Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Б. Д. Гельман, Топологические свойства множества неподвижных точек многозначных отображений, *Матем. сб.*, 1997, том 188, номер 12, 33–56

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm271>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.183.62

26 апреля 2023 г., 08:36:09

УДК 515.126.83

Б. Д. Гельман

Топологические свойства множества неподвижных точек многозначных отображений

Данная работа посвящена изучению топологических свойств множества неподвижных точек многозначных отображений. В ней доказываются некоторые теоремы о топологической размерности этого множества, изучаются условия при которых это множество является связным или ациклическим. Даются приложения полученных теорем к изучению множества решений дифференциальных и интегральных включений.

Библиография: 30 названий.

После построения топологической теории неподвижных точек многозначных отображений (см., например, [1]–[7]), естественно возникает задача изучения свойств множества неподвижных точек таких отображений. Этому вопросу и посвящена данная статья. Основные результаты этой статьи анонсированы в [8].

§1. Основные факты теории многозначных отображений

Пусть Y – подмножество банахова пространства E , обозначим тогда

$C(Y)$ – множество всех непустых замкнутых подмножеств в Y ;

$K(Y)$ – множество всех непустых компактных подмножеств в Y ;

$Kv(Y)$ – множество всех непустых компактных выпуклых подмножеств в Y ;

$Cv(Y)$ – множество всех непустых замкнутых выпуклых подмножеств в Y .

Многозначное отображение (м-отображение) метрического пространства X в метрическое пространство Y – это соответствие, сопоставляющее каждой точке $x \in X$ непустое подмножество $F(x) \subset Y$, называемое *образом точки* x . В дальнейшем, если образы м-отображения F являются компактами, то будем записывать это следующим образом: $F: X \rightarrow K(Y)$. Аналогично, обозначение $F: X \rightarrow Kv(Y)$ ($F: X \rightarrow Cv(Y)$) означает, что образы $F(x)$ являются выпуклыми компактными (замкнутыми) множествами.

Графиком многозначного отображения $F: X \rightarrow C(Y)$ называется множество $\Gamma_X(F) \subset X \times Y$,

$$\Gamma_X(F) = \{(x, y) : x \in X, y \in F(x)\}.$$

Естественно определены проекции $t: \Gamma_X(F) \rightarrow X$, $t(x, y) = x$, и $r: \Gamma_X(F) \rightarrow Y$, $r(x, y) = y$.

Всюду в дальнейшем м-отображения обозначаются прописными, а однозначные – строчными буквами.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. М-отображение $F: X \rightarrow C(Y)$ называется *полу непрерывным сверху в точке* $x_0 \in X$, если для любого открытого множества $V \subset Y$, $V \supset F(x_0)$ существует открытая окрестность U точки x_0 такая, что $F(U) \subset V$.

Если F – полунепрерывно сверху в каждой точке $x \in X$, то оно называется *полунепрерывным сверху*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2. М-отображение $F: X \rightarrow C(Y)$ называется *полунепрерывным снизу в точке* $x_0 \in X$, если для любого открытого множества $V \subset Y$ такого, что $F(x_0) \cap V \neq \emptyset$, найдется открытая окрестность U точки x_0 такая, что $F(x) \cap V \neq \emptyset$ для любого $x \in U$.

Если F – полунепрерывно снизу в каждой точке $x \in X$, то оно называется *полунепрерывным снизу*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.3. М-отображение $F: X \rightarrow C(Y)$ называется *непрерывным*, если оно одновременно полунепрерывно сверху и снизу.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.4. Непрерывное отображение $f: X \rightarrow Y$ называется *сечением м-отображения* F , если для любой точки $x \in X$ выполнено включение $f(x) \in F(x)$.

ТЕОРЕМА 1.5 (Майкл [9]). Пусть X – паракомпактное топологическое пространство, E – банахово пространство, $F: X \rightarrow C_v(E)$ – полунепрерывное снизу м-отображение, A – замкнутое подмножество в X . Если $f: A \rightarrow E$ – сечение F , то у F существует непрерывное сечение $\hat{f}: X \rightarrow E$ такое, что $\hat{f}|_A = f$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.6. Непрерывное отображение $f: X \rightarrow Y$ называется ε -аппроксимацией м-отображения F , если график $\Gamma_X(f)$ отображения f принадлежит ε -окрестности графика $\Gamma_X(F)$ м-отображения F , т.е. $\Gamma_X(f) \subset U_\varepsilon(\Gamma_X(F))$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.7. М-отображение $F: X \rightarrow K(Y)$ называется *вполне непрерывным*, если

- 1) F полунепрерывно сверху;
- 2) множество $F(B)$ является компактным в Y для любого ограниченного множества $B \subset X$.

Пусть E – банахово пространство, $X \subset E$, $F: X \rightarrow C(E)$ – некоторое м-отображение.

Точку $x_0 \in X$ будем называть *неподвижной точкой м-отображения* F , если $x_0 \in F(x_0)$.

Приведем некоторые результаты о вращении уплотняющих многозначных векторных полей с выпуклыми компактными образами в банаховом пространстве.

Пусть E – банахово пространство, 2^E – множество всех непустых подмножеств в E . Отображение $\chi: 2^E \rightarrow A$, где A – частично упорядоченное множество, называется *мерой некомпактности* в E , если $\chi(\overline{\text{co}}\Omega) = \chi(\Omega)$ для любого $\Omega \in 2^E$.

Мера некомпактности называется *монотонной*, если из $\Omega_0, \Omega_1 \in 2^E$, $\Omega_0 \subset \Omega_1$ следует $\chi(\Omega_0) \leq \chi(\Omega_1)$. Мера некомпактности называется *несингулярной*, если $\chi(\{a\} \cup \Omega) = \chi(\Omega)$ для любых $a \in E$, $\Omega \in 2^E$. Мера некомпактности называется *вещественной*, если $A = [0, +\infty)$. Вещественная мера некомпактности называется

- а) *правильной*, если $\chi(\Omega) = 0$ равносильно относительной компактности множества Ω ;
- б) *полуаддитивной*, если $\chi(\Omega_0 \cup \Omega_1) = \max\{\chi(\Omega_0); \chi(\Omega_1)\} \quad \forall \Omega_0, \Omega_1 \in 2^E$.

Распространенными примерами мер некомпактности, обладающих указанными выше свойствами, являются следующие меры: мера некомпактности Хаусдорфа $\beta(\Omega) = \inf \{ \varepsilon : \varepsilon > 0, \Omega \text{ имеет в } E \text{ конечную } \varepsilon\text{-сеть} \}$ и мера некомпактности Куратовского $\alpha(\Omega) = \inf \{ d : d > 0, \Omega \text{ допускает разбиение на конечное число множеств, диаметр которых меньше } d \}$.

Пусть A – подмножество в E , L – метрическое пространство.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.8. Полунепрерывное сверху m -отображение $F: X \rightarrow K(E)$ или полунепрерывное сверху семейство m -отображений $G: X \times L \rightarrow K(E)$ называются *уплотняющимися относительно меры некомпактности* χ , если, соответственно,

$$\chi(F(\Omega)) \not\geq \chi(\Omega), \quad \chi(G(\Omega \times L)) \not\geq \chi(\Omega)$$

для любого $\Omega \subset X$, $\overline{\Omega} \notin K(X)$.

Приведем пример уплотняющего m -отображения.

Пусть h – метрика Хаусдорфа в E , m -отображение $F_0: X \rightarrow K(E)$ называется *сжимающим*, если существует такое число k , $k \in [0, 1]$, что для любых $x, y \in X$ выполнено неравенство

$$h(F_0(x), F_0(y)) \leq k \|x - y\|.$$

Если m -отображение $F_0: X \rightarrow K(E)$ является сжимающим, а $F_1: X \rightarrow K(E)$ вполне непрерывным, то $F = F_0 + F_1$ является уплотняющим относительно меры некомпактности Хаусдорфа. Заметим также, что вполне непрерывные отображения являются уплотняющими. В дальнейшем *мера некомпактности* – это монотонная, несингулярная, вещественная, правильная, полуаддитивная мера некомпактности.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.9. Если $F: X \rightarrow K(E)$ – уплотняющее m -отображение и отображение $f: X \rightarrow E$ является непрерывным сечением F , то f также является уплотняющим отображением.

Пусть U – ограниченное открытое множество в E , $F: \overline{U} \rightarrow K_v(E)$ – уплотняющее m -отображение. *Уплотняющим многозначным векторным полем (мв-полем)*, порожденным F , назовем m -отображение $\Phi = i - F: \overline{U} \rightarrow K_v(E)$, определенное условием $\Phi(x) = x - F(x)$.

Будем говорить, что мв-поле Φ невырождено на ∂U , если $0 \notin \Phi(x) \quad \forall x \in \partial U$.

Множество всех уплотняющих невырожденных на ∂U мв-полей обозначим $\mathcal{M}(\overline{U}, \partial U)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.10. Мв-поля $\Phi_0, \Phi_1 \in \mathcal{M}(\overline{U}, \partial U)$ называются *гомотопными* ($\Phi_0 \sim \Phi_1$), если существует уплотняющее семейство $\Psi: U \times [0, 1] \rightarrow K_v(E)$ такое, что

- а) $\Phi_0(x) = x - \Psi(x, 0)$, $\Phi_1(x) = x - \Psi(x, 1)$ для любого $x \in \overline{U}$;
- б) $x \notin \Psi(x, \lambda)$ для любых $x \in \partial U$, $\lambda \in [0, 1]$.

Пусть $\mathbb{Z}$ – группа целых чисел. Существует отображение $\gamma: \mathcal{M}(\overline{U}, \partial U) \rightarrow \mathbb{Z}$, удовлетворяющее следующим условиям:

- 1) если $\gamma(\Phi, \overline{U}) \neq 0$, то существует точка $x_0 \in U$ такая, что $\Phi(x_0) \ni 0$;

2) если $\Phi(x) \ni x - x_0$ для любого $x \in \partial U$, то

$$\gamma(\Phi, \overline{U}) = \begin{cases} 1, & \text{если } x_0 \in U, \\ 0, & \text{если } x_0 \notin \overline{U}; \end{cases}$$

3) если $\Phi_0 \sim \Phi_1$, то $\gamma(\Phi_0, \overline{U}) = \gamma(\Phi_1, \overline{U})$;

4) если $\Phi_0(x) \subset \Phi_1(x)$ для любого $x \in \partial U$, то $\gamma(\Phi_0, \overline{U}) = \gamma(\Phi_1, \overline{U})$;

5) пусть $\{U_j\}_{j \in J}$ – семейство открытых непересекающихся подмножеств в U таких, что $\overline{U} = \bigcup_{j \in J} \overline{U}_j$; если $\Phi \in \mathcal{M}(\overline{U}_j, \partial U_j)$ для любого $j \in J$, то $\gamma(\Phi, \overline{U}_j) \neq 0$ лишь для конечного числа $j \in J$ и $\gamma(\Phi, \overline{U}) = \sum_{j \in J} \gamma(\Phi, \overline{U}_j)$.

Доказательство существования такого отображения γ и изучение его свойств содержится, например, в работах [3], [10].

Число $\gamma(\Phi, \overline{U})$ называется *вращением уплотняющего мв-поля Φ на границе области U* .

Доказательство этих и других свойств многозначных отображений можно найти в монографиях [3], [11]–[13].

§ 2. Топологическая размерность множества неподвижных точек многозначного отображения

Первой работой, посвященной вычислению топологической размерности множества неподвижных точек многозначных отображений, была статья [14]. Некоторые другие результаты в этом направлении были доказаны в [15]–[17].

В настоящем параграфе получены новые результаты, охватывающие большинство известных ранее. Дано приложение этих теорем к вычислению локальной размерности множества решений задачи Коши для дифференциального включения.

Пусть E – банахово пространство, U – ограниченное открытое множество в E , $F: \overline{U} \rightarrow \text{Kv}(E)$ – уплотняющее м-отображение, $\Phi = i - F \in \mathcal{M}(\overline{U}, \partial U)$. Обозначим $N(\Phi, \overline{U})$ множество неподвижных точек F , т.е.

$$N(\Phi, \overline{U}) = \{x \in U : x \in F(x)\} = \{x \in U : 0 \in \Phi(x)\}.$$

Нетрудно доказать, что множество $N(\Phi, \overline{U})$ является компактом в E . Изучим размерность ($\dim$) этого множества. Основные свойства размерности содержатся, например, в [18], [19].

Имеет место следующее утверждение, играющее важную роль в дальнейших конструкциях.

ЛЕММА 2.1. Пусть X – метрическое компактное пространство и пусть $\dim X \leq n - 1$. Если E – банахово пространство и $T: X \rightarrow \text{Kv}(E)$ – полунепрерывное снизу м-отображение, удовлетворяющее условиям:

- 1) $T(x) \ni 0 \quad \forall x \in X$;
- 2) $\dim T(x) \geq n \quad \forall x \in X$;

то существует однозначное непрерывное отображение $f: X \rightarrow E$ такое, что $0 \neq f(x) \in T(x)$ для любого $x \in X$.

Доказательство этой леммы содержится в [14].

Основываясь на этой лемме, докажем следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 2.2. Пусть $F: \bar{U} \rightarrow \text{Kv}(E)$ – уплотняющее m -отображение, причем $\Phi = i - F \in \mathcal{M}(\bar{U}, \partial U)$. Пусть выполнены следующие условия:

- а) $\gamma(\Phi, \bar{U}) \neq 0$;
- б) существуют открытая окрестность V , $N(\Phi, \bar{U}) \subset V \subset U$, и непрерывное снизу m -отображение $G: V \rightarrow \text{Kv}(E)$, $\dim G(x) \geq n$, $G(x) \subset F(x) \quad \forall x \in V$, $x \in G(x) \quad \forall x \in N(\Phi, \bar{U})$.

Тогда $\dim N(\Phi, \bar{U}) \geq n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное, тогда $\dim N(\Phi, U) \leq n-1$. Рассмотрим m -отображение $G_1 = i - G: V \rightarrow \text{Kv}(E)$. Сужение этого отображения $\hat{G}_1 = G_1|_{N(\Phi, \bar{U})}$ удовлетворяет условиям леммы 2.1. Следовательно, существует сечение $\hat{\varphi} = i - \hat{f}: N(\Phi, \bar{U}) \rightarrow E$, $0 \neq \hat{\varphi}(x) \in \hat{G}_1(x)$ для любого $x \in N(\Phi, \bar{U})$. В силу теоремы Майкла существует непрерывное сечение $\varphi: V \rightarrow E$, $\varphi(x) \in G_1(x)$ для любого $x \in V$, $\varphi|_{N(\Phi, \bar{U})} = \hat{\varphi}$. Очевидно, что $\varphi(x) \neq 0$ для любого $x \in V$, так как $G_1(x) \not\ni 0$, если $x \in V \setminus N(\Phi, \bar{U})$.

Для любого $x \in V$ имеем следующие включения:

$$\varphi(x) \in G_1(x) \subset \Phi(x).$$

Рассмотрим новое мв-поле $\Phi_1: \bar{U} \rightarrow \text{Kv}(E)$, определенное условием

$$\Phi_1(x) = \begin{cases} \varphi(x), & \text{если } x \in V, \\ \Phi(x), & \text{если } x \notin V. \end{cases}$$

Очевидно, что $0 \notin \Phi_1(x) \subset \Phi(x)$ для любого $x \in \bar{U}$ и Φ_1 является уплотняющим мв-полем. Тогда $\gamma(\Phi_1, \bar{U}) = \gamma(\Phi, \bar{U}) \neq 0$. Следовательно, должна существовать точка $x_0 \in U$ такая, что $\Phi_1(x_0) \ni 0$. Однако это противоречит построению m -отображения Φ_1 . Полученное противоречие и доказывает теорему.

СЛЕДСТВИЕ 2.3. Пусть $F: \bar{U} \rightarrow \text{Kv}(E)$ – непрерывное уплотняющее m -отображение. Если $\Phi = i - F \in \mathcal{M}(\bar{U}, \partial U)$, $\gamma(\Phi, \bar{U}) \neq 0$ и $\dim F(x) \geq n$ для любого $x \in U$, то $\dim N(\Phi, \bar{U}) \geq n$.

Доказательство вытекает из теоремы 2.2.

СЛЕДСТВИЕ 2.4. Пусть B – замкнутый шар в E , и пусть m -отображение $F: B \rightarrow \text{Kv}(E)$ удовлетворяет следующим условиям:

- 1) F является сжимающим m -отображением;
- 2) $x \notin F(x) \quad \forall x \in \partial B$;
- 3) $F(x) \cap B \neq \emptyset \quad \forall x \in \partial B$.

Если для любого $x \in \text{Int } B$ справедливо неравенство $\dim F(x) \geq n$, то $\dim N(i - F, B) \geq n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условия 1) вытекает, что F является уплотняющим m -отображением относительно меры некомпактности Хаусдорфа. Из условий 2), 3) вытекает, что определено вращение мв-поля $\Phi = i - F$ и $\gamma(\Phi, B) = 1$. Теперь утверждение вытекает из следствия 2.3.

Рассмотрим локальные свойства размерности множества $N(\Phi, \bar{U})$. Пусть U – ограниченная открытая область в E , $\Phi = i - F \in \mathcal{M}(\bar{U}, \partial U)$.

ЛЕММА 2.5. Пусть X – метрическое пространство, $F: X \rightarrow \text{Cv}(E)$ – полунепрерывное снизу m -отображение. Тогда для любой точки $x_0 \in X$ и любого числа $n \leq \dim(F(x_0))$ существует число $\varepsilon > 0$ такое, что для любой точки $x \in U_\varepsilon(x_0)$ выполнено неравенство $\dim F(x) \geq n$.

Доказательство вытекает из теоремы Майкла.

ТЕОРЕМА 2.6. Пусть $F: \bar{U} \rightarrow \text{Kv}(E)$ – непрерывное уплотняющее m -отображение, $x_0 \in U$ – неподвижная точка m -отображения F . Пусть существуют открытая окрестность $W \subset U$ точки x_0 и непрерывное сечение $f: W \rightarrow E$ m -отображения F такие, что

- 1) точка x_0 является единственной особой точкой уплотняющего поля $\varphi = i - f$,
- 2) $\text{ind}(\varphi, x_0) \neq 0$.

Тогда $\forall \varepsilon > 0$ выполнено неравенство $\dim N_{x_0, \varepsilon}(i - F, \bar{U}) \geq \dim F(x_0)$, где

$$N_{x_0, \varepsilon}(i - F, \bar{U}) = \{x \in N(i - F, \bar{U}) : \|x - x_0\| \leq \varepsilon\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как размерность $\dim(\cdot)$ является монотонной (см., например, [18]), то достаточно доказать это неравенство только для достаточно малых $\varepsilon > 0$.

Заметим, что в силу полунепрерывности снизу m -отображения F для любого числа $n \leq \dim(F(x_0))$ существуют число $\varepsilon_0 > 0$ и окрестность

$$U_{\varepsilon_0}(x_0) = \{x : \|x - x_0\| < \varepsilon_0\} \subset \overline{U_{\varepsilon_0}(x_0)} \subset W$$

такие, что для любого $x \in U_{\varepsilon_0}(x_0)$ выполнено неравенство $\dim F(x) \geq n$.

Рассмотрим ε , $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$. Пусть $V = U_{\varepsilon_0}(x_0)$, $\hat{F}: V \rightarrow \text{Kv}(E)$ определено условием

$$\hat{F}(x) = \begin{cases} F(x), & \text{если } \|x - x_0\| < \varepsilon, \\ \frac{\|x - x_0\| - \varepsilon}{\varepsilon_0 - \varepsilon} f(x) + \frac{\varepsilon_0 - \|x - x_0\|}{\varepsilon_0 - \varepsilon} F(x), & \text{если } \varepsilon \leq \|x - x_0\| \leq \varepsilon_0. \end{cases}$$

Очевидно, что $\hat{F}(x) \subset F(x)$ для любого $x \in V$, $\hat{F}$ – непрерывное уплотняющее m -отображение и выполнено включение

$$N(i - \hat{F}, \bar{V}) \subset N(i - F, \bar{V}) = N_{x_0, \varepsilon_0}(i - F, \bar{U}).$$

Заметим также, что $\dim \hat{F}(x) = \dim F(x) \quad \forall x \in V$. Так как $\hat{F}(x) = f(x) \neq x \quad \forall x \in \partial V$, то выполнены все условия следствия 2.3. Следовательно,

$$\dim N_{x_0, \varepsilon_0}(i - F, \bar{U}) \geq \dim N(i - \hat{F}, \bar{V}) \geq n,$$

что и доказывает теорему, так как n было выбрано произвольно.

СЛЕДСТВИЕ 2.7. Пусть F – непрерывное уплотняющее m -отображение, и пусть существует такая открытая окрестность W точки $x_0 \in N(i - F, \overline{U})$, $W \subset U$, что для любого $x \in W$ точка x_0 принадлежит $F(x)$. Тогда

$$\dim N_{x_0, \varepsilon}(i - F, \overline{U}) \geq \dim F(x_0)$$

для любого $\varepsilon > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В качестве сечения f возьмем отображение $f: W \rightarrow E$, $f(x) = x_0$. Очевидно, что x_0 – единственная неподвижная точка f и $\text{ind}(i - f, x_0) = 1$. Теперь справедливость этого утверждения вытекает из теоремы 2.6.

Пусть $\Phi = i - F: \overline{U} \rightarrow \text{Kv}(E)$ – непрерывное уплотняющее мв-поле и пусть $x_0 \in N(\Phi, \overline{U}) \subset U$.

Рассмотрим функцию $\beta(x) = \rho(x_0, F(x))$.

ТЕОРЕМА 2.8. Если существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что для любого $x \in U$, $\|x - x_0\| < \varepsilon_0$, справедливо неравенство

$$\beta(x) \leq k\|x - x_0\|,$$

где $k \in [0, 1)$, то $\dim N_{x_0, \varepsilon}(\Phi, \overline{U}) \geq \dim F(x_0)$ для любого $\varepsilon > 0$.

Для доказательства этой теоремы нам понадобится следующая лемма.

ЛЕММА 2.9. Пусть выполнены условия теоремы 2.8. Тогда для любого числа k_1 , $k < k_1 < 1$, существует непрерывное отображение $f: U_{\varepsilon_0}(x_0) \rightarrow E$, удовлетворяющее условиям:

- а) f является непрерывным сечением F ;
- б) $\|x_0 - f(x)\| \leq k_1\|x - x_0\| \quad \forall x \in U_{\varepsilon_0}(x_0)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть число k_1 удовлетворяет неравенству $k < k_1 < 1$. Рассмотрим число λ , $0 < \lambda < (k_1 - k)/k$, и функцию $\alpha(x) = (1 + \lambda)\beta(x)$, где $\beta(x) = \rho(x_0, F(x))$. Тогда определено m -отображение $F_1: U_{\varepsilon_0}(x_0) \rightarrow \text{Kv}(E)$,

$$F_1(x) = F(x) \cap B[x_0, \alpha(x)] = \{y \in F(x) : \|y - x_0\| \leq \alpha(x)\}.$$

Очевидно, что $F_1(x) \neq \emptyset$ для любого x и является выпуклым замкнутым множеством. Нетрудно доказать также, что m -отображение F_1 является полунепрерывным снизу. Следовательно, у m -отображения F_1 существует непрерывное сечение f .

Тогда для любого $x \in U_{\varepsilon_0}(x_0)$ справедливо

$$\|x_0 - f(x)\| \leq \alpha(x) \leq \left(1 + \frac{k_1 - k}{k}\right) \rho(x_0, F(x)) \leq k_1\|x - x_0\|.$$

Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.8. Для доказательства достаточно проверить выполнение условий теоремы 2.6, где f удовлетворяет условиям леммы 2.9.

Очевидно, что $\varphi(x) = x - f(x) \neq 0$ для любого $x \neq x_0$, а $\varphi(x_0) = 0$. Причем $\|\varphi(x)\| \geq (1 - k_1)\|x - x_0\|$ для любого x . Заметим, что $\text{ind}(\varphi, x_0) = 1$, так как $f: B[x_0, \varepsilon] \rightarrow B[x_0, \varepsilon]$. Следовательно, все условия теоремы 2.6 выполнены, что и доказывает теорему 2.8.

СЛЕДСТВИЕ 2.10. Пусть мв-поле $\Phi = i - F: \bar{U} \rightarrow \text{Kv}(E)$ невырождено на ∂U и удовлетворяет следующим условиям:

- а) $N(\Phi, \bar{U}) \neq \emptyset$;
- б) F является сжимающим, т.е. для любых $x, y \in \bar{U}$ выполнено неравенство

$$h(F(x), F(y)) \leq k\|x - y\|, \quad k \in [0, 1).$$

Тогда для любой точки $x_0 \in N(\Phi, \bar{U})$ и любого числа $\varepsilon > 0$ имеем

$$\dim N_{x_0, \varepsilon}(\Phi, \bar{U}) \geq \dim F(x_0).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x_0 \in N(\Phi, \bar{U})$, т.е. x_0 – неподвижная точка м-отображения F . Для любого $x \in \bar{U}$ имеет место следующее неравенство:

$$\rho(x_0, F(x)) \leq h(F(x_0), F(x)) \leq k\|x - x_0\|.$$

Так как поле Φ является непрерывным и уплотняющим, то справедливость этого утверждения вытекает из теоремы 2.8.

Применим доказанные в этом параграфе теоремы для изучения локальной размерности множества решений задачи Коши для одного класса дифференциальных вclusions. Глобальная размерность этого множества изучалась в работе [16].

Пусть G – открытая область в $\mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^n$ такая, что $[t_0, t_0 + h] \times B[x_0, r] \subset G$. Пусть $F: G \rightarrow \text{Kv}(\mathbb{R}^n)$ – м-отображение, удовлетворяющее следующим условиям:

- (1) $F(t, \cdot): B[x_0, r] \rightarrow \text{Kv}(\mathbb{R}^n)$ является липшицевым с константой α для почти всех $t \in [t_0, t_0 + h]$;
- (2) $F(\cdot, x): [t_0, t_0 + h] \rightarrow \text{Kv}(\mathbb{R}^n)$ является измеримым для всех $x \in B[x_0, r]$;
- (3) существуют интегрируемые по Лебегу функции $a, b: [t_0, t_0 + h] \rightarrow \mathbb{R}^1$ такие, что для любого $x \in B[x_0, r]$ выполнено неравенство

$$\max_{y \in F(t, x)} \|y\| \leq a(t) + b(t)\|x\|$$

для почти всех $t \in [t_0, t_0 + h]$.

Рассмотрим следующую задачу:

$$\dot{x} \in F(t, x), \quad x(t_0) = x_0.$$

Решением этой задачи на промежутке $[t_0, t_0 + d]$, $0 < d \leq h$, назовем абсолютно непрерывную функцию $x: [t_0, t_0 + d] \rightarrow \mathbb{R}^n$ такую, что $\dot{x}(t) \in F(t, x(t))$ почти всюду.

Обозначим $\Sigma([t_0, t_0 + d], x_0)$ множество решений этой задачи на $[t_0, t_0 + d]$. Известно (см., например, [20]), что $\Sigma([t_0, t_0 + d], x_0)$ является непустым множеством для достаточно малых d .

Пусть $U \subset C_{[t_0, t_0 + d]}$ открытый шар,

$$U = \{x = x(\cdot) : x \in C_{[t_0, t_0 + d]}, \|x_0 - x(\cdot)\| < r\}.$$

Рассмотрим м-отображения (интегральные операторы)

$$\mathcal{P}_F(x) = \{y = y(\cdot) \in L^1_{[t_0, t_0 + d]} : y(t) \in F(t, x(t)) \text{ при почти всех } t \in [t_0, t_0 + d]\},$$

$$\Phi(x)(t) = \left\{ x_0 + \int_{t_0}^t y(\tau) d\tau : y(\cdot) \in \mathcal{P}_F(x) \right\}.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.11. *М-отображение Φ на $\overline{U}$ удовлетворяет следующим условиям:*

- а) $\Phi(x) \neq \emptyset$ для любого x ;
- б) $\Phi(x) \in \text{Kv}(C_{[t_0, t_0+d]})$;
- в) Φ — вполне непрерывное м-отображение;
- г) м-отображение Φ является липшицевым;
- д) функция $x = x(\cdot) \in \overline{U}$ является неподвижной точкой м-отображения Φ тогда и только тогда, когда она является решением задачи Коши и $\|x_0 - x(\cdot)\| \leq r$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО пп. а)–в), д) хорошо известно и содержится, например, в работах [13], [20].

Докажем п. г). По определению метрики Хаусдорфа имеем

$$h(\Phi(x), \Phi(y)) = \inf \{ \varepsilon : \Phi(x) \subset U_\varepsilon(\Phi(y)), \Phi(y) \subset U_\varepsilon(\Phi(x)) \}.$$

Рассмотрим $\varepsilon > \alpha d \|x - y\|$, где α — константа Липшица для F , x и y — произвольные функции из $\overline{U}$.

Пусть $z \in \Phi(x)$, тогда $z(t) = x_0 + \int_{t_0}^t \hat{x}(\tau) d\tau$, $\hat{x}(\tau) \in F(\tau, x(\tau))$ при почти всех $\tau \in [t_0, t_0 + d]$.

В силу липшицевости по второму переменному м-отображения F имеем включение

$$\hat{x}(\tau) \in F(\tau, x(\tau)) \subset U_\beta(F(\tau, y(\tau)))$$

для любого β , $\beta > \alpha \|x - y\|$. Рассмотрим измеримое м-отображение $\Psi_\beta(\tau) = B[x(\tau), \beta] \cap F(\tau, y(\tau))$. Тогда существует измеримое сечение $\hat{y}_\beta(\tau) \in \Psi_\beta(\tau)$ на $[t_0, t_0 + d]$. Это сечение существует в силу теоремы об измеримом выборе (см., например, [21]).

Имеем $\hat{y}_\beta(\tau) \in F(\tau, y(\tau))$, $\|\hat{y}_\beta(\tau) - \hat{x}(\tau)\| \leq \beta$ для почти всех $\tau \in [t_0, t_0 + d]$.

Тогда если $v_\beta(t) = x_0 + \int_{t_0}^t \hat{y}_\beta(\tau) d\tau$, то

$$\|z - v_\beta\| = \left\| \int_{t_0}^t (\hat{x}(\tau) - \hat{y}_\beta(\tau)) d\tau \right\| \leq \int_{t_0}^t \|\hat{x}(\tau) - \hat{y}_\beta(\tau)\| d\tau \leq \beta d.$$

Если выполнено неравенство $\alpha \|x - y\| < \beta < \varepsilon/d$, то $\|z - v_\beta\| < \varepsilon$. Тогда $\Phi(\varepsilon) \subset U_\varepsilon(\Phi(y))$.

Аналогично можно доказать, что $\Phi(y) \subset U_\varepsilon(\Phi(x))$. Тогда $h(\Phi(x), \Phi(y)) < \varepsilon$ для любого $\varepsilon > \alpha d \|x - y\|$. Следовательно, $h(\Phi(x), \Phi(y)) \leq \alpha d \|x - y\|$.

ЛЕММА 2.12. Пусть $F: [a, b] \rightarrow \text{Kv}(\mathbb{R}^n)$ — измеримое м-отображение, и пусть существует измеримое множество $A \subset [a, b]$ такое, что $\dim F(t) \geq 1$ для любого $t \in A$. Если $\mu(A) > 0$, то для любого целого положительного числа m существуют измеримые сечения $\{x_i(\cdot)\}_{i=1}^m$ м-отображения F , линейно независимые на $[a, b]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу свойства Скорца–Драгони измеримого m -отображения (см., например, [11]) для любого $\delta > 0$ существует компактное подмножество $D \subset [a, b]$ такое, что $\mu([a, b] \setminus D) < \delta$ и F является полунепрерывным снизу m -отображением на множестве D .

Рассмотрим m -отображение $\widehat{F}: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}v(\mathbb{R}^n)$,

$$\widehat{F}(t) = \begin{cases} F(t) & \text{для } t \in D, \\ \mathbb{R}^n & \text{для } t \notin D. \end{cases}$$

Так как множество $[a, b] \setminus D$ открыто, то $\widehat{F}$ является полунепрерывным снизу m -отображением.

Известно (см., например, [22]), что почти все точки произвольного измеримого множества A являются точками плотности, т.е.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mu(A \cap [x_0 - h, x_0 + h])}{2h} = 1 \quad \text{для почти всех } x_0 \in A.$$

Пусть δ удовлетворяет неравенству $0 < \delta < \mu(A)$. Тогда $\mu(A \cap D) > 0$. Пусть $\{t_i\}_{i=1}^m \subset (A \cap D)$ являются точками плотности этого множества. Тогда существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что

$$\begin{aligned} \mu[(t_i - \varepsilon_0, t_i + \varepsilon_0) \cap A \cap D] &> 0, \quad i = 1, 2, \dots, m, \\ [t_i - \varepsilon_0, t_i + \varepsilon_0] \cap [t_j - \varepsilon_0, t_j + \varepsilon_0] &= \emptyset, \quad i \neq j. \end{aligned}$$

Пусть g_0 – непрерывное сечение m -отображения $\widehat{F}$, которое существует в силу теоремы Майкла. Это отображение в точках $\{t_i\}_{i=1}^m$ принимает следующие значения: $g_0(t_1), g_0(t_2), g_0(t_3), \dots, g_0(t_m)$. Для любого $k = 1, 2, \dots, m$ обозначим через g_k непрерывное сечение $\widehat{F}$ такое, что $g_k(t_k) \neq g_0(t_k)$, $g_k(t_k) \neq 0$ и

$$g_k|_{[a, b] \setminus (t_k - \varepsilon_0, t_k + \varepsilon_0)} = g_0|_{[a, b] \setminus (t_k - \varepsilon_0, t_k + \varepsilon_0)}.$$

Такие сечения всегда существуют, так как $\dim \widehat{F}(t_k) = \dim F(t_k) \geq 1$. Очевидно, что в пространстве непрерывных функций эти отображения $\{g_i(\cdot)\}_{i=1}^m$ линейно независимы.

Так как $\mu[(t_i - \varepsilon_0, t_i + \varepsilon_0) \cap A \cap D] > 0$, $i = 1, 2, \dots, m$, то $\{g_i|_D\}_{i=1}^m$ также являются линейно независимыми. Причем $\{g_i|_D\}_{i=1}^m$ являются сечениями m -отображения $F|_D$.

Рассмотрим произвольное измеримое сечение $z: [a, b] \setminus D \rightarrow \mathbb{R}^n$ m -отображения $F|_{[a, b] \setminus D}$. Тогда определены отображения

$$x_i(t) = \begin{cases} g_i(t) & \text{для } t \in D, \\ z(t) & \text{для } t \in [a, b] \setminus D. \end{cases}$$

Очевидно, что $\{x_i(\cdot)\}_{i=1}^m$ образуют линейно независимое семейство измеримых сечений m -отображения F .

ТЕОРЕМА 2.13. Пусть F удовлетворяет условиям (1)–(3). Пусть множество

$$A = \{t \in [t_0, t_0 + h] : \dim F(t, x) \geq 1 \ \forall x \in B[x_0, r]\}$$

измеримо и

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\mu(A \cap [t_0, t_0 + \tau])}{\tau} > 0.$$

Тогда существует такое число $\beta_0 > 0$, что для любого β , $0 < \beta \leq \beta_0$, множество $\Sigma = \Sigma([t_0, t_0 + \beta], x_0)$ непусто, причем для любого $\varepsilon > 0$ и любого решения $y \in \Sigma$ справедливо равенство $\dim \Sigma_{y, \varepsilon} = \infty$, где

$$\Sigma_{y, \varepsilon} = \{z \in \Sigma : \|z - y\| < \varepsilon\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим $\hat{a}(t) = \int_{t_0}^t a(\tau) d\tau$ и $\hat{b}(t) = \int_{t_0}^t b(\tau) d\tau$. Это непрерывные, неотрицательные, монотонно возрастающие функции и $\hat{a}(t_0) = \hat{b}(t_0) = 0$. Выберем $\beta_1 > 0$ столь малым, что

$$\frac{\hat{a}(t_0 + \beta_1)}{1 - \hat{b}(t_0 + \beta_1)} < r.$$

Пусть $U \subset C_{[t_0, t_0 + \beta]}$ – множество, определенное условием

$$U = \{x = x(\cdot) : \|x_0 - x(\cdot)\| < r\}, \quad 0 < \beta \leq \beta_1.$$

Рассмотрим интегральный оператор $\Phi_t: \overline{U} \rightarrow \text{Kv}(C_{[t_0, t_0 + \beta]})$. Если $z(\cdot) \in \Phi(x)$, то $z(t) = x_0 + \int_{t_0}^t y(\tau) d\tau$, где $y(\tau) \in F(\tau, x(\tau))$ при почти всех $\tau \in [t_0, t_0 + \beta]$. Тогда

$$\|z - x_0\| \leq \int_{t_0}^{t_0 + \beta_1} a(\tau) d\tau + r \int_{t_0}^{t_0 + \beta_1} b(\tau) d\tau < r.$$

Следовательно, $\Phi: \overline{U} \rightarrow \text{Kv}(U)$ и не имеет неподвижных точек на ∂U .

Выберем $\beta_2 > 0$ столь малым, чтобы $\alpha \cdot \beta_2 < 1$, где α – константа Липшица м-отображения F по второму аргументу. Так как

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\mu(A \cap [t_0, t_0 + \tau])}{\tau} > 0,$$

то существует такое число $\beta_3 > 0$, что $\mu(A \cap [t_0, t_0 + \beta]) > 0$ для любого $0 < \beta \leq \beta_3$.

Пусть $\beta_0 = \min\{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$, $0 < \beta \leq \beta_0$. Тогда $\Phi: \overline{U} \rightarrow \text{Kv}(U)$ является вполне непрерывным сжимающим м-отображением.

Покажем, что $\dim \Phi(x) \geq m$ для любого натурального числа m . Для этого в силу выпуклости множества $\Phi(x)$ достаточно доказать существование $m + 1$ линейно независимой точки $z_0(\cdot), \dots, z_m(\cdot) \in \Phi(x)$.

Так как в силу леммы 2.12 м-отображение

$$F_x(\cdot) = F(\cdot, x(\cdot)): [t_0, t_0 + \beta] \rightarrow \text{Kv}(\mathbb{R}^n)$$

имеет $(m + 1)$ линейно независимое сечение $\{y_i(\cdot)\}_{i=0}^m$, то

$$z_i(t) = x_0 + \int_{t_0}^t y_i(\tau) d\tau, \quad i = 0, 1, \dots, m,$$

лежат в образе $\Phi(x)$ и являются линейно независимыми.

Тогда в силу следствия 2.10 имеем

$$\dim N_{y,\varepsilon}(i - \Phi, \overline{U}) = \dim \Sigma_{y,\varepsilon} \geq \dim \Phi(y) \geq m$$

для любого m . Следовательно, $\dim \Sigma_{y,\varepsilon} = \infty$, что и требовалось доказать.

§ 3. Связность множества неподвижных точек многозначных отображений

В 1959 году Красносельский и Перов для однозначных вполне непрерывных отображений доказали принцип связности [23], который нашел широкое применение при изучении структуры множества решений различных классов уравнений. Этот принцип является операторным обобщением теоремы Кнезера о связности интегральной воронки.

В настоящей работе доказывается обобщение принципа связности Красносельского–Перова на случай многозначных отображений. Это обобщение является новым даже в случае однозначных отображений. Первоначальный вариант этого обобщения был опубликован в работе автора [15].

Пусть E – банахово пространство, U – ограниченное открытое множество в E , $F: \overline{U} \rightarrow \text{Kv}(E)$ – вполне непрерывное m -отображение без неподвижных точек на ∂U .

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть $F: \overline{U} \rightarrow \text{Kv}(E)$ – вполне непрерывное m -отображение без неподвижных точек на ∂U . Пусть $\gamma(i - F, \overline{U}) \neq 0$. Если для любого $\varepsilon > 0$ и любой точки $x_1 \in N(i - F, \overline{U})$ существует однозначное вполне непрерывное отображение $f_{\varepsilon, x_1}: \overline{U} \rightarrow E$ такое, что

- 1) множество $X_{\varepsilon, x_1} = \{x \in \overline{U} : x \in \lambda F(x) + (1 - \lambda)f_{\varepsilon, x_1}(x), \lambda \in [0, 1]\}$ принадлежит ε -окрестности множества $N(i - F, \overline{U})$,
- 2) отображение f_{ε, x_1} имеет связное множество неподвижных точек N_{ε, x_1} ,
- 3) существует точка $y \in N_{\varepsilon, x_1}$ такая, что $\|y - x_1\| \leq \varepsilon$,

тогда множество $N(i - F, \overline{U})$ непусто и связно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Непустота множества $N = N(i - F, \overline{U})$ вытекает из свойств вращения вполне непрерывных многозначных векторных полей. Докажем связность этого множества. Для этого предположим противное. Тогда множество N можно представить в виде объединения двух непустых непересекающихся замкнутых множеств N_0 и N_1 , т.е. $N = \overline{N_0} \cup \overline{N_1}$, $\overline{N_0} \cap \overline{N_1} = \emptyset$.

Пусть $\varepsilon > 0$ такое число, что $\overline{U_\varepsilon(N_0)} \cap \overline{U_\varepsilon(N_1)} = \emptyset$, $U \supset (\overline{U_\varepsilon(N_0)} \cup \overline{U_\varepsilon(N_1)})$. В силу свойств вращения многозначных векторных полей

$$\gamma(i - F, \overline{U}) = \gamma(i - F, \overline{U_\varepsilon(N_0)}) + \gamma(i - F, \overline{U_\varepsilon(N_1)}).$$

Следовательно, одно из чисел $\gamma_0 = \gamma(i - F, \overline{U_\varepsilon(N_0)})$ и $\gamma_1 = \gamma(i - F, \overline{U_\varepsilon(N_1)})$ отлично от нуля. Пусть для определенности $\gamma_0 \neq 0$. Рассмотрим произвольную точку $x_1 \in N_1$ и отображение f_{ε, x_1} , удовлетворяющее условиям теоремы. Поля $i - F$ и $i - f_{\varepsilon, x_1}$ линейно гомотопны на границе области $U_\varepsilon(N_0)$, так как особые точки этой гомотопии X_{ε, x_1} лежат в $U_\varepsilon(N) = U_\varepsilon(N_0) \cup U_\varepsilon(N_1)$. Тогда

$$\gamma(i - F, \overline{U_\varepsilon(N_0)}) = \gamma(i - f_{\varepsilon, x_1}, \overline{U_\varepsilon(N_0)}) \neq 0,$$

т.е. отображение f_{ε, x_1} имеет в $U_\varepsilon(N_0)$ неподвижную точку. Следовательно, $N_{\varepsilon, x_1} \cap U_\varepsilon(N_0) \neq \emptyset$. По условию теоремы известно, что $N_{\varepsilon, x_1} \cap U_\varepsilon(N_1) \neq \emptyset$. Так как $N_{\varepsilon, x_1} \subset X_{\varepsilon, x_1} \subset (U_\varepsilon(N_0) \cup U_\varepsilon(N_1))$, то получаем, что множество N_{ε, x_1} является несвязным. Полученное противоречие и доказывает теорему.

СЛЕДСТВИЕ 3.2. Пусть $F: \overline{U} \rightarrow K_V(E)$ – вполне непрерывное m -отображение без неподвижных точек на ∂U . Пусть $\gamma(i - F, \partial U) \neq 0$. Если для любого $\delta > 0$ и любой точки $x_1 \in N(i - F, \overline{U})$ существует однозначное вполне непрерывное отображение $f_{\delta, x_1}: \overline{U} \rightarrow E$ такое, что

- 1) f_{δ, x_1} является δ -аппроксимацией m -отображения F ,
- 2) отображение f_{δ, x_1} имеет связное множество неподвижных точек N_{δ, x_1} ,
- 3) существует точка $y \in N_{\delta, x_1}$ такая, что $\|y - x_1\| \leq \delta$,

тогда множество $N(i - F, \overline{U})$ непусто и связно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что для любого $\varepsilon > 0$ можно найти такое $\delta > 0$, что отображение f_{δ, x_1} будет удовлетворять условиям теоремы 3.1.

Пусть ε – произвольное число больше нуля. Тогда рассмотрим множество $A = \overline{U} \setminus U_\varepsilon(N)$. Это замкнутое множество и $x \notin F(x)$ для любого $x \in A$. В силу свойств вполне непрерывных m -отображений (см., например, [3]) существует такое число $\delta_0 > 0$, что $\rho(x, F(x)) \geq \delta_0$ для любого $x \in A$. Рассмотрим $\delta > 0$, удовлетворяющее неравенству $\delta < \min(\varepsilon, \delta_0/2)$. Нетрудно доказать, что отображение f_{δ, x_1} , построенное с помощью такого δ , будет удовлетворять условиям теоремы 3.1.

Заметим также, что даже в случае однозначных отображений следствие 3.2 является новым. Оно определяет необходимые и достаточные условия связности.

ТЕОРЕМА 3.3. Пусть $f: \overline{U} \rightarrow E$ – вполне непрерывное отображение без неподвижных точек на ∂U . Пусть $\gamma(i - f, \overline{U}) \neq 0$. Для того чтобы множество $N(i - f, \overline{U})$ неподвижных точек f было связным, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:

- 1) для любого $\delta > 0$ и любой точки $x_1 \in N(i - f, \overline{U})$ существовало вполне непрерывное отображение $f_{\delta, x_1}: \overline{U} \rightarrow E$ такое, что для любого $x \in \overline{U}$ $\|f(x) - f_{\delta, x_1}(x)\| \leq \delta$;
- 2) отображение f_{δ, x_1} имеет связное множество неподвижных точек N_{δ, x_1} ;
- 3) существует точка $y \in N_{\delta, x_1}$ такая, что $\|y - x_1\| \leq \delta$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость получается, если в качестве f_{δ, x_1} взять само отображение f . Достаточность вытекает из следствия 3.2.

В качестве приложения этих теорем докажем связность множества неподвижных точек для одного класса m -отображений.

Пусть U — ограниченное открытое множество в банаховом пространстве E , m -отображение $F: \overline{U} \rightarrow K_v(E)$ называется *липицевым*, если существует $k \geq 0$ такое, что для любых $x_1, x_2 \in \overline{U}$ выполнено неравенство

$$h(F(x_1), F(x_2)) \leq k \|x_1 - x_2\|,$$

где h — метрика Хаусдорфа.

ЛЕММА 3.4. Пусть F — сжимающее m -отображение (т.е. *липицево* и $k < 1$). Если $N(i - F, \overline{U}) \neq \emptyset$, то для любой точки $x_0 \in N(i - F, \overline{U})$ и любого k_1 , $k < k_1 < 1$, найдется непрерывное отображение $f_{x_0}: \overline{U} \rightarrow E$, удовлетворяющее условиям:

- 1) $f_{x_0}(x) \in F(x) \quad \forall x \in \overline{U}$;
- 2) $\|x_0 - f_{x_0}(x)\| \leq k_1 \|x - x_0\| \quad \forall x \in \overline{U}$.

Доказательство этой леммы проводится аналогично доказательству леммы 2.9.

ТЕОРЕМА 3.5. Пусть $F: \overline{U} \rightarrow K_v(E)$ — вполне непрерывное m -отображение без неподвижных точек на ∂U . Пусть F удовлетворяет следующим условиям:

- 1) $\gamma(i - F, \overline{U}) \neq 0$;
- 2) F является *нерастягивающим* m -отображением, т.е.

$$h(F(x), F(y)) \leq \|x - y\|$$

для любых $x, y \in \overline{U}$.

Тогда множество $N(i - F, \overline{U})$ непусто и связно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Непустота множества $N(i - F, \overline{U})$ вытекает из свойств вращения многозначных векторных полей. Покажем, что выполнены условия следствия 3.2.

Пусть x_1 произвольная точка из множества $N(i - F, \overline{U})$. Рассмотрим m -отображение $F_\lambda(x) = (1 - \lambda)F(x) + \lambda x_1$, где $\lambda \in (0, 1)$. Очевидно, что $F_\lambda(x)$ является вполне непрерывным m -отображением, $x_1 \in F_\lambda(x_1)$ и F_λ является многозначным сжимающим отображением. Действительно,

$$h(F_\lambda(x), F_\lambda(y)) = h((1 - \lambda)F(x), (1 - \lambda)F(y)) \leq (1 - \lambda)\|x - y\|.$$

В силу леммы 3.4 существует вполне непрерывное однозначное отображение $f_{x_1}: \overline{U} \rightarrow E$, $f_{x_1}(x) \in F_\lambda(x)$ для любого $x \in \overline{U}$, и x_1 — единственная неподвижная точка этого отображения. Заметим, что

$$f_{x_1}(x) \in F_\lambda(x) \subset U_{\lambda_1}(F(x)) + U_{\lambda\|x_1\|}(0) \subset U_{\lambda_1 + \lambda\|x_1\|}(F(x)),$$

где $\lambda_1 = \lambda(1 + N)$, $N = \max_{y \in F(\overline{U})} \|y\|$. Таким образом,

$$f_{x_1}(x) \in U_{\lambda(N + \|x_1\| + 1)}(F(x)).$$

Пусть $\varepsilon > 0$ – произвольное число, выберем λ столь малым, что

$$0 < \lambda < \frac{\varepsilon}{N + \|x_1\| + 1}.$$

Тогда отображение f_{x_1} , построенное по этому λ , является ε -аппроксимацией м-отображения F и удовлетворяет условиям следствия 3.2.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.6. В работе [24] приведен следующий пример нерастягивающего м-отображения F .

Пусть $E = \mathbb{R}^2$ с нормой $\|x\| = |x_1| + |x_2|$, $x = (x_1, x_2)$. Пусть $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \text{Kv}(\mathbb{R}^2)$ по следующему правилу:

$$F(x) = \begin{cases} \{(y_1, y_2) : y_1 = x_1 + 1 - |x_2|, |y_2| \leq 1\}, & \text{если } |x_2| \leq 1, \\ \{(y_1, y_2) : y_1 = x_1, |y_2| \leq 1\}, & \text{если } |x_2| > 1. \end{cases}$$

Множество $N(i - F, \mathbb{R}^2)$ является несвязным, оно состоит из двух параллельных прямых $x_2 = -1$ и $x_2 = 1$.

Этот пример показывает, что условие $\gamma(i - F, \overline{U}) \neq 0$ является необходимым для связности множества $N(i - F, \overline{U})$.

§ 4. Ацикличность множества неподвижных точек многозначных отображений

В 1942 году Ароншайн [25] доказал, что интегральная воронка обыкновенного дифференциального уравнения является ациклическим множеством в пространстве непрерывных функций. Этот результат был обобщен в работе [26] на случай дифференциальных включений. В дальнейшем ацикличность интегральной воронки была доказана для различных классов дифференциальных включений (см., например, [7], [27]).

В настоящем параграфе предлагается некоторая общая схема доказательства таких теорем. В качестве приложения устанавливается ацикличность множества решений интегрального включения Вольтерра.

Пусть X – метрическое пространство, $H^n(X, G)$ – когомологии Александера–Чеха пространства X с коэффициентами в группе G .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1. Будем говорить, что пространство X является G -*ациклическим*, если приведенные когомологии $H^n(X, G) = 0$ для любого $n \geq 0$.

В дальнейшем будем опускать G и говорить просто об ацикличности, считая группу G фиксированной.

Ацикличность X означает, что это множество устроено достаточно просто, в нем отсутствуют “дыры”.

Пусть E – банахово пространство, U – ограниченное открытое множество в E , $F: \overline{U} \rightarrow K(E)$ – вполне непрерывное м-отображение. Множество неподвижных точек м-отображения F обозначим $N = N(i - F, \overline{U})$. Нас будут интересовать условия, при которых множество N является ациклическим.

Справедливо следующее утверждение.

ЛЕММА 4.2. Пусть X – метрическое пространство, A – компактное подмножество в X . Пусть существует последовательность полунепрерывных сверху m -отображений $\{F_n\}$, $F_n: [0, 1] \times A \rightarrow K(X)$, удовлетворяющих условиям:

- 1) множество $F_n(\lambda, x)$ является ациклическим для любых $(\lambda, x) \in [0, 1] \times A$ и любого n ;
- 2) для всякого $\varepsilon > 0$ существует номер n_0 такой, что для любого $n \geq n_0$ множество $F_n([0, 1] \times A) \subset U_\varepsilon(A)$;
- 3) для любых $x \in A$, $n \in \mathbb{N}$ выполнено включение $x \in F_n(0, x)$;
- 4) для любого n существует точка $a_n \in X$ такая, что $a_n \in F_n(1, x)$ для всех $x \in A$.

Тогда множество A является ациклическим.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть ε – произвольное положительное число, $F_n([0, 1] \times A) \subset U_\varepsilon(A)$. Пусть отображения $i_n, j_n: A \rightarrow X$ определены соотношениями: $i_n(x) = x$, $j_n(x) = a_n$. Обозначим отрезок $[0, 1] = I$, тогда имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccccc}
 & & U_\varepsilon(A) & & \\
 & r_0 \nearrow & \uparrow r & \nwarrow r_1 & \\
 \Gamma_A(i_n) & \xrightarrow{\hat{\alpha}_0} & \Gamma_{I \times A}(F_n) & \xleftarrow{\hat{\alpha}_1} & \Gamma_A(j_n) \\
 \downarrow t_0 & & \downarrow t & & \downarrow t_1 \\
 A & \xrightarrow{\alpha_0} & I \times A & \xleftarrow{\alpha_1} & A
 \end{array} \quad ,$$

где $\alpha_0(x) = (0, x)$; $\alpha_1(x) = (1, x)$; t_0, t, t_1 – проекции из графиков на области определений; r_0, r, r_1 – проекции из графиков на области значений; $\hat{\alpha}_0$ и $\hat{\alpha}_1$ – соответствующие вложения. Переходя к индуцированной диаграмме в приведенных когомологиях, замечаем, что гомоморфизмы $\alpha_0^*, \alpha_1^*, t_0^*, t_1^*$ являются изоморфизмами, t^* – изоморфизм в силу теоремы Виеториса (см. [28]). Тогда гомоморфизмы $\hat{\alpha}_0^*$ и $\hat{\alpha}_1^*$ также являются изоморфизмами. Следовательно, $r_0^* = \hat{\alpha}_0^* \circ (\hat{\alpha}_1^*)^{-1} \circ r_1^*$. Так как гомоморфизм r_1^* может быть представлен в виде $\hat{r}_1^* \circ i^*$, где

$$\Gamma_A(j_n) \xrightarrow{\hat{r}_1} a_n \xrightarrow{i} U_\varepsilon(A),$$

то r_1^* является нулевым гомоморфизмом. Следовательно, $r_0^* = 0$. Таким образом, вложение $i_n: A \rightarrow U_\varepsilon(A)$ индуцирует нулевой гомоморфизм для любого $\varepsilon > 0$. Так как в силу жесткости теории когомологий Александера–Чеха (см., например, [29])

$$\varinjlim \overline{H}^k(U_\varepsilon(A), G) = \overline{H}^k(A, G),$$

то $\overline{H}^k(A, G) = 0$ для любого $k \geq 0$. Лемма доказана.

Рассмотрим следующую задачу. Пусть E_1, E_2 – банаховы пространства, X – замкнутое подмножество в E_1 , $f: X \rightarrow E_2$ – однозначное непрерывное собственное

отображение (т.е. прообраз компакта есть компакт), $F: X \rightarrow K(E_2)$ – полунепрерывное сверху м-отображение такое, что $F(X) = K$ – компакт в E_2 . Рассмотрим включение

$$f(x) \in F(x).$$

Пусть множество решений этого включения $A \neq \emptyset$. Имеет место следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 4.3. Пусть для любого $\varepsilon > 0$ существует непрерывное отображение $g^\varepsilon: [0, 1] \times A \times X \rightarrow E_2$, удовлетворяющее следующим условиям:

- 1) $g^\varepsilon([0, 1] \times A \times X)$ – относительно компактно в E_2 ;
- 2) для любых $(\lambda, x) \in [0, 1] \times A$ уравнение $f(u) = g^\varepsilon(\lambda, x, u)$ имеет непустое ациклическое множество решений $N(\lambda, x)$ и $N(\lambda, x) \subset U_\varepsilon(A)$;
- 3) при $\lambda = 0$ и любом $x \in A$ справедливо равенство $f(x) = g^\varepsilon(0, x, x)$;
- 4) при $\lambda = 1$ существует $u_0 \in X$ такое, что

$$f(u_0) = g^\varepsilon(1, x, u_0)$$

для любого $x \in A$.

Тогда множество A ациклично.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\varepsilon_n = 1/n$, $g_n = g^{\varepsilon_n}$. Рассмотрим м-отображение $F_n: [0, 1] \times A \rightarrow K(X)$, определенное условием

$$F_n(\lambda, x) = \{u \in X : f(u) = g_n(\lambda, x, u)\}.$$

В силу сделанных предположений множество $F_n(\lambda, x) \neq \emptyset$ и ациклично для любых $(\lambda, x) \in [0, 1] \times A$. Нетрудно доказать и компактность этого множества. Покажем, что F_n является полунепрерывным сверху м-отображением. Так как образ $F_n([0, 1] \times A)$ принадлежит компакту $f^{-1}(g_n([0, 1] \times A \times X))$, то достаточно доказать замкнутость графика этого м-отображения (см. [11]).

Пусть $\{\lambda_k\} \subset [0, 1]$, $\lambda_k \rightarrow \lambda_*$; $\{x_k\} \subset A$, $x_k \rightarrow x_*$; $u_k \in F_n(\lambda_k, x_k)$. Докажем, что если $u_k \rightarrow u_*$, то $u_* \in F_n(\lambda_*, x_*)$.

Действительно, в силу определения F_n имеем $f(u_k) = g_n(\lambda_k, x_k, u_k)$. Переходя к пределу, получаем, что

$$f(u_*) = g_n(\lambda_*, x_*, u_*),$$

т.е. $u_* \in F_n(\lambda_*, x_*)$.

В силу сделанных предположений $F_n(0, x) \ni x$ и $F_n(1, x) \ni u_n$ для любого $x \in A$. Таким образом, м-отображения F_n удовлетворяют всем условиям леммы 4.2, что и обеспечивает ацикличность множества A . Заметим, что условие 2) в теореме 4.3 можно несколько изменить.

ТЕОРЕМА 4.4. Пусть выполнены все условия теоремы 4.3, кроме условия 2), и пусть выполнено условие

- 2') для любых $(\lambda, x) \in [0, 1] \times A$ непрерывное отображение $g_{\lambda, x}^\varepsilon = g^\varepsilon(\lambda, x, \cdot): X \rightarrow E_2$ является ε -аппроксимацией F , причем уравнение $f(u) = g_{\lambda, x}^\varepsilon(u)$ имеет непустое ациклическое множество решений.

Тогда множество A – ациклично.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как и в доказательстве теоремы 4.3, рассмотрим $\varepsilon_n = 1/n$, отображения $g_n = g^{\varepsilon_n}$ и м-отображения F_n . Докажем теперь, что последовательность $\{F_n\}$ удовлетворяет условиям леммы 4.2. Очевидна справедливость условий 1), 3) и 4). Докажем, что выполнено условие 2). Предположим противное, тогда существуют $\varepsilon > 0$, $(\lambda_n, x_n) \in [0, 1] \times A$, $u_n \in F_n(\lambda_n, x_n)$ такие, что $\rho(u_n, A) \geq \varepsilon$ для любого n . Без ограничения общности можно считать, что $\lambda_n \rightarrow \lambda_*$, $x_n \rightarrow x_*$. Обозначим $z_n = g_n(\lambda_n, x_n, u_n)$. Так как $g_n(\lambda_n, x_n, \cdot)$ является ε_n -аппроксимацией F , то существуют u'_n и z'_n такие, что $u'_n \in X$, $z'_n \in F(u'_n)$ и $\|z_n - z'_n\| < 1/n$, $\|u_n - u'_n\| < 1/n$. В силу компактности множества $\overline{F(X)}$ без ограничения общности можно считать, что $z'_n \rightarrow z_*$. Тогда последовательность $\{z_n\}$ также сходится к z_* . Рассмотрим множество $C = z_* \cup (\bigcup_n z_n)$. Это компактное множество в E_2 , тогда $f^{-1}(C)$ является компактом в X (в силу собственности f). Так как $z_n = g_n(\lambda_n, x_n, u_n) = f(u_n)$, то $\{u_n\} \subset f^{-1}(C)$. Без ограничения общности можно считать, что $u_n \rightarrow u_*$. Тогда $u'_n \rightarrow u_*$. Таким образом, $z'_n \in F(u'_n)$, $u'_n \rightarrow u_*$, $z'_n \rightarrow z_*$. Следовательно, $z_* \in F(u_*)$. Так как $f(u_n) = z_n$, то $f(u_*) = z_*$. Получаем, что $u_* \in A$. Это противоречит предположению, что и доказывает теорему.

В дальнейшем $E_1 = E_2 = E$, f – отображение вложения множества X в E , $A = N(i - F, X)$. Рассмотрим некоторые применения теорем 4.3 и 4.4.

ТЕОРЕМА 4.5. Пусть E – банахово пространство, U – ограниченное открытое подмножество в E , $g: \overline{U} \rightarrow E$ – вполне непрерывное однозначное отображение. Если выполнены следующие условия:

- 1) $\gamma(i - g, \overline{U}) \neq 0$,
- 2) для любого $\eta > 0$ существует вполне непрерывное однозначное отображение $\widehat{g}_\eta: \overline{U} \rightarrow E$ такое, что $\|\widehat{g}_\eta(x) - g(x)\| \leq \eta$ для любого $x \in \overline{U}$ и уравнение $x = \widehat{g}_\eta(x) + v$, где $\|v\| \leq \eta$, имеет единственное решение,

тогда множество неподвижных точек $N = N(i - g, \overline{U})$ ациклично.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть ε – произвольное положительное число, $0 < \eta < \varepsilon/2$. Рассмотрим отображение $g_\varepsilon: [0, 1] \times A \times \overline{U} \rightarrow E$, определенное условием

$$g_\varepsilon(\lambda, x, u) = \widehat{g}_\eta(u) + (1 - \lambda)(x - \widehat{g}_\eta(x)).$$

Проверим, что это отображение удовлетворяет условиям теоремы 4.4. Очевидно, что $g_\varepsilon([0, 1] \times A \times \overline{U}) \subset \overline{\text{co}}(g(\overline{U}) \cup \widehat{g}_\eta(\overline{U}))$, т.е. является относительно компактным множеством. Отображение $g_\varepsilon(\lambda, x, \cdot)$ является ε -аппроксимацией g , так как

$$\|g(u) - g_\varepsilon(u)\| \leq \|g(u) - \widehat{g}_\eta(u)\| + \|x - \widehat{g}_\eta(x)\| \leq 2\eta < \varepsilon.$$

Уравнение

$$u = \widehat{g}_\eta(u) + (1 - \lambda)(x - \widehat{g}_\eta(x))$$

имеет единственное решение для любых $(\lambda, x) \in [0, 1] \times A$.

При $\lambda = 0$ уравнение $u = g_\varepsilon(0, x, u) = \widehat{g}_\eta(u) + (x - \widehat{g}_\eta(x))$ имеет единственное решение $u = x$.

При $\lambda = 1$ уравнение $u = g_\varepsilon(1, x, u) = \widehat{g}_\eta(u)$ имеет единственное решение u_0 , которое не зависит от $x \in A$. Таким образом, выполнены все условия теоремы 4.4.

Доказанная теорема является обобщением принципа связности Красносельского–Перова [23].

Рассмотрим некоторый аналог этой теоремы для случая многозначных отображений.

ТЕОРЕМА 4.6. Пусть E – банахово пространство, U – ограниченное открытое множество в E , $F: \overline{U} \rightarrow \text{Kv}(E)$ – вполне непрерывное m -отображение без неподвижных точек на ∂U , удовлетворяющее следующим условиям:

- 1) $\gamma(i - F, \overline{U}) \neq 0$;
- 2) для любого $\eta > 0$ существует однозначная вполне непрерывная η -аппроксимация $f_\eta: \overline{U} \rightarrow E$ m -отображения F такая, что для любого $x \in N(i - F, \overline{U})$ выполнено неравенство $\|x - f_\eta(x)\| \leq \eta$;
- 3) уравнение $x = f_\eta(x) + v$ имеет единственное решение для любого v , $\|v\| \leq \eta$.

Тогда множество $N = N(i - F, \overline{U})$ ациклично.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть ε – произвольное положительное число, $0 < \eta < \varepsilon/2$. Рассмотрим отображение $g_\varepsilon: [0, 1] \times A \times \overline{U} \rightarrow E$, определенное условием

$$g_\varepsilon(\lambda, x, u) = f_\eta(u) + (1 - \lambda)(x - f_\eta(x)).$$

Как и в теореме 4.5, нетрудно проверить, что g_ε удовлетворяет всем условиям теоремы 4.4, что и доказывает теорему 4.6.

В заключение параграфа докажем ацикличность множества решений одного класса интегральных включений. Включения такого вида изучались в работе [30].

Пусть $F: [a, b] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \text{Kv}(\mathbb{R}^n)$ – многозначное отображение, удовлетворяющее условиям:

- (A) $F(t, \cdot): \mathbb{R}^n \rightarrow \text{Kv}(\mathbb{R}^n)$ – полунепрерывное сверху m -отображение для почти всех $t \in [a, b]$;
- (B) $F(\cdot, x): [a, b] \rightarrow \text{Kv}(\mathbb{R}^n)$ содержит однозначное измеримое сечение для любого $x \in \mathbb{R}^n$;
- (C) $\max_{y \in F(t, x)} \|y\| \leq \nu(t)$, где $\nu(t)$ – суммируемая функция на промежутке $[a, b]$.

Пусть $v: [a, b] \times [a, b] \rightarrow L(\mathbb{R}^n)$ – однозначное отображение в пространство линейных операторов в $\mathbb{R}^n$, удовлетворяющее следующим условиям:

- (D) $v(t, \cdot): [a, b] \rightarrow L(\mathbb{R}^n)$ измеримо для любого $t \in [a, b]$ и функция

$$k(t) = \text{vrai max}_{s \in [a, b]} \|v(t, s)\|$$

ограничена на $[a, b]$;

- (E) для любого $t_1 \in [a, b]$

$$\lim_{t \rightarrow t_1} \text{vrai max}_{s \in [a, b]} \|v(t, s) - v(t_1, s)\| = 0.$$

Рассмотрим следующее интегральное включение:

$$x(t) \in g(t) + \int_a^t v(t, s) F(s, x(s)) ds,$$

подразумевая под этим, что

$$x(t) \in \left\{ y(t) = g(t) + \int_a^t v(t, s) h(s) ds : h(s) \in F(s, x(s)) \text{ для почти всех } s \in [a, b] \right\},$$

где $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ — некоторое фиксированное непрерывное отображение.

Решением этого включения будем называть непрерывную функцию $x(\cdot)$, которая для любого $t \in [a, b]$ удовлетворяет включению.

Обозначим $K \subset C([a, b], \mathbb{R}^n)$ — множество всех решений этого включения. В работе [30] было доказано следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 4.7. *При сделанных предположениях (А)–(Е) множество K является непустым связным компактом.*

Покажем, что множество K является ациклическим. Нам понадобятся следующие леммы.

ЛЕММА 4.8. *Пусть $f: [a, b] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ — однозначное отображение, удовлетворяющее следующим условиям:*

- 1) *для любой точки $x_0 \in \mathbb{R}^n$ существуют суммируемая неотрицательная функция $l: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ и число $\varepsilon > 0$ такие, что для почти всех $t \in [a, b]$ и любых x, y ($x, y \in B[x_0, \varepsilon] \subset \mathbb{R}^n$) справедливо неравенство*

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq l(t)\|x - y\|;$$

- 2) *$f(\cdot, x): [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ является измеримым отображением для любого $x \in \mathbb{R}^n$;*
- 3) *существует суммируемая функция $\nu: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^1$ такая, что $\|f(t, x)\| \leq \nu(t)$.*

Тогда уравнение $x(t) = g(t) + \int_a^t v(t, s) f(s, x(s)) ds$ имеет единственное решение.

Доказательство этой леммы проводится по следующей стандартной схеме. Сначала показываем, что существует инвариантный шар в пространстве $C([a, b], \mathbb{R}^n)$, который содержит все решения этого уравнения. Затем доказывается, что если два решения этого уравнения совпадают на промежутке $[a, c] \subset [a, b]$, то промежуток совпадения $[a, c]$ может быть увеличен. Так как все решения этого уравнения принимают одно и то же начальное значение $g(a)$, то они будут совпадать на всем промежутке $[a, b]$.

ЛЕММА 4.9. *Пусть F удовлетворяет сделанным предположениям (А)–(С). Тогда существует последовательность однозначных отображений $f_n: [a, b] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, удовлетворяющих условиям леммы 4.8 и следующему условию:*

- 4) *для почти всех $t \in [a, b]$, всех $x \in \mathbb{R}^n$*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(f_n(t, x), F(t, x)) = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим последовательность $\{\varepsilon_n\}$, $\varepsilon_n = 1/n$. Для каждого ε_n построим однозначное отображение f_n по следующему правилу.

С каждой точкой $x \in \mathbb{R}^n$ свяжем открытый шар $B(x, \varepsilon_n)$. Из открытого покрытия $\{B(x, \varepsilon_n)\}_{x \in \mathbb{R}^n}$ выберем локально конечное подпокрытие $\{B(x_i, \varepsilon_n)\}_{i=1}^\infty$. По этому подпокрытию построим локально липшицево разбиение единицы (см., например, [13] $\{\varphi_i^{(n)}(\cdot)\}_{i=1}^\infty$). Для любого x_i (вершины построенного подпокрытия) выберем в многозначном отображении $F(\cdot, x_i): [a, b] \rightarrow \text{Kv}(\mathbb{R}^n)$ произвольный измеримый селектор $y_i^{(n)}(\cdot)$. Тогда однозначное отображение f_n определяется следующим образом:

$$f_n(t, x) = \sum_{i=1}^{\infty} y_i^{(n)}(t) \varphi_i^{(n)}(x).$$

Выполнение условий 1)–3) очевидно по построению. Докажем выполнение условия 4).

Пусть (t_0, x_0) – произвольная точка в $[a, b] \times \mathbb{R}^n$, $\delta > 0$ – произвольное число. Пусть m -отображение $F(t_0, \cdot)$ полунепрерывно сверху. Тогда существует $\eta > 0$ такое, что $F(t_0, x) \subset U_\delta(F(t_0, x_0))$, как только $\|x - x_0\| < \eta$. Пусть n_0 такое, что $0 < 1/n_0 < \eta/2$. Тогда если $n \geq n_0$, то $\varphi_i^{(n)}(x) > 0$ при $\|x_i - x\| < \eta/2$. Следовательно,

$$\begin{aligned} f_n(t_0, x_0) &= \sum_{i=1}^{\infty} y_i^{(n)}(t_0) \varphi_i^{(n)}(x_0) = \sum_{\rho(x_0, x_{i_j}) < \eta/2} y_i^{(n)}(t_0) \varphi_{i_j}^{(n)}(x_0) \\ &\subset \overline{\text{co}}\{F(t_0, x_{i_1}), \dots, F(t_0, x_{i_k})\} \subset U_\delta(F(t_0, x_0)). \end{aligned}$$

Следовательно, $\rho(f_n(t_0, x_0), F(t_0, x_0)) < \delta$. В силу произвольности δ получаем выполнение условия 4).

ЛЕММА 4.10. Пусть последовательность $\{f_n(\cdot, \cdot)\}$ удовлетворяет условиям 1)–4). Тогда для любого $t_0 \in [a, b]$ и любого $\varepsilon > 0$ существует номер n_0 такой, что решение уравнения

$$x(t) = g(t) + \int_{t_0}^t v(t, s) f_n(s, x(s)) ds, \quad t \in [t_0, b],$$

принадлежит ε -окрестности множества K решений включения

$$x(t) \in g(t) + \int_{t_0}^t v(t, s) F(s, x(s)) ds, \quad t \in [t_0, b],$$

в пространстве $C_{([t_0, b], \mathbb{R}^n)}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное. Тогда существуют $\varepsilon_0 > 0$ и последовательность $\{n_i\}$ такие, что для решений $x_{n_i}(\cdot)$ уравнений

$$x(t) = g(t) + \int_{t_0}^t v(t, s) f_{n_i}(s, x(s)) ds$$

выполнено неравенство

$$\rho(x_{n_i}(\cdot), K) \geq \varepsilon_0.$$

Нетрудно доказать, что последовательность функций $\{x_{n_i}(\cdot)\}$ является множеством, удовлетворяющим условиям равномерной ограниченности и равномерной непрерывности. Тогда без ограничения общности можно считать, что $\{x_{n_i}(\cdot)\} \rightarrow x_*(\cdot)$ в пространстве $C([t_0, b], \mathbb{R}^n)$.

Следовательно, $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(f_{n_i}(t, x_{n_i}(t)), F(t, x_*(t))) = 0$ для любого $t \in [t_0, b]$. Обозначим $h_i(t) = f_{n_i}(t, x_{n_i}(t))$, тогда последовательность $\{h_i(\cdot)\}$ является слабо компактным множеством в $L^1_{([t_0, b], \mathbb{R}^n)}$. Без ограничения общности будем считать, что $h_i(\cdot)$ слабо сходится к $h_*(\cdot) \in L^1_{([t_0, b], \mathbb{R}^n)}$. Тогда в силу леммы Мазура существует последовательность $\{u_n(\cdot)\}$, $u_n(\cdot) = \sum_{k=1}^{s_n} \lambda_k h_{n+k}(\cdot)$, выпуклых комбинаций функций $h_{n+k}(\cdot)$ такая, что $u_n(\cdot) \rightarrow h_*(\cdot)$ почти всюду на $[t_0, b]$. В силу выпуклости множеств $F(t, x)$ получаем, что $h_*(t) \in F(t, x_*(t))$ для почти всех t .

Так как

$$\sum_{k=1}^{s_n} \lambda_k x_{n+k}(t) = g(t) + \int_{t_0}^t \left(v(t, s) \sum_{k=1}^{s_n} \lambda_k h_{n+k}(s) \right) ds,$$

то переходя к пределу, получаем

$$x_*(t) = g(t) + \int_{t_0}^t v(t, s) h_*(s) ds,$$

где $h_*(s) \in F(s, x_*(s))$ почти всюду на $[t_0, b]$, т.е. функция $x_*(\cdot) \in K$. Это противоречит предположению. Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 4.11. Пусть выполнены условия (А)–(Е), тогда множество решений K включения Вольтерра является ациклическим в пространстве $C([a, b], \mathbb{R}^n)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть последовательность $\{f_n(\cdot, \cdot)\}$ удовлетворяет условиям 1)–4). Построим последовательность отображений

$$\psi_n: [0, 1] \times K \times C([a, b], \mathbb{R}^n) \rightarrow C([a, b], \mathbb{R}^n)$$

по следующему правилу:

$$\psi_n(\lambda, u(\cdot), x(\cdot))(t) = \begin{cases} u(t) & \text{при } a \leq t \leq t_\lambda = (1 - \lambda)b + \lambda a, \\ g_{u, \lambda}(t) + \int_{t_\lambda}^t v(t, s) f_n(s, x(s)) ds & \text{при } t_\lambda < t \leq b, \end{cases}$$

где $g_{u, \lambda}(t) = g(t) + (u(t_\lambda) - g(t_\lambda))$.

Рассмотрим уравнения

$$x(\cdot) = \psi_n(\lambda, u(\cdot), x(\cdot)), \quad n = 1, 2, \dots$$

Эти уравнения для любых $\lambda \in [0, 1]$, $u(\cdot) \in K$ имеют единственное решение (см. лемму 4.8); при $\lambda = 0$ это решение равно $u(\cdot) \in K$; при $\lambda = 1$ решение не

зависит от выбора $u(\cdot) \in K$, так как для любого $u(\cdot) \in K$ справедливо равенство $u(a) = g(a)$.

Докажем теперь, что для любого $\varepsilon > 0$ существует номер n_0 такой, что для $n \geq n_0$, $\lambda \in [0, 1]$, $u(\cdot) \in K$ решение уравнения $x(\cdot) = \psi_n(\lambda, u(\cdot), x(\cdot))$ принадлежит ε -окрестности множества K . Предположим противное. Тогда существуют $\varepsilon_0 > 0$, $\{\lambda_s\} \subset [0, 1]$, $\{u_s(\cdot)\} \subset K$ такие, что для решений $x_s(\cdot)$ уравнений $x_s(\cdot) = \psi_{n_s}(\lambda_s, u_s(\cdot), x_s(\cdot))$ выполнено неравенство $\rho(x_s(\cdot), K) \geq \varepsilon_0 > 0$. Без ограничения общности можно считать, что $\lambda_s \rightarrow \lambda_* \in [0, 1]$, $u_s(\cdot) \rightarrow u_*(\cdot) \in K$ и $x_s(\cdot) \rightarrow x_*(\cdot)$,

$$x_s(t) = \begin{cases} u_s(t) & \text{при } a \leq t \leq t_s = (1 - \lambda_s)b + \lambda_s a, \\ g_s(t) + \int_{t_s}^t v(t, \tau) f_{n_s}(\tau, x(\tau)) d\tau & \text{при } t_s < t \leq b, \end{cases}$$

где $g_s(t) = g(t) + (u_s(t_s) - g(t_s))$.

Пусть $h_s(t) = f_{n_s}(t, x_s(t))$, $a \leq t \leq b$. Тогда аналогично лемме 4.10 можно доказать, что $x_*(\cdot)$ является решением включения

$$x(t) \in g(t) + (u_*(t_*) - g(t_*)) + \int_{t_*}^t v(t, \tau) F(\tau, x(\tau)) d\tau$$

на промежутке $[t_*, b]$, где $t_* = (1 - \lambda_*)b + \lambda_* a$, и $x_*(\cdot) = u_*(\cdot)$ на $[a, t_*]$. Тогда $x_*(\cdot) \in K$, что противоречит предположению.

Таким образом, построенная последовательность отображений $\{\psi_n\}$ удовлетворяет условиям теоремы 4.3, следовательно, множество K является ациклическим.

Список литературы

1. Борисович Ю. Г. Современный подход к теории топологических характеристик нелинейных операторов. I // Геом. и теория особенностей в нелинейных уравнениях. Воронеж: Изд-во ВГУ, 1987. С. 24–46.
2. Борисович Ю. Г. Современный подход к теории топологических характеристик нелинейных операторов. II // Глобальный анализ и нелинейные уравнения. Воронеж: Изд-во ВГУ, 1988. С. 22–43.
3. Борисович Ю. Г., Гельман Б. Д., Мышкис А. Д., Обуховский В. В. Топологические методы в теории неподвижных точек многозначных отображений // УМН. 1980. Т. 35. № 1. С. 59–126.
4. Гельман Б. Д. О некоторых проблемах в теории неподвижных точек многозначных отображений // Топологические и геометрические методы анализа. Воронеж: Изд-во ВГУ, 1989. С. 90–105.
5. Гельман Б. Д. Обобщенная степень многозначных отображений // Нелинейные операторы в глобальном анализе. Воронеж: Изд-во ВГУ, 1991. С. 34–51.
6. Górniewicz L. Homological methods in fixed point theory of multi-valued maps // Dissertationes Math. (Rozprawy Mat.). № 129, 1975.
7. Lasry J. M., Robert R. Analyse non-linéaire multivoque. Paris–Dauphine: Centre de Recherche de Math. № 7611.
8. Gel'man B. D. Topological properties of the set of fixed points for multivalued maps // International Congress of Math. Zürich. Short. Com., 1994. P. 59.
9. Michael E. Continuous selections. 1 // Ann. of Math. 1956. V. 63. № 2. P. 361–382.

10. *Petryshyn W. V., Fitzpatrick P. M.* A degree theory, fixed point theorems, and mapping theorems for multivalued noncompact mappings // Trans. Amer. Math. Soc. 1974. V. 194. P. 1–25.
11. *Борисович Ю. Г., Гельман Б. Д., Мышкис А. Д., Обуховский В. В.* Введение в теорию многозначных отображений. Воронеж: Изд-во ВГУ, 1986.
12. *Обен Ж.-П., Экланд И.* Прикладной нелинейный анализ. М.: Мир, 1988.
13. *Aubin J.-P., Cellina A.* Differential inclusions. Set-valued maps and viability theory // Grundlehren Math. Wiss. 1984. V. 264. № 14. P. 342.
14. *Saint Raymond J.* Points fixes des multiapplications à valeurs convexes // C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. I. Math. 1984. V. 298. P. 71–74.
15. *Гельман Б. Д.* О структуре множества решений включений с многозначными операторами // Глобальный анализ и матем. физика. Воронеж: Изд-во ВГУ, 1987. С. 26–41.
16. *Dzedzej Z., Gelman B. D.* Dimension of solution set for differential inclusions // Demonstratio Math. 1993. V. 26. № 1. P. 149–158.
17. *Saint Raymond J.* Points fixes des contractions multivoques // Fixed Point Theory and Appl. Pitman Res. Notes Math. Ser. 1991. V. 252. P. 359–375.
18. *Александров П. С., Пасынков Б. А.* Введение в теорию размерности. М.: Наука, 1973.
19. *Гуревич В., Волмэн Г.* Теория размерности. М.: ИЛ, 1948.
20. *Благодатский В. И., Филиппов А. Ф.* Дифференциальные включения и оптимальное управление // Труды МИАН. 1985. Т. 169. С. 194–252.
21. *Иоффе А. Д., Тихомиров В. М.* Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1971.
22. *Натансон И. П.* Теория функций вещественной переменной. М.: Наука, 1974.
23. *Красносельский М. А., Перов А. И.* О существовании решений у некоторых нелинейных операторных уравнений // Докл. АН СССР. 1959. Т. 126. № 1. С. 15–18.
24. *Богатырев А. В.* Неподвижные точки и свойства решений дифференциальных включений // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1983. Т. 47. № 4. С. 895–909.
25. *Aronszajn N.* Le correspondant topologique de l'unicité dans la théorie des équations différentielles // Ann. of Math. 1942. V. 43. P. 730–738.
26. *Lasry J. M., Robert R.* Acyclicité de l'ensemble des solutions de certains équations fonctionnelles // C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. I. Math. 1976. V. 282. P. 1283–1286.
27. *Górniewicz L.* On the solutions of differential inclusions // J. Math. Anal. Appl. 1986. V. 113. P. 1349–1366.
28. *Склярченко Е. Г.* О некоторых приложениях теории пучков в общей топологии // УМН. 1964. Т. 19. № 6. С. 47–70.
29. *Спенсер Э.* Алгебраическая топология. М.: Мир, 1971.
30. *Булгаков А. И., Ляпин Л. Н.* Некоторые свойства множества решений интегрального включения Вольтерра–Гаммерштейна // Дифференц. уравнения. 1978. Т. 14. № 8. С. 1465–1472.

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию
19.09.1995