Общероссийский математический портал

А. А. Арсеньев, Оценка решения задачи рассеяния на одномерном ловушечном потенциале, *Матем. сб.*, 1997, том 188, номер 12, 3–10

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm270>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.67.100

26 апреля 2023 г., 13:20:32

УДК 517.95

А. А. Арсеньев

Оценка решения задачи рассеяния на одномерном ловушечном потенциале

Предложен новый метод оценки мнимой части полюса матрицы рассеяния для одномерного ловушечного потенциала. Метод основан на принципе инвариантности волновых операторов и равенстве Парсеваля для собственных функций непрерывного спектра.

Библиография: 3 названия.

1. Функция $V: \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}_+^1$ называется *ловушечным потенциалом*, если, говоря неформально, ее график имеет два или более резко выраженных максимумов, а при $x \rightarrow \infty$ она быстро убывает. Уравнение Шрёдингера с ловушечным потенциалом используется при математическом моделировании приборов типа “туннельного диода”, и существует множество работ по изучению свойств решений этого уравнения [1]. Особенно интересны расположение резонансных полюсов матрицы рассеяния для уравнения Шрёдингера с ловушечным потенциалом и оценки через параметры потенциала мнимых частей резонансных полюсов матрицы рассеяния. Мы покажем, что в этой задаче можно использовать две идеи: принцип инвариантности волновых операторов Бирмана и равенство Парсеваля для решений задачи рассеяния. Основной результат работы изложен в теоремах 1 и 2. В последних разделах работы мы ослабляем некоторые ограничения на потенциал и доказываем гладкость вспомогательных функций.

2. Исходным пунктом наших рассуждений является предложенная в [2] математическая модель исследования резонансных полюсов матрицы рассеяния уравнения Шрёдингера с ловушечным потенциалом. Напомним основные определения. Пусть $x \in \mathbb{R}^1$ и $V_\infty(x)$ – неотрицательная функция, которая принимает значение $+\infty$ на конечном числе отрезков $[a_i, b_i]$, $i = 1, \dots, N$, $N \geq 2$, и такая, что при каждом $n < \infty$ функция $\min\{n; V_\infty(x)\}$ локально удовлетворяет условию Гёльдера. Предположим, что при $|x| \geq R_0$ выполнена оценка

$$V_\infty(x) < \text{const} \exp(-\alpha|x|^2),$$

а $\{V_n(x)\}$ – монотонно возрастающая последовательность неотрицательных непрерывных по Гёльдеру функций, которая удовлетворяет оценке

$$\min\{n; V_\infty(x)\} \leq V_n(x) \leq \min\{n+1; V_\infty(x)\}.$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-01-00084).

При достаточно большом n функцию $V_n(x)$ мы называем *ловушечным потенциалом*. Символом V_n мы будем также обозначать оператор умножения на функцию $V_n(x)$. Решением задачи рассеяния для оператора Шрёдингера

$$H_n = -\partial_{xx}^2 + V_n$$

мы называем функции $u_n^\pm(x, \lambda)$, которые удовлетворяют уравнению

$$H_n u_n^\pm = \lambda u_n^\pm$$

и имеют асимптотику

$$\begin{aligned} u_n^+(x, \lambda) &= T_n^+(\lambda) \exp(ix\sqrt{\lambda}) + o(1), & x \rightarrow +\infty, \\ u_n^+(x, \lambda) &= \exp(ix\sqrt{\lambda}) + R_n^+(\lambda) \exp(-ix\sqrt{\lambda}) + o(1), & x \rightarrow -\infty, \\ u_n^-(x, \lambda) &= \exp(-ix\sqrt{\lambda}) + R_n^-(\lambda) \exp(ix\sqrt{\lambda}) + o(1), & x \rightarrow +\infty, \\ u_n^-(x, \lambda) &= T_n^-(\lambda) \exp(-ix\sqrt{\lambda}) + o(1), & x \rightarrow -\infty. \end{aligned}$$

Функции $\{u_n^\pm(x, \lambda), 0 < \lambda < \infty\}$ при $n < \infty$ образуют полную в $L^2(\mathbb{R}, dx)$ систему собственных функций оператора H_n . Равенство Парсеваля имеет вид

$$\|f\|^2 = \frac{1}{4\pi} \int_0^\infty (|f_n^+(\lambda)|^2 + |f_n^-(\lambda)|^2) \lambda^{-1/2} d\lambda,$$

где норма берется в $L^2(\mathbb{R}, dx)$ и

$$f_n^\pm(\lambda) = \int f(x) u_n^\pm(x, \lambda) dx$$

(интегрирование без обозначения пределов – по всей оси). Положим

$$G_n(t) = \exp(-tH_n), \quad t > 0.$$

Легко доказать [2], что в равномерной операторной топологии пространства $L^2(\mathbb{R}, dx)$ существует предел

$$G_\infty(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \exp(-tH_n).$$

Под оператором H_∞ мы по определению понимаем оператор

$$H_\infty = -\partial_t G_\infty(t) \big|_{t=0}.$$

В работе автора [2] доказано, что определенный таким образом оператор H_∞ самосопряжен в $L^2(C\Omega, dx)$, $\Omega = \bigcup_{1 \leq i \leq N} [a_i, b_i]$. Сужение оператора H_∞ на $L^2(\bigcup_{1 \leq i \leq N-1} (b_i, a_{i+1}), dx)$ имеет дискретный спектр. Мы обозначим его через $\{\lambda_j\}$. Пусть $\psi(x, \lambda_j)$ – простая собственная функция дискретного спектра сужения H_∞ на $L^2(\bigcup_{1 \leq i \leq N-1} (b_i, a_{i+1}), dx)$, продолженная нулем на $\mathbb{R}$. Положим

$$a_j(\lambda, n) = \frac{1}{4\pi} (|\psi_n^+(\lambda, \lambda_j)|^2 + |\psi_n^-(\lambda, \lambda_j)|^2).$$

Используемые нами результаты работы [2] сформулируем в следующем виде.

ЛЕММА 1. *Существуют такие $n_0 < \infty$, $\varepsilon > 0$, что при $n > n_0$, $|\lambda - \lambda_j| < \varepsilon$ функция $a_j(\lambda, n)$ может быть представлена в виде*

$$a_j(\lambda, n) = b_j(\lambda, n) |\operatorname{Im} \mu_n(\lambda)| |1 - \mu_n(\lambda)|^{-2} + c_j(\lambda, n),$$

где b_j , μ_n , c_j — аналитические в окрестности $\{\lambda : |\lambda - \lambda_j| < \varepsilon\}$ функции, которые равномерно по λ имеют предел при $n \rightarrow \infty$ и при $n > n_0$, $|\lambda - \lambda_j| < \varepsilon$ обладают следующими свойствами:

$$b_j(\lambda, n) > \operatorname{const} > 0, \quad |c_j(\lambda, n)| < \operatorname{const} < \infty, \quad \left| \frac{\partial \mu_n(\lambda)}{\partial \lambda} \right| > \operatorname{const} > 0.$$

Уравнение $1 - \mu_n(\lambda) = 0$ при $n > n_0$, $|\lambda - \lambda_j| < \varepsilon$ имеет единственный корень $\lambda_{j,n}$. Этот корень есть полюс матрицы рассеяния и

$$\operatorname{Im} \lambda_{j,n} < 0, \quad \lambda_{j,n} \rightarrow \lambda_j, \quad n \rightarrow \infty.$$

Мы не будем доказывать лемму 1, так как она является переформулировкой в удобных для нас обозначениях утверждений лемм 5.2 и 5.1 из [2]. Отметим, что идея доказательства этих лемм в [2] основана на принципе инвариантности волновых операторов Бирмана и состоит в рассмотрении решений задачи рассеяния как собственных функций оператора $G_n(t)$. Символом const в формулировке леммы и в дальнейшем мы обозначаем положительную, не зависящую от n величину, значения которой зависят от каждого вхождения символа в формулу. Под *матрицей рассеяния* мы понимаем стандартно определенную по [3] матрицу рассеяния для пары H_n, H_0 . В рассматриваемом случае матрица рассеяния есть аналитическая функция спектрального параметра λ со значениями в пространстве операторов над C^2 , элементы матрицы этой операторной функции — коэффициенты прохождения $T_n^\pm(\lambda)$ и отражения $R_n^\pm(\lambda)$.

ЛЕММА 2. *При $n < \infty$ справедливо равенство*

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi} \int_0^\infty (|\psi_n^+(\lambda, \lambda_j)|^2 + |\psi_n^-(\lambda, \lambda_j)|^2) |\exp(-\lambda_j t) - \exp(-\lambda t)|^2 \lambda^{-1/2} d\lambda \\ = \|(G_n(t) - G_\infty(t))\psi(\cdot, \lambda_j)\|^2 \end{aligned} \quad (1)$$

($\|\cdot\|$ — норма $L^2(\mathbb{R}, dx)$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Справедливы равенства

$$\begin{aligned} \exp(-\lambda_j t) \psi(x, \lambda_j) &= \int G_\infty(x, y, t) \psi(y, \lambda_j) dy, \\ \exp(-\lambda t) u_n^\pm(x, \lambda) &= \int G_n(x, y, t) u_n^\pm(y, \lambda) dy, \end{aligned}$$

откуда следует, что

$$(\exp(-\lambda t) - \exp(-\lambda_j t)) \psi_n^\pm(\lambda, \lambda_j) = \int \varphi(y) u_n^\pm(y) dy, \quad (2)$$

где

$$\varphi(y) = \int (G_n(y, x, t) - G_\infty(y, x, t)) \psi(x, \lambda_j) dx.$$

Перемена порядка интегрирования в (2) возможна, так как носитель функции $\psi(x, \lambda_j)$ компактен. Следовательно, (1) есть равенство Парсеваля для функции φ . Лемма доказана.

Положим

$$\begin{aligned} m(\sigma) &= \{\lambda : |\lambda - \lambda_j| > \varepsilon\}, & d(\sigma) &= \{\lambda : |\lambda - \lambda_j| < \varepsilon\}, \\ I(\sigma, n) &= \int_{m(\sigma)} a_j(\lambda, n) \lambda^{-1/2} d\lambda, & \theta(t, n) &= \|G_n(t) - G_\infty(t)\| \end{aligned}$$

(здесь $\|\cdot\|$ — операторная норма в $L^2(\mathbb{R}, dx)$).

ЛЕММА 3. При $t > 0$, $\sigma > 0$, $n < \infty$ справедливо неравенство

$$I(\sigma, n) \leq \exp(2\lambda_j t) (1 - \exp(-\sigma t))^{-2} \theta(t, n)^2.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (1) следует, что

$$\begin{aligned} \theta(t, n)^2 &\geq \|(G_n(t) - G_\infty(t))\psi(x, \lambda_j)\|^2 \\ &\geq \left(\inf_{\lambda \in m(\sigma)} |\exp(-\lambda_j t) - \exp(-\lambda t)|^2 \right) I(\sigma, n). \end{aligned}$$

Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 1. Для находящихся в окрестности $\{\lambda : |\lambda - \lambda_j| < \varepsilon\}$ полюсов матрицы рассеяния $\{\lambda_{j,n}\}$ справедлива оценка

$$|\operatorname{Im} \lambda_{j,n}| < \operatorname{const} \theta(t, n), \quad (3)$$

где $t > 0$ — произвольный параметр, а константа зависит от параметра $t > 0$, потенциала V_∞ и не зависит от n .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\sigma(n)$ — произвольная последовательность, удовлетворяющая условию

$$\sigma(n) \rightarrow 0, \quad \frac{\theta(t, n)}{\sigma(n)} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \quad (4)$$

Воспользуемся равенством Парсеваля для функции $\psi(x, \lambda_j)$. Получим

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{1}{4\pi} \int_{d(\sigma(n))} (|\psi_n^+(\lambda, \lambda_j)|^2 + |\psi_n^-(\lambda, \lambda_j)|^2) \lambda^{-1/2} d\lambda + I(\sigma(n), n) \\ &= \int_{d(\sigma(n))} b_j(\lambda, n) |\operatorname{Im} \mu_n(\lambda)| |1 - \mu_n(\lambda)|^{-2} \lambda^{-1/2} d\lambda + o(1) \\ &< \operatorname{const} \int_{d(\sigma(n))} |1 - \mu_n(\lambda)|^{-1} d\lambda + o(1) \\ &< \operatorname{const} \frac{\sigma(n)}{|\operatorname{Im} \lambda_{j,n}|} + o(1). \end{aligned} \quad (5)$$

При выводе (5) мы сначала учли лемму 1, лемму 2 и (4). Потом воспользовались неравенством

$$|\operatorname{Im} \mu_n(\lambda)| = |\operatorname{Im}(1 - \mu_n(\lambda))| \leq |1 - \mu_n(\lambda)|.$$

Затем мы учли, что в силу леммы 1

$$|1 - \mu_n(\lambda)| = |\mu_n(\lambda_{j,n}) - \mu_n(\lambda)| \geq \operatorname{const} |\lambda_{j,n} - \lambda| \geq \operatorname{const} |\operatorname{Im} \lambda_{j,n}|.$$

Из (5) следует, что

$$|\operatorname{Im} \lambda_{j,n}| < \operatorname{const} \sigma(n). \quad (6)$$

Так как (6) выполнено для любой удовлетворяющей условию (4) последовательности $\sigma(n)$, то должно быть выполнено и неравенство (3). Теорема доказана.

Перейдем к оценке величины $\theta(t, n)$. Положим

$$\beta_n(x, t) = \int (G_n(x, y, t) - G_\infty(x, y, t)) dy.$$

Ясно, что

$$\theta(t, n) \leq \sup_x \beta_n(x, t),$$

поэтому достаточно получить оценку функции $\beta_n(x, t)$. Простейшую оценку функции $\beta_n(x, t)$ можно получить на основе представления решения задачи Коши для уравнения теплопроводности через математическое ожидание от функционала броуновского движения

$$\int G_n(x, y, t) dy = E \left(\exp \left(-t \int_0^1 V_n(2\sqrt{t}x(\tau) + x) d\tau \right) \right), \quad (7)$$

где $E(x^2(t)) = 2t$. Положим для простоты $V_n(x) = \min\{n; V_\infty(x)\}$ и пусть

$$\begin{aligned} \delta(n) = \min & \left\{ \operatorname{dist} \left(\left\{ x : V_n(x) < \frac{n}{4} \right\}, \left\{ x : V_n(x) > \frac{n}{2} \right\} \right); \right. \\ & \left. \operatorname{dist} \left(\left\{ x : V_n(x) < \frac{n}{2} \right\}, \left\{ x : V_n(x) = n \right\} \right) \right\}. \end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 2. *Для входящей в оценку (3) величины $\theta(t, n)$ справедлива оценка*

$$\theta(t, n) < 8\sqrt{2} \left(1 + \frac{2t\sqrt{2n}}{\delta(n)} \right) \exp \left(-\frac{\delta(n)\sqrt{n}}{8\sqrt{2}} \right). \quad (8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В области $\{x : V_n(x) > n/2\}$ из (7) следует неравенство

$$\begin{aligned} \beta_n(x, t) & \leq \exp \left(-t \min_{|\zeta| \leq \delta(n)} V_n(x + \zeta) \right) + E \left(\sup_\tau |x(\tau)| > \frac{\delta(n)}{2\sqrt{t}} \right) \\ & < \exp \left(-\frac{tn}{4} \right) + 4\sqrt{2} \exp \left(-\frac{\delta(n)^2}{32t} \right). \end{aligned}$$

В области $\{x : V_n(x) \leq n/2\}$ мы имеем

$$\begin{aligned} \beta_n(x, t) &\leq E \left(1 - \exp \left(-t \int_0^1 (V_\infty - V_n)(2\sqrt{t}x(\tau) + x) d\tau \right) \right) \\ &< E \left(\sup_\tau |x(\tau)| > \frac{\delta(n)}{2\sqrt{t}} \right) < 4\sqrt{2} \exp \left(-\frac{\delta(n)^2}{32t} \right). \end{aligned}$$

Следовательно, при $t = \delta(n)\sqrt{n}/(8\sqrt{2})$

$$\sup_x \beta_n(x, t) < 8\sqrt{2} \exp \left(-\frac{\delta(n)\sqrt{n}}{8\sqrt{2}} \right).$$

Но для любого целого m $\theta(t, n) \leq m\theta(t/m, n) \leq m \sup_x \beta_n(x, t/m)$, и поэтому справедлива оценка (8). Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ. *Справедлива оценка*

$$|\operatorname{Im} \lambda_{j,n}| < \operatorname{const} \left(1 + \frac{2\sqrt{2n}}{\delta(n)} \right) \exp \left(-\frac{\delta(n)\sqrt{n}}{8\sqrt{2}} \right), \quad (9)$$

где константа зависит только от V_∞ . Если, например,

$$V_\infty(x) \cong (\operatorname{dist}(x, \Omega))^{-q}, \quad q > 2,$$

то оценка (9) дает

$$|\operatorname{Im} \lambda_{j,n}| < \operatorname{const} \exp(-\eta n^{(1/2-1/q)}), \quad (10)$$

где константы зависят только от V_∞ .

3. До сих пор мы предполагали, что множество $\Omega = \{x : V_\infty(x) = \infty\}$ состоит из конечного числа отрезков $[a_i, b_i]$, $a_i < b_i$. При этих условиях в [2] мы доказали, что каждое из пространств $L^2((b_i, a_{i+1}), dx)$, $0 \leq i \leq N$, $b_0 = -\infty$, $a_{N+1} = +\infty$, приводит оператор H_∞ , т.е. область определения оператора H_∞ есть прямая сумма областей определения сужений оператора H_∞ на пространства $L^2((b_i, a_{i+1}), dx)$. Напомним, что каждое из пространств $L^2((b_i, a_{i+1}), dx)$ мы рассматриваем как подпространство $L^2(\mathbb{R}, dx)$, состоящее из равных нулю вне (b_i, a_{i+1}) функций. Проектор на $L^2((b_i, a_{i+1}), dx)$ мы обозначаем символом P_i . Ослабим условие $a_i < b_i$, так как оно существенно сужает класс допустимых последовательностей $\{V_n\}$. Начиная с этого места мы предполагаем, что $a_i \leq b_i$.

ЛЕММА 4. *Из включения*

$$\forall t > 0 \quad G_\infty(t)L^2((b_i, a_{i+1}), dx) \subset L^2((b_i, a_{i+1}), dx), \quad 0 \leq i \leq N, \quad (11)$$

следует, что область определения оператора H_∞ есть прямая сумма областей определения сужений оператора H_∞ на пространства $L^2((b_i, a_{i+1}), dx)$:

$$D(H_\infty) = \bigoplus \sum_{0 \leq i \leq N} D(H_\infty, P_i). \quad (12)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что

$$D(H_\infty) \subset L^2(C\Omega, dx) = \bigoplus_{0 \leq i \leq N} L^2((b_i, a_{i+1}), dx).$$

Если выполнено (11), то

$$\forall \psi \in L^2(C\Omega, dx), \forall t > 0 \quad \left(\frac{G_\infty(t) - \text{id}}{t} \right) \psi = \sum_{0 \leq i \leq N} \left(\frac{G_\infty(t) - \text{id}}{t} \right) P_i \psi, \quad (13)$$

причем в правой части (13) все слагаемые ортогональны друг другу при всех $t > 0$. Следовательно, в (13) предел слева при $t \rightarrow +0$ существует тогда и только тогда, когда справа существует предел каждого слагаемого отдельно. Лемма доказана.

Для выполнения включения (11), очевидно, достаточно, чтобы для любого отрезка $[c, d] \subset (b_i, a_{i+1})$ было бы выполнено равенство

$$\alpha(x, t) \equiv \int_c^d G_\infty(x, y, t) dy = 0, \quad t > 0, \quad x \notin (b_i, a_{i+1}). \quad (14)$$

В силу принципа максимума для уравнения теплопроводности равенство (14) будет выполнено, если либо (как предполагалось ранее) множество Ω не имеет изолированных точек, либо если для каждой изолированной точки $x_0 \in \Omega$ выполнено условие

$$\lim \alpha(x, t) = 0, \quad x \rightarrow x_0, \quad t > 0. \quad (15)$$

Пусть $\delta > 0$ — достаточно малое число. Положим

$$q_n(x_0) = \min V_\infty(x), \quad |x - x_0| < 2^{-n}\delta, \quad n \geq 0. \quad (16)$$

ЛЕММА 5. Равенство (15) выполнено, если существует такое $\delta > 0$, что

$$\sum 2^{-n} q_n(x_0)^{1/2} = \infty. \quad (17)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $x_0 = 0$ и отрезок $[-\delta, \delta]$ не пересекается с отрезком $[c, d]$. На отрезке $[-\delta, \delta]$ определим функцию $\nu_0(x)$ из условия

$$-\partial_{xx}^2 \nu_0(x) + q_0(0) \nu_0(x) = 0, \quad |x| < \delta, \quad \nu_0(\pm\delta) = 1.$$

Далее, на каждом отрезке $[-2^{-n}\delta, 2^{-n}\delta]$ определим функции $\nu_n(x)$ из условия

$$-\partial_{xx}^2 \nu_n(x) + q_n(0) \nu_n(x) = 0, \quad |x| < 2^{-n}\delta, \quad \nu_n(\mp 2^{-n}\delta) = \nu_{n-1}(\mp 2^{-n}\delta).$$

Из принципа максимума для уравнения теплопроводности следует неравенство

$$0 < \alpha(x, t) < \nu_n(x), \quad |x| < 2^{-n}$$

(доказывается по индукции). Но простое вычисление показывает, что

$$\nu_n(2^{-n-1}\delta) < \exp(-2^{-n-1} q_n^{1/2}(0)) \nu_{n-1}(2^{-n}\delta),$$

откуда при условии (17) следует (15). Лемма доказана.

Таким образом, нами доказана

ТЕОРЕМА 3. Для выполнения равенства (12) достаточно, чтобы для каждой изолированной точки $x_0 \in \Omega$ было выполнено условие (17).

4. Исследуем свойства гладкости решений $\{u_\infty(x, \lambda), \psi(x, \lambda_j)\}$.

ЛЕММА 6. Пусть $\varphi_n(x, t)$ — не зависящее от t и принадлежащее $L^\infty(\mathbb{R}, dx)$ решение уравнения

$$\exp(-\lambda t)\varphi_n(x, \lambda) = \int G_n(x, y, t)\varphi_n(y, \lambda) dy, \quad \lambda > 0, \quad n \leq \infty. \quad (18)$$

Тогда

$$\int V_n(x)|\varphi_n(x, \lambda)| dx < \text{const } \|\varphi_n\|_\infty, \quad (19)$$

где константа не зависит от n .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (18) следует, что

$$|\varphi_n(x, \lambda)| \leq \lambda(1 - \exp(-\lambda t))^{-1} \int_0^t d\tau \int G_n(x, y, \tau) dy \|\varphi_n\|_\infty,$$

поэтому

$$\begin{aligned} & \int V_n(x)|\varphi_n(x, \lambda)| dx \\ & \leq \lambda(1 - \exp(-\lambda t))^{-1} \int_0^t d\tau \int V_n(x)G_n(x, y, \tau) dy dx \|\varphi_n\|_\infty. \end{aligned} \quad (20)$$

Но из уравнения

$$G_0(x, y, t) - G_n(x, y, t) = \int_0^t d\tau \int G_0(x, z, t - \tau)V_n(z)G_n(z, y, \tau) dz$$

следует, что

$$\int_0^t d\tau \int V_n(z)G_n(z, y, \tau) dz dy = \iint (G_0(x, y, t) - G_n(x, y, t)) dx dy < \text{const}. \quad (21)$$

В силу оценки (2.7) из [2] правая часть (21) ограничена не зависящей от n константой, поэтому и правая часть (20) ограничена не зависящей от n константой. Обратим внимание на то, что в наших рассуждениях параметр n может принимать значение $+\infty$.

СЛЕДСТВИЕ. Если для каждой изолированной точки $x_0 \in \Omega$ выполнено условие (17), то собственные функции дискретного спектра оператора H_∞ имеют абсолютно интегрируемую вторую производную и

$$\lim \psi(x, \lambda_j) = 0, \quad x \rightarrow x_0, \quad x_0 \in \partial\Omega, \quad \sup_x |\partial_x \psi(x, \lambda_j)| < \infty.$$

Этим же оценкам удовлетворяет решение задачи рассеяния.

Список литературы

1. Special Issue on Mesoscopic Physics // J. Math. Phys. 1996. V. 37. №10.
2. Арсеньев А. А. Резонансные свойства матрицы рассеяния для одномерного оператора Шрёдингера с ловушечным потенциалом // Матем. сб. 1996. Т. 187. №6. С. 3–20.
3. Бирман М. Ш., Энтин С. Б. Стационарный подход в абстрактной теории рассеяния // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1967. Т. 31. С. 401–430.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Поступила в редакцию
19.02.1997 и 11.09.1997