Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Ю. Колесов, Ю. С. Колесов, Н. Х. Розов, Хаос типа “разбитого тора” в трехмерных релаксационных системах, *Матем. сб.*, 1997, том 188, номер 11, 3–18

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm272>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.23.180.231

26 апреля 2023 г., 15:15:09

УДК 517.926

А. Ю. Колесов, Ю. С. Колесов, Н. Х. Розов

Хаос типа “разбитого тора” в трехмерных релаксационных системах

В случае трехмерной сингулярно возмущенной системы обыкновенных дифференциальных уравнений с двумя медленными и одной быстрой переменными указаны условия, при которых наблюдается феномен стохастического поведения решений, названный “хаосом типа разбитого тора”.

Библиография: 17 названий.

Введение

При анализе одной математической модели теоретической экологии, описывающей специфическое взаимодействие сильно плодовитой популяции со своей пищевой базой с умеренными собственными осцилляциями, возникает система дифференциально-разностных уравнений вида

$$\begin{aligned}\dot{N}_1(t) &= r(1+a)^{-1} [1 + a(1 - N_2(t)) - N_1(t-1)] N_1(t), \\ \dot{N}_2(t) &= \varepsilon^{-1} [N_1(t) - N_2(t-h)] N_2(t),\end{aligned}\tag{1}$$

где $0 < \varepsilon \ll 1$, все параметры положительны и $r > \pi/2$. Оказывается, что аттрактором положительных решений этой системы как раз и является “хаос типа разбитого тора”. В точности это означает, что оператор последования по траекториям системы (1) в C^1 -метрике (с точностью до величин порядка $\exp(-a^2/\varepsilon)$) аппроксимируется немонотонным одномерным отображением на окружности, производная которого в “большинстве” точек имеет порядок ε^{-1} .

Отметим следующую характерную особенность системы (1): при $N_2 \equiv 0$ первое ее уравнение путем нормирующей замены $N_1 = (1+a)n$ преобразуется в известное уравнение Хатчинсона [1]

$$\dot{n}(t) = r[1 - n(t-1)]n(t),\tag{2}$$

аттрактором положительных решений которого при $r > \pi/2$ является орбитально экспоненциально устойчивый цикл. Это позволяет интерпретировать систему (1) как “достройку” уравнения (2) до системы с хаосом.

В настоящей работе выделяется достаточно широкий класс трехмерных обыкновенных дифференциальных релаксационных систем с хаосом типа разбитого тора. Кроме того, изучается так называемая “задача об охоте на цикл”: показано,

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-01-00207).

как система обыкновенных дифференциальных уравнений на плоскости с предельным циклом может быть достроена до трехмерной релаксационной системы с хаосом указанного типа.

Напомним, что возможность существования хаотического режима в релаксационной системе третьего порядка высказана в качестве гипотезы в заметке [2]. Свое обоснование эта гипотеза впервые получила на конкретном примере кусочно-линейной релаксационной системы с одной быстрой и двумя медленными переменными, который был построен и исследован в диссертации Н.Н. Ченцовой (см. [3], [4]), выполненной под руководством Я.Г. Синая. Достаточные условия возникновения хаоса в релаксационной системе общего вида с одной быстрой и двумя медленными переменными найдены в работе [5] (см. также [6]).

Необходимо, однако, особо подчеркнуть, что в статьях [2]–[5] речь шла о гиперболической структуре как причине возникновения хаоса, и именно в этом принципиальное отличие упомянутых статей от настоящей работы.

§ 1. Описание объекта исследования

Рассмотрим систему

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, y), & \varepsilon \dot{y} &= g(x, y); \\ x &\in \mathbb{R}^2, \quad y \in \mathbb{R}; & 0 < \varepsilon \ll 1; & \quad f, g \in C^\infty. \end{aligned} \quad (3)$$

Будем считать, что уравнение $g(x, y) = 0$ в $\mathbb{R}^3$ определяет гладкую поверхность Γ , распадающуюся на непересекающиеся части Γ_- и Γ_+ , разделенные кривой Γ_0 . По определению

$$\begin{aligned} (x, y) &\in \Gamma_-, & \text{если } g'_y(x, y) < 0; \\ (x, y) &\in \Gamma_+, & \text{если } g'_y(x, y) > 0; \\ (x, y) &\in \Gamma_0, & \text{если } g'_y(x, y) = 0. \end{aligned}$$

Дополнительно предположим, что устойчивый участок Γ_- поверхности медленных движений Γ компактен и задается равенством $y = \gamma_1(x)$. Здесь $\gamma_1 \in C^\infty(\Omega)$, а Ω – ограниченная область с границей $\partial\Omega = l$, являющейся простой замкнутой кривой класса C^∞ . Кроме того, считаем, что $x = 0 \in \Omega$, $\gamma_1(0) = 0$; поверхность Γ_+ задается равенством $y = \gamma_2(x)$, $\gamma_2 \in C^\infty(\Omega \setminus \{0\})$, $\gamma_2 \rightarrow +\infty$ при $x \rightarrow 0$. Таким образом, здесь (в отличие от изученных в [7], [6] ситуаций) поверхность медленных движений Γ имеет форму “колбы”, горловина которой асимптотически сужается при $y \rightarrow \infty$ (рис. 1).

УСЛОВИЕ 1. Будем считать, что при $(x, y) \in \Gamma_0$

$$g''_{yy}(x, y) < 0, \quad (\text{grad}_x g(x, y), f(x, y)) \neq 0. \quad (4)$$

Рис. 1

Рис. 2

УСЛОВИЕ 2. Предположим, что в области Ω у системы

$$\dot{x} = f(x, \gamma_1(x)) \quad (5)$$

есть единственное состояние равновесия $x = 0$, являющееся экспоненциально неустойчивым фокусом, а ее фазовый портрет имеет вид, показанный на рис. 2.

Условие 1 естественно для этой тематики (см. [7], [6]); условие 2 задает характер поведения траекторий на устойчивой поверхности медленных движений Γ_- .

УСЛОВИЕ 3. Допустим, что $f(0, y) \equiv 0$ при $y \geq 0$; $g(0, y) < 0$ при $y > 0$.

УСЛОВИЕ 4. При $y \rightarrow +\infty$ равномерно по любому ограниченному подмножеству изменения x справедливы асимптотические представления

$$f(x, y) = y^{n_1} \left(a_0(x) + \frac{a_1(x)}{y} + \frac{a_2(x)}{y^2} + \dots \right), \quad (6_1)$$

$$g(x, y) = y^{n_2} \left(b_0(x) + \frac{b_1(x)}{y} + \frac{b_2(x)}{y^2} + \dots \right), \quad (6_2)$$

где $n_1 \geq 1$, $n_2 \geq 0$ – целые числа, причем $p = n_1 - n_2 \geq 0$; $b_0(x) > 0$ при $x \neq 0$, $b_0(0) = 0$, $b_1(0) < 0$. Будем считать, что асимптотические представления (6) можно дифференцировать по x и y в любом порядке и любое число раз.

УСЛОВИЕ 5. Предположим, что $x = 0$ – единственное состояние равновесия системы

$$\dot{x} = a_0(x), \quad (7)$$

являющееся глобально экспоненциально устойчивым фокусом.

Рассмотрим собственные векторы $a_1 + ia_2$, $b_1 + ib_2$, отвечающие собственным числам $-\tau_1 + i\omega_1$, $\tau_2 + i\omega_2$ ($\tau_j, \omega_j > 0$, $j = 1, 2$) матриц линеаризации при $x = 0$ систем (7) и (5) соответственно. Введем матрицы C_1 и C_2 , столбцами которых служат векторы $(a_1, a_2)^T$ и $(b_1, b_2)^T$ соответственно.

УСЛОВИЕ 6. Будем в дальнейшем считать, что

$$\det C_1 \cdot \det C_2 > 0. \quad (8)$$

Неравенство (8) означает, что траектории систем (7), (5) ориентированы в одном и том же направлении.

Чтобы сформулировать очередное предположение, введем в рассмотрение задачу Коши для системы (7) с зависящим от параметра начальным условием

$$x|_{t=0} = v(\sigma), \quad 0 \leq \sigma \leq 2\pi. \quad (9)$$

Здесь $x = v(\sigma)$ – такое параметрическое представление кривой l , что при увеличении σ движение по ней происходит в том же направлении, что и по траекториям системы (7). Положим (см. (6₂))

$$z(\sigma) = \int_0^\infty b_0(x(t, \sigma)) dt, \quad (10)$$

где $x(t, \sigma)$ – решение задачи Коши (7), (9).

УСЛОВИЕ 7. Допустим, что на полуинтервале $[0, T_0)$ функция $z'(\sigma)$ имеет ровно $2k$, $k \geq 1$, простых нулей.

Перед формулировкой последнего предположения рассмотрим замены переменных

$$\begin{aligned} x &= r[a_1 \sin \varphi + a_2 \cos \varphi], \\ x &= \rho[b_1 \sin \psi + b_2 \cos \psi] \end{aligned} \quad (11)$$

и формулы

$$\psi = \beta_1(\varphi), \quad \rho = \beta_2(\varphi)r, \quad (12)$$

где $\beta_1(\varphi + 2\pi) \equiv \beta_1(\varphi) + 2\pi$, $\beta_2(\varphi + 2\pi) \equiv \beta_2(\varphi)$, $\beta_2(\varphi) > 0$, осуществляющие преобразование координат.

УСЛОВИЕ 8. Будем считать, что при всех $0 \leq \varphi \leq 2\pi$

$$\alpha_2 \beta'_1(\varphi) + \alpha_1 - \beta'_2(\varphi)/\beta_2(\varphi) > 0, \quad \text{где} \quad \alpha_1 = \tau_1/\omega_1, \quad \alpha_2 = \tau_2/\omega_2. \quad (13)$$

Вместе с вытекающим из неравенства (8) соотношением $\beta'_1(\varphi) > 0$ условие 8 дает нужное в дальнейшем согласование замен (11).

Всем перечисленным выше условиям удовлетворяет, например, система

$$\dot{r} = (2 - y)r, \quad \dot{\varphi} = 1 + y, \quad \varepsilon \dot{y} = ax_1^2 + bx_2^2 - \frac{y}{y^2 + 1},$$

где $x_1 = r \cos \varphi$, $x_2 = r \sin \varphi$, а положительные параметры a и b таковы, что $0 < a - b < \sqrt{ab}$. Действительно, проверка условий 1–6 тривиальна (последнее неравенство обеспечивает справедливость второго из соотношений (4)). Условия 7 и 8 также выполняются, поскольку в рассматриваемом случае

$$l = \left(\frac{1}{\sqrt{2a}} \cos \sigma, \frac{1}{\sqrt{2b}} \sin \sigma \right), \quad 0 \leq \sigma \leq 2\pi,$$

$$z'(\sigma) = \frac{1}{8} \left[\frac{a^2 - b^2}{2ab} \sin 2\sigma + \frac{b - a}{\sqrt{ab}} \cos 2\sigma \right], \quad \beta_1(\varphi) = \varphi, \quad \beta_2(\varphi) = 1.$$

§ 2. Характер поведения траекторий

На эвристическом уровне опишем асимптотическое поведение траекторий $(x(t, \varepsilon), y(t, \varepsilon))$ системы (3) с независимыми от ε начальными условиями $x(0, \varepsilon) = x_0$, $y(0, \varepsilon) = y_0$, где $y_0 > \max \gamma_1(x)$, $x \in \bar{\Omega} = \Omega + l$, а x_0 принадлежит достаточно малой окрестности кривой l .

Из описанного в § 1 характера расположения поверхности Γ и асимптотического представления (6₂) следует, что $g(x_0, y) > 0$ при $y \geq y_0$. Поэтому сначала асимптотически малое время (порядка $\varepsilon^{n_1/(1+p)}$ при $n_2 \neq 1$ или $\varepsilon \ln(1/\varepsilon)$ при $n_2 = 1$) движение происходит примерно по лучу $x = x_0$, $y \geq y_0$, причем переменная y достигает за это время значений порядка $\varepsilon^{-1/(1+p)}$.

Чтобы проследить за дальнейшим движением фазовой точки, разделим первое уравнение системы на второе, выполним замену $y = u\varepsilon^{-1/(1+p)}$, отбросим высшие порядки малости при помощи равенств (6) и, наконец, сделаем замену $ds = u^p du/b_0(x)$. В итоге убеждаемся, что дальнейшее движение происходит приблизительно по кривой (см. рис. 3)

$$\Lambda(x_0) : x = x(\tau, x_0), \quad u = \left((1+p) \int_0^\tau b_0(x(\theta, x_0)) d\theta \right)^{1/(1+p)}, \quad 0 < \tau < \infty, \quad (14)$$

где $x(\tau, x_0)$, $x(0, x_0) = x_0$, — траектория системы (7). Заметим также, что в асимптотически малую окрестность точки $(0, u_0)$, где

$$u_0 = \left((1+p) \int_0^\infty b_0(x(\theta, x_0)) d\theta \right)^{1/(1+p)} > 0,$$

Рис. 3

фазовая точка $(x(t, \varepsilon), u(t, \varepsilon))$, $u = \varepsilon^{1/(1+p)} y(t, \varepsilon)$, попадает за время порядка $\varepsilon^{n_1/(1+p)} \ln(1/\varepsilon)$, а любой участок кривой (14), соответствующий конечному изменению τ (кроме, быть может, окрестности $\tau = 0$), проходится за время порядка $\varepsilon^{n_1/(1+p)}$.

Из представления (6₂) и свойств функций $b_0(x)$, $b_1(x)$ следует, что в окрестности значения $u = u_0$ происходит “поворот” и при дальнейшем увеличении t переменная $u(t, \varepsilon)$ начинает убывать примерно по закону

$$\varepsilon^{(n_1-1)/(1+p)} \dot{u} = b_1(0) u^{n_2-1}.$$

Переменная же x приобретает (по норме) порядок $\exp(-\alpha/\varepsilon^{1/(1+p)})$, $\alpha > 0$: из асимптотических равенств (6) следует, что траектория системы (3) “прижимается” к инвариантному лучу $x = 0$, $y \geq 0$ (см. условие 3) приблизительно по закону

$$\varepsilon^{1/(1+p)} \frac{dx}{du} = u^{p+1} a'_0(0) x / b_1(0).$$

Таким образом, отрезок $x = 0$, $0 \leq u \leq u_0$ фазовая точка проходит за конечное (при $n_1 = 1$) или асимптотически малое (при $n_1 > 1$) время. Более того, неравенство $g(0, y) < 0$ при $y > 0$ влечет существование такого первого момента времени $t_0(\varepsilon) > 0$, что $y(t_0, \varepsilon) = y_0$.

При $t \geq t_0(\varepsilon)$ происходит “падение” (описываемое с помощью техники из книги [8]) на экспоненциально устойчивое (с показателем экспоненты порядка ε^{-1}) интегральное многообразие (см. монографию [9]) $y = \Phi(x, \varepsilon)$, $\Phi(0, \varepsilon) = 0$, $\Phi(x, 0) = \gamma_1(x)$, медленных движений системы (3). Заметим, что в нашем случае такое интегральное многообразие единственно, так как оно служит неустойчивым многообразием седло-фокуса $(0, 0)$.

Итак, при $t > t_0(\varepsilon)$ движение происходит вдоль поверхности $y = \gamma_1(x)$ примерно по закону, задаваемому системой (5) с начальным условием $x|_{t=t_0} = x(t_0, \varepsilon)$. А поскольку норма $\|x(t_0, \varepsilon)\|$ имеет порядок $\exp(-\alpha/\varepsilon^{1/(1+p)})$, $\alpha > 0$, то фазовая точка системы (3) проводит в асимптотической малой окрестности седлового состояния равновесия $(0, 0)$ время порядка $\varepsilon^{-1/(1+p)}$. После этого она за конечное время попадает в асимптотически малую окрестность кривой Γ_0 , затем обычным образом происходит “срыв” (описанный в книге [7]), и фазовая точка возвращается в плоскость $y = y_0$ при $t = t_1(\varepsilon)$.

Отметим принципиально новый момент, аналога которому нет в публикациях [7], [6], [10]: при $\varepsilon \rightarrow 0$ кривая $\{(x(t, \varepsilon), u(t, \varepsilon)), 0 \leq t \leq t_1(\varepsilon)\}$, где $u(t, \varepsilon) = \varepsilon^{1/(1+p)}y(t, \varepsilon)$, имеет своим пределом не кривую, а более сложное множество, состоящее из кривой $\Lambda(x_0)$, отрезка $x = 0$, $0 \leq u \leq u_0$ и площадки $\{u = 0, x \in \Omega\}$. Появление площадки связано с тем, что в силу экспоненциальной малости $x(t_0, \varepsilon)$ при “падении” на поверхность $y = \gamma_1(x)$ движение может продолжиться вдоль любой “случайно” выбранной траектории системы (5), выходящей из нулевого состояния равновесия. Таким образом, становится весьма наглядной причина возникновения хаоса в системе (3).

§3. Описание результатов

Из изложенного выше следует, что в плоскости $y = y_0$ определен оператор последования $\Pi(\varepsilon)$ по траекториям системы (3). Для выяснения его структуры введем специальные координаты.

С этой целью продолжим интегральное многообразие $y = \Phi(x, \varepsilon)$ системы (3) по ее траекториям за кривую срыва Γ_0 и рассмотрим его пересечение с плоскостью $y = y_0$. Это будет кривая $x = v(\sigma, \varepsilon)$, $v(\sigma + 2\pi, \varepsilon) \equiv v(\sigma, \varepsilon)$, для которой в метрике $C^1[0, 2\pi]$ справедливо асимптотическое представление (ср. с [6]):

$$v(\sigma, \varepsilon) = v(\sigma) + O(\varepsilon^{2/3}).$$

Затем в плоскости $y = y_0$ введем координату s , измеряющую расстояния по нормали к кривой $x = v(\sigma, \varepsilon)$. В итоге получим замену переменных

$$x = V(s, \sigma, \varepsilon), \quad V(0, \sigma, \varepsilon) = v(\sigma, \varepsilon),$$

где гладкая по s , σ вектор-функция V определена на множестве $S = \{(s, \sigma) : |s| \leq s_0, 0 \leq \sigma \leq 2\pi\}$ при достаточно малом $s_0 > 0$.

ТЕОРЕМА. *Найдется такое $\varepsilon_0 > 0$, что при всех $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ имеем*

$$\Pi(\varepsilon): \sigma \rightarrow \sigma + R_1(s, \sigma, \varepsilon), \quad s \rightarrow R_2(s, \sigma, \varepsilon), \quad (15)$$

где 2π -периодические по σ функции R_1, R_2 удовлетворяют оценкам

$$\begin{aligned} \|R_1\|_{C^1(S)} &\leq N_1/\varepsilon^{1/(1+p)}, \\ \|R_2\|_{C^1(S)} &\leq \exp(-N_2/\varepsilon^{(2+p)/(1+p)}) \end{aligned} \quad (16)$$

с независимыми от (s, σ, ε) постоянными $N_1, N_2 > 0$. Кроме того, равномерно по $0 \leq \sigma \leq 2\pi$

$$\begin{aligned} R_1(0, \sigma, \varepsilon) &= [1 + o(1)]w(\sigma)/\varepsilon^{1/(1+p)}, \\ \frac{\partial R_1}{\partial \sigma}(0, \sigma, \varepsilon) &= [\gamma(\sigma, \varepsilon)w'(\sigma) + o(1)]/\varepsilon^{1/(1+p)}, \end{aligned} \quad (17)$$

где (см. (10))

$$w(\sigma) = - \left(1 + \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right) \frac{\omega_1}{b_1(0)} \frac{z^{2+p}(\sigma)}{2+p},$$

а $\gamma(\sigma, \varepsilon)$ — некоторая функция, удовлетворяющая оценке

$$0 < N_3 \leq \gamma(\sigma, \varepsilon) \leq N_4 \quad (18)$$

с независимыми от σ, ε постоянными $N_3, N_4 > 0$.

Из приводимого ниже обоснования теоремы видно, что при отказе от неравенства (13) функция $\gamma(\sigma, \varepsilon)$ будет быстро осциллирующей, а это затрудняет анализ отображения (15).

Для выявления свойств оператора последования предположим для простоты, что

$$\begin{aligned} w'(\sigma) &< 0 \quad \text{при } \sigma_0 < \sigma < \sigma_1; \\ w'(\sigma) &> 0 \quad \text{при } 0 \leq \sigma < \sigma_0, \quad \sigma_1 < \sigma \leq 2\pi, \end{aligned}$$

т.е. $k = 1$ в условии 7. Рассмотрим, далее, зависящую от вспомогательного параметра δ систему

$$\varkappa_1(s, \sigma, \varepsilon) = s, \quad \varkappa_2(s, \sigma, \varepsilon) = \delta,$$

где

$$\begin{aligned} \varkappa_1 &= R_1, \quad \varkappa_2 = \varepsilon^{1/(1+p)} R_2, \quad \delta \in [\delta_1, \delta_2], \\ \mu_1 &< \delta_1 < \delta_2 < \mu_2, \quad \mu_1 = w(\sigma_1), \quad \mu_2 = w(\sigma_0). \end{aligned}$$

Опираясь на вытекающие из теоремы 1 свойства функций $\varkappa_1, \varkappa_2$ и применяя теорему о неявной функции, находим функции $s(\delta, \varepsilon)$ и $\sigma(\delta, \varepsilon)$ такие, что $s(\delta, 0) = 0$, $\sigma(\delta, 0) = \sigma(\delta)$, где $\sigma(\delta) \in (\sigma_0, \sigma_1)$ — корень уравнения $w(\sigma) = \delta$. Наконец, полагая $\delta = 2\pi k \varepsilon^{1/(1+p)}$, где $k \in \mathbb{N}$, $\delta_1 \varepsilon^{-1/(1+p)} \leq 2\pi k \leq \delta_2 \varepsilon^{-1/(1+p)}$, получаем неподвижные точки отображения (15). Заметим, что каждая из них имеет грубую гомоклиническую траекторию, так как аналогичную траекторию имеет неподвижная точка $\sigma(2\pi k \varepsilon^{1/(1+p)}, \varepsilon)$ отображения

$$\sigma \rightarrow \sigma + R_1(s(2\pi k \varepsilon^{1/(1+p)}, \varepsilon), t, \varepsilon)$$

(обосновывается этот факт в точности по схеме, предложенной в [5]). Остается воспользоваться результатами работы [11], из которых вытекает существование счетного числа дихотомичных циклов у системы (3).

Итак, динамические свойства систем (1) и (3) полностью совпадают. Дополнительно отметим, что из проведенных выше построений следует наличие при $\varepsilon \rightarrow 0$ бесконечной последовательности бифуркаций рождения и исчезновения циклов, что и составляет характерную особенность хаоса типа разбитого тора.

§ 4. Общая схема обоснования теоремы

Для детального анализа оператора $\Pi(\varepsilon)$ потребуются замены переменных

$$x = r[1 + \delta_1(r, \varphi)](a_1 \sin \varphi + a_2 \cos \varphi), \quad (19_1)$$

$$x = \rho[1 + \delta_2(\rho, \psi, \varepsilon)](b_1(\varepsilon) \sin \psi + b_2(\varepsilon) \cos \psi), \quad (19_2)$$

уточняющие замены переменных (11). Здесь векторы $b_1(\varepsilon)$, $b_2(\varepsilon)$, $b_1(0) = b_1$, $b_2(0) = b_2$ таковы, что

$$A(\varepsilon)(b_1(\varepsilon) + ib_2(\varepsilon)) = (\tau_2(\varepsilon) + i\omega_2(\varepsilon))(b_1(\varepsilon) + ib_2(\varepsilon)),$$

где $\tau_2(0) = \tau_2$, $\omega_2(0) = \omega_2$, а $A(\varepsilon)$ – матрица линеаризации системы

$$\dot{x} = f(x, \Phi(x, \varepsilon)) \quad (20)$$

на нулевом состоянии равновесия. Гладкие по совокупности переменных 2π -периодические по φ и ψ соответственно функции δ_1 и δ_2 , $\delta_1(0, \varphi) \equiv \delta_2(0, \psi, \varepsilon) \equiv 0$, считаем выбранными так (см., например, [12]), что замены (19) преобразуют системы (7) и (20) в некоторой достаточно малой окрестности $x = 0$ к линейным системам

$$\dot{r} = -\tau_1 r, \quad \dot{\varphi} = \omega_1 \quad \text{и} \quad \dot{\rho} = \tau_2(\varepsilon)\rho, \quad \dot{\psi} = \omega_2(\varepsilon).$$

При исследовании оператора $\Pi(\varepsilon)$ его удобно представить в виде суперпозиции операторов $\Pi_5 \cdot \Pi_4 \cdot \Pi_3 \cdot \Pi_2 \cdot \Pi_1$. Здесь Π_1 – оператор соответствия из лежащего в плоскости $y = y_0$ множества S в поверхность $\Sigma_1 = \{(r, \varphi, y) : r = r_0, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, y \geq y_0\}$, где r, φ – координаты, фигурирующие в формуле (19₁), причем $r_0 > 0$ достаточно мало; Π_2 – оператор соответствия из поверхности Σ_1 в плоскость $y = u_*\varepsilon^{-1/(1+p)}$, где $u_* > 0$ достаточно мало; Π_3 – оператор соответствия из плоскости $y = u_*\varepsilon^{-1/(1+p)}$ в плоскость $y = y_0$; Π_4 – оператор соответствия из плоскости $y = y_0$ в поверхность $\Sigma_2 = \{(\rho, \psi, y) : \rho = \rho_0, 0 \leq \psi \leq 2\pi, 0 \leq y \leq y_0\}$, где ρ, ψ – координаты, фигурирующие в формуле (19₂), причем $\rho_0 > 0$ достаточно мало; Π_5 – оператор соответствия из поверхности Σ_2 в плоскость $y = y_0$.

Анализ каждого из введенных операторов базируется на развитых в [6], [10] методах, причем некоторые новые моменты возникают только лишь при рассмотрении операторов Π_2 и Π_3 : именно, на соответствующих им участках происходит экспоненциальное приближение траектории системы (3) к инвариантному лучу, приводящее в дальнейшем к хаосу.

Исследование оператора Π_1 практически полностью дублирует соответствующее место из монографии [6] и на эвристическом уровне описано в начале § 2. Поэтому здесь приведем сразу окончательный результат.

ЛЕММА 1. *Отображение Π_1 задается формулами*

$$\psi = \sigma + \Delta(s, \sigma, \varepsilon), \quad u = U(s, \sigma, \varepsilon), \quad (21)$$

где $u = \varepsilon^{1/(1+p)}y$, а для 2π -периодических по σ функций Δ, U в метрике $C^1(S)$ справедливы асимптотические представления

$$\Delta(s, \sigma, \varepsilon) = \Delta_0(s, \sigma) + O(\varepsilon^r), \quad U(s, \sigma, \varepsilon) = U_0(s, \sigma) + O(\varepsilon^r). \quad (22)$$

Здесь $r = \min(2/3, 1/(1+p))$, а $\psi = \sigma + \Delta_0(s, \sigma)$, $u = U_0(s, \sigma)$ – отображение соответствия, осуществляемое кривыми (14) при $x_0 = V(s, \sigma, 0)$, $(s, \sigma) \in S$.

§ 5. Структура оператора $\Pi_2 \cdot \Pi_1$

Сделаем в системе (3) замены переменных (19₁), $y = u\varepsilon^{-1/(1+p)}$ и возьмем φ за новое время. В результате приходим к системе

$$\frac{dr}{d\varphi} = D(r, \varphi, u, \mu)r, \quad \frac{du}{d\varphi} = H(r, \varphi, u, \mu), \quad (23)$$

где $\mu = \varepsilon^{1/(1+p)}$, а для функций D, H справедливы вытекающие из (6) асимптотические представления

$$D = -\alpha_1 + \frac{\mu}{u}D_1(r, \varphi) + \frac{\mu^2}{u^2}D_2(r, \varphi) + \dots, \quad (24_1)$$

$$H = u^{-p} \left[H_0(r, \varphi) + \frac{\mu}{u}H_1(r, \varphi) + \frac{\mu^2}{u^2}H_2(r, \varphi) + \dots \right], \quad (24_2)$$

в которых $H_0(0, \varphi) \equiv 0$, $H_1(0, \varphi) \equiv b_1(0)/\omega_1$.

Дополняя систему (23) начальными условиями

$$r|_{\varphi=\varphi_0} = r_0, \quad u|_{\varphi=\varphi_0} = v_0,$$

где r_0 – то же, что и в определении Σ_1 , $\varphi_0 = \sigma + \Delta(s, \sigma, \varepsilon)$, $v_0 = U(s, \sigma, \varepsilon)$, Δ, U – функции из (21), получим задачу Коши, регулярно зависящую от малого параметра μ . Отсюда с учетом асимптотических равенств (22) выводим, что для ее решения равномерно по $\varphi_0 \leq \varphi \leq \mu^{-\lambda}$, $1/3 < \lambda < 1$, справедливы формулы

$$\begin{aligned} r &= [1 + O(\mu^{1-\lambda})] r_0 \exp(-\alpha_1(\varphi - \varphi_0^0)), \\ u &= \left((v_0^0)^{1+p} + (1+p) \int_{\varphi_0^0}^{\varphi} H_0(r_0 \exp(-\alpha_1(\tau - \varphi_0^0)), \tau) d\tau \right)^{1/(1+p)} \\ &\quad + O(\mu^{1-\lambda}), \end{aligned} \quad (25)$$

где $\varphi_0^0 = \sigma + \Delta_0(s, \sigma)$, $v_0^0 = U_0(s, \sigma)$ (см. (22)). Более того, аналогичные формулы имеют место и для производных функций r, u по параметрам s, σ .

Обоснование перечисленных фактов стандартно (см. [6], [10]): для остатков в формулах (25) обычным образом получаем интегральные уравнения, к которым затем применяем принцип сжимающих отображений. Поэтому здесь и ниже ограничимся изложением только алгоритмической части доказательства.

При $\varphi \geq \mu^{-\lambda}$ сделаем в (23) замены $\xi = -\mu \ln r$, $\varphi - \varphi_0^0 = \theta/\varepsilon$ и отбросим экспоненциально малые члены. В результате получим систему

$$\frac{d\xi}{d\theta} = -D(0, \varphi_0^0 + \theta/\mu, u, \mu), \quad \frac{du}{d\theta} = h(\varphi_0^0 + \theta/\mu, u, \mu), \quad (26)$$

где для функции h справедливо асимптотическое представление (ср. с (24₂))

$$h = u^{-p} \left[\frac{1}{u} \frac{b_1(0)}{\omega_1} + \frac{\mu}{u^2} H_2(0, \varphi_0^0 + \theta/\mu) + \dots \right].$$

Дополняя систему (26) начальными условиями, получающимися из (25) при $\varphi = \mu^{-\lambda}$, для соответствующего решения $(\xi(\theta, \mu), u(\theta, \mu))$ приходим к асимптотическим формулам

$$\begin{aligned}\xi(\theta, \mu) &= \alpha_1 \theta + O(\mu^{1-\lambda}), \\ u(\theta, \mu) &= \left(u_0^{2+p} + \frac{(2+p)b_1(0)}{\omega_1} \theta \right)^{1/(2+p)} + O(\mu^{1-\lambda}),\end{aligned}\quad (27)$$

где

$$u_0 = \left((v_0^0)^{1+p} + (1+p) \int_{\varphi_0^0}^{\infty} H_0(r_0 \exp(-\alpha_1(\tau - \varphi_0^0)), \tau) d\tau \right)^{1/(1+p)}. \quad (28)$$

Формулы (27) справедливы равномерно по $\mu^{1-\lambda} \leq \theta \leq \bar{\theta}$, где $\bar{\theta}$ — произвольно фиксированное число из интервала $(0, \theta_0)$, $\theta_0 = -u_0^{2+p}\omega_1/(2+p)b_1(0)$. Кроме того, здесь, как и выше, допустимо дифференцирование по параметрам s, σ .

Для завершения исследования оператора $\Pi_2 \cdot \Pi_1$ определим функцию $\theta_* = \theta_*(s, \sigma, \mu)$ из уравнения $u(\theta, \mu) = u_*$ (считаем, что $u_* < u_0$) и положим $\xi_*(s, \sigma, \mu) = \xi(\theta, \mu)|_{\theta=\theta_*}$. В итоге приходим к следующему утверждению.

ЛЕММА 2. *Отображение $\Pi_2 \cdot \Pi_1$ задается формулами*

$$\theta = \theta_*(s, \sigma, \mu), \quad \xi = \xi_*(s, \sigma, \mu), \quad (29)$$

где 2π -периодические по σ функции θ_*, ξ_* допускают асимптотические представления (в метрике $C^1(S)$)

$$\theta_* = \theta_*^0(s, \sigma) + O(\mu^{1-\lambda}), \quad \xi_* = \alpha_1 \theta_*^0(s, \sigma) + O(\mu^{1-\lambda}). \quad (30)$$

Здесь $\theta_*^0 = -\omega_1(u_0^{2+p} - u_*^{2+p})/(2+p)b_1(0)$, а u_0 — функция (28).

§ 6. Анализ оператора $\Pi_3 \cdot \Pi_2 \cdot \Pi_1$

Дальнейший анализ связан с системой

$$\frac{d\theta}{du} = \frac{1}{h}, \quad \frac{d\xi}{du} = -\frac{D(0, \varphi_0^0 + \theta/\mu, u, \mu)}{h},$$

получающейся из системы (26). Рассмотрим для нее задачу Коши с начальными условиями

$$\theta(u, \mu)|_{u=u_*} = \theta_*, \quad \xi(u, \mu)|_{u=u_*} = \xi_*,$$

где θ_*, ξ_* — функции (29), и учтем асимптотические равенства (30). В результате получим представления

$$\begin{aligned}\theta(u, \mu) &= \frac{\omega_1[u^{2+p} - u_0^{2+p}]}{(2+p)b_1(0)} + O(\mu^{1-\lambda}), \\ \xi(u, \mu) &= \frac{\alpha_1 \omega_1[u^{2+p} - u_0^{2+p}]}{(2+p)b_1(0)} + O(\mu^{1-\lambda}),\end{aligned}\quad (31)$$

допускающие дифференцирование по s, σ и справедливые равномерно по $\mu^\lambda \leq u \leq u_*$, $1/3 < \lambda < 1$.

При $u \leq \mu^\lambda$ сделаем в системе (3) последовательно замены (19₁), $\xi = -\mu \ln r$, $\varphi - \varphi_0^0 = \theta/\mu$, отбросим экспоненциально малые члены вида $\exp(-\xi/\mu)$ и возьмем y за новое время. Указанная последовательность действий приводит к системе

$$\frac{d\xi}{dy} = \frac{\mu^{2+p} W_1(y, \varphi_0^0 + \theta/\mu)}{g(0, y)}, \quad \frac{d\theta}{dy} = \frac{\mu^{2+p} W_2(y, \varphi_0^0 + \theta/\mu)}{g(0, y)}, \quad (32)$$

где 2π -периодические по φ функции $W_1(y, \varphi)$, $W_2(y, \varphi)$ при $y \rightarrow +\infty$ допускают асимптотические представления (вытекающие из (6) и обладающие теми же свойствами):

$$W_1 = y^{n_1} \left[w_1^0(\varphi) + \frac{w_1^1(\varphi)}{y} + \frac{w_1^2(\varphi)}{y^2} + \dots \right], \quad (33_1)$$

$$W_2 = y^{n_2} \left[w_2^0(\varphi) + \frac{w_2^1(\varphi)}{y} + \frac{w_2^2(\varphi)}{y^2} + \dots \right]. \quad (33_2)$$

Рассмотрим для системы (32) задачу Коши с начальными условиями

$$\xi|_{y=\mu^{\lambda-1}} = \xi(u, \mu)|_{u=\mu^\lambda}, \quad \theta|_{y=\mu^{\lambda-1}} = \theta(u, \mu)|_{u=\mu^\lambda}, \quad (34)$$

где $\xi(u, \mu)$, $\theta(u, \mu)$ — функции (31). Несложный анализ (с учетом формул (31) и представлений (33)) показывает, что для решений задачи (32), (34) равномерно по $y_0 \leq y \leq \mu^{\lambda-1}$ справедливы асимптотические формулы

$$\begin{aligned} \xi(y, \mu) &= -\frac{\alpha_1 \omega_1 u_0^{2+p}}{(2+p)b_1(0)} + O(\mu^{1-\lambda}), \\ \theta(y, \mu) &= -\frac{\omega_1 u_0^{2+p}}{(2+p)b_1(0)} + O(\mu^{1-\lambda}), \quad \frac{1}{2} < \lambda < 1, \end{aligned} \quad (35)$$

которые, как и выше, допускают дифференцирование по s, σ .

Суммируем сказанное в виде леммы.

ЛЕММА 3. *Оператор $\Pi_3 \cdot \Pi_2 \cdot \Pi_1$ задается формулами*

$$\xi = \xi_{**}(s, \sigma, \mu), \quad \theta = \theta_{**}(s, \sigma, \mu), \quad (36)$$

причем для функций ξ_{**} , θ_{**} в метрике $C^1(S)$ имеют место асимптотические представления (35).

§ 7. Структура оператора $\Pi_4 \cdot \Pi_3 \cdot \Pi_2 \cdot \Pi_1$

Отметим, что из структуры правых частей системы (32) и свойств функции $g(0, y)$ (а именно: $g(0, 0) = 0$, $g'_y(0, 0) < 0$) вытекает справедливость асимптотических формул (35) вплоть до $y = \exp(-\mu^{\lambda-1})$, $1/2 < \lambda < 1$. Геометрически это означает, что “падение” на интегральное многообразие $y = \Phi(x, \varepsilon)$ медленных движений происходит примерно по прямой.

При $0 < y \leq \exp(-\mu^{\lambda-1})$ сделаем в системе (3) замены переменных (19₂), $\varkappa = -\varepsilon \ln(y - \Phi(x, \varepsilon))$ и отбросим экспоненциально малые члены. В итоге приходим к системе

$$\frac{d\rho}{d\psi} = \frac{\tau_2(\varepsilon)}{\omega_2(\varepsilon)}\rho, \quad \frac{d\varkappa}{d\psi} = G(\rho, \psi, \varepsilon), \quad (37)$$

где G — функция, получающаяся при подстановке формулы (19₂) в выражение

$$-g'_y(x, \Phi(x, \varepsilon)) + \varepsilon(\Phi'_x(x, \varepsilon), f'_y(x, \Phi(x, \varepsilon))).$$

Нахождение начальных условий для системы (37) связано с формулами

$$\psi = \beta_1(\varphi), \quad \rho = \beta_2(\varphi, r, \varepsilon)r, \quad \beta_2(\varphi, 0, 0) = \beta_2(\varphi),$$

где $\beta_1(\varphi)$, $\beta_2(\varphi)$ — функции (12), осуществляющими пересчет координат (19). Подставляя в них $\varphi = \varphi_0^0 + \theta_{**}/\mu$, $r = \exp(-\xi_{**}/\mu)$, где θ_{**} , ξ_{**} — функции (36), и отбрасывая экспоненциально малые величины, находим начальные условия, которые следует поставить для системы (37):

$$\psi_* = \beta_1(\varphi_0^0 + \theta_{**}/\mu), \quad \rho_* = \beta_2(\varphi_0^0 + \theta_{**}/\mu, 0, \varepsilon) \exp(-\xi_{**}/\mu), \quad \varkappa_* = \mu^{\lambda+p}. \quad (38)$$

Пренебрегая, далее, в задаче (37), (38) величинами порядка малости $\mu^{\lambda+p}$ и выше, для решения системы (37) с начальными условиями $\rho|_{\psi=\psi_*} = \rho_*$, $\varkappa|_{\psi=\psi_*} = \varkappa_*$ получим формулы

$$\rho = \rho_* \exp(\alpha_2(\psi - \psi_*)), \quad \varkappa = \int_{\psi_*}^{\psi} G_0(\rho_* \exp(\alpha_2(\tau - \psi_*)), \tau) d\tau,$$

где $G_0 = G(\rho, \psi, 0)$.

Для завершения исследования оператора $\Pi_4 \cdot \Pi_3 \cdot \Pi_2 \cdot \Pi_1$ определим функцию $\psi_{**} = \psi_{**}(s, \sigma, \varepsilon)$ из уравнения $\rho(\psi, \varepsilon) = \rho_0$, где ρ_0 — константа, фигурирующая в определении Σ_2 , и положим $\varkappa_{**} = \varkappa(\psi, \varepsilon)|_{\psi=\psi_{**}}$. В результате приходим к следующему утверждению.

ЛЕММА 4. Оператор $\Pi_4 \cdot \Pi_3 \cdot \Pi_2 \cdot \Pi_1$ задается формулами

$$\psi = \psi_{**}(s, \sigma, \varepsilon), \quad \varkappa = \varkappa_{**}(s, \sigma, \varepsilon), \quad (39)$$

где с точностью до величин порядка $\mu^{1-\lambda}$, $1/2 < \lambda < 1$, в метрике $C^1(S)$ для функций ψ_{**} , $\varkappa_{**}$ справедливы равенства

$$\psi_{**} = \psi_* + \frac{1}{\alpha_2} \ln \frac{\rho_0}{\rho_*}, \quad \varkappa_{**} = \int_{\psi_*}^{\psi_{**}} G_0(\rho_* \exp(\alpha_2(\tau - \psi_*)), \tau) d\tau.$$

§ 8. Окончание доказательства

Положим $\tau = y - \Phi(x, \varepsilon)$. Из содержащихся в монографии [6] результатов следует, что оператор Π_5 задается равенствами

$$\sigma = J_1(\tau, \psi, \varepsilon), \quad s = J_2(\tau, \psi, \varepsilon) \exp(-\alpha/\varepsilon), \quad \alpha > 0, \quad (40)$$

где функция $J_2(\tau, \psi, \varepsilon)$, $J_2(0, \psi, \varepsilon) \equiv 0$, ограничена равномерно по ε вместе со своими первыми производными по τ, ψ , а для J_1 в C^1 -метрике справедливо асимптотическое представление

$$J_1 = J_{10}(\psi) + O(\varepsilon^{2/3}).$$

Здесь $J_{10}(\psi)$, $J_{10}(\psi + 2\pi) \equiv J_{10}(\psi) + 2\pi$, $J'_{10}(\psi) > 0$, — функция соответствия между кривыми $\rho = \rho_0$ и $x = v(\sigma)$ по траекториям системы (5). Подставляя $\tau = \exp(-\varkappa_{**}/\varepsilon)$, $\psi = \psi_{**}$ в равенства (40), где $\varkappa_{**}$, ψ_{**} — функции (39), и учитывая вытекающие из лемм 1–4 дифференциальные свойства этих функций, убеждаемся в справедливости как оценок (16), так и асимптотических представлений (17). Далее, для функции $\gamma(\sigma, \varepsilon)$ (см. (17)) получаем формулу

$$\gamma = J'_{10}(\psi_{**}) \left[\beta'_1(\varphi_0^0 + \theta_{**}/\mu) + \frac{\alpha_1}{\alpha_2} - \frac{1}{\alpha_2} \frac{\beta'_2(\varphi_0^0 + \theta_{**}/\mu)}{\beta_2(\varphi_0^0 + \theta_{**}/\mu)} \right],$$

где функции ψ_{**} , φ_0^0 , θ_{**} взяты при $s = 0$, из которой (см. условие 8) следуют равенства (18). Теорема доказана.

§ 9. “Охота на цикл”

Полученные для системы (3) результаты распространим теперь на систему

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + yAx, & \varepsilon \dot{y} &= g(x, y)y; \\ x &\in \mathbb{R}^2, \quad y \in \mathbb{R}; & 0 < \varepsilon &\ll 1; \quad f, g \in C^\infty, \end{aligned} \quad (41)$$

представляющую непосредственный аналог задачи хищник-жертва (1).

Основное ограничение, накладываемое на систему (41), состоит в том, что система

$$\dot{x} = f(x) \quad (42)$$

имеет единственное состояние равновесия $x = 0$, являющееся экспоненциально неустойчивым фокусом и окруженное глобально экспоненциально орбитально устойчивым циклом $L = \{x = v(t), 0 \leq t \leq T_0\}$. Таким образом, система (42) — аналог уравнения (2).

Считаем, далее, что собственные значения матрицы A комплексные и лежат слева от мнимой оси; для матриц A и $f'(0)$ справедливы условия 6, 8 из § 1, причем неравенство (13) заменено на более ограничительное:

$$\alpha_1 - \beta'_2(\varphi)/\beta_2(\varphi) > 0; \quad (43)$$

при $y \rightarrow +\infty$ для функции $g(x, y)$ справедливо асимптотическое представление (6₂) при $n_2 = 0$ с теми же свойствами коэффициентов; выполняется условие 7 из § 1 для функции

$$z(\sigma) = \int_0^\infty b_0(\exp(At)v(\sigma)) dt, \quad 0 \leq \sigma \leq T_0;$$

равенство $h(x, 0) = 0$ определяет в $\mathbb{R}^2$ простую замкнутую кривую l класса C^∞ , лежащую в ограниченной области Ω_1 , $\partial\Omega_1 = L$. Кроме того,

$$\begin{aligned} h(x, 0) < 0 & \quad \text{при } x \in \Omega_2; & h(x, 0) > 0 & \quad \text{при } x \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega}_2; \\ h(x, y) > 0 & \quad \text{при } x \in L, \ y \geq 0; & h(0, y) < 0 & \quad \text{при } y \geq 0. \end{aligned}$$

Здесь Ω_2 – ограниченная область с границей $\partial\Omega_2 = l$; $\overline{\Omega}_2 = \Omega_2 + l$.

Всем перечисленным предположениям удовлетворяют, например, матрица $A = -f'(0)$ и функция $g(x, y) = ax_1^2 + bx_2^2 - c(1 + y)^{-1}$, $y > -1$, при подходящем выборе постоянных $a, b, c > 0$ (систему (42) считаем заданной и удовлетворяющей нужным условиям). Действительно, проверка всех условий (за исключением аналога условия 7) тривиальна. Поскольку всегда найдутся такие постоянные $a, b > 0$, что $z(\sigma) \neq 0$, то условие 7 в данном случае характеризует некоторую общность положения. Таким образом, практически любая система на плоскости с предельным циклом может быть построена до системы (41).

При $y \geq y_0$ асимптотическое поведение траекторий системы (41) совпадает с поведением траекторий системы (3) при $n_1 = n_2 = 1$. Некоторые новые моменты возникают, когда фазовая точка “попадает” на интегральное многообразие $y = 0$. Как и раньше, она проводит в окрестности седлового состояния равновесия $(0, 0)$ время порядка ε^{-1} . За это время переменная y приобретает порядок $\exp(-a^2/\varepsilon^2)$ (что следует из структуры уравнения для y и асимптотического представления (6₂)) и убывает до тех пор, пока компонента $x(t, \varepsilon)$ не попадает в область $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega}_2$, где многообразие $y = 0$ неустойчиво. Однако в силу явления затягивания “срыв” с инвариантной плоскости $y = 0$ происходит еще через время порядка ε^{-1} , в течение которого фазовая точка системы (41) “накручивается” на цикл $(v(t), 0)$.

Описанный характер поведения траекторий показывает, что все предыдущие конструкции практически без изменений переносятся на систему (41). Единственная особенность – асимптотически долгая “накрутка” на цикл L – приводит к необходимости замены неравенства (13) на условие (43). Тем самым подтверждается, что здесь имеет место аналог теоремы из § 3.

Закключение. Специально обратим внимание на тот факт, что хаос типа разбитого тора удастся построить в релаксационных системах с двойным вырождением: предполагается существование инвариантного луча (см. условие 3) и предполагается вырождение линии уровня $b_0(x) = 0$ в точку. По всей видимости это вызвано существом дела, так как при нарушении хотя бы одного из этих предположений такого хаоса не будет: при отказе от условия 3 и при некоторой общности положения единственный аттрактор системы (3) – глобально экспоненциально орбитально устойчивый цикл; при отказе от второго вырождения оператор $\Pi(\varepsilon)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ сходится к гладкому одномерному отображению, которое строится при помощи комбинации методов, развитых в публикациях [6], [10].

Список литературы

1. *Hutchinson G. E.* Circular causal systems in ecology // *Ann. N. Y. Acad. of Sci.* 1948. V. 50. P. 221–246.
2. *Пиковский А. С., Рабинович М. И.* Простой автогенератор со стохастическим поведением // *Докл. АН СССР.* 1978. Т. 239. №2. С. 301–304.
3. *Ченцова Н. Н.* Исследование одной модельной системы квазистохастических релаксационных колебаний // *УМН.* 1982. Т. 37. №5. С. 205–206.
4. *Ченцова Н. Н.* Исследование квазистохастического режима автогенератора на туннельном диоде // *Методы качественной теории дифференциальных уравнений.* Горький: Изд-во ГГУ, 1983. С. 95–118.
5. *Колесов А. Ю., Колесов Ю. С., Мищенко Е. Ф., Розов Н. Х.* О явлениях хаоса в трехмерных релаксационных системах // *Матем. заметки.* 1989. Т. 46. №2. С. 153–155.
6. *Мищенко Е. Ф., Колесов Ю. С., Колесов А. Ю., Розов Н. Х.* Периодические движения и бифуркационные процессы в сингулярно возмущенных системах. М.: Физматлит, 1995.
7. *Мищенко Е. Ф., Розов Н. Х.* Дифференциальные уравнения с малым параметром и релаксационные колебания. М.: Физматлит, 1975.
8. *Васильева А. Б., Бутузов В. Ф.* Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М.: Физматлит, 1973.
9. *Митропольский Ю. А., Лыкова О. Б.* Интегральные многообразия в нелинейной механике. М.: Физматлит, 1973.
10. *Колесов А. Ю.* Специфические релаксационные циклы систем типа Лотки–Вольтерра // *Изв. АН СССР. Сер. матем.* 1991. Т. 55. №3. С. 515–536.
11. *Шильников Л. П.* Об одной задаче Пуанкаре–Биргофа // *Матем. сб.* 1967. Т. 74. №3. С. 378–397.
12. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970.
13. *Мищенко Е. Ф., Понтрягин Л. С.* Периодические решения систем дифференциальных уравнений, близких к разрывным // *Докл. АН СССР.* 1955. Т. 102. №5. С. 889–891.
14. *Колесов А. Ю., Колесов Ю. С., Мищенко Е. Ф., Розов Н. Х.* Асимптотическое интегрирование системы в вариациях многомерного релаксационного цикла. I, II // *Дифференц. уравн.* 1987. Т. 23. №11. С. 1881–1889; №12. С. 2036–2047.
15. *Колесов А. Ю., Колесов Ю. С., Мищенко Е. Ф., Розов Н. Х.* Релаксационная система в окрестности точки срыва: сведение к регулярному случаю // *УМН.* 1988. Т. 43. №2. С. 141–142.
16. *Колесов А. Ю., Мищенко Е. Ф.* Асимптотика релаксационных колебаний // *Матем. сб.* 1988. Т. 137. №1. С. 3–18.
17. *Мищенко Е. Ф., Колесов А. Ю.* Асимптотическая теория релаксационных колебаний // *Труды МИАН СССР.* 1991. Т. 197. С. 3–84.

Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова,
 Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Поступила в редакцию
 19.02.1997