Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. П. Буриченко, 2-когомологии группы $\Omega^-(4, q)$ с коэффициентами в естественном модуле, *Матем. сб.*, 2007, том 198, номер 9, 29–42

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm2703>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.89.56.158

26 апреля 2023 г., 13:53:59

УДК 512.542.5

В. П. Буриченко

2-когомологии группы $\Omega^-(4, q)$ с коэффициентами в естественном модуле

Найдена группа 2-когомологий конечной простой ортогональной группы $\Omega^-(4, q)$, где q нечетно, с коэффициентами в естественном модуле. При $q \neq 9$ эта группа тривиальна, а при $q = 9$ изоморфна Z_3^4 . Тем самым исправлен результат работы Кюсефоглу.

Библиография: 5 названий.

§ 1. Введение

Пусть V есть конечномерное пространство над конечным полем F нечетного порядка, f – невырожденная симметрическая билинейная форма на V , $O(V, f)$ – соответствующая группа изометрий и $\Omega = \Omega(V, f) = (O(V, f))'$ – ее коммутант. Мы также используем для Ω стандартные обозначения $\Omega(2m+1, q)$, $\Omega^\pm(2m, q)$, где $\dim V = 2m+1$ или $\dim V = 2m$, $q = |F|$.

Кюсефоглу в работах [1], [2] исследовал группы 2-когомологий Ω с коэффициентами в V при $\dim V \geq 4$. Отметим, что если $\dim V \leq 2$, то Ω – p' -группа, откуда $H^2(\Omega, V) = 0$. Также известно, что $H^2(\Omega(3, q), V) = 0$ при $q = 3$ и $H^2(\Omega(3, q), V) \cong F$ при $q \neq 3$. Согласно [1], [2] $H^2(\Omega, V) = 0$ при $\dim V \geq 4$, за исключением случаев $\Omega = \Omega(7, 3)$ и $\Omega = \Omega^-(8, 3)$ (заметим, что из теории спорадических групп известно, что существуют нерасщепимые расширения вида $3^7 \cdot \Omega(7, 3)$ и $3^8 \cdot \Omega^-(8, 3)$, откуда $H^2(\Omega, V) \neq 0$ в указанных двух случаях).

Однако в работах [1], [2] содержатся ошибки. В частности, $H^2(\Omega, V)$ нетривиально еще в двух случаях: $\Omega = \Omega^-(4, 9)$ и $\Omega = \Omega(5, 3)$. Нами доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1.1. $H^2(\Omega, V) = 0$, за исключением случаев, указанных в таблице

Ω	$\Omega(3, q), q \neq 3$	$\Omega^-(4, 9)$	$\Omega(5, 3)$	$\Omega(7, 3)$	$\Omega^-(8, 3)$
$H^2(\Omega, V)$	$\cong F$	Z_3^4	Z_3	Z_3	Z_3^2

В [1] и [2] рассматриваются случаи, когда $\dim V$ четно и нечетно соответственно. Рассуждения в [1] правильны в случаях, отличных от $\Omega^-(4, q)$, но в случае $\Omega^-(4, q)$ они ошибочны. Цель настоящей работы – рассмотреть случай $\Omega^-(4, q)$. Основным результатом является следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1.2. Пусть $\Omega = \Omega^-(4, q)$. Тогда $H^2(\Omega, V) = 0$ при $q \neq 9$, а при $q = 9$ $H^2(\Omega, V) \cong Z_3^4$.

Работа частично выполнена во время пребывания автора в университете г. Лестера и поддержана грантом Королевского Общества.

С другой стороны, ошибки в работе [2] более серьезны. Мы рассмотрим случай нечетной степени в последующих работах.

Структура настоящей работы следующая. В § 2 мы описываем V , f и некоторые элементы в Ω в виде, удобном для последующих вычислений, а также напоминаем некоторые сведения о когомологиях. В § 3 рассматривается случай $\Omega^-(4, q)$ с $q \neq 3, 9$, а в § 4 – случай $q = 3, 9$.

§ 2. Предварительные сведения

Группа $\Omega^-(4, q)$. Через $O(W, l)$ мы будем обозначать группу изометрий пространства W относительно формы l .

Пусть $F = \mathbf{F}_q$ – поле из $q = p^m$ элементов, q нечетно, $E \supset F$ – квадратичное расширение, $\sigma: x \mapsto \bar{x} = x^q$ – нетривиальный автоморфизм E над F . Далее, для $x \in E$ пусть $\rho(x) = (x + \bar{x})/2 = (1/2) \operatorname{tr}_{E/F}(x)$; очевидно, ρ есть проекция E на F . Для $y \in E$ пусть $\mu(y)$ – оператор умножения на y на E . Тогда $\det(\mu(x)) = N_{E/F}(x) = x\bar{x} = x^{q+1}$.

Очевидно, $k(x, y) = \rho(x\bar{y})$ есть невырожденная симметрическая F -билинейная форма на E . Так как $k(x, x) = \rho(x\bar{x}) = x\bar{x} \neq 0$ при $x \neq 0$, то k анизотропна. Множество векторов квадрата 1 есть $S = \{x \in E^* \mid x^{1+q} = 1\}$; очевидно, $|S| = q + 1$. При $y \in S$, очевидно, $\mu(y) \in O(E, k)$ и $\det(\mu(y)) = 1$. Кроме того, $\mu(S) = \{\mu(y) \mid y \in S\}$ транзитивна на S . Нетривиальный элемент в $O(E, k)$, стабилизирующий вектор из S , должен быть отражением и иметь определитель -1 . Отсюда следует $SO(E, k) = \mu(S)$.

Рассмотрим пространство $V = Fe_{-1} \oplus Ee_0 \oplus Fe_1$ и на нем форму

$$f(a_{-1}e_{-1} + a_0e_0 + a_1e_1, b_{-1}e_{-1} + b_0e_0 + b_1e_1) = a_{-1}b_1 + a_1b_{-1} + \rho(a_0\bar{b}_0).$$

Очевидно, f симметрична и F -билинейна. Мы будем обозначать $V_{-1} = Fe_{-1}$, $V_1 = Fe_1$, $V_0 = Ee_0$. Очевидно, V – ортогональная прямая сумма подпространств $V_{\{-1,1\}} = V_{-1} \oplus V_1$ и V_0 . Ясно, что $V_{\{-1,1\}}$ – гиперболическая плоскость, а ограничение f на V_0 изометрично (E, k) и потому анизотропно. Отсюда f невырождена и индекс Витта $\nu(f) = 1$, т.е. f – форма минус-типа.

Напомним [3; гл. II, § 7], что если W – пространство над полем K характеристики $\neq 2$ и l – невырожденная форма на W , то спинорная норма $\theta: SO(W, l) \rightarrow K^*/(K^*)^2$ определяется тем, что для $g = r_{v_1} \cdots r_{v_{2n}} \in SO(W, l)$ (где r_v – отражение относительно неизотропного вектора v) $\theta(g) = l(v_1, v_1) \cdots l(v_{2n}, v_{2n})(K^*)^2$. Это определение корректно, и θ – гомоморфизм. В случае, когда K конечно и $\dim W \geq 2$, для любого $x \in K^*$ существует $v \in W$ с $l(v, v) = x$, откуда θ – сюръекция. Кроме того, $K^*/(K^*)^2 \cong \mathbb{Z}_2$, и поэтому θ можно рассматривать как сюръекцию из $SO(W, l)$ на $\{\pm 1\}$ с ядром $\Omega(W, l)$.

Легко видеть, что $SO(V_{\{-1,1\}})$ состоит из всех преобразований, действующих в базисе (e_{-1}, e_1) как $\operatorname{diag}(\lambda^{-1}, \lambda)$, $\lambda \in F^*$. Так как $F^* \cong \mathbb{Z}_{q-1}$, то единственный эпиморфизм из F^* в $\{\pm 1\}$ есть $x \rightarrow x^{(q-1)/2}$. Значит, $\theta(\operatorname{diag}(\lambda^{-1}, \lambda)) = \lambda^{(q-1)/2}$. Для $SO(V_0)$ аналогичными рассуждениями находим $\theta(\mu(\lambda)) = \lambda^{(q+1)/2}$, $\lambda \in S$.

Для $\lambda_1 \in F^*$, $\lambda_0 \in S$ определим $h(\lambda_0, \lambda_1) \in GL(V)$:

$$h(\lambda_0, \lambda_1)(a_{-1}e_{-1} + a_0e_0 + a_1e_1) = \lambda_1^{-1}a_{-1}e_{-1} + \lambda_0a_0e_0 + \lambda_1a_1e_1.$$

Очевидно, $h(\lambda_0, \lambda_1) \in \text{SO}(V)$, и предшествующее рассуждение показывает, что $\theta(h(\lambda_0, \lambda_1)) = \lambda_0^{(q+1)/2} \lambda_1^{(q-1)/2}$. Поэтому

$$T = \{h(\lambda_0, \lambda_1) \mid \lambda_0 \in S, \lambda_1 \in F^*, \lambda_0^{(q+1)/2} \lambda_1^{(q-1)/2} = 1\}$$

– подгруппа в $\Omega(V, f)$, сохраняющая каждое из подпространств V_{-1}, V_1, V_0 .

Отображение $r: S \times F^* \rightarrow \{\pm 1\}$ по правилу $(\alpha, \beta) \mapsto \alpha^{(q+1)/2} \beta^{(q-1)/2}$ есть эпиморфизм, и его ядро L состоит в точности из пар (α, β) таких, что $h(\alpha, \beta) \in T$. Отсюда $|T| = |L| = (q^2 - 1)/2$. Далее, ядро гомоморфизма $s: E^* \rightarrow S \times F^*$ по правилу $s(\lambda) = (\lambda^{q-1}, \lambda^{q+1})$ есть $\{\pm 1\}$, а образ имеет порядок $(q^2 - 1)/2$ и лежит в L , так как $(\lambda^{q-1})^{(q+1)/2} (\lambda^{q+1})^{(q-1)/2} = \lambda^{q^2-1} = 1$. Значит, образ s есть L . Следовательно, $T = \{h(\lambda) \mid \lambda \in E^*\}$, где $h(\lambda) = h(\lambda^{q-1}, \lambda^{q+1})$.

Для $-1 \leq i \leq j \leq 1$ рассмотрим операторы $\lambda e_{ij}: V_j \rightarrow V_i$, где $\lambda \in F$ при $i, j = \pm 1$ и $\lambda \in E$, если $i = 0$ или $j = 0$, определенные по правилу $(\lambda e_{-1,0})(ae_0) = \rho(\lambda a)e_{-1}$, а в остальных случаях $(\lambda e_{ij})(ae_j) = \lambda ae_i$, как обычно. Подчеркнем, что λe_{ij} – единый символ, а не произведение скаляра λ на оператор e_{ij} . Очевидно, λe_{ij} можно рассматривать как оператор на всем V . Нетрудно видеть, что эти операторы перемножаются по правилу $(\lambda e_{-1,0})(\mu e_{01}) = \rho(\lambda \mu)e_{-1,1}$, а в остальных случаях, как обычно, $(\lambda e_{ij})(\mu e_{kl}) = \delta_{jk} \lambda \mu e_{il}$.

Легко видеть, что $h(\lambda_0, \lambda_1) = \lambda_1^{-1} e_{-1,-1} + \lambda_0 e_{00} + \lambda_1 e_{11}$.

Для $t \in E$ определим оператор

$$x(t) = 1 + te_{01} - \bar{t}e_{-1,0} - \frac{\bar{t}t}{2} e_{-1,1}.$$

Тогда можно проверить непосредственным вычислением, что $x(t)$ ортогонален, $x(t)x(u) = x(t+u)$ и $x(t)^{h(\lambda_0, \lambda_1)} = x(\lambda_0 \lambda_1^{-1} t)$. В частности, $x(t)^{h(\lambda)} = x(\lambda^{-2} t)$. Отсюда следует, что $U = \{x(t) \mid t \in E\}$ есть подгруппа в Ω , изоморфная аддитивной группе поля E , откуда $|U| = q^2$. Кроме того, T нормализует U , поэтому мы можем рассмотреть $B = U : T$. (Мы обозначаем полупрямое произведение двоеточием, как в [4].) Поскольку $\Omega^-(4, q) \cong \text{PSL}(2, q^2)$ (см. [3; гл. II, § 9]) и $|T| = (q^2 - 1)/2$, то U является силовской p -подгруппой в Ω , и B есть ее нормализатор. Отсюда же вытекает, что $B \cap B^g$ является p' -группой при $g \in \Omega - B$.

Когомологии. Напомним элементарные сведения о когомологиях. Пусть G – группа, M – G -модуль. Под k -коцепью на G со значениями в M мы понимаем любую функцию $c: G^{\times k} \rightarrow M$. Через $C^k(G, M)$ обозначаем группу k -коцепей. Коцепь $c \in C^2(G, M)$ называется 2-коциклом, если

$$c(x, y) + c(xy, z) = xc(y, z) + c(x, yz)$$

для любых $x, y, z \in G$, и 2-кограницей, если $c(x, y) \equiv b(xy) - b(x) - xb(y)$ для некоторого $b \in C^1(G, M)$. Через $Z^2(G, M)$ и $B^2(G, M)$ обозначаем группу 2-коциклов и 2-кограниц соответственно. Тогда $H^2(G, M) = Z^2(G, M)/B^2(G, M)$ есть группа 2-когомологий G с коэффициентами в M .

Под *расширением* M с помощью G мы понимаем короткую точную последовательность групп

$$E: 1 \longrightarrow M \xrightarrow{i} \tilde{G} \xrightarrow{r} G \longrightarrow 1$$

такую, что структура G -модуля на M , естественно возникающая из этой последовательности, совпадает с исходной. Расширения E_1 и E_2 называются *эквивалентными*, если существует коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccccccc} E_1: 1 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{i_1} & \tilde{G}_1 & \xrightarrow{r_1} & G \longrightarrow 1 \\ & & \parallel & & \downarrow \varphi & & \parallel \\ E_2: 1 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{i_2} & \tilde{G}_2 & \xrightarrow{r_2} & G \longrightarrow 1 \end{array}$$

Множество классов эквивалентности расширений обозначаем $\mathcal{E}(G, M)$.

Пусть E – расширение, как выше, и для каждого $x \in G$ выберем прообраз $\tilde{x} \in r^{-1}(x)$. Тогда $c(x, y) = \tilde{x}\tilde{y}(\tilde{xy})^{-1} \in M$, и легко видеть, что c есть 2-коцикл. Наоборот, если $c \in Z^2(G, M)$ есть 2-коцикл, то формула

$$(u, x)(v, y) = (u + xv + c(x, y), xy)$$

определяет на $\hat{G} = M \times G$ структуру группы, которая вместе с отображениями $i: u \mapsto (u, 1)$ и $r: (u, x) \mapsto x$ дает расширение

$$1 \longrightarrow M \xrightarrow{i} \hat{G} \xrightarrow{r} G \longrightarrow 1.$$

Данное соответствие между расширениями и коциклами совместимо с эквивалентностью на расширениях и на коциклах и приводит к биекции $\mathcal{E}(G, M) \leftrightarrow H^2(G, M)$. Подробности можно найти в [5; гл. IV].

Пусть M – G -модуль, $H \subseteq G$ – подгруппа, $g \in G$ и $\theta \in H^2(H, M)$ представлено коциклом z . Тогда коцепь gz на gHg^{-1} , определенная по правилу $(gz)(gh_1g^{-1}, gh_2g^{-1}) = g(z(h_1, h_2))$, является 2-коциклом, и ее класс $g\theta = [gz]$ зависит только от g и θ . При $H \triangleleft G$ получаем действие G на $H^2(H, M)$. Оказывается, H лежит в ядре этого действия и, таким образом, на $H^2(H, M)$ действует G/H .

ЛЕММА 2.1. Пусть G, H, M такие же, как выше, G конечна, M является абелевой p -группой и $|G : H|$ не делится на p . Тогда отображение ограничения

$$\text{res}_H^G: H^2(G, M) \rightarrow H^2(H, M)$$

инъективно. Кроме того, если $H \cap H^g$ есть p' -группа для всех $g \in G - H$, то res_H^G – изоморфизм. С другой стороны, если $H \triangleleft G$, то образ res_H^G совпадает с подгруппой G/H -инвариантных элементов в $H^2(H, M)$.

Доказательство см. в [5; гл. III, § 10].

Теперь мы рассмотрим специальную ситуацию. Пусть A и P – элементарные абелевы p -группы, Q – p' -группа, действующая на A и P , $G = P : Q$, G действует на A , причем действие P тривиально. Пусть $\text{Alt}_2(P, A)^Q$ – группа Q -эквивариантных биаддитивных кососимметричных отображений $P \times P \rightarrow A$.

Следующая лемма довольно хорошо известна (тем не менее мы дадим набросок ее доказательства).

ЛЕММА 2.2. Пусть A, P, Q, G такие же, как выше, и $p \neq 2$. Тогда

$$H^2(G, A) \cong \text{Hom}_Q(P, A) \oplus \text{Alt}_2(P, A)^Q.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\theta \in H^2(G, A)$ представлено расширением

$$E: 1 \longrightarrow A \xrightarrow{i} \tilde{G} \xrightarrow{r} G \longrightarrow 1.$$

Для каждого $x \in P$ выберем прообраз $\tilde{x} \in r^{-1}(x)$ и положим $\alpha(x) = \tilde{x}^p$, $\beta(x, y) = [\tilde{x}, \tilde{y}]$. Ясно, что отображения $\alpha: P \rightarrow A$, $\beta: P \times P \rightarrow A$ не зависят от выбора $\tilde{x}$. Далее, из тождеств $(ab)^n = a^n b^n [a, b]^{n(n-1)/2}$ и $[ab, c] = [a, c][b, c]$, справедливых в нильпотентной группе класса 2, и из тождества $[b, a] = [a, b]^{-1}$ вытекает, что β биаддитивно и кососимметрично, а α аддитивно при $p \neq 2$. Кроме того, легко видеть, что α и β Q -эквивариантны. Таким образом, имеем отображение

$$s: H^2(G, A) \rightarrow \text{Hom}_Q(P, A) \oplus \text{Alt}_2(P, A)^Q.$$

Легко видеть, что если $c \in Z^2(P, A)$ – 2-коцикл, представляющий класс $\theta|_P$, то

$$\alpha(x) = c(0, x) + c(x, x) + \cdots + c((p-1)x, x), \quad \beta(x, y) = c(x, y) - c(y, x).$$

Из этого описания следует, что s – гомоморфизм абелевых групп. Если $s(\theta) = (0, 0)$, то $\tilde{P} = r^{-1}(P)$ абелева с экспонентой p , значит,

$$E|_P: 1 \longrightarrow A \xrightarrow{i} \tilde{P} \xrightarrow{r|_{\tilde{P}}} P \longrightarrow 1$$

расщепимо, откуда $\theta|_P = 0$ и $\theta = 0$. Поэтому s инъективно.

Несложно показать, что θ также сюръективно. Мы докажем только, что образ s содержит все $(0, \beta)$ с $\beta \in \text{Alt}_2(P, A)^Q$ (фактически только это утверждение нам ниже, в §4, и понадобится). Так как $c(x, y) = \beta(x, y)/2$ билинейно, c является коциклом. Тогда $\tilde{P} = A \times P$ является группой относительно умножения

$$(a, x)(b, y) = (a + b + c(x, y), x + y).$$

Далее, $g \in Q$ действует на $\tilde{P}$ автоморфизмом по правилу $g((a, x)) = (ga, gx)$, и мы можем образовать полупрямое произведение $\tilde{G} = \tilde{P} : Q$. В явном виде $\tilde{G} = A \times P \times Q$ как множество, и умножение производится по правилу

$$(a, x, g)(b, y, h) = (a + gb + c(x, gy), x + gy, gh).$$

Легко видеть, что диаграмма

$$1 \longrightarrow A \xrightarrow{i} \tilde{G} \xrightarrow{r} G \longrightarrow 1,$$

где i и r определены правилами $i(a) = (a, 0, 1)$ и $r(a, x, g) = (x, g)$, является расширением, и если θ – соответствующий когомологический класс, то $s(\theta) = (0, \beta)$.

В заключение параграфа напомним, что если $0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$ есть короткая точная последовательность G -модулей, то последовательность $H^k(G, M') \rightarrow H^k(G, M) \rightarrow H^k(G, M'')$ точна при $k \geq 1$.

§ 3. Регулярные случаи

ЛЕММА 3.1. Пусть K – конечное поле, $|K| = p^m$. Тогда любое аддитивное отображение (т.е. гомоморфизм абелевых групп) $s: K \rightarrow K$ представляется, причем единственным образом, в виде

$$s(x) = \sum_{0 \leq i \leq m-1} a_i x^{p^i}, \quad a_i \in K, \quad (1)$$

а любое биаддитивное отображение $r: K \times K \rightarrow K$ – как

$$r(x, y) = \sum_{0 \leq i, j \leq m-1} a_{ij} x^{p^i} y^{p^j}. \quad (2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, отображения, определенные данными формулами, действительно аддитивны (соответственно биаддитивны).

Пусть X есть множество всех наборов $\{a_{ij} \in K \mid 0 \leq i, j \leq m-1\}$ и Y – множество всех биаддитивных отображений. Тогда X и Y суть пространства над простым подполем $L \subseteq K$, и формула (2) определяет линейное отображение $t: X \rightarrow Y$. Нам следует доказать, что t биективно. Легко видеть, что X и Y имеют размерность m^3 . Поэтому достаточно доказать, что t инъективно.

Допустим,

$$r(x, y) = \sum_{0 \leq i, j \leq m-1} a_{ij} x^{p^i} y^{p^j} \equiv 0$$

на $K \times K$. Запишем

$$r(x, y) = \sum_{0 \leq j \leq m-1} a_j(x) y^{p^j}, \quad a_j(x) = \sum_{0 \leq i \leq m-1} a_{ij} x^{p^i}.$$

При фиксированном x , очевидно, $r(x, y)$ является многочленом от y степени $\leq p^{m-1} < |K|$, тождественно равным нулю на K . Поэтому все его коэффициенты – нули. Теперь $a_j(x)$ есть многочлен степени $\leq p^{m-1}$, тождественно равный нулю, значит, все a_{ij} равны нулю. Поэтому t инъективно.

Для аддитивных отображений доказательство полностью аналогично.

Из единственности представления в виде (2) следует, что $r(x, y)$ тогда и только тогда симметрично (соответственно кососимметрично по x и y), когда a_{ij} симметрично (кососимметрично) по i, j . В частности, любое кососимметрическое биаддитивное отображение $r: K \times K \rightarrow K$ есть

$$r(x, y) = \sum_{0 \leq i < j \leq m-1} a_{ij} (x^{p^i} y^{p^j} - x^{p^j} y^{p^i}).$$

ЛЕММА 3.2. Пусть $a_1, a_2, b \in \mathbb{Z}$. Тогда биаддитивное отображение r удовлетворяет условию однородности

$$r(\lambda^{a_1} x, \lambda^{a_2} y) = \lambda^b r(x, y) \quad (3)$$

для всех $\lambda \in K^*$ тогда и только тогда, когда

$$r(x, y) = \sum a_{ij} x^{p^i} y^{p^j},$$

сумма по всем $0 \leq i, j \leq m-1$, удовлетворяющим сравнению

$$a_1 p^i + a_2 p^j \equiv b \pmod{q-1}. \quad (4)$$

Аналогично, аддитивное отображение удовлетворяет $r(\lambda^a x) = \lambda^b r(x)$, если $r(x) = \sum a_i x^{p^i}$, сумма по $0 \leq i \leq m-1$ таким, что $ap^i \equiv b \pmod{q-1}$.

В частности, если эти сравнения не имеют решений, то любое биаддитивное (аддитивное) отображение, удовлетворяющее соответствующему условию однородности, – нулевое.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим биаддитивные отображения. Имеем

$$r(x, y) = \sum_{0 \leq i, j \leq m-1} a_{ij} x^{p^i} y^{p^j}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} r(\lambda^{a_1} x, \lambda^{a_2} y) &= \sum a_{ij} (\lambda^{a_1} x)^{p^i} (\lambda^{a_2} y)^{p^j} = \sum \lambda^{a_1 p^i + a_2 p^j} a_{ij} x^{p^i} y^{p^j}, \\ \lambda^b r(x, y) &= \sum \lambda^b a_{ij} x^{p^i} y^{p^j}. \end{aligned}$$

Учитывая, что представление биаддитивного отображения в виде (2) единственно, и приравнявая соответствующие коэффициенты, мы получим, что $\lambda^{a_1 p^i + a_2 p^j} a_{ij} = \lambda^b a_{ij}$ для всех $\lambda \in K^*$. Последнее условие означает, что либо $a_{ij} = 0$, либо $\lambda^{a_1 p^i + a_2 p^j} = \lambda^b$ для всех $\lambda \in K^*$, что эквивалентно сравнению (4).

ЛЕММА 3.3. *Рассмотрим следующие сравнения:*

- 1) $2p^i \equiv 1 - q \pmod{q^2 - 1}$;
- 2) $2p^i \equiv q + 1 \pmod{q^2 - 1}$;
- 3) $2p^i \equiv -(q + 1) \pmod{q^2 - 1}$;
- 4) $2(p^i + p^j) \equiv 1 - q \pmod{q^2 - 1}$;
- 5) $2(p^i + p^j) \equiv q + 1 \pmod{q^2 - 1}$;
- 6) $2(p^i + p^j) \equiv -(q + 1) \pmod{q^2 - 1}$.

Здесь $q = p^m$, p нечетное простое, $0 \leq i < j \leq 2m-1$. Тогда эти сравнения имеют следующие решения: 1) $p = q = 3$, $i = 1$; 4) $p = 3$, $q = 9$, $i = 2$, $j = 3$; 2), 3), 5), 6) решений не имеют.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала мы перечислим все пары (p, m) такие, что

$$2p^{2m-1} + 2p^{2m-2} + p^m + 1 \geq p^{2m} - 1. \quad (5)$$

Это можно переписать как $p^m + 2 \geq p^{2m-2}(p^2 - 2p - 2)$; но $p^2 - 2p - 2 = (p-1)^2 - 3 \geq 2^2 - 3 = 1$, откуда для подходящих пар (p, m) имеем $p^m + 2 \geq p^{2m-2}$.

Если $m \geq 3$, то $2m-2 \geq m+1$, откуда $p^m + 2 \geq p^{m+1}$ и $p^m(p-1) \leq 2$, что невозможно.

При $m = 2$ неравенство (5) означает $2p^3 + 2p^2 + p^2 + 1 \geq p^4 - 1$, откуда $p^4 - 2p^3 - 3p^2 \leq 2$, $p^2(p^2 - 2p - 3) \leq 2$ и $p^2(p-3)(p+1) \leq 2$, что возможно лишь при $p = 3$. Наконец, при $m = 1$ неравенство означает $2p + 2 + p + 1 \geq p^2 - 1$, откуда $p^2 - 3p \leq 4$, $p(p-3) \leq 4$, откуда $p = 3$. Итак, все решения неравенства (5) суть $p = 3$, $m = 1$ или $m = 2$.

Теперь будем собственно решать сравнения. Сначала предположим $(p, m) \neq (3, 1), (3, 2)$. В каждом из сравнений 1)–6) левая часть положительна и не превосходит $2p^{2m-1} + 2p^{2m-2}$, а правая не превосходит по модулю $p^m + 1$. Поэтому их разность не превосходит $2p^{2m-1} + 2p^{2m-2} + p^m + 1 < q^2 - 1$. Значит, сравнения должны быть равенствами. Поэтому 1), 3), 4), 6) не имеют решений, так как в них левая часть положительна, а правая отрицательна. Что касается 2) и 5), то в них p -ичное разложение левой части содержит одну или две цифры 2, а разложение правой части – ровно две единицы (а остальные цифры – нули), поэтому правая часть также не может равняться левой. Итак, при $(p, m) \neq (3, 1), (3, 2)$ решений нет. Осталось произвести небольшой перебор в случае $p = 3, m = 1, 2$.

ЛЕММА 3.4. Пусть $q = p^m, E = \mathbf{F}_{q^2}$.

1) Пусть $r: E \rightarrow E$ аддитивно и удовлетворяет одному из условий:

- (i) $r(\lambda^2 x) = \lambda^{1-q} r(x)$;
- (ii) $r(\lambda^2 x) = \lambda^{1+q} r(x)$;
- (iii) $r(\lambda^2 x) = \lambda^{-(1+q)} r(x)$;

для любых $x \in E, \lambda \in E^*$. Тогда $r \equiv 0$ в случаях (ii) и (iii), а в случае (i) либо $r \equiv 0$, либо $q = 3$ и $r(x) = ax^3, a \in E$.

2) Пусть $r \in \text{Alt}_2(E, E)$ удовлетворяет одному из условий:

- (i) $r(\lambda^2 x, \lambda^2 y) = \lambda^{1-q} r(x, y)$;
- (ii) $r(\lambda^2 x, \lambda^2 y) = \lambda^{1+q} r(x, y)$;
- (iii) $r(\lambda^2 x, \lambda^2 y) = \lambda^{-(1+q)} r(x, y)$.

Тогда в случаях (ii) и (iii) $r \equiv 0$, а в случае (i) либо $r \equiv 0$, либо $p = 3, q = 9, r(x, y) = a(x^9 y^{27} - x^{27} y^9)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) По лемме 3.1

$$r(x) = \sum_{i=0}^{2m-1} a_i x^{p^i}.$$

Если r удовлетворяет одному из условий (i), (ii) или (iii), то $a_i \neq 0$ только для i , удовлетворяющих сравнениям $2p^i \equiv 1 - q \pmod{q^2 - 1}$, $2p^i \equiv 1 + q \pmod{q^2 - 1}$ или $2p^i \equiv -(1 + q) \pmod{q^2 - 1}$ соответственно.

Второе и третье из этих сравнений не имеют решений, откуда $r \equiv 0$ в случаях (ii) или (iii), а единственное решение первого есть $p = q = 3, i = 1$, откуда $r(x) = ax^3$ при $q = 3$ и $r = 0$ в остальных случаях.

2) Имеем

$$r(x, y) = \sum_{0 \leq i < j \leq 2m-1} a_{ij} (x^{p^i} y^{p^j} - x^{p^j} y^{p^i}).$$

Опять, если r удовлетворяет одному из условий (i), (ii) или (iii), то a_{ij} может быть отлично от нуля только для пар (i, j) , удовлетворяющих сравнениям $2(p^i + p^j) \equiv 1 - q \pmod{q^2 - 1}$, $2(p^i + p^j) \equiv 1 + q \pmod{q^2 - 1}$ или $2(p^i + p^j) \equiv -(1 + q) \pmod{q^2 - 1}$ соответственно. Остается применить лемму 3.3.

Заметим, что T действует на U и на V_i по правилам

$$x(t)^{h(\lambda)} = x(\lambda^{-2}t),$$

$$h(\lambda)(ae_1) = \lambda^{q+1}ae_1, \quad h(\lambda)(ae_{-1}) = \lambda^{-(q+1)}ae_{-1}, \quad h(\lambda)(ae_0) = \lambda^{q-1}ae_0.$$

ЛЕММА 3.5. $\text{Hom}_T(U, V_i) = 0$, за исключением случая $q = 3$, $i = 0$, и $\text{Alt}_2(U, V_i)^T = 0$, за исключением случая $q = 9$, $i = 0$. В исключительных случаях отображения $\varphi_1 \in \text{Hom}_T(U, V_0)$ и $\varphi_2 \in \text{Alt}_2(U, V_0)^T$ даются формулами

$$\varphi_1(x(t)) = at^3e_0, \quad \varphi_2(x(t), x(u)) = a(t^9u^{27} - t^{27}u^9)e_0$$

для некоторого $a \in E$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим $\text{Alt}_2(U, V_i)^T$, для $\text{Hom}_T(U, V_i)$ рассуждения полностью аналогичны.

Любое отображение $\varphi \in \text{Alt}_2(U, V_i)$ имеет вид

$$\varphi(x(t), x(u)) = r(t, u)e_i,$$

где $r \in \text{Alt}_2(E, E)$ (на самом деле r принимает значения в F при $i = 1, -1$). Условие эквивариантности есть

$$\varphi(x(t)^{h(\lambda)}, x(u)^{h(\lambda)}) = h(\lambda)r(t, u)e_i.$$

Левая часть есть $\varphi(x(\lambda^{-2}t), x(\lambda^{-2}u)) = r(\lambda^{-2}t, \lambda^{-2}u)e_i$, а правая часть есть $\lambda^{s_i}r(t, u)e_i$, где $s_1 = q + 1$, $s_0 = q - 1$, $s_{-1} = -(q + 1)$. Для r получаем условие $r(\lambda^{-2}t, \lambda^{-2}u) = \lambda^{s_i}r(t, u)$, что эквивалентно $r(\lambda^2t, \lambda^2u) = \lambda^{-s_i}r(t, u)$. Все r , удовлетворяющие этим условиям, описаны в лемме 3.4. Именно, при $i = 1$ и $i = -1$ имеем $-s_i = \pm(q + 1)$, откуда $r \equiv 0$, а при $i = 0$ имеем $-s_0 = 1 - q$, откуда $r(t, u) = a(t^9u^{27} - t^{27}u^9)$ при $q = 9$ и $r \equiv 0$ при $q \neq 9$.

Нам будет удобно иногда рассматривать V_i как B -модули, на которых U действует тривиально, а T – как обычно. (С другой стороны, если мы рассматриваем V_i как подпространства в V , то действие U на V_0 и V_1 нетривиально.)

Определим $V_{\leq 0} = V_{-1} \oplus V_0$. Тогда V имеет ряд B -подмодулей:

$$0 \subset V_{-1} \subset V_{\leq 0} \subset V,$$

факторы которого суть V_{-1} , $V_{\leq 0}/V_{-1} \cong V_0$ и $V/V_{\leq 0} \cong V_1$.

Теперь мы можем доказать основной результат этого параграфа.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.6. Если $q \neq 3, 9$, то $H^2(\Omega, V) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как B содержит силовскую p -подгруппу и $B \cap B^g - p'$ -группа при $g \in \Omega - B$, то $H^2(\Omega, V) \cong H^2(B, V)$. Рассмотрим в V ряд B -подмодулей с факторами V_{-1} , V_0 , V_1 , как выше. Из точной последовательности для когомологий следует, что если $M - G$ -модуль и $H^2(G, L) = 0$ для любого его композиционного фактора L , то и $H^2(G, M) = 0$. Поэтому нам достаточно доказать, что $H^2(B, V_i) = 0$ для $i = -1, 0, 1$. Так как U действует на V_i тривиально, то мы находимся в ситуации леммы 2.2 с $G = B$, $A = V_i$, $P = U$ и $Q = T$. Поэтому $H^2(B, V_i) \cong \text{Hom}_T(U, V_i) \oplus \text{Alt}_2(U, V_i)^T$. Но оба слагаемых – нули при $q \neq 3, 9$.

§ 4. Исключительные случаи

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1. $H^2(\Omega, V) = 0$ при $\Omega = \Omega^-(4, 3)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как и ранее, $H^2(\Omega, V) \cong H^2(B, V)$. Из точной последовательности B -модулей

$$0 \longrightarrow V_{\leq 0} \longrightarrow V \longrightarrow V/V_{\leq 0} \cong V_1 \longrightarrow 0$$

следует, что последовательность $H^2(B, V_{\leq 0}) \rightarrow H^2(B, V) \rightarrow H^2(B, V_1)$ точна. Поскольку $\text{Hom}_T(U, V_1) = 0$ и $\text{Alt}_2(U, V_1)^T = 0$, то $H^2(B, V_1) = 0$, и нам осталось доказать, что $H^2(B, V_{\leq 0}) = 0$.

Пусть

$$E: 1 \longrightarrow V_{\leq 0} \xrightarrow{i} \tilde{B} \xrightarrow{r} B \longrightarrow 1$$

– расширение, отвечающее классу $\theta \in H^2(B, V_{\leq 0})$. Факторизуя по $V_{-1} \triangleleft \tilde{B}$, получаем расширение

$$E_1: 1 \longrightarrow V_{\leq 0}/V_{-1} (\cong V_0) \xrightarrow{i_1} \tilde{B}/V_{-1} \xrightarrow{r_1} B \longrightarrow 1.$$

Так как U действует на V_0 тривиально, то $\hat{U} = r_1^{-1}(U)$ двуступенно нильпотентна, и коммутатор на ней определяет некоторый элемент из $\text{Alt}_2(U, V_0)^T$. Но последняя группа нулевая, значит, $\hat{U}$ абелева. Так как $\hat{U} \cong \tilde{U}/V_{-1}$, где $\tilde{U} = r^{-1}(U)$ и $V_{-1} \subseteq Z(\tilde{U})$, то $\tilde{U}$ двуступенно нильпотентна. Поскольку V_{-1} – экспоненты 3, то для любых $x, y \in \tilde{U}$ имеем $[x^3, y] = [x, y]^3 = 1$. Значит, $x^3 \in Z(\tilde{U})$ для любого $x \in \tilde{U}$.

Допустим, что $\hat{U}$ не экспоненты 3, $x^3 \neq 1$ для некоторого $x \in \hat{U}$. Если x_1 – прообраз x в $\tilde{U}$, то $x_1^3 \in V_{\leq 0} - V_{-1}$. С другой стороны, для любого $v \in V_{\leq 0} - V_{-1}$ существует $y \in U$ такое, что $yv \neq v$. Действительно, если $v = ae_{-1} + be_0$, $b \in E^*$, то

$$\begin{aligned} x(b)v &= \left(1 + be_{01} - \bar{b}e_{-1,0} - \frac{b\bar{b}}{2}e_{-1,1}\right)(ae_{-1} + be_0) \\ &= ae_{-1} + be_0 - \rho(\bar{b}b)e_{-1} = v - b\bar{b}e_{-1} \neq v. \end{aligned}$$

Поэтому элемент из $V_{\leq 0} - V_{-1}$ не может лежать в центре $\tilde{U}$. Противоречие. Итак, $\hat{U}$ – экспоненты 3.

Мы можем считать T вложенным в $\tilde{B}$ и $\tilde{B}/V_{-1}$. По теореме Машке существует T -инвариантное дополнение U_1 к $V_{\leq 0}/V_{-1}$ в $\hat{U}$. Рассматривая $\tilde{U}_1$ (прообраз U_1 в $\tilde{B}$), видим, что коммутирование и возведение в куб определяют элементы из $\text{Alt}_2(U_1, V_{-1})^T$ и $\text{Hom}_T(U_1, V_{-1})$. Так как $U_1 \cong U$ как T -модули, то последние группы – нули, значит, $\tilde{U}_1$ – элементарная абелева. Поэтому существует дополнение U_2 к V_{-1} в $\tilde{U}_1$. Легко видеть, что U_2 является и дополнением к $V_{\leq 0}$ в $\tilde{U}$, откуда $E|_U$ расщепимо, $\theta|_U = 0$ и, наконец, $\theta = 0$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.2. Если $\Omega = \Omega^-(4, 9)$, то $H^2(\Omega, V) \cong Z_3^4$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы разделим доказательство на несколько частей.

1) Прежде всего, как обычно, $H^2(\Omega, V) \cong H^2(B, V)$. Поскольку V – элементарная абелева 3-группа, то $H^2(B, V)$ – также элементарная абелева 3-группа.

Далее, V содержит ряд подмодулей с факторами V_{-1} , V_0 , V_1 . Из точной последовательности для когомологий следует, что

$$\mathrm{rk} H^2(B, V) \leq \mathrm{rk} H^2(B, V_{-1}) + \mathrm{rk} H^2(B, V_0) + \mathrm{rk} H^2(B, V_1).$$

Поскольку $H^2(B, V_i)$ – подгруппа в $\mathrm{Hom}_T(U, V_i) \oplus \mathrm{Alt}_2(U, V_i)^T$ и из шести групп $\mathrm{Hom}_T(U, V_i)$ и $\mathrm{Alt}_2(U, V_i)^T$ ровно одна, а именно $\mathrm{Alt}_2(U, V_0)^T$, отлична от нуля, то $\mathrm{rk} H^2(B, V) \leq \mathrm{rk} \mathrm{Alt}_2(U, V_0)^T$. Последняя группа изоморфна аддитивной группе поля E , откуда $\mathrm{rk} H^2(B, V) \leq 4$. Остается доказать обратное неравенство.

2) Имеем $H^2(B, V) \cong H^2(U, V)^T$. Мы предъявим коциклы, представляющие элементы из $H^2(U, V)^T$, в явном виде. Сделаем несколько предварительных замечаний.

Пусть θ – предполагаемый элемент из $H^2(U, V)^T$. Так как последовательность

$$H^2(U, V_{\leq 0}) \longrightarrow H^2(U, V) \longrightarrow H^2(U, V/V_{\leq 0})$$

точна и T – p' -группа, то

$$H^2(U, V_{\leq 0})^T \longrightarrow H^2(U, V)^T \longrightarrow H^2(U, V/V_{\leq 0})^T$$

также точна. Далее,

$$H^2(U, V/V_{\leq 0})^T \cong H^2(U, V_1)^T \cong \mathrm{Hom}_T(U, V_1) \oplus \mathrm{Alt}_2(U, V_1)^T = 0.$$

Поэтому θ есть образ некоторого $\theta' \in H^2(U, V_{\leq 0})^T$. Пусть θ'' есть образ θ' в $H^2(U, V_0) = H^2(U, V_{\leq 0}/V_{-1})$. Тогда $\theta'' \in H^2(U, V_0)^T$. Далее, пусть $c \in Z^2(U, V_{\leq 0})$ есть коцикл, представляющий θ' . Разложим c : $c(x, y) = c_{-1}(x, y) + c_0(x, y)$, где $c_i(x, y) \in V_i$, $i = -1, 0$. Тогда c_0 есть коцикл, представляющий θ'' . С другой стороны, пусть s есть отображение, описанное в доказательстве леммы 2.2. Тогда $s(\theta'') = (0, \beta)$ для некоторого $\beta \in \mathrm{Alt}_2(U, V_0)^T$, и $c'_0(x, y) = \beta(x, y)/2$ есть коцикл из $Z^2(U, V_0)$, представляющий θ'' . Таким образом, c_0 и c'_0 представляют θ'' , поэтому они отличаются на 2-кограницу: $c'_0 = c_0 + \delta b$, где $b \in C^1(U, V_0)$, и δ есть операция взятия кограницы,

$$(\delta b)(x, y) = b(xy) - b(x) - xb(y).$$

Вкладывая V_0 в $V_{\leq 0}$, мы можем рассматривать b как элемент из $C^1(U, V_{\leq 0})$. Тогда $c' = c + \delta b$ есть коцикл, представляющий θ' , причем $c'(x, y) = c'_{-1}(x, y) + c'_0(x, y)$, где $c'_{-1}(x, y) \in V_{-1}$.

Используя явный вид для отображений из $\mathrm{Alt}_2(U, V_0)^T$ и обозначив опять c' через c , видим, что θ представляется некоторым коциклом вида $c(x(t), x(u)) = g(t, u)e_{-1} + h(t, u)e_0$, где $h(t, u) = h_a(t, u) = a(t^9u^{27} - t^{27}u^9)$.

Положим $g(t, u) = g_a(t, u) = \rho(\bar{a}(t^2u^3 + t^4u - t^3u^2))$. (Наводящие соображения, приводящие к такому выражению для $g(t, u)$, довольно длинны и не прямолинейны, и мы не имеем возможности привести их здесь.)

Итак, мы рассматриваем отображение $c = c_a: U \times U \rightarrow V$, определенное формулой

$$c_a(x(t), x(u)) = h_a(t, u)e_0 + g_a(t, u)e_{-1},$$

где

$$h_a(t, u) = a(t^9u^{27} - t^{27}u^9), \quad g_a(t, u) = \rho(\bar{a}(t^2u^3 + t^4u - t^3u^2)).$$

3) Покажем, что $c_a \in Z^2(U, V)$. Предварительно заметим, что для $v = re_0 + ue_{-1}$ имеем

$$\begin{aligned} x(t)v &= \left(1 + te_{01} - \bar{t}e_{-1,0} - \frac{t\bar{t}}{2}e_{-1,1}\right)(re_0 + se_{-1}) \\ &= re_0 - (\bar{t}e_{-1,0})(re_0) + se_{-1} = v - \rho(\bar{t}r)e_{-1}. \end{aligned}$$

Условие коцикла

$$c(x, y) + c(xy, z) - xc(y, z) - c(x, yz) = 0$$

для $c = c_a$, $x = x(t)$, $y = x(u)$, $z = x(v)$ дает

$$\begin{aligned} 0 &= c_a(x(t), x(u)) + c_a(x(t+u), x(v)) - x(t)c_a(x(u), x(v)) - c_a(x(t), x(u+v)) \\ &= (h_a(t, u)e_0 + g_a(t, u)e_{-1}) + (h_a(t+u, v)e_0 + g_a(t+u, v)e_{-1}) \\ &\quad - x(t)(h_a(u, v)e_0 + g_a(u, v)e_{-1}) - (h_a(t, u+v)e_0 + g_a(t, u+v)e_{-1}) \\ &= (h_a(t, u) + h_a(t+u, v) - h_a(u, v) - h_a(t, u+v))e_0 \\ &\quad + (g_a(t, u) + g_a(t+u, v) - g_a(u, v) + \rho(\bar{t}h_a(u, v)) - g_a(t, u+v))e_{-1}. \end{aligned}$$

Коэффициент при e_0 есть нуль в силу биаддитивности h_a . Коэффициент при e_{-1} есть

$$\begin{aligned} &\rho(\bar{a}(t^2u^3 + t^4u - t^3u^2)) + \rho(\bar{a}((t+u)^2v^3 + (t+u)^4v - (t+u)^3v^2)) \\ &\quad - \rho(\bar{a}(u^2v^3 + u^4v - u^3v^2)) + \rho(\bar{t}a(u^9v^{27} - u^{27}v^9)) \\ &\quad - \rho(\bar{a}(t^2(u+v)^3 + t^4(u+v) - t^3(u+v)^2)). \end{aligned} \tag{6}$$

Заметим, что $\rho(\lambda) = \rho(\bar{\lambda}) = \rho(\lambda^9)$, отсюда

$$\rho(\bar{t}a(u^9v^{27} - u^{27}v^9)) = \rho(\bar{t}a(\bar{u}\bar{v}^3 - \bar{u}^3\bar{v})) = \rho(\bar{a}t(uv^3 - u^3v)).$$

Значит, (6) равно $\rho(\bar{a}w)$, где

$$\begin{aligned} w &= t^2u^3 + t^4u - t^3u^2 + (t+u)^2v^3 + (t+u)^4v - (t+u)^3v^2 - u^2v^3 - u^4v + u^3v^2 \\ &\quad + t(uv^3 - u^3v) - t^2(u+v)^3 - t^4(u+v) + t^3(u+v)^2. \end{aligned}$$

Но несложно проверить, что последнее выражение равно нулю, если характеристика есть 3.

4) Теперь мы проверим, что c_a T -эквивариантно. Достаточно проверить, что отображения из $U \times U$ в V_0 и V_{-1} по правилам

$$(x(t), x(u)) \mapsto h_a(u, v)e_0, \quad (x(t), x(u)) \mapsto g_a(u, v)e_{-1}$$

T -эквивариантны. Для первого это следует из леммы 3.5. Что касается второго, то для него условие T -эквивариантности, как следует из рассуждений в доказательстве леммы 3.5, эквивалентно $g_a(\lambda^{-2}u, \lambda^{-2}v) = \lambda^{-(q+1)}g_a(u, v)$, что эквивалентно

$$g_a(\lambda^2u, \lambda^2v) = \lambda^{10}g_a(u, v).$$

Заметим, что для всякого $\lambda \in E^*$ имеем $\lambda^{10} \in F^*$, откуда $\rho(\lambda^{10}x) = \lambda^{10}\rho(x)$. Поэтому

$$\begin{aligned} g_a(\lambda^2 u, \lambda^2 v) &= \rho(\bar{a}((\lambda^2 u)^2(\lambda^2 v)^3 + (\lambda^2 u)^4(\lambda^2 v) - (\lambda^2 u)^3(\lambda^2 v)^2)) \\ &= \rho(\bar{a}(\lambda^{10}(u^2 v^3 + u^4 v - u^3 v^2))) \\ &= \lambda^{10} \rho(\bar{a}(u^2 v^3 + u^4 v - u^3 v^2)) = \lambda^{10} g_a(u, v), \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

5) Теперь мы докажем, что c_a не является кограницей при $a \neq 0$. Допустим обратное. Тогда существует $l: U \rightarrow V$ такое, что $c_a(x, y) = l(xy) - l(x) - xl(y)$ для любых $x, y \in U$. Взяв $x = x(t)$, $y = x(u)$ и разложив

$$l(x(t)) = A(t)e_1 + B(t)e_0 + C(t)e_{-1},$$

можно записать последнее условие как

$$\begin{aligned} h_a(t, u)e_0 + g_a(t, u)e_{-1} &= (A(t+u)e_1 + B(t+u)e_0 + C(t+u)e_{-1}) \\ &\quad - (A(t)e_1 + B(t)e_0 + C(t)e_{-1}) - x(t)(A(u)e_1 + B(u)e_0 + C(u)e_{-1}). \end{aligned}$$

Вычисляя коэффициенты при e_1 и e_0 справа и приравнявая их к соответствующим коэффициентам слева, получаем условия

$$\begin{aligned} A(t+u) - A(t) - A(u) &= 0, \\ B(t+u) - B(t) - B(u) - tA(u) &= h_a(t, u) = a(t^9 u^{27} - t^{27} u^9). \end{aligned}$$

Из первого условия следует, что A аддитивно, откуда $A(t) = \alpha t + \beta t^3 + \gamma t^9 + \delta t^{27}$ для некоторых $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in E$. Теперь из второго условия следует

$$\begin{aligned} B(t+u) - B(t) - B(u) &= h_a(t, u) + tA(u) \\ &= a(t^9 u^{27} - t^{27} u^9) + t(\alpha u + \beta u^3 + \gamma u^9 + \delta u^{27}). \end{aligned}$$

В последнем равенстве левая часть симметрична по t, u . Правая же биаддитивна по t, u , а по замечанию после леммы 3.1 она может быть симметрична только в случае $a = 0, \beta = \gamma = \delta = 0$.

6) Теперь мы можем закончить доказательство. Так как c_a есть T -эквивариантный коцикл, его класс $[c_a]$ лежит в $H^2(U, V)^T$. Далее, отображение $a \mapsto c_a$ и тем самым $a \mapsto [c_a]$ является гомоморфизмом абелевых групп. Так как $[c_a] \neq 0$ при $a \neq 0$, оно инъективно. Значит, $H^2(U, V)^T$ содержит подгруппу, изоморфную E , и поэтому имеет ранг ≥ 4 .

Теорема 1.2 – очевидное объединение предложений 3.6, 4.1 и 4.2.

Автор признателен за поддержку И. Д. Супруненко.

Список литературы

- [1] A. S. Küseföglü, “The second degree cohomology of finite orthogonal groups, I”, *J. Algebra*, **56**:1 (1979), 207–220.
- [2] A. S. Küseföglü, “The second degree cohomology of finite orthogonal groups, II”, *J. Algebra*, **67**:1 (1980), 88–109.

- [3] Ж. Дьёдонне, *Геометрия классических групп*, Мир, М., 1974; пер. с фр.: J. A. Dieudonné, *La géométrie des groupes classiques*, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1971.
- [4] J. H. Conway, R. T. Curtis, S. P. Norton, R. A. Parker, R. A. Wilson, *Atlas of finite groups. Maximal subgroups and ordinary characters for simple groups*, Oxford Univ. Press, Eynsham; Clarendon Press, Oxford, 1985.
- [5] К. С. Браун, *Когомологии групп*, Наука, М., 1987; пер. с англ.: K. S. Brown, *Cohomology of groups*, Grad. Texts in Math., **87**, Springer-Verlag, New York–Heidelberg–Berlin, 1982.

В. П. Буриченко (V. P. Burichenko)
Гомельский филиал
Института математики НАН Белоруссии
E-mail: goim@nauka.belpak.gomel.by

Поступила в редакцию
09.08.2006