из подалгебр $A^{n, l}$ в J для некоторой вершины (n, l) .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно утверждению А, J имеет вид $J(\Lambda)$ для некоторого наследственного подмножества Λ в $V(\mathcal{D})$. Поэтому утверждение Б, примененное к J в качестве B , дает, что заданный проектор эквивалентен проектору, лежащему в одной из алгебр $I^0(\Lambda) \cap A^n$, т.е. для некоторого $n = 1, 2, \dots$ в прямой сумме нескольких алгебр из $A^{n, l}$, $l = 1, \dots, k_n$. Будучи также минимальным, этот последний проектор должен принадлежать одной из алгебр $A^{n, l}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 11. i) Если p – минимальный проектор в A , то $[p]$ – минимальный положительный элемент в $K_0(A)$.

ii) Если $[p]$, $p \in A \otimes \mathcal{K}$, – минимальный положительный элемент в $K_0(A)$, то p эквивалентен некоторому минимальному проектору в A .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. i) В силу утверждения В, $[p] \neq 0$. Далее, если для $[p] \neq 0$, $q \in A \otimes \mathcal{K}$ выполнено $[q] \leq [p]$, то в силу утверждения Г мы вправе считать, что $q \in A$. Вследствие минимальности p это влечет $p \sim q$ и, следовательно, $[q] = [p]$.

ii) В силу своей минимальности и того же утверждения Г, p эквивалентен некоторому проектору q в самой A . Если r – ненулевой подпроектор в q , то, вследствие утверждения В, $[r] \neq 0$, откуда $[q - r] = 0$ и, вследствие того же утверждения, $q - r = 0$. Поэтому q – минимальный проектор.

Теперь непосредственно займемся оставшимися импликациями в обеих теоремах.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 12. Справедлива импликация (iii) $\Rightarrow$ (i) в теоремах 1 и 2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Что касается теоремы 1, достаточно положить $J = A$ в предложении 10 и применить предложение 9.

Перейдем к теореме 2. Пусть (n, l) – произвольная вершина в $\mathcal{D}$. Согласно (iii) идеал $J^{n, l}$ в A содержит минимальный проектор, скажем, p . Предложение 10, рассмотренное для $J = J^{n, l}$, позволяет считать, что $p \in A^{m, k} \subseteq J^{n, l}$ для некоторой вершины (m, k) . В силу определения нашего идеала существует ветвь, содержащая обе упомянутые вершины. Но тогда из предложения 9, рассмотренного для ее “подветви”, начинающейся с (m, k) , следует, что эта ветвь – увядающая.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 13. Эквивалентность (iii) $\Leftrightarrow$ (iiia) в теореме 2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. $\Rightarrow$. Пусть p – проектор в A . В силу утверждения Б и с учетом того, что мы ищем минимальный подпроектор, достаточно рассмотреть случай, когда p принадлежит A^{n,l_n} для некоторой $(n, l_n) \in V(\mathcal{D})$ и является минимальным проектором, будучи рассмотрен в этой алгебре. Рассмотрим идеал J^{n,l_n} ; согласно условию он содержит минимальный проектор, скажем, q . На основании предложения 10 мы вправе считать, что $q \in A^{m,l_m} \subseteq J^{n,l_n}$ для некоторой вершины (m, l_m) . В силу определения идеала J^{n,l_n} существует ветвь $(n, l_n), (n+1, l_{n+1}), \dots$, содержащая (m, l_m) . Но тогда, согласно предложению 8i), для любого $k, n \leq k < m$, и проекторов p_k и p_{k+1} , минимальных, соответственно, в A^{k,l_k} и $A^{k+1,l_{k+1}}$, выполнено $p_k \prec p_{k+1}$. Отсюда, положив $p_n = p$ и $p_m = q$, мы получим, что $q \prec p$. Дальше ясно.

$\Leftarrow$. Из утверждения А очевидным образом следует, что ненулевой замкнутый двусторонний идеал в A содержит ненулевой проектор. Минимальный подпроектор последнего, разумеется, принадлежит тому же идеалу.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 14. *Эквивалентность (iii) $\Leftrightarrow$ (iv) в теореме 1.*

Немедленно следует из предложения 11.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 15. *Эквивалентность (iii) $\Leftrightarrow$ (iiia) в теореме 2.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. $\Rightarrow$. Пусть $[p], p \in A \otimes \mathcal{K}$, – ненулевой положительный элемент в $K_0(A)$. На основании утверждения Г, $[p] \geq [q]$ для некоторого ненулевого проектора $q \in A$. Согласно условию, q обладает минимальным подпроектором, скажем, r . Тогда $[r] \leq [q]$ и остается воспользоваться предложением 11i).

$\Leftarrow$. Пусть $p \neq 0$ – проектор в A . Тогда, согласно утверждению В, $[p]$ – ненулевой положительный элемент в $K_0(A)$. Согласно условию, $[p] \geq [q]$ для некоторого минимального положительного элемента $q \in K_0(A)$, причем в силу предложения 11(ii) мы вправе считать, что q – минимальный проектор в A . Дальше ясно.

Таким образом, все утверждения, указанные в схемах доказательства теорем 1 и 2 (см. § 2), получены: первая теорема содержится в объединении предложений 2, следствия 3 и предложений 7, 12 и 14, а вторая – в объединении предложений 2, следствия 3 и предложений 7, 12, 13 и 15. Доказательство обеих теорем закончено.

Список литературы

1. Connes A. On the cohomology of operator algebras // J. Funct. Anal. 1978. V. 28. P. 248–253.
2. Haagerup U. All nuclear C^* -algebras are amenable // Invent. Math. 1983. V. 74. P. 305–319.
3. Хелемский А. Я. Гомология в банаховых и топологических алгебрах. М.: Изд-во МГУ, 1986.
4. Хелемский А. Я. Гомологическая характеристика факторов типа I // Докл. АН. 1995. Т. 344. С. 454–456.
5. Helemskii A. Ya. Homology in algebras of analysis // Handbook of Algebra. V. II: Elsevier (to appear).
6. Kadison R. V., Ringrose J. R. Fundamentals of the theory of operator algebras. V. II: Advanced theory. London: Academic Press, 1986.
7. Connes A. Noncommutative geometry. London: Academic Press, 1994.
8. Хелемский А. Я. Банаховы и полинормированные алгебры: общая теория, представления, гомологии. М.: Наука, 1989.

9. *Douglas R. G., Paulsen V. I.* Hilbert modules over function algebras. New York: Longman, 1989.
10. *Lance E. C.* Hilbert C^* -modules. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1995.
11. *Bratteli O.* Inductive limits of finite dimensional C^* -algebras // Trans. Amer. Math. Soc. 1972. V. 171. P. 195–234.
12. *Murphy G. J.* C^* -algebras and operator theory. London: Acad. Press, 1990.
13. *Effros E. G.* Dimensions and C^* -algebras. Providence: Amer. Math. Soc., 1980.
14. *Wegge-Olsen N. E.* K -theory and C^* -algebras. Oxford: Oxford Univ. Press, 1993.
15. *Диксмье Ж.* C^* -алгебры и их представления. М.: Наука, 1974.
16. *Takesaki M.* On the conjugate space of an operator algebra // Tohoku Math. J. 1958. V. 10. P. 194–203.
17. *Селиванов Ю. В.* Бипроективные банаховы алгебры // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1979. Т. 43. С. 1159–1174.
18. *Semadeni Z.* Banach Spaces of Continuous Functions. Warszawa: PWN, 1971.
19. *Калиман Ш. И., Селиванов Ю. В.* О когомологиях операторных алгебр // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех. 1974. №5. С. 24–27.
20. *Хелемский А. Я.* О гомологической размерности нормированных модулей над банаховыми алгебрами // Матем. сб. 1970. Т. 81. С. 430–444.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Поступила в редакцию
01.10.1996