Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Т. П. Лукашенко, О коэффициентах систем разложения, подобных ортогональным,
Матем. сб., 1997, том 188, номер 12, 57–72

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm273>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.174.149.18

26 апреля 2023 г., 16:36:13

УДК 517.518+517.982

Т. П. Лукашенко

О коэффициентах систем разложения, подобных ортогональным

В работе изучаются свойства систем разложения, подобных ортогональным. В §1 показано, что такие системы обладают большинством свойств ортогональных систем, и изучены свойства коэффициентов разложений. В §2 для ортоподобных систем разложения дан критерий, позволяющий определять, являются ли они ортогональными проекциями ортогональных систем. В §3 показано, что для системы элементов с естественными условиями выполнение равенства Парсеваля эквивалентно утверждению, что это система разложения, подобная ортогональной.

Библиография: 11 названий.

Введение

Известно, что ортогональные системы и разложения по ним широко применяются в математике и ее приложениях, что объясняется рядом замечательных свойств таких систем. Большинство из них – равенство Парсеваля, теорема Рисса–Фишера, оценка точности приближения, известная как тождество Бесселя, – сохраняются для определяемых ниже систем разложения, подобных ортогональным с неотрицательной мерой. При этом однозначности разложения, как правило, нет. В статье исследовано пространство коэффициентов разложения по таким системам, выяснена его структура; дан критерий, позволяющий определять, является ли данная система разложения ортогональной проекцией некоторой ортогональной системы; доказано, что фигурирующее в определении системы условие разложения элемента по системе при некоторых естественных ограничениях эквивалентно условию выполнения равенства Парсеваля.

§1. Определения и основные свойства

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть H – гильбертово пространство над полем $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$ (не обязательно сепарабельное), а Ω – пространство со счетно аддитивной, соответственно, действительной или комплексной мерой μ (см. [1, гл. III, 1, 2]). Систему элементов $\{e^\omega\}_{\omega \in \Omega} \subset H$ будем называть *ортоподобной* (*подобной ортогональной*) *системой разложения* в H , если любой элемент $y \in H$ можно представить в виде

$$y = \int_{\Omega} \hat{y}_{\omega} e^{\omega} d\mu(\omega), \quad (1)$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-01-00332), программы поддержки ведущих научных школ РФ (грант № 96/97-15-96073) и INTAS (грант № 94-1044).

где $\hat{y}_\omega = (y, e^\omega)$, интеграл понимается как собственный или несобственный интеграл Лебега от функции со значениями в H , причем в последнем случае есть такое исчерпывание $\{\Omega_k\}_{k=1}^\infty$ пространства Ω (все Ω_k измеримы, $\Omega_k \subset \Omega_{k+1}$ для $k \in \mathbb{N}$ и $\bigcup_{k=1}^\infty \Omega_k = \Omega$), быть может, зависящее от y и называемое *подходящим* для y , что функция $\hat{y}_\omega e^\omega$ интегрируема по Лебегу на Ω_k и

$$y = \int_{\Omega} \hat{y}_\omega e^\omega d\mu(\omega) \equiv \lim_{k \rightarrow \infty} (L) \int_{\Omega_k} \hat{y}_\omega e^\omega d\mu(\omega). \quad (2)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Систему элементов $\{e^\omega\}_{\omega \in \Omega} \subset H$ будем называть *неотрицательной* (с неотрицательной мерой), если Ω пространство со счетно аддитивной неотрицательной мерой μ .

ЗАМЕЧАНИЕ 1 (об интегрировании). Используемое в определении 1 понятие интеграла является, по мнению автора, наиболее пригодным для излагаемой далее теории, хотя попытки использования других интегралов также могут быть интересны.

ЗАМЕЧАНИЕ 2 (о числовом множителе). Разумеется, в интегралы в формулах (1) и (2) можно добавить действительнзначный или комплекснзначный множитель $a(\omega)$, но от него легко избавиться переходом к системе $\{s^\omega\} = \{\sqrt{|a(\omega)|} e^\omega\}$ и мере

$$\eta(E) = (L) \int_E \frac{a(\omega)}{|a(\omega)|} d\mu(\omega)$$

(здесь считаем $0/0 = 0$),

$$(L) \int_{\Omega_{(k)}} a(\omega) (y, e^\omega) e^\omega d\mu(\omega) = (L) \int_{\Omega_{(k)}} (y, s^\omega) s^\omega d\eta(\omega),$$

где $\Omega_{(k)} = \Omega$ или Ω_k (см. [1, гл. III, 10, 6]). Существуют и другие переходы, также избавляющие от множителя $a(\omega)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3 (об ортоподобных рядах). В случае, если Ω — конечное подмножество множества натуральных чисел $\mathbb{N}$ и для любого $k \in \Omega$ $\mu(k) = 1$ (> 0), получается определение конечной неотрицательной ортоподобной системы разложения, содержащее, как частный случай, конечные полные ортонормированные (ортогональные) системы. В случае, если $\Omega = \mathbb{N}$, для любого $k \in \mathbb{N}$ $\mu(k) = 1$ (> 0) и $\Omega_k = \{1, \dots, k\}$ получается определение счетной неотрицательной ортоподобной системы разложения с обычной сходимостью, содержащее, как частный случай, счетные полные ортонормированные (ортогональные) системы и ряды по ним (известные как ортогональные ряды). Более чем счетные полные ортонормированные (ортогональные) системы также входят в число неотрицательных ортоподобных систем разложения.

Ортоподобные неотрицательные системы разложения по своим свойствам во многом похожи на полные ортогональные системы, как видно из нижеследующих теорем.

ТЕОРЕМА 1 (аналог равенства Парсеваля). *Если $\{e^\omega\}_{\omega \in \Omega} \subset H$ – неотрицательная ортоподобная система разложения в H , то для любого элемента $y \in H$*

$$\|y\|^2 = (L) \int_{\Omega} |\widehat{y}_\omega|^2 d\mu(\omega) = (L) \int_{\Omega} |(y, e^\omega)|^2 d\mu(\omega), \quad (3)$$

для любых элементов $y, z \in H$

$$(y, z) = (L) \int_{\Omega} \widehat{y}_\omega \overline{\widehat{z}_\omega} d\mu(\omega) = (L) \int_{\Omega} (y, e^\omega) \overline{(z, e^\omega)} d\mu(\omega). \quad (4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как скалярное произведение является при фиксированном втором аргументе непрерывным линейным оператором от первого аргумента, то согласно [1, гл. III, 2, 19]

$$\left((L) \int_{\Omega_{(k)}} \widehat{y}_\omega e^\omega d\mu(\omega), z \right) = (L) \int_{\Omega_{(k)}} \widehat{y}_\omega \overline{(z, e^\omega)} d\mu(\omega) = (L) \int_{\Omega_{(k)}} \widehat{y}_\omega \overline{\widehat{z}_\omega} d\mu(\omega),$$

где $\Omega_{(k)}$ – это или Ω , или Ω_k . В случае собственного интеграла Лебега на Ω теорема доказана. В случае несобственного интеграла, переходя к пределу при $k \rightarrow \infty$ в интегралах по Ω_k , получаем, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (L) \int_{\Omega_k} \widehat{y}_\omega \overline{\widehat{z}_\omega} d\mu(\omega) = (y, z).$$

Полагая в этом равенстве $z = y$, получаем, что

$$(L) \int_{\Omega} |\widehat{y}_\omega|^2 d\mu(\omega) = \lim_{k \rightarrow \infty} (L) \int_{\Omega_k} |\widehat{y}_\omega|^2 d\mu(\omega) = \|y\|^2.$$

Так как $|\widehat{y}_\omega \overline{\widehat{z}_\omega}|$ оценивается сверху суммируемой функцией $\frac{1}{2} (|\widehat{y}_\omega|^2 + |\widehat{z}_\omega|^2)$, то измеримая функция $\widehat{y}_\omega \overline{\widehat{z}_\omega}$ интегрируема по Лебегу на Ω (см. [1, гл. III, 2, 22]) и

$$(L) \int_{\Omega} \widehat{y}_\omega \overline{\widehat{z}_\omega} d\mu(\omega) = \lim_{k \rightarrow \infty} (L) \int_{\Omega_k} \widehat{y}_\omega \overline{\widehat{z}_\omega} d\mu(\omega) = (y, z).$$

Теорема доказана.

ПРИМЕЧАНИЕ. Можно показать, что равенство Парсеваля выполняется и в случае знакопеременной или комплексной меры при понимании интегралов в формулах (3) и (4) как несобственных интегралов Лебега.

После теоремы 1 может показаться, что естественное отображение $y \mapsto \widehat{y}_\omega$, $\widehat{y}_\omega = (y, e^\omega)$ является унитарным (сохраняющим скалярное произведение) линейным оператором из гильбертова пространства H в пространство Лебега $L^2(\Omega)$. Но этого может не быть из-за неизмеримости функций $\widehat{y}_\omega = (y, e^\omega)$ – коэффициентов разложения. В самом деле, если $\{e^\omega\}_{\omega \in \Omega} \subset H$ – ортоподобная система разложения в H , а $\theta(\omega)$ – функция на Ω со значениями в $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$ в зависимости от того, над каким полем рассматривается H , $|\theta(\omega)| \equiv 1$ на Ω , то для любого элемента $y \in H$ и любого $\omega \in \Omega$ верно равенство $(y, \theta(\omega)e^\omega)\theta(\omega)e^\omega = (y, e^\omega)e^\omega$. И значит, система $\{\theta(\omega)e^\omega\}_{\omega \in \Omega} \subset H$ – также ортоподобная система разложения в H . Но функция $(y, \theta(\omega)e^\omega) = \overline{\theta(\omega)}(y, e^\omega)$ при этом может оказаться неизмеримой. В связи с этим введем следующее определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Неотрицательную систему $\{e^\omega\}_{\omega \in \Omega} \subset H$ будем называть *измеримой*, если все функции $\widehat{y}_\omega = (y, e^\omega)$ измеримы.

Для измеримой неотрицательной ортоподобной системы разложения отображение $y \mapsto \widehat{y}_\omega$ является унитарным (сохраняющим скалярное произведение) линейным оператором из гильбертова пространства H в пространство Лебега $L^2(\Omega)$, и образ H – замкнутое подпространство в $L^2(\Omega)$.

В случае счетно конечного пространства с мерой Ω любую неотрицательную ортоподобную систему можно сделать измеримой умножением на функцию, модулю равную единице. Для доказательства этого нам понадобится следующая лемма.

ЛЕММА. Если пространство Ω со счетно аддитивной неотрицательной мерой μ счетно конечно (является не более чем счетным объединением множеств конечной меры), а Ξ – множество функций на Ω со значениями в $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, причем для любых двух функций $\varphi(\omega), \psi(\omega) \in \Xi$ произведение $\varphi(\omega)\overline{\psi(\omega)}$ измеримо на Ω , то существует такая функция $\theta(\omega)$ на Ω со значениями, соответственно, в $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, $|\theta(\omega)| = 1$ на Ω , что для любой функции $\varphi(\omega) \in \Xi$ функция $\overline{\theta(\omega)}\varphi(\omega)$ измерима на Ω .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем сначала, что для любого множества конечной меры E найдется такая функция $\theta(\omega)$ на E , $|\theta(\omega)| = 1$ на E , что для любой функции $\varphi(\omega) \in \Xi$ функция $\overline{\theta(\omega)}\varphi(\omega)$ измерима на E .

Если все функции $\varphi(\omega)$ равны нулю почти всюду на E , то подходящей будет любая функция $\theta(\omega)$, $|\theta(\omega)| = 1$ на E , например, $\theta(\omega) \equiv 1$.

Если не все функции равны нулю почти всюду на E , то построим конечную или бесконечную последовательность функций $\varphi_n(\omega)$ следующим образом:

$$\begin{aligned} \mu(\{\omega \in E \mid |\varphi_n(\omega)| > 0, |\varphi_k(\omega)| = 0 \text{ при } 1 \leq k < n\}) \\ > \frac{1}{2} \sup_{\varphi \in \Xi} \mu(\{\omega \in E \mid |\varphi(\omega)| > 0, |\varphi_k(\omega)| = 0 \text{ при } 1 \leq k < n\}), \end{aligned} \quad (5)$$

по условию функция $|\varphi(\omega)|^2$, а значит, и множество $\{\omega \in E \mid |\varphi(\omega)| > 0\}$ измеримо для любой $\varphi \in \Xi$. Построение может оборваться только в том случае, если $\sup$ в (5) равен нулю. Теперь докажем, что на множестве

$$E \setminus \bigcup_n \{\omega \in E \mid |\varphi_n(\omega)| > 0, |\varphi_k(\omega)| = 0 \text{ при } 1 \leq k < n\}$$

любая функция $\varphi(\omega)$ равна нулю почти всюду. Действительно, если бы существовала такая функция $\varphi(\omega)$, что $\mu\{\omega \in E \mid |\varphi(\omega)| > 0, \varphi_n(\omega) = 0 \text{ при всех } n\} > 0$, то в случае конечной последовательности это противоречило бы тому, что $\sup$ в (5) равен нулю для последнего номера n , а в случае бесконечной последовательности это противоречило бы тому, что в силу конечности меры E $\sup$ в (5) стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$ (ведь невозможно построить на E бесконечную последовательность непересекающихся измеримых множеств, меры которых не стремятся к нулю). Определим теперь функцию $\theta(\omega)$ на E следующим образом:

$$\theta(\omega) = \begin{cases} \frac{\varphi_n(\omega)}{|\varphi_n(\omega)|} & \text{на } \{\omega \in E \mid |\varphi_n(\omega)| > 0, |\varphi_k(\omega)| = 0 \text{ при } 1 \leq k < n\}, \\ 1 & \text{на } E \setminus \bigcup_n \{\omega \in E \mid |\varphi_n(\omega)| > 0, |\varphi_k(\omega)| = 0 \text{ при } 1 \leq k < n\}. \end{cases}$$

Так как по условию для любых $\varphi(\omega) \in \Xi$ и n произведение $\varphi(\omega)\overline{\varphi_n(\omega)}$ измеримо, то построенная функция $\theta(\omega)$ на E – искомая.

Пространство с мерой Ω по условию счетно конечно, его можно представить в виде не более чем счетного объединения попарно непересекающихся множеств конечной меры. Построив на каждом из них функцию $\theta(\omega)$, получим искомую функцию на всем пространстве Ω .

ТЕОРЕМА 2 (об измеримости системы). *Если $\{e^\omega\}_{\omega \in \Omega} \subset H$ – неотрицательная ортоподобная система разложения в H , а пространство с мерой Ω счетно конечно (является не более чем счетным объединением множеств конечной меры), то существует такая функция $\theta(\omega)$ на Ω со значениями в $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$ в зависимости от того, над каким полем рассматривается H , $|\theta(\omega)| = 1$ на Ω , что $\{\theta(\omega)e^\omega\}_{\omega \in \Omega}$ – измеримая неотрицательная ортоподобная система разложения в H .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как пространство с мерой Ω и множество функций $\Xi = \{\widehat{y}_\omega\}_{y \in H}$ удовлетворяют условиям леммы, функция $\theta(\omega)$ из нее и будет искомой.

В дальнейшем изложении в основном будем рассматривать измеримые неотрицательные ортоподобные системы разложения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Далее при рассмотрении измеримой неотрицательной ортоподобной системы разложения образ H в пространстве $L^2(\Omega)$ при отображении $y \mapsto \widehat{y}_\omega$ будем обозначать $L_H^2(\Omega)$ или, короче, L_H^2 . Это множество коэффициентов разложений элементов $y \in H$ по формуле (1):

$$L_H^2(\Omega) = \{c(\omega) \in L^2(\Omega) \mid c(\omega) = \widehat{y}_\omega \text{ для некоторого } y \in H\}.$$

Для ортоподобных систем разложения наряду с разложениями по формуле (1) могут существовать и другие разложения. Рассмотрим их свойства.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $\{e^\omega\}_{\omega \in \Omega}$ – измеримая неотрицательная ортоподобная система разложения в H , а $c(\omega)$ – функция из пространства Лебега $L^2(\Omega)$ со значениями в $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$ в зависимости от того, над каким полем рассматривается H , и

$$y = \int_{\Omega} c(\omega)e^\omega d\mu(\omega). \quad (6)$$

Интеграл понимается как собственный или несобственный интеграл Лебега от функции со значениями в H , причем в последнем случае есть такое исчерпывание $\{\Omega_k\}_{k=1}^\infty$ пространства Ω (все Ω_k измеримы, $\Omega_k \subset \Omega_{k+1}$ для $k \in \mathbb{N}$ и $\bigcup_{k=1}^\infty \Omega_k = \Omega$), что функция $c(\omega)e^\omega$ интегрируема по Лебегу на Ω_k и

$$\int_{\Omega} c(\omega)e^\omega d\mu(\omega) = \lim_{k \rightarrow \infty} (L) \int_{\Omega_k} c(\omega)e^\omega d\mu(\omega).$$

Тогда для любого $z \in H$

$$(y, z) = (L) \int_{\Omega} c(\omega)\overline{\widehat{z}_\omega} d\mu(\omega). \quad (7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как скалярное произведение является при фиксированном втором аргументе непрерывным линейным оператором от первого аргумента, то согласно [1, гл. III, 2, 19]

$$\left((L) \int_{\Omega_{(k)}} c(\omega) e^{\omega} d\mu(\omega), z \right) = (L) \int_{\Omega_{(k)}} c(\omega) \overline{(z, e^{\omega})} d\mu(\omega) = (L) \int_{\Omega_{(k)}} c(\omega) \widehat{z}_{\omega} d\mu(\omega),$$

где $\Omega_{(k)}$ — это или Ω , или Ω_k . В случае собственного интеграла Лебега на Ω теорема доказана. В случае несобственного интеграла, переходя к пределу при $k \rightarrow \infty$ в интегралах по Ω_k , получаем, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (L) \int_{\Omega_k} c(\omega) \widehat{z}_{\omega} d\mu(\omega) = (y, z).$$

По условию $c(\omega) \in L^2(\Omega)$, по определению 3 $\widehat{z}_{\omega} \in L^2(\Omega)$, значит, $c(\omega) \widehat{z}_{\omega}$ интегрируема на Ω как произведение интегрируемых в квадрате на Ω измеримых функций (см. [1, гл. III, 6, 17]) и

$$(L) \int_{\Omega} c(\omega) \widehat{z}_{\omega} d\mu(\omega) = \lim_{k \rightarrow \infty} (L) \int_{\Omega_k} c(\omega) \widehat{z}_{\omega} d\mu(\omega) = (y, z).$$

Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ. При выполнении условий теоремы 3

$$\|y\|^2 \leq (L) \int_{\Omega} |c(\omega)|^2 d\mu(\omega),$$

причем равенство имеет место тогда и только тогда, когда $c(\omega) = \widehat{y}_{\omega}$ почти всюду на Ω .

Действительно, полагая в теореме $z = y$, получаем

$$\begin{aligned} \|y\|^2 &= (L) \int_{\Omega} c(\omega) \widehat{y}_{\omega} d\mu(\omega) \leq \left((L) \int_{\Omega} |c(\omega)|^2 d\mu(\omega) \right)^{1/2} \cdot \left((L) \int_{\Omega} |\widehat{y}_{\omega}|^2 d\mu(\omega) \right)^{1/2} \\ &= \left((L) \int_{\Omega} |c(\omega)|^2 d\mu(\omega) \right)^{1/2} \cdot \|y\| \end{aligned}$$

по неравенству Коши–Буняковского–Шварца или неравенству Гёльдера для L^2 (см. [2, т. 2, гл. I, §5] или [1, гл. III, 3, 2 и гл. III, 10, 42]) и по теореме 1, причем равенство имеет место тогда и только тогда, когда $c(\omega) = \widehat{y}_{\omega}$ почти всюду на Ω .

ТЕОРЕМА 4. Пусть $\{e^{\omega}\}_{\omega \in \Omega}$ — ортоподобная неотрицательная система разложения в H , $c(\omega)$ — функция из пространства Лебега $L^2(\Omega)$ со значениями в $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$ в зависимости от того, над каким полем рассматривается H , а $\{\Lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ — такая последовательность измеримых подмножеств Ω , что ее нижний предел (см. [1, гл. III, 4, 3]) $\varliminf_{k \rightarrow \infty} \Lambda_k = \Omega$ и функция $c(\omega)e^{\omega}$ интегрируема по Лебегу на Λ_k . Тогда в H существует

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (L) \int_{\Lambda_k} c(\omega) e^{\omega} d\mu(\omega).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, $(L) \int_{\Lambda_k} c(\omega) e^\omega d\mu(\omega)$ – фундаментальная и, значит, сходящаяся последовательность, так как при $n, m > N$

$$\begin{aligned} & \left\| (L) \int_{\Lambda_n} c(\omega) e^\omega d\mu(\omega) - (L) \int_{\Lambda_m} c(\omega) e^\omega d\mu(\omega) \right\|^2 \\ & \leq (L) \int_{\Lambda_n \Delta \Lambda_m} |c(\omega)|^2 d\mu(\omega) \leq (L) \int_{\Omega \setminus (\Lambda_n \cap \Lambda_m)} |c(\omega)|^2 d\mu(\omega) \\ & \leq (L) \int_{\Omega \setminus \bigcap_{k>N} \Lambda_k} |c(\omega)|^2 d\mu(\omega) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

по теореме Лебега о предельном переходе под знаком интеграла [1, гл. III, 3, 7], ведь $|c(\omega)|^2 \geq |c(\omega)|^2 \chi_{\Omega \setminus \bigcap_{k>N} \Lambda_k}(\omega) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$ всюду на Ω ($\Lambda_n \Delta \Lambda_m = (\Lambda_n \cup \Lambda_m) \setminus (\Lambda_n \cap \Lambda_m)$ – симметрическая разность).

Доказанная теорема является аналогом известной для ортонормированных систем теоремы Рисса–Фишера (см. [3, гл. III, §§ 4, 5], [1, гл. IV, 16]).

СЛЕДСТВИЕ. Если $\{e^\omega\}_{\omega \in \Omega}$ – ортоподобная неотрицательная система разложения в H , $c(\omega)$ – функция из пространства Лебега $L^2(\Omega)$ со значениями в $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$ в зависимости от того, над каким полем рассматривается H , то для любой последовательности измеримых множеств $\{\Omega_k\}_{k=1}^\infty$, нижний предел которой $\lim_{k \rightarrow \infty} \Omega_k = \Omega$ (в частности, для любого исчерпывания $\{\Omega_k\}_{k=1}^\infty$ пространства Ω) и на элементах Ω_k которой функция $c(\omega) e^\omega$ интегрируема по Лебегу, существует один и тот же предел в H

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (L) \int_{\Omega_k} c(\omega) e^\omega d\mu(\omega).$$

Действительно, из теоремы 3 следует существование предела для любой указанной в следствии последовательности. А то, что этот предел один и тот же для разных последовательностей, следует из того простого факта, что если Ω является нижним пределом последовательностей $\{\Omega_k\}_{k=1}^\infty$ и $\{\Omega'_k\}_{k=1}^\infty$, то Ω является нижним пределом и смешанной последовательности $\{\Omega_1, \Omega'_1, \Omega_2, \Omega'_2, \dots\}$.

ПРИМЕЧАНИЕ. Вопрос о существовании указанных в следствии последовательностей измеримых множеств $\{\Omega_k\}_{k=1}^\infty$ не прост. Они существуют, если функция $c(\omega) e^\omega$ измерима как функция на Ω со значениями в H . Например, подходящим является исчерпывание Ω , состоящее из множеств

$$\Omega_k = \left\{ \omega \in \Omega \mid \frac{1}{k} < |c(\omega)| \text{ и } \|c(\omega) e^\omega\| < k \right\} \cup \left\{ \omega \in \Omega \mid c(\omega) = 0 \right\}.$$

Введем определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Систему $\{e^\omega\}_{\omega \in \Omega} \subset H$ будем называть L^2 -измеримой, если для любой функции $c(\omega)$ из пространства Лебега $L^2(\Omega)$ со значениями в $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$ в зависимости от того, над каким полем рассматривается H , функция $c(\omega) e^\omega$ измерима как функция на Ω со значениями в H .

ТЕОРЕМА 5 (о L^2 -измеримости). Если $\{e^\omega\}_{\omega \in \Omega}$ – неотрицательная ортоподобная система разложения в H , то для ее L^2 -измеримости необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:

- а) для каждой функции $c(\omega) \in L^2(\Omega)$ и каждого измеримого подмножества $E \subset \Omega$ конечной меры функция $c(\omega)e^\omega$ почти сепарабельнозначна на E ;
- б) для каждого $y \in H$ функция $c(\omega)\hat{y}_\omega$ измерима на Ω .

Теорема непосредственно следует из [1, гл. III, 6, 11].

СЛЕДСТВИЕ (о L^2 -измеримости). Если $\{e^\omega\}_{\omega \in \Omega}$ – неотрицательная ортоподобная система разложения в H , то для ее L^2 -измеримости достаточно, чтобы она была измерима, а H сепарабельно.

ТЕОРЕМА 6 (оценка точности приближения). Пусть $\{e^\omega\}_{\omega \in \Omega}$ – ортоподобная неотрицательная L^2 -измеримая система разложения в H , $c(\omega)$ – функция из пространства Лебега $L^2(\Omega)$ со значениями в $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$ в зависимости от того, над каким полем рассматривается H , а E – измеримое подмножество Ω . Тогда существуют собственные или несобственные (как в определении 1) интегралы Лебега от функции $c(\omega)e^\omega$ по Ω и по E и

$$\left\| \int_{\Omega} c(\omega)e^\omega d\mu(\omega) - \int_E c(\omega)e^\omega d\mu(\omega) \right\|^2 \leq \int_{\Omega \setminus E} |c(\omega)|^2 d\mu(\omega).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из следствия о L^2 -измеримости имеем, что для любого исчерпывания $\{\Omega_k\}_{k=1}^\infty$ пространства Ω , на элементах Ω_k которого функция $c(\omega)e^\omega$ интегрируема по Лебегу, существует один и тот же

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (L) \int_{\Omega_k} c(\omega)e^\omega d\mu(\omega) \equiv \int_{\Omega} c(\omega)e^\omega d\mu(\omega)$$

и для любого исчерпывания $\{E_k\}_{k=1}^\infty$ множества E , на элементах E_k которого функция $c(\omega)e^\omega$ интегрируема по Лебегу, существует один и тот же

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (L) \int_{E_k} c(\omega)e^\omega d\mu(\omega) \equiv \int_E c(\omega)e^\omega d\mu(\omega).$$

Из замечания к теореме 4 и определения 5 следует, что такие исчерпывания существуют. Так как

$$\left(\int_{\Omega} - \int_E \right) c(\omega)e^\omega d\mu(\omega) = \int_{\Omega} c(\omega)\chi_{\Omega \setminus E}(\omega)e^\omega d\mu(\omega),$$

а по следствию к теореме 2

$$\begin{aligned} & \left\| \int_{\Omega} c(\omega)\chi_{\Omega \setminus E}(\omega)e^\omega d\mu(\omega) \right\|^2 \\ & \leq (L) \int_{\Omega} |c(\omega)\chi_{\Omega \setminus E}(\omega)|^2 d\mu(\omega) = (L) \int_{\Omega \setminus E} |c(\omega)|^2 d\mu(\omega), \end{aligned}$$

то теорема 6 доказана.

СЛЕДСТВИЕ (оценка точности приближения). Пусть $\{e^\omega\}_{\omega \in \Omega}$ – ортоподобная неотрицательная L^2 -измеримая система разложения в H , E – измеримое подмножество Ω . Тогда для любого элемента $y \in H$ существует собственный или несобственный (как в определении 1) интеграл Лебега

$$\int_E \hat{y}_\omega e^\omega d\mu(\omega)$$

и

$$\left\| y - \int_E \hat{y}_\omega e^\omega d\mu(\omega) \right\|^2 \leq \|y\|^2 - \int_E |\hat{y}_\omega|^2 d\mu(\omega).$$

Это утверждение непосредственно следует из теорем 4 и 1. Оно является аналогом известной в теории рядов Фурье по ортонормированным системам оценки точности приближения – тождества Бесселя (см. [4]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. В дальнейшем при рассмотрении неотрицательной измеримой системы разложения, подобной ортогональной, будем для любого элемента $y \in H$ множество функций $c(\omega) \in L^2(\Omega)$, для которых выполняется равенство (6), обозначать $L_y^2(\Omega)$ или короче L_y^2 .

ТЕОРЕМА 7. Пусть $\{e^\omega\}_{\omega \in \Omega}$ – ортоподобная неотрицательная L^2 -измеримая система разложения в H , тогда подпространство L_0^2 – ортогональное дополнение L_H^2 в пространстве Лебега $L^2(\Omega)$. Замкнутое подпространство L_0^2 сдвигом на любой элемент множества L_y^2 переходит в L_y^2 . Функция $\hat{y}_\omega = (y, e^\omega)$ является ортогональной проекцией L_y^2 на L_H^2 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из формул (1), (6), (7) и определений 3–6 сразу следует, что L_0^2 – ортогональное дополнение L_H^2 и, значит, замкнутое подпространство (см. [1, гл. IV, 4, 3–4] или [2, т. 1, гл. III, § 1]). Так как разность любых двух элементов L_y^2 – элемент L_0^2 , а сумма любого элемента L_y^2 с любым элементом L_0^2 – элемент L_y^2 , то L_0^2 сдвигом на любой элемент L_y^2 переходит в L_y^2 . Ортогональной проекцией L_y^2 на L_H^2 будет согласно определениям 3, 4 и формуле (1) функция $\hat{y}_\omega = (y, e^\omega)$. Теорема доказана.

В завершение параграфа отметим, что часть приведенных в нем результатов была анонсирована в [5].

§ 2. Об ортогональных проекциях ортогональных систем

В этом параграфе будет изложена теорема о простейшем способе построения ортоподобных неотрицательных систем разложения ортогональным проектированием, будет установлен критерий для ортоподобных неотрицательных систем разложения, которые являются ортогональными проекциями ортогональных систем, и будут приведены примеры континуальных неотрицательных систем разложения, подобных ортогональным.

Простейшим методом получения новых ортоподобных неотрицательных систем разложения является проектирование уже известных систем.

ТЕОРЕМА 8. Если P – оператор ортогонального проектирования в гильбертовом пространстве $\mathbb{H}$ на подпространство H , а $\{e^\omega\}_{\omega \in \Omega} \subset \mathbb{H}$ – ортоподобная система разложения в $\mathbb{H}$ (по определению 1), то ее проекция

$\{P(e^\omega)\}_{\omega \in \Omega} \subset H$ – ортоподобная система разложения в H (причем, если начальная система неотрицательна, то спроектированная система также неотрицательна, а если начальная система измерима, то спроектированная система также измерима).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $y \in H$, то $(y, e^\omega) = (y, P(e^\omega))$, а так как $y = P(y)$, то, используя [1, гл. III, 2, 19], получаем для случаев и собственного, и несобственного интегрирования по Лебегу, что

$$y = P\left(\int_{\Omega} (y, P(e^\omega)) e^\omega d\mu(\omega)\right) = \int_{\Omega} (y, P(e^\omega)) P(e^\omega) d\mu(\omega).$$

Теорема доказана.

Эта теорема позволяет из ортонормированных и ортогональных систем с помощью проектирования получать примеры ортоподобных неотрицательных систем разложения, не являющихся ортогональными. Естественно выяснить, какие системы можно получить таким образом, а какие нельзя. Ответ содержится в следующей теореме.

ТЕОРЕМА 9. Пусть $\{e^\omega\}_{\omega \in \Omega}$ – ортоподобная неотрицательная система разложения в H . Она является ортогональной проекцией на H некоторой полной ортонормированной (ортогональной) системы $\{\epsilon^\omega\}_{\omega \in \Omega}$ из какого-то содержащего H гильбертова пространства тогда и только тогда, когда для любого $\omega \in \Omega$ $\mu(\omega) = 1$ ($\mu(\omega) > 0$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Если $\{\epsilon^\omega\}_{\omega \in \Omega}$ – полная ортонормированная (ортогональная) система в гильбертовом пространстве $\mathbb{H} \supset H$, то для любого $y \in \mathbb{H}$ верно разложение по формуле (1) с $\mu(\omega) = 1$ ($\mu(\omega) = \|\epsilon^\omega\|^{-2}$) для любого $\omega \in \Omega$ (см. [1, гл. IV, 4, 13] или [2, т. 2, гл. III, §4, следствие 1]). Если $\{e^\omega\}_{\omega \in \Omega}$ – ортогональная проекция $\{\epsilon^\omega\}_{\omega \in \Omega}$ на H , тогда $\{e^\omega\}_{\omega \in \Omega}$ является ортоподобной неотрицательной системой разложения в H с тем же пространством с мерой Ω (см. теорему 5).

Достаточность. Если $\{e^\omega\}_{\omega \in \Omega}$ – ортоподобная неотрицательная система разложения в H и $\mu(\omega) = 1$ ($\mu(\omega) > 0$) для любого $\omega \in \Omega$, то любое подмножество Ω измеримо, любая комплекснозначная функция $c(\omega)$ на Ω измерима, для любой функции $c(\omega)$ из пространства Лебега $L^2(\Omega)$ со значениями в $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$ в зависимости от того, над каким полем рассматривается H , функция $c(\omega)e^\omega$ измерима (см. [1, гл. III, 6, 11]). Следовательно, $\{e^\omega\}_{\omega \in \Omega}$ – неотрицательная измеримая L^2 -измеримая ортоподобная система разложения в H . Тогда характеристические функции одноточечных множеств χ_ω (функции $\chi_\omega/\mu(\omega)$) образуют полную ортонормированную (ортогональную) систему в пространстве Лебега $L^2(\Omega)$. Так как

$$e^\omega = (L) \int_{\Omega} \chi_\omega d\mu \quad \left(e^\omega = (L) \int_{\Omega} \frac{\chi_\omega}{\mu(\omega)} d\mu \right),$$

то

$$\chi_\omega \in L_{e^\omega}^2 \quad \left(\frac{\chi_\omega}{\mu(\omega)} \in L_{e^\omega}^2 \right).$$

В силу измеримости системы гильбертово пространство H изометрически изоморфно L_H^2 (см. определение 4), а согласно теореме 4, следствию и примечанию к ней ортогональными проекциями функций $\chi_\omega(x)$ ($\chi_\omega(x)/\mu(\omega)$) на L_H^2 будут функции $e^\omega_x = (e^\omega, e^x)$, соответствующие при изометрическом изоморфизме элементам $e^\omega \in H$. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть $\{e^\omega\}_{\omega \in \Omega}$ – неотрицательная измеримая ортоподобная система разложения в H . Она почти вся является ортогональной проекцией на H некоторой полной ортонормированной (ортогональной) системы $\{e^\omega\}_{\omega \in \Omega}$ из какого-то содержащего H гильбертова пространства тогда и только тогда, когда для почти всех $\omega \in \Omega$ $\mu(\omega) = 1$ ($\mu(\omega) > 0$).

Теперь нетрудно привести примеры ортоподобных неотрицательных систем разложения, не являющихся ортогональными проекциями ортогональных систем. Таковыми примерами являются континуальные системы всплесков Габора и Морле.

ПРИМЕР 1. Порожденное одной функцией $w(x)$ семейство функций

$$w_{\lambda, \beta}(x) = e^{2\pi i \lambda x} w(x - \beta),$$

где параметры λ, β и переменная x из $\mathbb{R}$, называют *системой всплесков Габора*. Если функция $w \in L^2(\mathbb{R})$ и $\|w\|_{L^2(\mathbb{R})} = 1$, то для любой функции $f(x) \in L^2(\mathbb{R})$

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} (f, w_{\lambda, \beta}) w_{\lambda, \beta}(x) d\lambda d\beta,$$

где последний интеграл понимается как предел в $L^2(\mathbb{R})$

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{|\lambda| \leq A} (f, w_{\lambda, \beta}) w_{\lambda, \beta}(x) d\lambda d\beta$$

при $A \rightarrow \infty$.

Этот результат при дополнительном предположении суммируемости на $\mathbb{R}$ функции $w(x)$ был получен Габором (см. [6] или [7, 41.3]). В более общем виде изложен в [8]–[10].

ПРИМЕР 2. Порожденное одной функцией $\psi(x)$ семейство функций

$$\psi_{\alpha, \beta}(x) = \frac{1}{\sqrt{|\alpha|}} \psi\left(\frac{x - \beta}{\alpha}\right),$$

где параметр $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, параметр $\beta \in \mathbb{R}$ и переменная $x \in \mathbb{R}$, называют *системой всплесков Морле*. Если функция $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ и

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{|\widehat{\psi}(\lambda)|^2}{|\lambda|} d\lambda = 1,$$

где $\widehat{\psi}(\lambda)$ – преобразование Фурье функции $\psi(x)$, то для любой функции $f(x) \in L^2(\mathbb{R})$

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} (f, \psi_{\alpha, \beta}) \psi_{\alpha, \beta}(x) d\beta \frac{d\alpha}{\alpha^2},$$

где последний интеграл понимается как предел в $L^2(\mathbb{R})$

$$\int_{|\alpha| \geq \varepsilon} \int_{\mathbb{R}} (f, \psi_{\alpha, \beta}) \psi_{\alpha, \beta}(x) d\beta \frac{d\alpha}{\alpha^2}$$

при $\varepsilon \rightarrow +0$.

Этот результат при дополнительном предположении суммируемости на $\mathbb{R}$ функции $\psi(x)$ был получен Гроссманном и Морле (см. [11] или [7, 42.2]). В более общем виде изложен в [8]–[10].

Заметим, что в [10] оба приведенных примера получаются при помощи некоторой общей конструкции.

§3. Критерий системы разложения – аналог равенства Парсеваля

В этом параграфе докажем, что неотрицательная L^2 -измеримая система $\{e^\omega\}_{\omega \in \Omega} \subset H$ будет ортоподобной неотрицательной системой разложения тогда и только тогда, когда для любого элемента $y \in H$ выполняется аналог равенства Парсеваля (3).

ЛЕММА 1. Пусть H – гильбертово пространство над полем $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, Ω – пространство со счетно аддитивной действительной или комплексной мерой μ , а $\{e^\omega\}_{\omega \in \Omega}$ – система элементов из H . Если для каждого элемента $y \in H$ выполняется равенство

$$\|y\|^2 = (L) \int_{\Omega} |\widehat{y}_\omega|^2 d\mu(\omega),$$

где $\widehat{y}_\omega = (y, e^\omega)$, то для любых элементов $y, z \in H$ выполняется равенство

$$(y, z) = (L) \int_{\Omega} \widehat{y}_\omega \overline{\widehat{z}_\omega} d\mu(\omega).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если H – гильбертово пространство над полем $\mathbb{R}$, то

$$\begin{aligned} (y, z) &= \frac{1}{4} (\|y + z\|^2 - \|y - z\|^2) \\ &= (L) \int_{\Omega} \frac{1}{4} (|(y + z, e^\omega)|^2 - |(y - z, e^\omega)|^2) d\mu(\omega) \\ &= (L) \int_{\Omega} (y, e^\omega) \overline{(z, e^\omega)} d\mu(\omega) = (L) \int_{\Omega} \widehat{y}_\omega \overline{\widehat{z}_\omega} d\mu(\omega). \end{aligned}$$

Если H – гильбертово пространство над полем $\mathbb{C}$, то

$$\begin{aligned} (y, z) &= \frac{1}{4} (\|y + z\|^2 - \|y - z\|^2 + i\|y + iz\|^2 - i\|y - iz\|^2) \\ &= (L) \int_{\Omega} \frac{1}{4} (|(y + z, e^\omega)|^2 - |(y - z, e^\omega)|^2 \\ &\quad + i|(y + iz, e^\omega)|^2 - i|(y - iz, e^\omega)|^2) d\mu(\omega) \\ &= (L) \int_{\Omega} (y, e^\omega) \overline{(z, e^\omega)} d\mu(\omega) = (L) \int_{\Omega} \widehat{y}_\omega \overline{\widehat{z}_\omega} d\mu(\omega). \end{aligned}$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 2. Пусть H – гильбертово пространство над полем $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, Ω – пространство со счетно аддитивной неотрицательной мерой μ , $\{e^\omega\}_{\omega \in \Omega}$ – система элементов из H и для каждого элемента $y \in H$ выполняется равенство Парсеваля

$$\|y\|^2 = (L) \int_{\Omega} |\widehat{y}_\omega|^2 d\mu(\omega).$$

Пусть некоторый элемент $x \in H$ может быть представлен в виде

$$x = \int_{\Omega} c(\omega) e^\omega d\mu(\omega),$$

где $c(\omega)$ – функция на Ω со значениями в $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$ в зависимости от того, над каким полем рассматривается H , а интеграл понимается как собственный или несобственный интеграл Лебега от функции со значениями в H , причем в последнем случае есть такое исчерпывание $\{\Omega_k\}_{k=1}^\infty$ пространства Ω (все Ω_k измеримы, $\Omega_k \subset \Omega_{k+1}$ для $k \in \mathbb{N}$ и $\bigcup_{k=1}^\infty \Omega_k = \Omega$), что функция $c(\omega)e^\omega$ интегрируема по Лебегу на Ω_k и

$$\int_{\Omega} c(\omega)e^\omega d\mu(\omega) = \lim_{k \rightarrow \infty} (L) \int_{\Omega_k} c(\omega)e^\omega d\mu(\omega).$$

Тогда

$$\|x\|^2 \leq (L) \int_{\Omega} |c(\omega)|^2 d\mu(\omega),$$

причем равенство имеет место тогда и только тогда, когда $c(\omega) = (x, e^\omega)$ почти всюду на Ω .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пользуясь непрерывностью скалярного произведения, мы можем переставить его согласно [1, гл. III, 2, 19] с операцией интегрирования по Лебегу и с операцией предельного перехода (для несобственного интеграла Лебега). Получим

$$(x, y) = (L) \int_{\Omega} c(\omega) \overline{\widehat{y}_\omega} \mu(\omega).$$

Полагая $y = x$, имеем

$$\begin{aligned} \|x\|^2 &= (L) \int_{\Omega} c(\omega) \overline{\widehat{x}_\omega} d\mu(\omega) \\ &\leq \left((L) \int_{\Omega} |c(\omega)|^2 d\mu(\omega) \right)^{1/2} \cdot \left((L) \int_{\Omega} |\widehat{x}_\omega|^2 d\mu(\omega) \right)^{1/2} \\ &= \left((L) \int_{\Omega} |c(\omega)|^2 d\mu(\omega) \right)^{1/2} \cdot \|x\| \end{aligned}$$

по неравенству Коши–Буняковского–Шварца или неравенству Гёльдера для L^2 (см. [2, т. 2, гл. I, § 5] или [1, гл. III, 3, 2 и гл. III, 10, 42]) и по данному по условию равенству Парсеваля (при этом важна только измеримость функций $c(\omega)\widehat{x}_\omega$, $|c(\omega)|^2$ и $|\widehat{x}_\omega|^2$), причем в приведенной формуле равенство имеет место тогда и только тогда, когда $c(\omega) = (x, e^\omega)$ почти всюду на Ω . Лемма доказана.

ЛЕММА 3. Пусть H – гильбертово пространство над полем $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, Ω – пространство со счетно аддитивной неотрицательной мерой μ , $\{e^\omega\}_{\omega \in \Omega}$ – система элементов из H и для каждого элемента $y \in H$ выполняется равенство Парсеваля

$$\|y\|^2 = (L) \int_{\Omega} |\widehat{y}_\omega|^2 d\mu(\omega).$$

Пусть $c(\omega)$ – функция на Ω со значениями в $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$ в зависимости от того, над каким полем рассматривается H , $|c(\omega)|^2$ интегрируема по Лебегу на Ω , а $\{\Lambda_k\}_{k=1}^\infty$ такая последовательность измеримых подмножеств Ω , что ее нижний предел (см. [1, гл. III, 4, 3]) $\varliminf_{k \rightarrow \infty} \Lambda_k = \Omega$ и функция $c(\omega)e^\omega$ интегрируема по Лебегу на Λ_k . Тогда в H существует

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (L) \int_{\Lambda_k} c(\omega)e^\omega d\mu(\omega).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, $(L) \int_{\Lambda_k} c(\omega) e^\omega d\mu(\omega)$ – фундаментальная и, значит, сходящаяся последовательность, так как при $n, m > N$

$$\begin{aligned} & \left\| (L) \int_{\Lambda_n} c(\omega) e^\omega d\mu(\omega) - (L) \int_{\Lambda_m} c(\omega) e^\omega d\mu(\omega) \right\|^2 \\ & \leq (L) \int_{\Lambda_n \Delta \Lambda_m} |c(\omega)|^2 d\mu(\omega) \leq (L) \int_{\Omega \setminus (\Lambda_n \cap \Lambda_m)} |c(\omega)|^2 d\mu(\omega) \\ & \leq (L) \int_{\Omega \setminus \bigcap_{k>N} \Lambda_k} |c(\omega)|^2 d\mu(\omega) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

по предыдущей лемме и по теореме Лебега о предельном переходе под знаком интеграла [1, гл. III, 3, 7], ведь $|c(\omega)|^2 \geq |c(\omega)|^2 \chi_{\Omega \setminus \bigcup_{k>N} \Lambda_k}(\omega) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$ всюду на Ω ($\Lambda_n \Delta \Lambda_m = (\Lambda_n \cup \Lambda_m) \setminus (\Lambda_n \cap \Lambda_m)$ – симметрическая разность). Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть H – гильбертово пространство над полем $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, Ω – пространство со счетно аддитивной неотрицательной мерой μ , $\{e^\omega\}_{\omega \in \Omega}$ – система элементов из H и для каждого элемента $y \in H$ выполняется равенство Парсеваля

$$\|y\|^2 = (L) \int_{\Omega} |\widehat{y}_\omega|^2 d\mu(\omega).$$

Если $c(\omega)$ – функция на Ω со значениями в $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$ в зависимости от того, над каким полем рассматривается H , $|c(\omega)|^2$ интегрируема по Лебегу на Ω , то для любой последовательности измеримых множеств $\{\Omega_k\}_{k=1}^\infty$, нижний предел которой $\lim_{k \rightarrow \infty} \Omega_k = \Omega$ (в частности, для любого исчерпывания $\{\Omega_k\}_{k=1}^\infty$ пространства Ω) и на элементах Ω_k которой функция $c(\omega) e^\omega$ интегрируема по Лебегу, существует один и тот же предел в H

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (L) \int_{\Omega_k} c(\omega) e^\omega d\mu(\omega).$$

Действительно, из леммы 3 следует существование предела для любой указанной в следствии последовательности. А то, что этот предел один и тот же для разных последовательностей, следует из того простого факта, что если Ω является нижним пределом последовательностей $\{\Omega_k\}_{k=1}^\infty$ и $\{\Omega'_k\}_{k=1}^\infty$, то Ω является нижним пределом и смешанной последовательности $\{\Omega_1, \Omega'_1, \Omega_2, \Omega'_2, \dots\}$.

ПРИМЕЧАНИЕ. Множество указанных в следствии последовательностей не пусто, если функция $c(\omega) e^\omega$ измерима как функция на Ω со значениями в H . Например, подходящим является исчерпывание Ω , состоящее из множеств

$$\Omega_k = \left\{ \omega \in \Omega \mid \frac{1}{k} < |c(\omega)| \text{ и } \|c(\omega) e^\omega\| < k \right\} \cup \{\omega \in \Omega \mid c(\omega) = 0\}.$$

ТЕОРЕМА 10. Пусть H – гильбертово пространство над полем $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, Ω – пространство со счетно аддитивной неотрицательной мерой μ , $\{e^\omega\}_{\omega \in \Omega}$ – L^2 -измеримая система элементов из H и для каждого элемента $y \in H$ выполняется равенство Парсеваля

$$\|y\|^2 = (L) \int_{\Omega} |\widehat{y}_\omega|^2 d\mu(\omega).$$

Тогда $\{e^\omega\}_{\omega \in \Omega}$ – ортоподобная L^2 -измеримая неотрицательная система разложения в H .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любого $y \in H$ по следствию к лемме 3 существует собственный или несобственный интеграл Лебега

$$I = \int_{\Omega} \widehat{y}_{\omega} e^{\omega} d\mu(\omega).$$

Рассмотрим $\|I - y\|^2 = \|I\|^2 + \|y\|^2 - (I, y) - \overline{(I, y)}$. По лемме 2

$$\|I\|^2 \leq (L) \int_{\Omega} |\widehat{y}_{\omega}|^2 d\mu(\omega).$$

По условию теоремы

$$\|y\|^2 = (L) \int_{\Omega} |\widehat{y}_{\omega}|^2 d\mu(\omega).$$

По лемме 1

$$(I, y) = (L) \int_{\Omega} \widehat{y}_{\omega} \overline{\widehat{y}_{\omega}} d\mu(\omega) = (L) \int_{\Omega} |\widehat{y}_{\omega}|^2 d\mu(\omega).$$

Из этой формулы видно, что (I, y) — действительное число и, следовательно, $\overline{(I, y)} = (I, y)$. Из выписанных формул получаем, что

$$\|I - y\|^2 = \|I\|^2 + \|y\|^2 - (I, y) - \overline{(I, y)} \leq 0.$$

Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ (критерий неотрицательной L^2 -измеримой ортоподобной системы разложения). Пусть H — гильбертово пространство над полем $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, Ω — пространство со счетно аддитивной неотрицательной мерой μ , $\{e^{\omega}\}_{\omega \in \Omega}$ — L^2 -измеримая система элементов из H . Каждый элемент $y \in H$ может быть представлен в виде

$$y = \int_{\Omega} \widehat{y}_{\omega} e^{\omega} d\mu(\omega),$$

где интеграл понимается как собственный или несобственный интеграл Лебега от функции со значениями в H , тогда и только тогда, когда для каждого элемента $y \in H$ выполняется равенство Парсеваля

$$\|y\|^2 = (L) \int_{\Omega} |\widehat{y}_{\omega}|^2 d\mu(\omega).$$

ТЕОРЕМА 11. Пусть H — сепарабельное гильбертово пространство над полем $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, пространство Ω со счетно аддитивной неотрицательной мерой μ счетно конечно, $\{e^{\omega}\}_{\omega \in \Omega}$ — система элементов из H и для каждого элемента $y \in H$ выполняется равенство Парсеваля

$$\|y\|^2 = (L) \int_{\Omega} |\widehat{y}_{\omega}|^2 d\mu(\omega).$$

Тогда $\{e^{\omega}\}_{\omega \in \Omega}$ — неотрицательная ортоподобная система разложения в H .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как пространство с мерой Ω и множество функций $\Xi = \{\hat{y}_\omega\}_{y \in H}$ удовлетворяют условиям леммы, то существует такая функция $\theta(\omega)$ на Ω , что для любого $y \in H$ функция $\overline{\theta(\omega)}\hat{y}_\omega$ измерима на Ω . Система $\{\theta(\omega)e^\omega\}_{\omega \in \Omega}$ — неотрицательная измеримая система в сепарабельном гильбертовом пространстве H , по теореме 5 она L^2 -измерима. Тогда по теореме 10 $\{\theta(\omega)e^\omega\}_{\omega \in \Omega}$ — ортоподобная L^2 -измеримая неотрицательная система разложения в H , а значит, и $\{e^\omega\}_{\omega \in \Omega}$ — ортоподобная L^2 -измеримая неотрицательная система разложения в H . Теорема доказана.

Для приведенных ранее систем Габера и Морле доказательство выполнения равенства Парсеваля (3) существенно проще доказательства выполнения формулы представления (1) (см. [7, 41.3, 42.2] или [6], [11]). Подобная ситуация имеет место и для ряда других систем.

В заключение отметим, что приведенные результаты свидетельствуют, по мнению автора, что системы разложения, подобные ортогональным, являются интересным для дальнейшего изучения объектом.

Список литературы

1. Данфорд Н., Шварц Дж. Т. Линейные операторы. Общая теория. Т. 1. М.: ИЛ, 1962.
2. Иосида К. Функциональный анализ. М.: Мир, 1987.
3. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1989.
4. Бесселя неравенство // Математическая энциклопедия. Т. 1. М.: Советская энциклопедия, 1977. С. 459.
5. Лукашенко Т. П. О системах разложения, подобных ортогональным // Международная конф. по теор. приближ. функц., посв. памяти проф. П. П. Коровкина. Калуга, 26–29 июня 1996 г. Тезисы докл. Т. 2. Тверь: Изд-во ТГУ, 1996. С. 135–136.
6. Gabor D. Theory of communication // J. Inst. Elec. Eng. (London). 1946. V. 93 (3). P. 429–457.
7. Gasquet C., Witomski P. Analyse de Fourier et applications. Paris: Masson, 1990.
8. Лукашенко Т. П. Всплески на топологических группах // Докл. АН. 1993. Т. 332. № 1. С. 15–17.
9. Лукашенко Т. П. Всплески на топологических группах // Изв. РАН. Сер. матем. 1994. Т. 58. № 3. С. 88–102.
10. Лукашенко Т. П. Системы разложения на пространствах с мерой // Изв. РАН. Сер. матем. 1996. Т. 60. № 1. С. 165–174.
11. Grossmann A., Morlet J. Decomposition of Hardy functions into square integrable wavelets of constant shape // SIAM J. Math. Anal. 1984. V. 15. P. 723–736.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Поступила в редакцию
05.01.1997