Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. А. Неретин, О соответствии между бозонным пространством Фока и пространством L^2 по мере Пуассона, *Матем. сб.*, 1997, том 188, номер 11, 19–50

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm275>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.217.227

26 апреля 2023 г., 11:40:26

УДК 519.46+517.4

Ю. А. Неретин

О соответствии между бозонным пространством Фока и пространством L^2 по мере Пуассона

В статье исследуются свойства интегрального преобразования, переводящего бозонное пространство Фока в пространство L^2 по мере Пуассона. Получена явная формула для функций от точечной конфигурации, соответствующих гауссовым векторам бозонного пространства Фока.

Библиография: 20 названий.

Согласно первоначальному определению В. А. Фока бозонное пространство Фока есть прямая сумма симметрических степеней гильбертова пространства. В 50-х годах И. Сигал показал, что пространство Фока может рассматриваться как пространство L^2 по гауссовой мере на бесконечномерном пространстве (см. подробное описание этой модели в [1], см. также [2] о приложениях в теории представлений). В начале 60-х годов в работах В. Баргмана, И. Сигала и Ф. А. Березина была введена в обращение голоморфная модель бозонного пространства Фока (см. [3], а также [4] и ниже § 2). Много обсуждался также канонический изоморфизм между бозонным и фермионным пространством Фока (бозон–фермионное соответствие, см. [5]), а также изоморфизм пространства Фока с пространством симметрических функций (см. [5]). Наряду с этими моделями существует ряд других, не привлекавших большого внимания. К ним относятся, например, пространство голоморфных функционалов на пространстве однолистных функций (см. [6]) и пространство функционалов на Γ -процессе (см. [7]).

Существование канонического изоморфизма между бозонным пространством Фока и пространством L^2 по мере Пуассона было обнаружено в независимых работах А. М. Вершика, И. М. Гельфанда и М. И. Граева [8] и Р. С. Исмагилова [9], [10], см. изложение этих конструкций в [11] и [4]. Цель настоящей статьи – перенос естественных структур бозонного пространства Фока в пространство L^2 по мере Пуассона (быть может вопрос об обратном переносе не менее интересен). Основной результат – явная формула для функций от точечных конфигураций, соответствующих гауссовым векторам пространства Фока. Эта формула имеет вид

$$\mathfrak{R}(x) = \sum \left[\prod K(x_{\sigma_j}, x_{\delta_j}) \cdot \prod \alpha(x_k) \right]. \quad (0.1)$$

Аргументом $x = (x_1, x_2, \dots)$ функции $\mathfrak{R}(x)$ являются неупорядоченные счетные (локально конечные) подмножества континуального множества (например, $\mathbb{R}^n$), а

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 95-01-00814) и Российской программы поддержки ведущих научных школ (грант № 96-01-96249).

суммирование ведется по всем разбиениям множества $x_1, x_2, \dots$ на двухточечные и одноточечные подмножества, при этом число двухточечных подмножеств конечно. Произведение берется по двухточечным $\{x_{\sigma_j}, x_{\delta_j}\}$ и одноточечным $\{x_k\}$ подмножествам данного разбиения.

Хотя существует обширная литература (см. [12]) о так называемых симметрических функциях (т.е. о симметрических выражениях от бесконечного числа переменных), ряды вида (0.1), насколько мне известно, ранее не встречались. Сами по себе эти ряды суть естественные пределы коэффициентов многочленов

$$\frac{1}{p!} \left(\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N \kappa_{ij} z_i z_j + \sum \alpha_i z_i \right)^p, \quad (0.2)$$

когда $p \rightarrow \infty$ и $N \rightarrow \infty$ (при этом множество, которое пробегают индексы i , становится бесконечным (континуальным или счетным)).

Коэффициенты многочленов (0.2) в явно выписанном виде (см. ниже доказательство теоремы 4.1) воспринимаются как не очень приятные нагромождения факториалов, в то время как формула (0.1) — одно из самых простых выражений от точечных конфигураций, какие только можно придумать.

В §1 содержатся предварительные сведения по пуассоновским мерам (стандартный источник по этому предмету — [13]), а в §2 — по бозонным пространствам Фока (см. подробнее [3], [4]). Бозон–пуассоновское соответствие вводится в §3, там же содержится ряд простейших свойств этого соответствия. В §4 формулируется теорема 4.2 об образе гауссовских векторов, а также обсуждаются некоторые явно вычисляемые интегралы от функций вида (0.1). Доказательства содержатся в §5. В §6 содержатся некоторые замечания об операторах, соответствующих интегральным операторам с гауссовыми ядрами.

Я благодарю Р. С. Исмагилова за обсуждение этого предмета.

§1. Меры Пуассона

1.1. Конфигурации. Пусть $M = (M, \mu)$ — *лебеговское пространство* с конечной или σ -конечной мерой μ . Иными словами M как пространство с мерой изоморфно объединению промежутка прямой $\mathbb{R}$ (конечного, пустого или бесконечно-го) и набора (конечного, пустого или счетного) точек с ненулевой мерой.

Конфигурацией в M мы назовем счетный, конечный или пустой неупорядоченный набор точек из M , у которых указаны целые положительные кратности.

ЗАМЕЧАНИЕ. Пусть точка t входит в конфигурацию ω с некоторой кратностью $k > 1$. В этом случае удобно думать, что в точке t пространства M находятся k неразличимых точек конфигурации (эти точки также неразличимы со всеми остальными точками конфигурации).

Множество всех конфигураций в M мы обозначим через $\Omega(M)$. Сейчас на пространстве $\Omega(M)$ будет введена некоторая вероятностная мера $\nu = \nu_M$.

1.2. Случай конечных пространств. Пусть M — пространство, состоящее из точек $t_1, \dots, t_N$ с мерами $a_1, \dots, a_N$. Каждой конфигурации $\omega \in \Omega(M)$ мы

поставим в соответствие набор чисел

$$(p_1, \dots, p_N),$$

где p_j есть кратность, с которой точка m_j входит в конфигурацию (если же m_j не входит в конфигурацию, то мы полагаем $p_j = 0$). Теперь мы можем отождествить $\Omega(M)$ с множеством $\mathbb{Z}_+^N$ (где через $\mathbb{Z}_+$ обозначено множество неотрицательных целых чисел) или, что то же самое, с множеством функций $M \rightarrow \mathbb{Z}_+$.

Определим теперь меру Пуассона $\nu = \nu_M$ на (счетном) множестве $\Omega(M)$ из условия: мера точки $p = (p_1, \dots, p_N) \in \mathbb{Z}_+^N$ равна

$$\nu(p) = \nu_M(p) = \prod_{j=1}^N \left(\frac{a_j^{p_j}}{p_j!} e^{-a_j} \right).$$

Легко видеть, что

$$\sum_{p \in \mathbb{Z}_+^N} \nu(p) = 1,$$

т.е. мера ν – вероятностная.

1.3. Случай бесконечных пространств. Пусть теперь пространство M произвольно (вообще говоря, бесконечно). Пусть $M_1, \dots, M_N$ – попарно не пересекающиеся (измеримые) подмножества конечной меры в M . Через

$$\Omega(M_1, \dots, M_N; p_1, \dots, p_N)$$

мы обозначим множество всех конфигураций $\omega \in \Omega(M)$ таких, что пересечение ω с M_j состоит в точности из p_j точек (с учетом кратности). Мера Пуассона $\nu = \nu_M$ на $\Omega(M)$ определяется из условия

$$\nu[\Omega(M_1, \dots, M_N; p_1, \dots, p_N)] = \prod_{j=1}^N \left(\frac{\mu(M_j)^{p_j}}{p_j!} e^{-\mu(M_j)} \right). \quad (1.1)$$

Легко показать (с помощью теоремы Колмогорова о проективных пределах), что конструкция корректна, и что ν_M – вероятностная мера на $\Omega(M)$ (т.е. $\nu(\Omega(M)) = 1$).

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Пусть мера множества M конечна. Тогда

$$\nu(\Omega(M, p)) = \frac{\mu(M)^p}{p!} e^{-\mu(M)} \quad (1.2)$$

есть вероятность того, что конфигурация ω состоит из p точек. Сумма чисел (1.2) равна 1, и тем самым $\omega \in \Omega(M)$ с вероятностью 1 содержит лишь конечное число точек.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Пусть мера множества M бесконечна. Пусть $L \subset M$ — подмножество конечной меры. Тогда вероятность того, что $\omega \in \Omega(M)$ содержит $\geq p$ точек равна

$$\sum_{j \geq p} \nu[\Omega(L; j)] = \sum_{j \geq p} \frac{\mu(L)^j}{j!} e^{-\mu(L)}.$$

Эта величина стремится к 1, если $\mu(L) \rightarrow \infty$. Поэтому с вероятностью 1 конфигурация $\omega \in \Omega(M)$ состоит из бесконечного числа точек. Подчеркнем, что любое множество $L \subset M$ конечной меры с вероятностью 1 содержит лишь конечное число точек конфигурации.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Пусть мера μ непрерывна, т.е. мера любой точки равна 0. Тогда с вероятностью 1 все точки конфигурации $\omega \in \Omega(M)$ имеют кратности 1. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим в M подмножество L конечной меры. Разобьем L на k кусочков равной меры. Вероятность того, что каждый из кусочков содержит не более одной точки конфигурации, равна

$$\left[\left(1 + \frac{\mu(L)/k}{1!} \right) e^{-\mu(L)/k} \right]^k.$$

При $k \rightarrow \infty$ эта величина стремится к 1, а поэтому вероятность того, что множество L содержит кратную точку конфигурации ω , равна 0.

1.4. Цилиндрические функции. Фиксируем в M подмножества $M_1, \dots, M_N$ конечной меры. Рассмотрим конечное пространство A , состоящее из точек с мерами $\mu(M_1), \dots, \mu(M_N)$. Рассмотрим отображение

$$\pi = \pi_{[M_1, \dots, M_N]}: \Omega(M) \rightarrow \Omega(A),$$

которое каждой конфигурации $\omega \in \Omega(M)$ ставит в соответствие набор чисел

$$p_j = \#(\omega \cap M_j)$$

(где символ $\#$ означает число точек множества).

ЗАМЕЧАНИЕ. Очевидно, образ меры ν_M при отображении π совпадает с мерой ν_A , см. п. 1.2.

Рассмотрим далее пространство $L^2(\Omega(A), \nu_A)$. Это не что иное, как пространство функций

$$h: \mathbb{Z}_+^N \rightarrow \mathbb{C}$$

таких, что

$$\sum_{p \in \mathbb{Z}_+^N} |h(p)|^2 \nu_A(p) < \infty.$$

Каждой функции $h \in L^2(\Omega(A))$ ставится в соответствие функция

$$J_{[M_1, \dots, M_N]} h = h \circ \pi_{[M_1, \dots, M_N]}$$

на $\Omega(M)$. Это просто функция, равная $h(p_1, \dots, p_N)$ на $\Omega(M_1, \dots, M_N; p_1, \dots, p_N)$. Иными словами, мы получаем изометрическое вложение

$$J_{[M_1, \dots, M_N]}: L^2(\Omega(A), \nu_A) \rightarrow L^2(\Omega(M), \nu_M).$$

Его образ, т.е. множество L^2 -функций, постоянных на множествах

$$\Omega(M_1, \dots, M_N; p_1, \dots, p_N),$$

мы обозначим через

$$L^2(\Omega(M) \mid M_1, \dots, M_N) = L^2(\Omega(M) \mid \{M_i\}).$$

Легко видеть, что

$$L^2(\Omega(M) \mid M_1, \dots, M_\alpha) + L^2(\Omega(M) \mid S_1, \dots, S_\beta) \subset L^2(\Omega(M) \mid \{M_i \cap S_j\}).$$

Объединение всевозможных подпространств $L^2(\Omega(M) \mid \{M_j\})$ по всевозможным наборам $\{M_j\}$ мы назовем пространством *цилиндрических функций*.

Легко видеть, что пространство цилиндрических функций плотно в $L^2(\Omega(M))$. Вычисления с цилиндрическими функциями сводятся к вычислениям с множествами $\Omega(A)$ для конечных пространств с мерой A .

1.5. Независимость. Рассмотрим разбиение пространства M в объединение двух непересекающихся множеств

$$M = M_1 \cup M_2.$$

Каждой конфигурации $\omega \in \Omega(M)$ мы поставим в соответствие пару конфигураций

$$\omega_1 = \omega \cap M_1, \quad \omega_2 = \omega \cap M_2.$$

Мы получаем отображение $\omega \mapsto (\omega_1, \omega_2)$, которое, как легко видеть, устанавливает изоморфизм пространств с мерой

$$\Omega(M) \simeq \Omega(M_1) \times \Omega(M_2). \quad (1.3)$$

Это влечет наличие канонического изоморфизма (см. [14, II.4])

$$L^2(\Omega(M)) \simeq L^2(\Omega(M_1)) \otimes L^2(\Omega(M_2)). \quad (1.4)$$

А именно, если $f_1 \in L^2(\Omega(M_1))$, $f_2 \in L^2(\Omega(M_2))$, то элементу $f_1 \otimes f_2$ тензорного произведения соответствует функция

$$g(\omega) = f_1(\omega \cap M_1) \cdot f_2(\omega \cap M_2).$$

Отметим (очевидное) равенство

$$\int_{\Omega(M)} g(\omega) d\nu_M(\omega) = \int_{\Omega(M_1)} f_1(\omega_1) d\nu_{M_1}(\omega_1) \cdot \int_{\Omega(M_2)} f_2(\omega_2) d\nu_{M_2}(\omega_2). \quad (1.5)$$

Пусть теперь M_1, M_2 — лебеговские пространства с мерой. Через $M_1 \sqcup M_2$ мы обозначим их дизъюнктивное объединение.

Рассмотрим какой-нибудь оператор Гильберта–Шмидта

$$S: L^2(\Omega(M_2)) \rightarrow L^2(\Omega(M_1)),$$

заданный формулой

$$Sf(\omega_1) = \int_{\Omega(M_2)} K(\omega_1, \omega_2) f(\omega_2) d\nu_{M_2}(\omega_2). \quad (1.6)$$

Напомним (см. [14, II.10]), что функция S лежит в $L^2(\Omega(M_1) \times \Omega(M_2))$. И так, любому гильберт–шмидтовскому оператору S ставится в соответствие функция $K \in L^2(\Omega(M_1 \sqcup M_2))$.

Для более общих операторов, чем гильберт–шмидтовские, вопрос о соответствии между операторами $L^2(\Omega(M_2)) \rightarrow L^2(\Omega(M_1))$ и функциями на $\Omega(M_1 \sqcup M_2)$ сталкивается с обычными трудностями.

Один из случаев, когда таких трудностей нет — это случай конечных пространств M_1 и M_2 . Тогда любой ограниченный оператор $S: L^2(\Omega(M_2)) \rightarrow L^2(\Omega(M_1))$ записывается в виде (1.6), где $K(\cdot, \cdot)$ — некоторая функция на $\Omega(M_1 \sqcup M_2)$ (мы сказали собственно лишь то, что любой оператор в l_2 задается матрицей).

1.6. Формула Кэмпбелла (см. [13], [4]). Пусть $\psi \in L^1(M)$. Рассмотрим функцию

$$\mathcal{E}_\psi(\omega) = \prod_{m_j \in \omega} (1 + \psi(m_j)) \quad (1.7)$$

на пространстве $\Omega(M)$. Если точка m_j входит в конфигурацию ω с кратностью > 1 , то мы пишем сомножитель $1 + \psi(m_j)$ столько раз, какова кратность точки m_j .

ТЕОРЕМА 1.1 (формула Кэмпбелла). *Если $\psi \in L^1(M)$, то произведение (1.7) сходится почти всюду на $\Omega(M)$, $\mathcal{E}_\psi \in L^1(\Omega(M))$,*

$$\int_{\Omega(M)} \mathcal{E}_\psi(\omega) d\nu_M(\omega) = \exp \left(\int_M \psi(m) d\mu(m) \right). \quad (1.8)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Для одноточечного пространства M формула Кэмпбелла проверяется прямым вычислением. Случай конечного пространства сводится к случаю одноточечного с помощью изоморфизма (1.3) и формулы (1.5). Произвольные пространства сводятся к конечным с помощью предельного перехода.

1.7. Замечание: симметрические функции. Естественно возникает вопрос (всегда возникающий в анализе бесконечного числа переменных) – как записывать функции на $\Omega(M)$? Я приведу пример, который до некоторой степени дает ответ на этот вопрос.

Рассмотрим какую-нибудь функцию ψ на M . Положим

$$G_{\psi}^{(r)}(\omega) = \sum_{\{m_1, \dots, m_r\} \in \omega} \psi(m_1) \psi(m_2) \cdots \psi(m_r),$$

где суммирование ведется по всем неупорядоченным наборам из r попарно различных точек из ω . Формула Кэмпбелла является стандартным и довольно удобным инструментом для работы с такого рода “полиномиальными” выражениями. Действительно

$$\mathcal{E}_{t\psi}(\omega) = \sum_{r=0}^{\infty} t^r G_{\psi}^{(r)}(\omega).$$

Поэтому

$$\int_{\Omega(M)} G_{\psi}^{(r)}(\omega) d\nu(\omega) = \frac{1}{r!} \left(\int_M \psi(m) d\mu(m) \right)^r.$$

Применяя формулу Кэмпбелла к функции

$$\tilde{\psi}(m) = -1 + \prod_{s=1}^k (1 + t_s \psi_s(m)),$$

мы получаем

$$\int_{\Omega(M)} \prod_{s=1}^k \mathcal{E}_{t_s \psi_s}(\omega) d\nu(\omega) = \exp \left\{ \int_M \left(\prod_{s=1}^k (1 + t_s \psi_s(m)) - 1 \right) d\mu(m) \right\}.$$

Разлагая левую и правую часть в ряд по степеням $t_1, \dots, t_k$, получаем

$$\int_{\Omega(M)} \prod_{s=1}^k G_{\psi_s}^{(r_s)}(\omega) d\nu(\omega) = \sum \left[\prod_{a_{i_1 \dots i_k}} \frac{1}{a_{i_1 \dots i_k}!} \left(\int_M \psi_1^{i_1}(m) \cdots \psi_k^{i_k}(m) d\mu(m) \right)^{a_{i_1 \dots i_k}} \right].$$

В этой формуле произведение берется по всем наборам $i_1, \dots, i_k$, где i_{α} пробегает 0, 1, и не все i_{α} равны нулю одновременно. Суммирование ведется по всем наборам $a_{i_1 \dots i_k}$ целых неотрицательных чисел, удовлетворяющих системе равенств

$$\left\{ \sum_{i_1, \dots, i_k: i_{\alpha}=1} a_{i_1 \dots i_k} = r_{\alpha} \right\}.$$

1.8. Группа симметрий. Пусть M – пространство с бесконечной непрерывной мерой. Обозначим через $\text{Gms}_\infty(M)$ группу преобразований g пространства M , оставляющих меру квазиинвариантной и удовлетворяющих следующему условию на производную Радона–Никодима:

$$\int_M |g'(m) - 1| d\mu(m) < \infty.$$

Преобразование g очевидным образом индуцирует преобразование

$$g : \omega = (m_1, m_2, \dots) \mapsto g\omega = (gm_1, gm_2, \dots)$$

пространства $\Omega(M)$.

ТЕОРЕМА 1.2. Пусть $g \in \text{Gms}_\infty$. Тогда преобразование $\omega \mapsto g\omega$ оставляет меру ν_M квазиинвариантной, при этом производная Радона–Никодима равна

$$\left[\prod_{m_j \in \omega} g'(m_j) \right] \exp \left(- \int_M (g'(m) - 1) d\mu(m) \right).$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Теорема является несложным упражнением на форму Кэмпбелла. Для случая гладких преобразований с компактным носителем она получена в [8]–[10], а в приведенном выше виде – в [4].

§ 2. Стандартные структуры в бозонном пространстве Фока

Для нас важны, главным образом, пп. 2.1–2.4. Материал пп. 2.5–2.10 в дальнейшем используется лишь в пп. 3.5–3.6 и § 6.

2.1. Бозонное пространство Фока. Рассмотрим так называемое *гильбертово пространство с инволюцией*, т.е. гильбертово пространство, в котором фиксирован антилинейный изометрический оператор I , удовлетворяющий условию $I^2 = E$. Нас будет интересовать пространство $H = L^2(M)$, в этом случае $If = \bar{f}$.

Итак, пусть H – гильбертово пространство с инволюцией. *Бозонное пространство Фока* $F(H)$ – это гильбертово пространство, в котором фиксирована система векторов (“*переполненный базис*”) Φ_h , нумеруемая векторами $h \in H$ и удовлетворяющая условиям

- 1) $\langle \Phi_h, \Phi_{h'} \rangle_{F(H)} = \exp(\langle h', h \rangle_H)$,
- 2) линейные комбинации векторов Φ_h плотны в $F(H)$.

Пространство $F(H)$ единственно в следующем смысле. Пусть даны два пространства F и $\tilde{F}$ с тотальными системами векторов Φ_h и $\tilde{\Phi}_h$ соответственно, удовлетворяющими (2.1). Тогда существует единственный унитарный оператор $U: F \rightarrow \tilde{F}$, удовлетворяющий условию $U\Phi_h = \tilde{\Phi}_h$.

Существование пространства $F(H)$ не совсем очевидно, оно вытекает из голоморфной модели, описанной в следующем пункте.

2.2. Голоморфная модель Баргмана–Сигала–Березина (см. [3], [4]). Поставим в соответствие каждому вектору $w \in F(H)$ функцию $Jw(h)$ на H , задаваемую формулой

$$Jw(h) := \langle w, \Phi_h \rangle. \quad (2.2)$$

Таким образом мы реализовали пространство $F(H)$ как некоторое пространство голоморфных функций на H . Сейчас мы точно опишем образ оператора J .

Выберем в пространстве H ортонормированный базис $e_1, e_2, \dots$. Мы определим гильбертово пространство $\tilde{F}(H)$ как пространство формальных рядов вида

$$f(z_i e_i) = \sum_{j_1 \geq 0, j_2 \geq 0, \dots} c_{j_1 j_2 \dots} z_1^{j_1} z_2^{j_2} \dots \quad (2.3)$$

(где суммирование ведется по всем наборам $j_1, j_2, \dots$, в которых лишь конечное число элементов отлично от 0), удовлетворяющих условию

$$\sum |c_{j_1 j_2 \dots}|^2 j_1! j_2! \dots < \infty.$$

Скалярное произведение в $\tilde{F}(H)$ вводится из условия: векторы

$$\frac{z_1^{j_1} \dots z_N^{j_N}}{\sqrt{j_1! \dots j_N!}}$$

образуют ортонормированный базис в $\tilde{F}(H)$.

Несложно проверить, что ряд (2.3) сходится, если $f \in \tilde{F}(H)$ и $\sum z_i e_i \in H$ (т.е. $\sum |z_i|^2 < \infty$).

Система функций $\tilde{\Phi}_h(z)$ задается формулой

$$\tilde{\Phi}_h(z) = \exp \left\{ \sum z_i \bar{h}_i \right\}.$$

Несложно проверить, что оператор J , заданный формулой (2.2), есть изометричный оператор $F(H) \rightarrow \tilde{F}(H)$, причем $J\Phi_h = \tilde{\Phi}_h$.

Мы отметим также следующую формулу (*воспроизводящее свойство*):

$$f(h) = \langle f, \tilde{\Phi}_h \rangle_{\tilde{F}(H)}. \quad (2.4)$$

С этого места мы не будем различать пространства $F(H)$ и $\tilde{F}(H)$.

2.3. Конечномерный случай. Рассмотрим конечное пространство M с мерой, пусть меры точек равны $a_1, \dots, a_N$. Тогда пространство $L^2(M)$ есть пространство векторов $v = (v_1, \dots, v_N)$ со скалярным произведением

$$\langle (v_1, \dots, v_N); (w_1, \dots, w_N) \rangle = \sum_{j=1}^N v_j \bar{w}_j a_j.$$

Пространство $F(L^2(M))$ отождествляется с пространством голоморфных функций на $L^2(M) = \mathbb{C}^N$ со скалярным произведением

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \int_{L^2(M)} f_1(v) \overline{f_2(v)} \exp \{ -\|v\|^2 \} \prod_{j=1}^N \left(\frac{a_j}{\pi} dv_j d\bar{v}_j \right). \quad (2.5)$$

Система векторов Φ_v задается формулой

$$\Phi_v(z) = \exp \left\{ \sum z_j \bar{v}_j a_j \right\}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Формула (2.5) допускает строгое истолкование и в случае бесконечномерного пространства H , см. [1], [3], [4]. Нам это не понадобится.

2.4. Гауссовы векторы. Пусть $K: H \rightarrow H$ – оператор Гильберта–Шмидта, причем $\|K\| < 1$. Пусть $\varkappa \in H$. Рассмотрим функцию $b[K \mid \varkappa](z)$ на H , задаваемую формулой

$$b[K \mid \varkappa](z) = \exp \left\{ \frac{1}{2} \langle Kz, \bar{z} \rangle + \langle z, \bar{\varkappa} \rangle \right\}. \quad (2.6)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1 (см., например, [4, 6.2]). *Вектор $b[K \mid \varkappa]$ лежит в $F(H)$, при этом*

$$\begin{aligned} & \langle b[M \mid m], b[A \mid \alpha] \rangle_{F(H)} \\ &= \det \left[(1 - M\bar{A})^{-\frac{1}{2}} \right] \exp \left\{ \frac{1}{2} (\bar{\alpha}m) \begin{pmatrix} -\bar{A} & E \\ E & -M \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \bar{\alpha}^t \\ m^t \end{pmatrix} \right\}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Полезно иметь в виду формулу

$$\begin{pmatrix} -\bar{A} & E \\ E & -M \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} M(E - \bar{A}M)^{-1} & (E - M\bar{A})^{-1} \\ (E - \bar{A}M)^{-1} & \bar{A}(E - M\bar{A})^{-1} \end{pmatrix}.$$

2.5. Символы операторов. Пусть H_1 и H_2 – гильбертовы пространства с инволюцией. Пусть A – ограниченный оператор $F(H_2) \rightarrow F(H_1)$. Каждому такому оператору ставится в соответствие функция $K_A(z, u)$ на $H_1 \oplus H_2$ (*символ или ядро оператора*, см. [3], см. также [4]) по формуле

$$K_A(z, u) = \langle A\Phi_u, \Phi_z \rangle_{F(H_1)}, \quad (2.8)$$

где $z \in H_1$, $u \in H_2$, $\Phi_z \in F(H_1)$, $\Phi_u \in F(H_2)$.

О восстановлении оператора по символу см. [3], см. также [4]. Если $H_1 = L^2(M_1)$, $H_2 = L^2(M_2)$, где M_1, M_2 конечны, то

$$Af(z) = \int_{L^2(M)} K_A(z, u) f(u) \exp \left\{ - \sum_j a_j |u_j|^2 \right\} \prod_j \left(\frac{a_j}{\pi} du_j d\bar{u}_j \right).$$

2.6. Гауссовы операторы. Пусть H_1, H_2 – гильбертовы пространства с инволюцией. Рассмотрим оператор

$$S = \begin{pmatrix} K & L \\ L^t & M \end{pmatrix} : H_1 \oplus H_2 \rightarrow H_1 \oplus H_2.$$

Здесь знак t обозначает транспонирование ($S^t := \bar{S}^*$). Пусть этот оператор удовлетворяет условиям

- 1* . $S = S^t$,
- 2* . $\|S\| \leq 1$,
- 3* . $\|K\| < 1, \|M\| < 1$,
- 4* . K, M – операторы Гильберта–Шмидта.

Рассмотрим оператор

$$B[S]: F(H_2) \rightarrow F(H_1)$$

с символом

$$K(z, u) = \exp \left\{ \frac{1}{2} \langle Kz, \bar{z} \rangle + \langle Lz, u \rangle + \frac{1}{2} \langle M\bar{u}, u \rangle \right\}. \quad (2.9)$$

Мы будем записывать $K(z, u)$ также в форме

$$\exp \left\{ \frac{1}{2} (z, \bar{u}) \begin{pmatrix} K & L \\ L^t & M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z^t \\ \bar{u}^t \end{pmatrix} \right\}, \quad (2.10)$$

где через z обозначена строка $(z_1 \ z_2 \ \dots)$, а через $\bar{u}$ — строка $(\bar{u}_1 \ \bar{u}_2 \ \dots)$. Через z^t , $\bar{u}^t$ обозначены матрицы, транспонированные к z , $\bar{u}$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Матричная запись (2.10) удобна в обращении, однако следует помнить, что она буквально верна лишь в случае, когда $H = l_2$ (или когда, что то же самое, в H фиксирован ортонормированный базис).

ТЕОРЕМА 2.2 ([15], [16], см. также [4], [17], [18]).

а) Условия 1^*-4^* необходимы для ограниченности оператора с символом (2.9).

б) Если выполнены условия 1^*-4^* , а также условие $\|S\| < 1$, то оператор $B[S]$ ограничен.

в) Если выполнены условия 1^*-4^* , а также условие: матрицы K , M — ядерные, то $B[S]$ ограничен.

г) Рассмотрим ограниченные операторы

$$B[S_1]: F(H_2) \rightarrow F(H_1), \quad B[S_2]: F(H_3) \rightarrow F(H_2),$$

где

$$S_1 = \begin{pmatrix} K & L \\ L^t & M \end{pmatrix}, \quad S_2 = \begin{pmatrix} P & Q \\ Q^t & R \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$B[S_1]B[S_2] = \det[(1 - MP)^{-\frac{1}{2}}] B[S_1 * S_2], \quad (2.11)$$

где $*$ -умножение матриц определяется по формуле

$$S_1 * S_2 = \begin{pmatrix} K + LP(E - MP)^{-1}L^t & L(E - PM)^{-1}Q \\ Q^t(E - MP)^{-1}L^t & R + Q^t(E - MP)^{-1}MQ \end{pmatrix}. \quad (2.12)$$

За громоздкой формулой (2.12) стоит простая алгебраическая структура, которая сейчас будет описана.

Пусть, по-прежнему, H — гильбертово пространство с инволюцией. Рассмотрим гильбертово пространство

$$V(H) := H \oplus H$$

и подпространства

$$H^+ = H \oplus 0, \quad H^- = 0 \oplus H$$

в нем. Обозначим через $\Gamma(S)$ график оператора S как оператора

$$S: H_1^+ \oplus H_2^- \rightarrow H_1^- \oplus H_2^+.$$

Оказывается, что подпространства $\Gamma(S)$ перемножаются как линейные отношения (соответствия).

ТЕОРЕМА 2.3. *Множество $\Gamma(S_1 * S_2) \subset V(H_1) \oplus V(H_3)$ состоит из всех $(v_1, v_3) \in V(H_1) \oplus V(H_3)$, для которых существует $v_2 \in V(H_2)$ такой, что $(v_1, v_2) \in \Gamma(S_1)$, $(v_2, v_3) \in \Gamma(S_2)$.*

Это утверждение получено в [15], [16], подробнее см. [4], [18], конечномерный случай см. также [17], [19].

2.7. Замечание: гармоническое представление симплектической группы. Рассмотрим группу G всех операторов в $V(H)$ вида

$$g = \begin{pmatrix} \Phi & \Psi \\ \overline{\Psi} & \overline{\Phi} \end{pmatrix}$$

таких, что Ψ – оператор Гильберта–Шмидта, и удовлетворяющих условию

$$g^t \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix} g = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix},$$

т.е. сохраняющих кососимметричную форму $\begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}$. Группа G – это так называемая *группа автоморфизмов канонических коммутационных соотношений*. Если размерность H конечна и равна n , то G изоморфна вещественной симплектической группе $\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R})$.

Поставим в соответствие матрице $g \in G$ оператор (см. [3])

$$\rho(g) = \det^{-\frac{1}{2}}(\Phi^* \Phi) B \begin{bmatrix} \overline{\Psi} \Phi^{-1} & \Phi^{-1} \\ \Phi^{t-1} & \Phi^{-1} \Psi \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

в $F(H)$. Формулы (2.11), (2.12) влекут

$$\rho(g_1) \rho(g_2) = \lambda(g_1, g_2) \rho(g_1 g_2),$$

где $\lambda(g_1, g_2) \in \mathbb{C}$, $|\lambda(\cdot, \cdot)| = 1$. Иными словами, операторы $\rho(g)$ образуют проективное унитарное представление группы G . Это представление называется гармоническим представлением, а также представлением Вейля (Weil), представлением Сигала–Шейла (Shale)–Вейля, представлением Фридрихса–Сигала–Березина–Шейла–Вейля, осцилляторным представлением, подробнее см. [3], [4], [18].

2.8. Замечание: условие гильберт–шмидтовости гауссовых операторов.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.4. *Пусть матрица $S = \begin{pmatrix} K & L \\ L^t & M \end{pmatrix}$ такова, что $\|S\| < 1$, пусть блоки K , M – ядерные операторы, а блок L – гильберт–шмидтовский оператор. Тогда $B[S]$ – оператор Гильберта–Шмидта.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вычислим $B[S]^*B[S]$ по формулам (2.11), (2.12). Мы получим оператор вида $\sigma \cdot B[T]$, где T — ядерная матрица, причем $\|T\| < 1$. Согласно [4, 6.3] оператор $B[T]$ при помощи сопряжения оператором вида (2.13) из симплектической группы приводится к виду $B \begin{bmatrix} 0 & R \\ \overline{R} & 0 \end{bmatrix}$, где $\|R\| < 1$, и матрица R ядерна и самосопряжена. Приведем R к каноническому виду $R = U\Lambda U^{-1}$, где U — унитарная матрица, а Λ — диагональная матрица с собственными числами $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ ($|\lambda_j| < 1, \sum |\lambda_j| < \infty$). Рассмотрим оператор $T(U)$ в $F(H)$, заданный формулой

$$T(U)f(z) = f(Uz).$$

Тогда

$$T(U)B \begin{bmatrix} 0 & R \\ \overline{R} & 0 \end{bmatrix} T(U)^{-1} = B \begin{bmatrix} 0 & \Lambda \\ \Lambda & 0 \end{bmatrix}.$$

Ядерность последнего оператора очевидна (это оператор $f(z) \mapsto f(\Lambda z)$, и его собственные числа суть $\lambda_1^{\alpha_1} \dots \lambda_k^{\alpha_k}$).

2.9. Замечание: неоднородные гауссовы операторы. Наряду с гауссовыми операторами $B[S]$ часто встречаются операторы с символами вида

$$\exp \left\{ \frac{1}{2} \begin{pmatrix} z & \overline{u} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K & L \\ L^t & M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z^t \\ \overline{u}^t \end{pmatrix} + z \cdot \varkappa^t + \overline{u} \cdot \lambda^t \right\}, \quad (2.14)$$

где матрица $S = \begin{pmatrix} K & L \\ L^t & M \end{pmatrix}$ такая же, как и раньше, $\varkappa \in H_1, \lambda \in H_2$. Мы будем обозначать оператор с символом (2.14) через

$$B[S \mid \sigma^t] = B \left[\begin{pmatrix} K & L \\ L^t & M \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} \varkappa^t \\ \lambda^t \end{pmatrix} \right].$$

Произведение таких операторов вычисляется по формуле

$$\begin{aligned} & B \left[\begin{pmatrix} K & L \\ L^t & M \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} \varkappa^t \\ \lambda^t \end{pmatrix} \right] \cdot B \left[\begin{pmatrix} P & Q \\ Q^t & R \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} \alpha^t \\ \sigma^t \end{pmatrix} \right] \\ &= \lambda \cdot B \left[\left(\begin{pmatrix} K & L \\ L^t & M \end{pmatrix} \right)^* \begin{pmatrix} P & Q \\ Q^t & R \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} (1 - KR)^{-1}(K\sigma^t + \varkappa^t) + \alpha^t \\ (1 - RK)^{-1}(R\varkappa^t + \sigma^t) + \lambda^t \end{pmatrix} \right], \end{aligned} \quad (2.15)$$

где $*$ -произведение считается по формуле (2.12), а

$$\lambda = \det[(1 - MP)^{-\frac{1}{2}}] \exp \left\{ \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \lambda & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -M & E \\ E & -P \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \lambda^t \\ \alpha^t \end{pmatrix} \right\}. \quad (2.16)$$

За этими формулами также стоит простая алгебраическая структура: операторы $B[S \mid \sigma^t]$ нумеруются аффинными подпространствами в $V(H_1) \oplus V(H_2)$, см. [4], [16].

2.10. Действие группы аффинных изометрий. Назовем *аффинной изометрией* гильбертова пространства H преобразование вида

$$Ah = Uh + b, \quad (2.17)$$

где U — унитарный оператор, а $b \in H$. Группу всех аффинных изометрий пространства H мы обозначим через $\text{Isom}(H)$.

Аффинной изометрии (2.17) мы поставим в соответствие унитарный оператор

$$T(A) = T(U, b) \quad (2.18)$$

в $F(H)$, заданный формулой

$$T(U, b)f(z) = \lambda \cdot f(Uz + b) \exp\{-\langle z, U^*b \rangle\},$$

где

$$\lambda = \exp\left\{-\frac{1}{2}\langle b, b \rangle\right\}. \quad (2.19)$$

Прямая проверка показывает, что

$$T(\tilde{U}, \tilde{b})T(U, b) = \varkappa \cdot T(U\tilde{U}, U\tilde{b} + b), \quad (2.20)$$

где

$$\varkappa = \exp\{i \operatorname{Im}\langle \tilde{b}, U^{-1}b \rangle\}, \quad (2.21)$$

т. е. мы получаем унитарное проективное представление группы $\text{Isom}(H)$.

Вычисляя символ (ядро) оператора по формуле (2.8), мы получаем

$$T(U, b) = \lambda \cdot B \left[\begin{array}{c|c} 0 & U \\ U^t & 0 \end{array} \middle| \begin{array}{c} -\overline{U^{-1}b} \\ b \end{array} \right]. \quad (2.22)$$

Группа $\text{Isom}(H)$ содержит, в частности, аддитивную группу гильбертова пространства H , действующую на H параллельными переносами. Операторы

$$T(1, b) = \exp\left\{-\frac{1}{2}\|b\|^2\right\} B \left[\begin{array}{c|c} 0 & E \\ E & 0 \end{array} \middle| \begin{array}{c} -\bar{b} \\ b \end{array} \right] \quad (2.23)$$

образуют проективное унитарное представление аддитивной группы H или линейное представление так называемой группы Гейзенберга (см., например, [3], [4]).

3. Простейшие свойства бозон–пуассоновского соответствия

3.1. Определение соответствия (подробнее см. [4]). Пусть M – лебеговское пространство с конечной или σ -конечной мерой. Рассмотрим пространство Фока $F(L^2(M))$ и систему функций

$$\Phi_h \in F(L^2(M)),$$

где $h \in L^2(M)$. Напомним, что по определению

$$\langle \Phi_h, \Phi_{h'} \rangle_{F(L^2(M))} = \exp \left\{ \int_M h'(m) \overline{h(m)} d\mu(m) \right\}.$$

Рассмотрим в $L^2(\Omega(M))$ систему функций

$$\Psi_h(\omega) = \prod_{m_j \in \omega} (1 + \overline{h(m_j)}) \exp \left\{ - \int_M \overline{h(m)} d\mu(m) \right\}. \quad (3.1)$$

Формальное применение формулы Кэмпбелла дает

$$\langle \Psi_h, \Psi_{h'} \rangle_{L^2(\Omega(M))} = \exp \left\{ \int_M h'(m) \overline{h(m)} d\mu(m) \right\}. \quad (3.2)$$

Мы получаем канонический унитарный изоморфизм между $F(L^2(M))$ и $L^2(\Omega(M))$, а именно, каждой функции $\Phi_h \in F(L^2(M))$ ставится в соответствие функции $\Psi_h \in L^2(\Omega(M))$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Здесь необходимо соблюсти некоторую осторожность. Произведение (3.1) сходится, если $h \in L^1(M)$, а формула (3.2) вытекает из формулы Кэмпбелла, если $h, h' \in L^1 \cap L^2(M)$. Однако формула (3.2) влечет (см. [4, 10.4]), что отображение $h \mapsto \Psi_h$, определенное на $L^1 \cap L^2(M)$, непрерывно в топологии $L^2(M)$ и продолжается по непрерывности до отображения $L^2(M) \rightarrow L^2(\Omega(M))$. Поэтому мы можем считать, что Ψ_h определено для всех $h \in L^2(M)$, а запись (3.2) рассматривать как формальную.

3.2. Формальные интегральные выражения. Пусть $f^{[p]} \in L^2(\Omega(M))$. Тогда в силу формулы (2.2) соответствующая функция $f^{[b]} \in F(L^2(M))$ задается формулой

$$\begin{aligned} f^{[b]}(h) &= \langle f, \Psi_h \rangle_{L^2(\Omega(M))} \\ &= \int_{\Omega(M)} f^{[p]}(\omega) \left[\prod_{m_j \in \omega} (1 + h(m_j)) \exp \left\{ - \int_M h(m) d\mu(m) \right\} \right] d\nu(\omega). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Внешне формула (3.3) выглядит более конструктивно, чем определение из п. 3.1. В действительности же определение с соответствием переполненных базисов более удобно.

Пусть теперь пространство M конечно, пусть $f^{[b]} \in F(L^2(M))$. Тогда в силу воспроизводящего свойства (2.4) и интегрального выражения для скалярного произведения (2.5) функция $f^{[p]} \in L^2(\Omega(M))$, соответствующая $f^{[b]}$, записывается интегралом

$$f^{[p]}(\omega) = \int_{L^2(M)} f^{[b]}(h) \left[\prod_{m_j \in \omega} (1 + h(m_j)) \exp \left\{ - \int_M f(m) d\mu(m) \right\} \right] \times \exp(-\|h\|^2) \prod_j \left(\frac{a_j}{\pi} dh_j d\bar{h}_j \right). \quad (3.4)$$

Естественно думать, что в случае бесконечного M интегрирование должно производиться по каноническому расширению пространства $L^2(M)$ (“абстрактному вилнеровскому пространству”), см., например, [1], [4, 6.1]. Однако в этом случае h будет обобщенной функцией на M , а тогда неясно, что означает бесконечное произведение в (3.4). Во всяком случае красивого истолкования (3.4) для бесконечного M нам не известно.

3.3. Случай одноточечного пространства M . Пусть пространство M состоит из одной точки с мерой a .

Тогда $F(L^2(M))$ есть пространство голоморфных функций на $\mathbb{C}$ со скалярным произведением

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \int_{\mathbb{C}} f(z_1) \overline{f(z_2)} \exp(-a|z|^2) \left(\frac{a}{\pi} dz d\bar{z} \right).$$

Функции $h = \text{const}$ на M соответствует вектор

$$\Phi_h(z) = \exp(a\bar{h}z) \in F(L^2(M)).$$

Пространство $L^2(\Omega(M))$ есть пространство последовательностей $v(p)$, $p = 0, 1, 2, \dots$, со скалярным произведением

$$\langle v, w \rangle_{L^2(\Omega(M))} = \sum_{p=0}^{\infty} v(p) \overline{w(p)} \frac{a^p}{p!} e^{-a}. \quad (3.5)$$

Функции (последовательности) Ψ_h задаются формулой

$$\Psi_h(p) = (1 + \bar{h})^p e^{-a\bar{h}}.$$

Посмотрим, что соответствует в $L^2(\Omega(M))$ стандартному ортогональному (ненормированному) базису $z^n \in F(L^2(M))$. Разложим $\Phi_{\bar{h}}$ и $\Psi_{\bar{h}}$ в ряд по h :

$$\begin{aligned} \Phi_{\bar{h}}(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n z^n}{n!} \bar{h}^n, \\ \Psi_{\bar{h}}(p) &= \sum_{n=0}^{\infty} h^n \left\{ \sum_{j=0}^p \frac{p(p-1) \cdots (p-j+1)}{j!(n-j)!} (-a)^{n-j} \right\}. \end{aligned}$$

Мы видим, что вектору $z^n \in F(L^2(M))$ соответствует многочлен Шарлье (Charlier):

$$S_n(p) = S_n(a | p) = \sum_{j=0}^n C_n^j (-1)^{n-j} a^{-j} p(p-1) \cdots (p-j+1). \quad (3.6)$$

Этого и следовало ожидать, так как многочлены Шарлье образуют стандартный ортогональный базис в пространстве последовательностей со скалярным произведением (3.5) (см., например, [20]).

Рассмотрим далее последовательность $\delta_\alpha(p) \in L^2(\Omega(M))$ (т.е. на месте с номером α стоит 1, а на остальных местах стоят нули).

Определим с помощью (2.4) соответствующую функцию $e_\alpha(z)$ из $F(L^2(M))$:

$$\begin{aligned} e_\alpha(z) &= \langle \delta_\alpha, \Psi_z \rangle_{L^2(\Omega(M))} = \Psi_z(\alpha) \frac{a^\alpha}{\alpha!} e^{-a} \\ &= (1+z)^\alpha e^{-az} \frac{a^\alpha}{\alpha!} e^{-a} = \frac{[a(1+z)]^\alpha}{\alpha!} e^{-a(1+z)}, \end{aligned}$$

т.е. мы получаем соответствие

$$\delta_\alpha \longleftrightarrow e_\alpha(z) = \frac{[a(1+z)]^\alpha}{\alpha!} e^{-a(1+z)}. \quad (3.7)$$

Рассмотрим, далее, в $F(L^2(M))$ операторы (это так называемые операторы рождения и уничтожения, см. [3], [6])

$$R^{[b]} f(z) := z f(z), \quad Q^{[b]} f(z) := \frac{\partial}{\partial z} f(z).$$

Пусть $R^{[p]}, Q^{[p]}$ – соответствующие операторы в $L^2(\Omega(M))$. Легко видеть, что

$$(R^{[b]} + E) e_\alpha = \frac{\alpha+1}{a} e_{\alpha+1}, \quad (Q^{[b]} + a) e_\alpha = a e_{\alpha-1}.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} R^{[p]} \delta_\alpha &= -\delta_\alpha + \frac{\alpha+1}{a} \delta_{\alpha+1}, \\ Q^{[p]} \delta_\alpha &= -a \delta_\alpha + a \delta_{\alpha-1}. \end{aligned}$$

3.4. Случай конечного пространства M . Пусть теперь пространство M есть объединение одноточечных пространств (точек) $M_1, \dots, M_N$ с мерами $a_1, \dots, a_N$. Тогда

$$F(L^2(M)) = \bigotimes_{j=1}^N F(L^2(M_j)),$$

$$L^2(\Omega(M)) = \bigotimes_{j=1}^N L^2(\Omega(M_j)).$$

Поэтому соответствия из п. 3.3 мгновенно влекут следующие соответствия:

$$\prod_{j=1}^N z_j^{n_j} \longleftrightarrow \prod_{j=1}^N S_{n_j}(a_j \mid p_j),$$

$$\prod_{j=1}^N \frac{[a_j(1+z_j)]^{\alpha_j}}{\alpha_j!} e^{-a_j(1+z_j)} \longleftrightarrow \prod_{j=1}^N \delta_{\alpha_j}(p_j). \quad (3.8)$$

3.5. Умножение на функцию. Пусть пространство с мерой M произвольно. Пусть $\sigma(m)$ – функция на M , удовлетворяющая условиям

- 1) $|\sigma(m)| \leq 1$,
- 2) $(\sigma(m) - 1) \in L^1(M)$.

Рассмотрим оператор $C(\sigma)$ в $L^2(\Omega(M))$, заданный формулой

$$C(\sigma)f(\omega) = \left(\prod_{m_j \in \omega} \sigma(m_j) \right) f(\omega).$$

Легко видеть, что $\|C(\sigma)\| \leq 1$; если $|\sigma(m)| = 1$, то $C(\sigma)$ унитарен. Очевидно,

$$C(\sigma_1\sigma_2) = C(\sigma_1)C(\sigma_2).$$

Простое вычисление показывает, что

$$C(\sigma)\Psi_h = \Psi_{\bar{\sigma}h + \bar{\sigma} - 1} \cdot \exp \left\{ - \int_M (\sigma(m) - 1)(h(m) + 1) d\mu(m) \right\}.$$

Пусть $C^{[b]}(\sigma)$ – соответствующий оператор в $F(H)$. Используя (2.8), легко получить формулу для символа (ядра) оператора $C^{[b]}(\sigma)$:

$$\exp \left\{ \int_M [\sigma zu + z(\sigma - 1) - (\sigma - 1)\bar{u} - (\sigma - 1)] d\mu(u) \right\},$$

где $z, u \in L^2(M)$. Заметим, что мы получили операторы вида $B[S \mid \sigma^t]$ (см. п. 2.9).

Рассмотрим теперь (мультипликативную) группу $\mathcal{A}$, состоящую из функций σ на M таких, что $|\sigma(m)| = 1$ и $\sigma(m) - 1 \in L^1(M)$. Группа $\mathcal{A}$ действует на гильбертовом пространстве $L^2(M)$ аффинными изометриями вида

$$A(\sigma)z(m) = \sigma(m)z(m) + \sigma(m) - 1.$$

Ограничивая представление T группы $\text{Isom}(L^2(M))$ (см. п. 2.10) на группу $\mathcal{A}$, мы получаем проективное унитарное представление $T(A(\sigma))$ группы $\mathcal{A}$.

Сравнение символов показывает, что

$$C^{[b]}(\sigma) = \exp \left\{ -i \cdot \text{Im} \int_M (\sigma(m) - 1) d\mu(m) \right\} T(A(\sigma)), \quad (3.9)$$

т.е. операторы $C^{[b]}(\sigma)$ и $T(A(\sigma))$ совпадают с точностью до множителя. Благодаря этому множителю проективное представление $T(A(\sigma))$ группы $\mathcal{A}$ “выправляется” в линейное представление $C^{[b]}(\sigma)$.

3.6. Действие группы Gms_∞ . Пусть M – пространство с бесконечной непрерывной мерой (см. п. 1.8). Рассмотрим группу Gms_∞ . Рассмотрим унитарное представление $R(g)$ группы Gms_∞ в пространстве $L^2(\Omega(M))$, заданное формулой

$$R(g)f(\omega) = f(g\omega) \left[\prod_{m_j \in \omega} g'(m_j)^{1/2} \right] \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int_M (g'(m) - 1) d\mu(m) \right\}.$$

Легко видеть, что

$$R(g)\Psi_h = \Psi_{S(g)h} \times \exp \left\{ \int_M \left[h(g(m))g'(m)^{1/2} + g'(m)^{1/2} - \frac{1}{2}g'(m) + \frac{1}{2} - \bar{h}(m) \right] d\mu(m) \right\},$$

где

$$S(g)h(m) = h(g(m))g'(m)^{1/2} + g'(m)^{1/2} - 1. \quad (3.10)$$

Это позволяет выписать символ (ядро) оператора $R^{[b]}(g)$ в $F(L^2(M))$, соответствующего оператору $R(g)$ (мы опускаем формулу).

Теперь заметим, что формула (3.10) определяет аффинное изометрическое действие группы Gms_∞ в пространстве $L^2(M)$. Ограничивая представление T группы $\text{Isom}(L^2(M))$ на подгруппу Gms_∞ , мы получаем унитарное представление $T(S(g))$ группы Gms_∞ в $F(L^2(M))$.

Сверка символов (ядер) показывает, что

$$R^{[b]}(g) = T(S(g)).$$

Иными словами, бозон–пуассоновское соответствие является оператором, сплетающим представления $R(g)$ и $T(S(g))$ группы Gms_∞ . Именно в такой форме (с точностью до небольших оговорок) оно и было обнаружено в [8]–[10].

ЗАМЕЧАНИЕ. Конструкция предыдущего пункта также может рассматриваться как мотивировка бозон–пуассоновского соответствия. Мы имеем представление абелевой группы $\mathcal{A}$ в пространстве $F(L^2(M))$, заданное формулой $T(A(\sigma))$ (точнее формулой (3.9)). Естественно ожидать, что это представление может быть реализовано в каком-то пространстве $L^2(X)$ операторами умножения на функции. Пространство $\Omega(M)$ и есть это X (см. обсуждение похожей конструкции в [7]).

§ 4. Гауссовы векторы и функции $\mathfrak{R}[K, \theta](\omega)$

4.1. Функции $\mathfrak{R}[K, \theta](\omega)$. Рассмотрим конфигурацию $\omega \in \Omega(M)$. Назовем *связкой* R в ω конечный (может быть пустой) набор $\{\delta_1, \sigma_1\}, \dots, \{\delta_q, \sigma_q\}$ двухточечных неупорядоченных подмножеств в R (мы пишем $\{\delta_j, \sigma_j\} \in R$). Через $[\omega]_R$ мы обозначим множество всех элементов ω , не вошедших в связку R . Множество всех связок в ω мы обозначим через $\tan(\omega)$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Во избежание двусмысленностей мы должны уточнить, что значит слово “связка” в случае конфигураций с кратными точками. Мы считаем, что в точке кратности k сосредоточено k точек конфигурации, и любые из них с равными правами могут входить в связку. Например, общее число связок на n -точечной конфигурации (точки считаются с учетом кратностей) равно

$$\sum_{j: j \geq 0, 2j \leq n} \frac{n!}{2^j \cdot j! (n - 2j)!}$$

и это число не зависит от того, есть ли в конфигурации кратные точки.

Фиксируем функцию $K(m, m')$ на $M \times M$, удовлетворяющую условию $K(m, m') = K(m', m)$, и функцию $\theta(m)$ на M . Рассмотрим функцию на $\Omega(M)$, заданную формулой

$$\mathfrak{R}[K, \theta](\omega) = \sum_{R \in \tan(\omega)} \left[\prod_{\{\delta_j, \sigma_j\} \in R} K(\delta_j, \sigma_j) \cdot \prod_{m_j \in [\omega]_R} (1 + \theta(m_j)) \right] \quad (4.1)$$

(если только эта формула имеет смысл). Эти функции и являются основным объектом нашей статьи.

4.2. Случай конечного пространства M . Пусть пространство M конечно и состоит из точек $m_1, \dots, m_N$ с мерами $a_1, \dots, a_N$. Тогда функция $K(m, m')$ может рассматриваться как матрица

$$\varkappa_{ij} = K(m_i, m_j),$$

а θ — как вектор-строка $\theta_i = \theta(m_i)$.

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть квадратичная форма

$$\frac{1}{2} \sum \varkappa_{ij} x_i x_j$$

строго меньше 1 на эллипсоиде $\sum a_j x_j^2 \leq 1$. Тогда

$$\mathfrak{R}[K, \theta](\omega) \in L^2(\Omega(M)),$$

а соответствующий вектор из $F(L^2(M))$ задается формулой

$$\exp \left\{ \frac{1}{2} \sum_{i,j} \varkappa_{ij} (z_i + 1)(z_j + 1) a_i a_j + \sum_j \theta_j a_j (z_j + 1) \right\}. \quad (4.2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим конфигурацию $\omega \in \Omega(M)$. Напомним, что ω может рассматриваться как точка $(p_1, \dots, p_N) \in \mathbb{Z}_+^N$. Связки в ω удобно изображать в виде картинок вида

Здесь $N = 3$, замкнутые овалы изображают точки $m_1, m_2, \dots$, при этом в точке m_j сосредоточено p_j точек конфигурации. Элементы двухточечных множеств связки соединены дугами.

Пусть s_{ij} — число дуг, ведущих из i -го овала в j -й ($s_{ij} = s_{ji}$). Пусть q_i — число точек в i -ом овале, не являющихся концами дуг. Отметим очевидные равенства

$$p_i = \sum_{j \neq i} s_{ij} + q_i + 2s_{ii}. \quad (4.3)$$

Тогда для данной конфигурации число связок с данными s_{ij} , q_i (разумеется, равенства (4.3) полагаются выполненными) равно

$$\left[\prod_i \frac{p_i!}{\prod_{j \neq i} s_{ij}! (2s_{ii})! q_i!} \right] \times \prod_{i < j} (s_{ij})! \times \prod_i \frac{(2s_{ii})!}{s_{ii}! 2^{s_{ii}}}. \quad (4.4)$$

Первый сомножитель этого произведения отвечает за разбиения множеств A_i , обведенных овалами, на подмножества из s_{ij} , q_i , $2s_{ii}$ элементов. Второй сомножитель есть число биекций между выделенными подмножествами в A_i и A_j . Последний сомножитель отвечает за разбиения $2s_{ii}$ -элементных множеств на пары.

Слагаемое

$$\prod K(\sigma_j, \delta_j) \prod (1 + \theta(m_i))$$

в сумме (4.1), отвечающее связке с данным набором s_{ij} , q_i , равно

$$\prod_{i \leq j} \kappa_{ij}^{s_{ij}} \cdot \prod_i (1 + \theta_i)^{q_i}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \Re[K, \theta](p_1, \dots, p_N) &= \Re[K, \theta](\omega) \\ &= \sum \left[\frac{\prod p_i!}{\prod_{i \leq j} s_{ij}! \prod_i q_i! \prod_i 2^{s_{ii}}} \cdot \prod_{i \leq j} \kappa_{ij}^{s_{ij}} \prod_i (1 + \theta_i)^{q_i} \right], \end{aligned} \quad (4.5)$$

где суммирование ведется по всем наборам s_{ij} , q_i , удовлетворяющим (4.3) (мы проделали очевидные сокращения в (4.4)). Теперь мы используем формулу (3.8) для

вычисления образа функции $\mathfrak{R}[K, \theta]$ в бозонном пространстве Фока. Этот образ равен

$$\sum_{(p_1, \dots, p_N) \in \mathbb{Z}_+^N} \left\{ \left[\sum \frac{\prod p_i!}{\prod_{i \leq j} s_{ij}! \prod_i q_i! \prod_i 2^{s_{ii}}} \prod_{i \leq j} \varkappa_{ij}^{s_{ij}} \prod_i (1 + \theta_i)^{q_i} \right] \times \prod_i \left(\frac{(a_i(z_i + 1))^{p_i}}{p_i!} \exp(-a_i(z_i + 1)) \right) \right\}, \quad (4.6)$$

где суммирование в квадратных скобках ведется по всем наборам q_i, s_{ij} , удовлетворяющим (4.3). Подставляя (4.3) вместо p_i , мы преобразуем наше выражение к виду

$$\begin{aligned} & \sum_{s_{ij}, q_i \in \mathbb{Z}_+} \left\{ \prod_{i < j} \frac{[\varkappa_{ij} a_i a_j (z_i + 1)(z_j + 1)]^{s_{ij}}}{s_{ij}!} \times \prod_i \frac{[\varkappa_{ii} a_i^2 (z_i + 1)^2 / 2]^{s_{ii}}}{s_{ii}!} \right. \\ & \quad \times \left. \prod_i \frac{[(1 + \theta_i) a_i (z_i + 1)]^{q_i}}{q_i!} \right\} \times \prod_i \exp(-a_i(z_i + 1)) \\ & = \prod_{i < j} \exp\{\varkappa_{ij} a_i a_j (z_i + 1)(z_j + 1)\} \times \prod_i \exp\left\{\frac{1}{2} \varkappa_{ii} a_i (z_i + 1)^2\right\} \\ & \quad \times \prod_i \exp\{(1 + \theta_i) a_i (z_i + 1)\} \times \prod_i \exp\{-a_i(z_i + 1)\}, \end{aligned} \quad (4.7)$$

что совпадает с искомым выражением.

Мы проводили вычисления, не обращая внимание на сходимость рядов в гильбертовых пространствах $F(L^2(M))$ и $L^2(\Omega(M)) \simeq l_2(\mathbb{Z}_+^N)$, мы следили лишь за покоординатной сходимостью в $l_2(\mathbb{Z}_+^N)$ и поточечной сходимостью в пространстве голоморфных функций на $\mathbb{C}^N$. Однако мы проводили вычисление, отождествляя ортогональные базисы в $F(L^2(M))$ и $L^2(\Omega(M))$. Поэтому в случае $\mathfrak{R} \in L^2(\Omega(M))$ мы должны получить правильный ответ в $F(L^2(M))$, а в случае, если (4.2) лежит в $F(L^2(M))$, выражение (4.6) есть его разложение по ортогональному базису, а поэтому и (4.5) лежит в $\Omega(L^2(M))$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Условие сходимости рядов в гильбертовом пространстве играло в нашем доказательстве незначительную роль. Мы увидим ниже в § 6, что формула соответствия (4.2) может оставаться в силе и в случае, когда условие сходимости не выполнено.

ТЕОРЕМА 4.1'. Пусть $\varkappa_{ij} = K(m_i, m_j)$ удовлетворяет тем же условиям, что и в теореме 4.1. Тогда функции

$$\exp\left\{\frac{1}{2} \sum \varkappa_{ij} a_i a_j z_i z_j + \sum \theta_j a_j z_j\right\} \in F(L^2(M))$$

соответствует функция

$$\mathfrak{R}^*[K, \theta](\omega) := \exp\left\{\frac{1}{2} \sum \varkappa_{ij} a_i a_j - \sum \theta_j a_j\right\} \mathfrak{R}[K, \tilde{\theta}](\omega) \in L^2(\Omega(M)),$$

где

$$\tilde{\theta}_j = \theta_j - \sum_i \varkappa_{ij} a_i.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Это переформулировка теоремы 4.1.

ЗАМЕЧАНИЕ. Теорему 4.1' несложно доказать непосредственно без ссылки на теорему 4.1. Для этого достаточно разложить гауссов вектор $b[K \mid \theta^t]$ по ортогональной системе $\prod e_{\alpha_j}(z_j)$ (см. (3.9)), что несложно (удобно предварительно сделать гейзенберговский сдвиг, соответствующий функции $-1 \in L^2(M)$ (см. п. 2.10)).

4.3. Некоторые “интегралы”. Пусть, по-прежнему, пространство M конечно, пусть меры точек пространства M равны $a_1, \dots, a_N$. Пусть K, L – функции на $M \times M$, удовлетворяющие условиям теоремы 4.1. Мы будем рассматривать эти функции как матрицы размера $N \times N$. Пусть θ, λ – функции на M . Мы будем рассматривать их как матрицы-строки. Через 1 мы обозначим функцию на M , равную 1 , а также соответствующую матрицу-строку. Пусть

$$D = \begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_N \end{pmatrix}.$$

Введем обозначения

$$\begin{aligned} \tilde{\theta} &= \theta \cdot D^{1/2}, & \bar{\lambda} &= \lambda \cdot D^{1/2}, & \tilde{1} &= 1 \cdot D^{1/2}, \\ \tilde{K} &= D^{1/2} K D^{1/2}, & \tilde{L} &= D^{1/2} L D^{1/2}. \end{aligned}$$

Применяя формулу (2.7), мы получаем

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega(M)} \Re^*[K, \theta](\omega) \overline{\Re^*[L, \lambda](\omega)} d\nu(\omega) \\ &= \det[(1 - \tilde{K} \tilde{L})^{-1/2}] \exp \left\{ \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \tilde{\theta} & \bar{\lambda} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\tilde{K} & E \\ E & -\tilde{L} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \tilde{\theta}^t \\ \bar{\lambda}^t \end{pmatrix} \right\}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Аналогично

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega(M)} \Re[K, \theta](\omega) \overline{\Re[L, \lambda](\omega)} d\nu(\omega) = \det[(1 - \tilde{K} \tilde{L})^{-1/2}] \\ & \times \exp \left\{ - \sum a_j + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \tilde{\theta} + \tilde{1} & \bar{\lambda} + \tilde{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\tilde{K} & E \\ E & -\tilde{L} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} (\tilde{\theta} + \tilde{1})^t \\ (\bar{\lambda} + \tilde{1})^t \end{pmatrix} \right\} \end{aligned} \quad (4.9)$$

(чтобы убедиться в справедливости этой формулы, мы должны вычислить скалярное произведение двух векторов в $F(L^2(M))$ вида (4.2); для этого мы делаем замену переменных $z' = z + 1$ и применяем (2.7)).

ЗАМЕЧАНИЕ. Теорема 4.1 в точности равносильна формуле (4.9) при $L = 0$. Формула Кэмпбелла получается, если подставить $K = L = 0, \lambda = 0$ в (4.9). Отметим также частный случай этих формул при $L = 0, \lambda = 0$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega(M)} \Re^*[K, \theta](\omega) d\nu(\omega) = 1, \\ & \int_{\Omega(M)} \Re[K, \theta](\omega) d\nu(\omega) = \exp \left\{ \frac{1}{2} \sum \varkappa_{ij} a_i a_j + \sum \theta_j a_j \right\}. \end{aligned}$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Естественно встает вопрос о том, можно ли вычислить интегралы (4.8), (4.9) (разумеется, это не интегралы, а кратные ряды) непосредственно, не привлекая бозон–пуассоновского соответствия? Соответствующая выкладка довольно замысловата и длинна, в конечном счете ряды сворачиваются в гауссовы интегралы.

4.4. Случай бесконечных пространств. Пусть теперь лебеговское пространство M с мерой произвольно. Рассмотрим функцию $K(m, m') \in L^2(M \times M)$ такую, что $K(m, m') = K(m', m)$. Рассмотрим интегральный оператор

$$\mathcal{K}f(m) = \int_M K(m, m')f(m') d\mu(m'). \quad (4.10)$$

Пусть функция K такова, что норма оператора $\mathcal{K}$ в $L^2(M)$ меньше 1. Пусть $\theta \in L^2(M)$. Рассмотрим функцию

$$\Re[K, \theta](\omega).$$

Хотелось бы думать (см. теорему 4.1), что соответствующий элемент пространства $F(L^2(M))$ задается формулой

$$\beta(z) = \exp \left\{ \frac{1}{2} \langle \mathcal{K}(z+1), \overline{(z+1)} \rangle_{L^2(M)} + \langle \theta, \overline{(z+1)} \rangle_{L^2(M)} \right\} \quad (4.11)$$

или в развернутом виде

$$\begin{aligned} \beta(z) = \exp \left\{ \frac{1}{2} \int_M \int_M K(m, m') (z(m) + 1) (z(m') + 1) d\mu(m) d\mu(m') \right. \\ \left. + \int_M \theta(m) (z(m) + 1) d\mu(m) \right\}, \end{aligned} \quad (4.12)$$

где $z(m) \in L^2(M)$.

Аналогично рассмотрим гауссов вектор из $F(L^2(M))$:

$$\begin{aligned} b[\mathcal{K} \mid \theta](z) &= \exp \left\{ \frac{1}{2} \langle \mathcal{K}z, \bar{z} \rangle + \langle \theta, \bar{z} \rangle \right\} \\ &= \exp \left\{ \frac{1}{2} \int_M \int_M K(m, m') z(m) z(m') d\mu(m) d\mu(m') \right. \\ &\quad \left. + \int_M \theta(m) z(m) d\mu(m) \right\}. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Хотелось бы думать (см. теорему 4.1'), что этому вектору соответствует функция из $L^2(\Omega(M))$, заданная формулой

$$\begin{aligned} \Re^*[K, \theta](\omega) &= \Re[K, \tilde{\theta}](\omega) \\ &\times \exp \left\{ \frac{1}{2} \int_M \int_M K(m, m') d\mu(m) d\mu(m') - \int_M \theta(m) d\mu(m) \right\}, \end{aligned} \quad (4.14)$$

где

$$\tilde{\theta}(m) = \theta(m) - \int_M K(m, m') d\mu(m'). \quad (4.15)$$

Бросается, однако, в глаза, что интегралы в формулах (4.12), (4.14), (4.15), вообще говоря, расходятся. Мы докажем желаемый результат при небольших дополнительных ограничениях на функции $K(m, m')$, $\theta(m)$.

ТЕОРЕМА 4.2. Пусть $K(m, m') \in L^2 \cap L^1(M \times M)$, $\theta(m) \in L^2 \cap L^1(M)$, пусть $\|\mathcal{K}\| < 1$ и пусть функция

$$\sigma_K(m) = \int_M K(m, m') d\mu(m') \quad (4.16)$$

лежит в $L^2(M)$. Тогда

а) выражение

$$\Re[K, \theta](\omega) = \sum_{R \in \tan(\omega)} \left(\prod_{\{\sigma_j, \delta_j\} \in R} K(\sigma_j, \delta_j) \cdot \prod_{m_j \in [\omega]_R} (1 + \theta(m_j)) \right), \quad (4.17)$$

определяющее функцию $\Re[K, \theta](\omega)$, сходится абсолютно почти всюду на $\Omega(M)$. При этом функция $\Re[K, \theta](\omega)$ лежит в $L^2(\Omega(M))$ и соответствует гауссову вектору $\beta(z)$, заданному формулой (4.12);

б) гауссову вектору $b[K \mid \theta^t]$, заданному формулой (4.13), соответствует функция $\Re^*[K, \theta](\omega)$, заданная формулой (4.14).

ЗАМЕЧАНИЕ. Внешне теорема 4.2 выглядит как теорема о поточечной сходимости функционального ряда (4.17). Однако множество суммирования в (4.17) зависит от ω , и поэтому отдельные слагаемые ряда не являются функциями от ω . Проводится что-то вроде суммирования всех значений многозначной функции в данной точке. В действительности можно совершить некоторое “насилие” и “разрезать” эту многозначную функцию на ветви. Для этого достаточно положить, что M есть полупрямая с некоторой мерой Стильтьеса. Тогда почти все конфигурации становятся упорядоченными множествами, эквивалентными $\mathbb{Z}_+$, и мы можем говорить о суммировании по связкам в $\mathbb{Z}_+$. Далее можно было бы попытаться применить к ряду (4.17) теорему о монотонной сходимости. У меня нет ощущения, что этот путь может оказаться проще предложенного ниже доказательства.

ЗАМЕЧАНИЕ. Функции $\Re^*[K, \theta](\omega)$ имеют смысл при любых $\theta \in L^2(M)$, $K \in L^2(M \times M)$, это так потому, что они являются образами гауссовых векторов при бозон–пуассоновском соответствии. Их можно определить также как L^2 -пределы цилиндрических функций вида $\Re^*[K_j, \theta_j]$ (см. ниже п. 5.2).

ЗАМЕЧАНИЕ. Возьмем функцию $\theta > 0$ такую, что $\theta \in L^2 \setminus L^1$. Можно показать, что $\Re[0, \theta](\omega) = +\infty$ п.в. Это показывает, что функции $\Re[K, \theta](\omega)$ существуют не для всех $K, \theta \in L^2$. Поэтому и формула (4.14) для вычисления функции $\Re^*[K, \theta](\omega)$ верна не всегда.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.3. Пусть функции $K(m, m')$, $\theta(m)$, $L(m, m')$, $\lambda(m)$ удовлетворяют условиям теоремы 4.2. Тогда

а)

$$\begin{aligned} \int_{\Omega(M)} \Re[K, \theta](\omega) \overline{\Re[L, \lambda]}(\omega) d\nu(\omega) &= \det[(E - \mathcal{K}\overline{\mathcal{L}})^{-1/2}] \\ &\times \exp \left\{ \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \theta & \bar{\lambda} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\mathcal{K} & E \\ E & -\overline{\mathcal{L}} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \theta^t \\ \bar{\lambda}^t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \theta & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\mathcal{K} & E \\ E & -\overline{\mathcal{L}} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1^t \\ 1^t \end{pmatrix} \right. \\ &\left. + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} -\mathcal{K} & E \\ E & -\overline{\mathcal{L}} \end{pmatrix}^{-1} - \begin{pmatrix} 0 & E \\ E & 0 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} 1^t \\ 1^t \end{pmatrix} \right\}; \quad (4.18) \end{aligned}$$

- б) *скалярные произведения* $\mathfrak{A}^*[K, \theta]$ и $\mathfrak{A}^*[L, \lambda]$ *вычисляются по формуле* (2.7).

ЗАМЕЧАНИЕ. Чтобы избежать возможности двусмысленности, подчеркнем, что в записи (4.18) мы используем символику типа (2.9)–(2.10). Символ 1 обозначает функцию на M , тождественно равную 1.

ЗАМЕЧАНИЕ. Формула (4.18) является формулой (4.9), переписанной в ухушенной форме. Однако благодаря ухушению записи два (вообще говоря расходящихся) слагаемых $(-\mu(M))$ и $(+\mu(M))$ в формуле (4.9) сокращаются.

§ 5. Доказательство теоремы 4.2 и предложения 4.3

5.1. Непрерывность формулы (4.18). Прежде всего введем на пространстве функций K, θ топологию, естественную с точки зрения формулировки теоремы. На множестве функций θ мы введем слабую топологию, в которой непрерывны нормы пространств $L^1(M)$, $L^2(M)$. На множестве функций K мы берем слабую топологию, в которой непрерывны нормы $L^1(M \times M)$, $L^2(M \times M)$, а также непрерывно отображение в пространство $L^2(M)$, заданное формулой (4.16) (т.е. $K \mapsto \sigma_K$).

Обозначим правую часть формулы (4.18) через

$$\mathfrak{A}(K, \theta \mid L, \lambda).$$

ЛЕММА 5.1. *Функция $\mathfrak{A}(K, \theta \mid L, \lambda)$ непрерывна по совокупности переменных.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО более-менее очевидно, мы однако проведем его аккуратно.

Отображение $(\mathcal{K}, \mathcal{L}) \mapsto \mathcal{K}\mathcal{L}$ из пространства гильберт–шмидтовских операторов в пространство ядерных операторов непрерывно по совокупности переменных (см. [14, задача 6.28]). Определитель непрерывен относительно ядерной топологии, и это влечет непрерывность множителя $\det(\cdot)$.

Первое слагаемое в показателе экспоненты в (4.18) имеет вид

$$\langle Ax, y \rangle, \tag{5.1}$$

где x, y – векторы гильбертова пространства (в данном случае пространства $L^2(M) \oplus L^2(M)$), а A – ограниченный оператор, зависящий от $\mathcal{K}$ и $\mathcal{L}$. Выражение (5.1) непрерывно по совокупности переменных x, y, A , если на x, y ввести обычную топологию гильбертова пространства, а на множестве операторов – равномерную топологию. Итак, непрерывность этого слагаемого очевидна.

Распишем второе слагаемое в показателе экспоненты, используя тождества

$$\begin{pmatrix} -\mathcal{K} & E \\ E & -\overline{\mathcal{L}} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \overline{\mathcal{L}}(E - \mathcal{K}\overline{\mathcal{L}})^{-1} & (E - \overline{\mathcal{L}}\mathcal{K})^{-1} \\ (E - \mathcal{K}\overline{\mathcal{L}})^{-1} & \mathcal{K}(E - \overline{\mathcal{L}}\mathcal{K})^{-1} \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{K}(E - \overline{\mathcal{L}}\mathcal{K})^{-1} = (E - \mathcal{K}\overline{\mathcal{L}})^{-1}\mathcal{K}, \quad (E - \mathcal{K}\overline{\mathcal{L}})^{-1} = E + \mathcal{K}\overline{\mathcal{L}}(E - \mathcal{K}\overline{\mathcal{L}})^{-1},$$

верные при $\|\mathcal{K}\| < 1$, $\|\mathcal{L}\| < 1$. Мы получаем

$$\begin{aligned} & \langle (E - \mathcal{K}\overline{\mathcal{L}})^{-1}\theta, \mathcal{L} \cdot 1 \rangle + (\langle \mathcal{K}(E - \overline{\mathcal{L}}\mathcal{K})^{-1}\theta, \mathcal{L} \cdot 1 \rangle + \langle \theta, 1 \rangle) \\ & + (\langle \bar{\lambda}, 1 \rangle + \langle \overline{\mathcal{L}}(E - \mathcal{K}\overline{\mathcal{L}})^{-1}\bar{\lambda}, \overline{\mathcal{K}} \cdot 1 \rangle) + \langle (E - \overline{\mathcal{L}}\mathcal{K})^{-1}\bar{\lambda}, \overline{\mathcal{K}} \cdot 1 \rangle, \end{aligned}$$

где $\mathcal{K} \cdot 1 = \sigma_K$, а $\langle \theta, 1 \rangle = \int \theta d\mu$. В этом разложении мы видим четыре члена вида (5.1) (при этом $x, y = \lambda, \theta, \overline{\mathcal{K}} \cdot 1, \mathcal{L} \cdot 1 \in L^2(M)$) и два сходящихся интеграла $\int \theta d\mu, \int \bar{\lambda} d\mu$.

Наконец, третье слагаемое в показателе экспоненты равно

$$\begin{aligned} & (\langle \overline{\mathcal{L}} \cdot 1, 1 \rangle + \langle (E - \mathcal{K}\overline{\mathcal{L}})^{-1}\mathcal{K} \cdot [\overline{\mathcal{L}} \cdot 1], \mathcal{L} \cdot 1 \rangle) \\ & + 2\langle (E - \mathcal{K}\overline{\mathcal{L}})^{-1}[\mathcal{K} \cdot 1], \overline{\mathcal{L}} \cdot 1 \rangle \\ & + (\langle \mathcal{K} \cdot 1, 1 \rangle + \langle (E - \overline{\mathcal{L}}\mathcal{K})^{-1}\overline{\mathcal{L}} \cdot [\mathcal{K} \cdot 1], \overline{\mathcal{K}} \cdot 1 \rangle). \end{aligned}$$

Мы видим три члена вида (5.1) и два члена

$$\iint K(m, m') d\mu(m) d\mu(m'); \quad \iint L(m, m') d\mu(m) d\mu(m').$$

Лемма доказана.

5.2. Цилиндрические функции. Теперь покажем, что правая часть формулы (4.18) не только непрерывна, но и иногда бывает равна левой части.

Мы скажем, что функция θ — *ступенчатая*, если она принимает лишь конечное число значений и равна 0 везде, кроме множества конечной меры. Мы скажем, что функция $K(m, m')$ — *ступенчатая*, если существуют подмножества конечной меры $M_1, \dots, M_\alpha \subset M$ такие, что

- 1) K постоянна на множествах $M_i \times M_j$,
- 2) K равна 0 вне множества $(\bigcup M_i) \times (\bigcup M_j)$.

Если K и θ — ступенчатые функции, то функция $\Re[K, \theta]$ является цилиндрической. Следующее высказывание есть просто переформулировка формулы (4.9).

ЛЕММА 5.2. *Формула (4.18) верна, если K, θ, L, λ — ступенчатые функции.*

5.3. Поточечные пределы цилиндрических функций. Пусть теперь $K(m, m') \geq 0$, $\theta(m) \geq 0$. Рассмотрим (не строго) возрастающие последовательности $K_j(m, m')$, $\theta_j(m)$ ступенчатых функций, сходящиеся к K и θ поточечно.

Очевидно, последовательность $\Re[K_j, \theta_j](\omega)$ монотонно возрастает при каждом ω .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.3. *Последовательность $\Re[K_j, \theta_j](\omega)$ сходится поточечно к некоторой функции $T(\omega) \in L^2(\Omega(M))$.*

ЛЕММА 5.4. $K_j \rightarrow K$, $\theta_j \rightarrow \theta$ в смысле топологии п. 5.1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ. В силу теоремы Лебега о мажорируемой сходимости $\int (K - K_j) \rightarrow 0$, $\int (K - K_j)^2 \rightarrow 0$. По той же теореме

$$\int K_j(m, m') d\mu(m') \rightarrow \int K(m, m') d\mu(m')$$

для почти всех m , т.е. $\sigma_{K_j} \rightarrow \sigma_K$ поточечно. Далее применяем теорему о мажорируемой сходимости к $\int (\sigma_K - \sigma_{K_j})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ.

$$\int \Re[K_j, \theta_j](\omega) d\nu(\omega) = \mathfrak{A}(K_j, \theta_j \mid 0, 0) \rightarrow \mathfrak{A}(K, \theta \mid K, \theta).$$

Последовательность интегралов ограничена, поэтому по теореме Беппо Леви о монотонной сходимости $T(\omega) = \lim_{j \rightarrow \infty} \Re[K_j, \theta_j](\omega)$ существует почти всюду. Применяя теорему о монотонной сходимости к последовательности интегралов

$$\int |\Re[K_j, \theta_j](\omega)|^2 d\nu(\omega) = \mathfrak{A}(K_j, \theta_j \mid K_j, \theta_j) \rightarrow \mathfrak{A}(K, \theta \mid 0, 0),$$

мы получаем, что

$$\int |T(\omega)|^2 d\nu(\omega) = \mathfrak{A}(K, \theta \mid K, \theta).$$

5.4. Сходимость рядов $\Re[K, \theta](\omega)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.5. Пусть K , θ , K_j , θ_j — те же, что и выше. Тогда ряд (4.17), определяющий функцию $\Re[K, \theta](\omega)$ сходится почти всюду и

$$\Re[K, \theta](\omega) = T(\omega) = \lim_{j \rightarrow \infty} \Re[K_j, \theta_j](\omega)$$

почти всюду.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Фиксируем такое ω , что для него последовательность $\Re[K_j, \theta_j](\omega)$ имеет конечный предел.

Фиксируем связку $R \in \tan(\omega)$. Применяя теорему о монотонной сходимости к последовательности рядов

$$\sum_{m_\alpha \in [\omega]_R} \ln(1 + \theta_j(m_\alpha))$$

(зависящей от j), мы получаем

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \prod_{m_\alpha \in [\omega]_R} (1 + \theta_j(m_\alpha)) = \prod_{m_\alpha \in [\omega]_R} (1 + \theta(m_\alpha)).$$

Теперь мы применяем теорему о монотонной сходимости к последовательности рядов $\Re[K_j, \theta_j](\omega)$ (суммирование на этот раз ведется по всем связкам). Это дает желаемый результат.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.6. Пусть K, θ – произвольные функции, удовлетворяющие условиям теоремы. Тогда для почти всех ω :

1. все произведения в (4.17) сходятся абсолютно,
2. ряд по $R \in \tan(\omega)$ сходится абсолютно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сравним ряды, определяющие функции

$$\Re[K, \theta](\omega) \quad \text{и} \quad \Re[|K|, |\theta|](\omega).$$

В правом выражении все сходится абсолютно. В частности, сходимость какого-нибудь бесконечного произведения в правом ряду влечет сходимость соответствующего произведения в левом ряду. Более того,

$$\left| \prod K(\sigma_\beta, \delta_\beta) \cdot \prod (1 + \theta_j(m_\alpha)) \right| \leq \prod |K(\sigma_\beta, \delta_\beta)| \cdot \prod (1 + |\theta_j(m_\alpha)|),$$

что влечет абсолютную сходимость ряда $\Re[K, \theta](\omega)$.

5.5. Еще раз поточечные пределы цилиндрических функций. Пусть, по-прежнему, K, θ – произвольные функции, удовлетворяющие условиям теоремы. Рассмотрим последовательности K_j, θ_j ступенчатых функций такие, что

- 1) $|K_j|$ и $|\theta_j|$ монотонно (не строго) возрастают,
- 2) K_j и θ_j сходятся поточечно к K и θ .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.7. Последовательность $\Re[K_j, \theta_j](\omega)$ сходится к $\Re[K, \theta](\omega)$ почти всюду.

ЗАМЕЧАНИЕ. Это высказывание имеет некоторый самостоятельный интерес по сравнению с теоремой 4.2, а именно, оно дает другой способ вычисления функций $\Re[K, \theta](\omega)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего мы имеем поточечную (при фиксированном ω) сходимость слагаемых

$$\prod_{m_\alpha \in [\omega]_R} (1 + \theta_j(m_\alpha)) \rightarrow \prod_{m_\alpha \in [\omega]_R} (1 + \theta(m_\alpha)).$$

Эта сходимость обеспечивается тем, что соответствующие ряды из логарифмов мажорируются сходящимся рядом

$$\sum_{m_\alpha \in [\omega]_R} \ln(1 + |\theta(m_\alpha)|).$$

Далее, ряды, определяющие $\Re[K_j, \theta_j](\omega)$, мажорируются рядом, определяющим $\Re[|K|, |\theta|](\omega)$, и теорема о мажорируемой сходимости дает искомый результат.

5.6. L^2 -сходимость последовательности $\Re[K_j, \theta_j](\omega)$.

ЛЕММА 5.8. *Последовательность $\Re[K_j, \theta_j](\omega)$ сходится к $\Re[K, \theta](\omega)$ в смысле L^2 .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что последовательность $\Re[K_j, \theta_j](\omega)$ фундаментальна. Действительно, величина

$$\begin{aligned} & \int |\Re[K_j, \theta_j](\omega) - \Re[K_i, \theta_i](\omega)|^2 d\nu(\omega) \\ &= \mathfrak{A}(K_j, \theta_j \mid K_j, \theta_j) + \mathfrak{A}(K_i, \theta_i \mid K_i, \theta_i) \\ &\quad - \mathfrak{A}(K_j, \theta_j \mid K_i, \theta_i) - \mathfrak{A}(K_i, \theta_i \mid K_j, \theta_j) \end{aligned}$$

стремится к 0, если $i, j \rightarrow \infty$. Итак, последовательность $\Re[K_j, \theta_j](\omega)$ сходится в L^2 , но мы видели, что поточечно она сходится к $\Re[K, \theta](\omega)$. Лемма доказана, но в доказательстве было использовано следующее высказывание:

ЛЕММА 5.9. *Сходимость $K_j \rightarrow K$, $\theta_j \rightarrow \theta$, описанная в п. 5.5, влечет сходимость в смысле топологии п. 5.1.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим множество Σ_+ , где $K > 0$, и множество Σ_- , где $K < 0$. Далее ограничим K на каждое из этих множеств и повторим доводы из доказательства леммы 5.4.

5.7. Завершение доказательств. Мы видели (лемма 5.2), что формула (4.18) верна, если K , L , θ , λ — ступенчатые функции. Из леммы 5.8 вместе с леммой 5.1 следует, что она верна всегда.

Далее подставляем в формулу (4.18) $L = 0$ и $\lambda = z$. Это дает нам явную формулу для

$$\langle \Re[K, \theta], \Psi_z \rangle_{L^2(\Omega(M))},$$

т. е. для образа функции $\Re[K, \theta]$ в бозонном пространстве Фока.

Остальное очевидно.

§ 6. Гауссовы операторы

6.1. Гильберт–шмидтовские операторы. Рассмотрим гауссов оператор

$$B[S \mid \sigma^t]: F(L^2(M_2)) \rightarrow F(L^2(M_1)). \quad (6.1)$$

Пусть S удовлетворяет условиям предложения 2.4. Тогда оператор $B[S \mid \sigma^t]$ является оператором Гильберта–Шмидта (чтобы убедиться в этом, надо к предложению 2.4 добавить несложные доводы из [4, 6.4], (см. также [16]). Матрицу S мы отождествим с ядром соответствующего интегрального оператора в $L^2(M_1 \sqcup M_2)$. В силу замечаний из п. 1.5 соответствующий оператор

$$B^{[p]}[S \mid \sigma^t]: L^2(\Omega(M_2)) \rightarrow L^2(\Omega(M_1))$$

задается формулой

$$B^{[p]}[S \mid \sigma^t]f(\omega_1) = \int_{\Omega(M_2)} \Re^*[S, \sigma](\omega_1, \omega_2)f(\omega_2) d\nu(\omega_2), \quad (6.2)$$

где $\omega_1 \in \Omega(M_1)$, $\omega_2 \in \Omega(M_2)$ и тем самым $(\omega_1, \omega_2) \in \Omega(M_1 \sqcup M_2)$.

Представляется любопытным вопрос о том, можно ли явно описать операторы $B^{[p]}[S \mid \sigma^t]$, соответствующие не гильберт–шмидтовским гауссовым операторам (примеры таких соответствий были приведены выше в пп. 3.5, 3.6).

6.2. Случай конечных пространств.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.1. Пусть пространства M_1 и M_2 конечны. Тогда оператор $B^{[p]}[S \mid \sigma^t]: L^2(\Omega(M_2)) \rightarrow L^2(\Omega(M_1))$, соответствующий произвольному ограниченному оператору вида $B[S \mid \sigma^t]$, задается формулой (6.2).

ЗАМЕЧАНИЕ. Пространства $\Omega(M_1)$ и $\Omega(M_2)$ дискретны, поэтому мы, собственно говоря, получили формулу для матрицы оператора.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нужно убедиться, что

$$\langle B^{[p]}[S \mid \sigma^t]\Psi_{h_1}, \Psi_{h_2} \rangle_{L^2(\Omega(M_1))} = \langle B[S \mid \sigma^t]\Phi_{h_1}, \Phi_{h_2} \rangle_{F(L^2(M_2))}.$$

Если расписать левую часть равенства, получится в точности выражение того же вида, что и в доказательстве теоремы 4.1.

ЗАМЕЧАНИЕ. В частности, мы получаем формулы для действия симплектической группы $\text{Sp}(2n, \mathbb{R})$, группы $\text{Isom}(L^2(M))$, а также конечномерной группы Гейзенберга в $L^2(\Omega(M))$ (см. выше пп. 2.7, 2.10). В двух последних случаях получаются довольно забавные формулы.

6.3. Некоторые интегралы. Рассмотрим функцию $\Re[S, \sigma](\omega, \tilde{\omega})$ на $\Omega(M \sqcup \tilde{M})$. Фиксируем аргумент $\tilde{\omega}$. Полученная функция на $\Omega(M)$, вообще говоря, не имеет вида $\Re[K, \theta](\omega)$, т.е. мы получаем более широкое семейство “специальных функций” на $\Omega(M)$.

Пусть теперь M' , M , M'' – пространства с мерой, причем пространства M' и M'' конечны, а M – произвольно. Тогда формула (2.15) переписывается в виде

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega(M)} \Re^*[S_1, \sigma_1](\omega', \omega) \cdot \Re^*[S_2, \sigma_2](\omega, \omega'') d\nu(\omega) \\ &= \lambda \cdot \Re^*[(S_1 \mid \sigma_1^t) \circ (S_2 \mid \sigma_2^t)](\omega', \omega''), \end{aligned}$$

где λ берется из (2.16), а $(S_1 \mid \sigma_1^t) \circ (S_2 \mid \sigma_2^t)$ – из правой части (2.15).

Эта формула верна при любых фиксированных $\omega' \in \Omega(M')$, $\omega'' \in \Omega(M'')$ и при небольших ограничениях на S_1, σ_1 и S_2, σ_2 , которые мы не будем прослеживать.

Список литературы

1. Шилов Г. Е., Фан Дык Тинь. Интеграл, мера, производная в линейном пространстве. М.: Наука, 1967.
2. Неретин Ю. А. Диффузии дробного порядка и квазиинвариантные действия бесконечномерных групп // Труды МИРАН. 1997. Т. 217.
3. Березин Ф. А. Метод вторичного квантования. М.: Наука, 1965.
4. Neretin Yu. A. Categories of symmetries and infinite dimensional groups. Oxford: Clarendon Press, 1996.
5. Прессли Э., Сигал Г. Группы петель. М.: Мир, 1990.
6. Неретин Ю. А. Голоморфные продолжения представлений группы диффеоморфизмов окружности // Матем. сб. 1989. Т. 180. №5. С. 635–657.
7. Вершик А. М., Гельфанд И. М., Граев М. И. Коммутативная модель представления группы токов $SL_2(\mathbb{R})^X$, связанная с унитарной подгруппой // Функц. анализ и прилож. 1983. Т. 17. №2. С. 70–72.
8. Вершик А. М., Гельфанд И. М., Граев М. И. Представления групп диффеоморфизмов // УМН. 1975. Т. 30. №6. С. 1–50.
9. Исмагилов Р. С. Унитарные представления группы диффеоморфизмов пространства $\mathbb{R}^n$, $n > 2$ // Матем. сб. 1975. Т. 98. №1. С. 55–71.
10. Исмагилов Р. С. Об унитарных представлениях группы диффеоморфизмов $\mathbb{R}^n$ // Функц. анализ и прилож. 1975. Т. 9. №2. С. 71–72.
11. Ismagilov R. S. Representations of infinite dimensional groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1996. V. 152.
12. Macdonald I. G. Symmetric functions and Hall polynomials. Oxford: Clarendon Press, 1995 (2d ed.); перевод А. В. Зелевинского первого англ. изд. М.: Мир, 1984.
13. Kingman J. F. C. Poisson processes. Oxford: Clarendon Press, 1993.
14. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т. I. Функциональный анализ. М.: Мир, 1977.
15. Nazarov M. L., Neretin Yu. A., Olshanskii G. I. Semigroups engendres par la representations de Weil du groupe symplectique de dimension infinie // C. R. Acad. Sci. Ser. I. Paris. 1989. V. 309. №7. P. 443–446.
16. Неретин Ю. А. Об одной полугруппе операторов в бозонном пространстве Фока // Функц. анализ и прилож. 1990. Т. 24. №2. С. 63–73.
17. Ольшанский Г. И. Представление Вейля и нормы гауссовых операторов // Функц. анализ и прилож. 1994. Т. 28. №1. С. 51–67.
18. Neretin Yu. A. Integral operators with Gaussian kernels and symmetries of Canonical commutation relations. Contemporary mathematical physics. Volume AMS dedicated to F. A. Berezin // Trans. Amer. Math. Soc. 1996. V. 175. P. 97–135.
19. Hörmander L. Symplectic classification of quadratic forms, and general Mehler formulas // Math. Z. 1995. Т. 219. С. 413–449.
20. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т. 2. М.: Наука, 1966.

Московский институт
электроники и математики

Поступила в редакцию
11.03.1997