Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Ю. Олшанский, Об искривлении подгрупп конечно-определенных групп, *Матем. сб.*, 1997, том 188, номер 11, 51–98

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm276>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.90.164.192

26 апреля 2023 г., 17:24:42

УДК 512

А. Ю. Ольшанский

Об искривлении подгрупп конечно-определенных групп

Доказано, что всякая вычислимая функция $G \rightarrow \mathbb{N} = \{0, 1, \dots\}$ на группе G (с некоторыми необходимыми ограничениями) может быть с точностью до эквивалентности реализована как функция длины элементов посредством вложения группы G в подходящую конечно-определенную группу. Например, длина степени g^n элемента g конечно-определенной группы может расти, как n^θ , для любого вычислимого числа $\theta \in (0, 1]$. Тем самым дается ответ на вопрос М. Громова. Основным инструментом является доказанный в статье усиленный вариант вложения Хигмэна, при котором сохраняются длины элементов.

Библиография: 10 названий.

§ 1. Введение

В группе G с конечным множеством порождающих $\mathcal{A} = \{a_1, \dots, a_m\}$ каждый элемент g имеет длину $|g| = |g|_{\mathcal{A}}$, равную длине записи $\|W\|$ кратчайшего слова W в алфавите $\mathcal{A}^{\pm 1}$, представляющего элемент g . При изоморфном вложении группы G в другую группу H с системой порождающих $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_n\}$ справедливо очевидное неравенство

$$|g|_{\mathcal{B}} \leq c |g|_{\mathcal{A}}, \quad (1.1)$$

где константа $c = \max\{|a_1|_{\mathcal{B}}, \dots, |a_m|_{\mathcal{B}}\}$ не зависит от выбора элемента g . В частности, для двух систем порождающих $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ одной группы G можно подобрать положительные константы c_1 и c_2 , такие что для любого $g \in G$

$$c_1 |g|_{\mathcal{A}} \leq |g|_{\mathcal{B}} \leq c_2 |g|_{\mathcal{A}}. \quad (1.2)$$

В статье [1] дан ответ на следующий вопрос. Какие функции $l: G \rightarrow \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ могут быть реализованы с точностью до эквивалентности для данной счетной группы G как функции длины $g \mapsto |g|_{\mathcal{B}}$ при вложении группы G в некоторую группу H с конечной системой порождающих $\mathcal{B}$. Понятие эквивалентности обусловлено при этом неравенствами (1.2), а именно, две функции $l_1, l_2: G \rightarrow \mathbb{N}$ называются *эквивалентными*, если существуют положительные константы c_1, c_2 такие, что

$$c_1 l_1(g) \leq l_2(g) \leq c_2 l_1(g)$$

для любого элемента $g \in G$.

В следующей теореме автора нетривиальной является “достаточность”.

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-01-420).

ТЕОРЕМА 1 [1]. Пусть $l: G \rightarrow \mathbb{N}$ – функция, определенная вложением группы G в некоторую группу R с конечной системой порождающих $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_n\}$, т.е. $l(g) = |g|_{\mathcal{B}}$. Тогда

- (D1) $l(g) = l(g^{-1})$ для каждого $g \in G$, и $l(g) = 0$ в том и только в том случае, когда $g = 1$;
- (D2) $l(gh) \leq l(g) + l(h)$ для $g, h \in G$;
- (D3) существует положительное число a такое, что $\text{card}\{g \in G \mid l(g) \leq r\} \leq a^r$ для любого $r \in \mathbb{N}$.

Наоборот, для любой группы G и любой функции $l: G \rightarrow \mathbb{N}$, удовлетворяющей условиям (D1)–(D3) (коротко – D-условию), существует изоморфное вложение группы G в некоторую 2-порожденную группу R с порождающим множеством $\mathcal{B} = \{b_1, b_2\}$ такое, что функция $g \mapsto |g|_{\mathcal{B}}$ эквивалентна функции l .

В частном случае бесконечной циклической группы $G = \langle g \rangle$ получаются, например, группы $R_\alpha \geq G$, в которых длина степени g^i растет как i^α для любого заранее фиксированного $\alpha \in (0, 1]$. Тем самым дается ответ на соответствующий вопрос Громова [2].

Однако разнообразные эффекты искривления циклических подгрупп встречаются уже в конечно-определенных группах и даже в группах с одним соотношением. К примеру, в группе $\langle a, b, c \mid [a, b] = c, [a, c] = [b, c] = 1 \rangle$ функция $|c^i|$ растет как $\sqrt{i}$, иначе говоря, центральная циклическая подгруппа $\langle c \rangle$ имеет квадратичное “искривление” (distortion). (За характеристику искривления подгруппы G в группе H принимается функция $\text{disto}(r) = \max_{|g|_{\mathcal{B}} \leq r} |g|_{\mathcal{A}}$, хотя по ней и нельзя восстановить класс эквивалентности функции $g \mapsto |g|_{\mathcal{B}}$ на группе G .) В группе $\langle a, b \mid aba^{-1} = b^2 \rangle$ функция $|b^i|$ растет, как $\log i$, т.е. циклическая подгруппа $\langle b \rangle$ имеет экспоненциальное искривление. Пример более чем мультиэкспоненциального искривления и другие примеры можно найти в [3] и [2]. Серия примеров вложений для специально построенных нециклических групп в конечно-определенные группы с функциями $\text{disto} \sim r^q$ для всех рациональных показателей $q \geq 1$ построена в [2].

Поэтому в “проблеме реализации” Громов выделяет в [2] нахождение возможных искривлений циклических подгрупп в конечно-определенных группах. При таком ограничении “реализовать” любую функцию с D-условием, как в теореме 1, заведомо не удастся, хотя бы по причине континуальности мощности множества классов эквивалентности функций с D-условием. (Все функции вида i^α попарно не эквивалентны.) Но все “разумно определенные” функции искривлений удастся реализовать, причем не только для циклических подгрупп.

ТЕОРЕМА 2. Пусть на группе G задана вычислимая функция l со свойствами (D1)–(D3). Тогда группу G можно изоморфно вложить в некоторую конечно определенную группу H так, что функция l эквивалентна ограничению функции $|\cdot|_H$ на G .

Здесь функция l считается вычислимой, если по любому заданию какого-либо элемента g словом относительно некоторой системы порождающих можно алгоритмически вычислить значение $l(g)$. При этом конечность числа порождающих

в G можно не предполагать. Далее, запись $|\cdot|_H$ имеет смысл независимо от выбора конечной системы порождающих в H , если рассматривать функции с точностью до эквивалентности. Заметим еще очевидное: если H — группа с алгоритмически разрешимой проблемой равенства, то длины ее элементов относительно любой конечной системы порождающих вычислимы.

Как и предполагалось в [1], ключом к доказательству оказалось следующее усиление теоремы Хигмэна, которое позволяет вывести теорему 2 из теоремы 1.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть группа R имеет конечную систему порождающих $\mathcal{A}$ и некоторое рекурсивно перечислимое множество (определяющих) соотношений. Тогда существует такое изоморфное вложение группы R в некоторую группу H с конечной системой порождающих $\mathcal{B}$ и конечной системой определяющих соотношений, что $|g|_{\mathcal{A}} = |g|_{\mathcal{B}}$ для любого $g \in G$.*

Отметим, что для полугрупп утверждение теоремы 3 доказано недавно Бирже [5].

Не составляет большого труда несколько усилить формулировку теоремы 3, выбрав универсальную группу H . С учетом леммы 2.2 эту группу можно взять и в теореме 2 независимо от G в качестве вместилища всевозможных “вычислимых искривлений” конечно-порожденных подгрупп.

ТЕОРЕМА 4. *Существует группа U с конечной системой порождающих $\mathcal{B}$ и конечным множеством определяющих соотношений такая, что для всякой группы H с конечной системой порождающих $\mathcal{A}$ и рекурсивно перечислимом множеством определяющих соотношений имеется изоморфное вложение $H \hookrightarrow U$, при котором $|g|_{\mathcal{A}} \leq |g|_{\mathcal{B}}$ для всех $g \in H$.*

План изложения следующий. В §2 напомним конструкцию из [1] с объяснением рекурсивности задания группы R в теореме 1 в случае вычислимой функции l . В §3 приводятся ряд полезных свойств гиперболических плоских графов, т.е. плоских графов с достаточно высокими валентностями вершин.

В §4 выписываются соотношения группы H из теоремы 3. Они являются модификацией приведенных в гл. 12 книги Ротмана [6], в которой доказательство Бриттона теоремы Новикова–Буна (с учетом позднейших улучшений, данных Буном, Коллинзом и Миллером III) сопровождается доказательством Андера [7] теоремы вложения Хигмэна. (Пользуясь случаем, автор благодарит И. Рипса и С. В. Иванова, обративших его внимание на доказательство Андера.)

Изменение состоит в удлинении по сравнению с [6] соотношения (4.10), что позволяет обосновать и использовать затем некоторые гиперболические свойства диаграмм ван Кампена над копредставлением из §4. Выгоду такого рода модификации впервые продемонстрировали Бирже, Рипс и Сапир [8] при конструировании групп с заданной функцией Дэна. Однако в отличие от [8] мы не меняем машины Тьюринга по сравнению с [6], в частности, она остается детерминистской.

В геометрических пояснениях гл. 12 книги [6] и, более систематично, в статье [8] используется то обстоятельство, что соотношения, характерные для HNN-расширения и похожие на них, структурируют диаграммы ван Кампена, расслаивая их на различные “полосы”. Соответствующая терминология приводится в §5, а в §6 доказывается лемма о невозможности кратных пересечений полос опреде-

ленных типов в диаграммах без “втулок”, т.е. без клеток, отвечающих соотношениям (4.10).

В § 7 приводятся необходимые геометрические сведения о минимальных диаграммах над модифицированной группой Новикова–Буна, например, почему две втулки имеют не более одной общей “спицы”.

В § 8 добавляются уже и соотношения типа Андера. Хотя исследуемая группа является конечно определенной, оказывается, что для исключения в минимальных диаграммах полос, “сильно огибающих втулки”, нужно допустить в качестве определяющих бесконечно много соотношений, а минимальность диаграмм следует понимать с учетом градуировки, т.е. с учетом рангов клеток.

Бесконечность множества соотношений, временно включаемых в список определяющих, приходится допустить и в § 9 для исключения в минимальных диаграммах пар втулок, связанных большим числом спиц.

Для доказательства теоремы 3 в § 10 строится четыре промежуточные подгруппы между R и H и проводится ряд промежуточных сравнений длин элементов.

В § 11 используются все основные леммы, в частности, важное свойство дизъюнктивности “производных овалов” в гиперболических графах, с помощью которого оцениваются длины участков границы минимальной диаграммы.

Основные результаты обоснованы в § 12.

Техника из §§ 8–12 применима и в ситуации статьи [8], когда определяющие соотношения строятся без “квадратичной” буквы x на базе других машин. С использованием этой техники и работы [8] будет написана совместная статья с доказательством разрешимости проблемы слов в группе G недетерминистской машиной в полиномиальное время в том и только в том случае, когда группа G вложима в группу с полиномиальной изопериметрической функцией. Свойства построенных в [8] машин позволят также усилить теорему 3 добавлением, что проблема равенства слов в группе H разрешима тогда и только тогда, когда она разрешима в R .

§ 2. Вложение в рекурсивно определенную группу

Для вывода теоремы 2 из теорем 1 и 3 нужно объяснить, почему группа R в теореме 1 имеет рекурсивно перечислимое множество определяющих соотношений, если функция l с D-условием на группе G вычислима. С этой целью коротко напомним построение вложения в теореме 1 [1].

Сначала алгоритмически строится некоторое вспомогательное множество положительных слов $\mathcal{M}$ от двух переменных с нужными свойствами типа условия малых сокращений. Это множество *экспоненциально*, т.е. существует число $c > 1$ такое, что в $\mathcal{M}$ не меньше c^i слов длины $\leq i$ для каждого $i \geq i_0$, причем числа c и i_0 можно указать явно.

Далее в лемме 5 [1] строится инъективное соответствие:

$$g \mapsto X_g \in \mathcal{M}, \quad (2.1)$$

где $g \in G \setminus 1$. Это соответствие определяет вложение группы G в группу H , заданную двумя порождающими и всеми соотношениями вида $X_{g_1} X_{g_2} \cdots X_{g_n} = 1$, если $g_1 g_2 \cdots g_n = 1$ в G . Повторим здесь доказательство леммы 5 [1], обращая внимание на эффективность нахождения слов X_g .

ЛЕММА 2.1. Пусть $\mathcal{M}$ – экспоненциальное множество слов над конечным алфавитом $\{a_1, \dots, a_m\}$. Тогда для вычислимой функции $l: G \rightarrow \mathbb{N}$ с D-условием можно указать константу $d = d(\mathcal{M}, l)$ и эффективно определить инъективное отображение (2.1) со свойством:

$$l(g) \leq \|X_g\| < dl(g), \quad g \in G \setminus 1. \quad (2.2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По условию (D3) существует такая константа a , что для каждого подмножества $G_i = \{g \in G \setminus 1 \mid l(g) \leq i\}$

$$\text{card } G_i < a^i. \quad (2.3)$$

Пусть c – константа экспоненциальности множества $\mathcal{M}$. Тогда можно выбрать такое число $d > i_0$, что

$$c^{di-1} - (2m+1)^i \geq a + a^2 + \dots + a^i, \quad i = 1, 2, \dots \quad (2.4)$$

Поскольку число всех слов длины $\leq i-1$ меньше $(2m+1)^i$, неравенство (2.4) означает, что множество $\mathcal{M}$ имеет более $a + \dots + a^i$ слов с длинами на отрезке $[i, di-1]$. Значит, среди этих слов можно выделить, причем эффективно, попарно непересекающиеся подмножества $\mathcal{X}_{i1}, \dots, \mathcal{X}_{ii}$, состоящие из $a, \dots, a^i$ слов соответственно. (Можно считать, что a – целое.) Сделаем это так, что все те слова из выбранных ранее подмножеств $\mathcal{X}_{i-1,1}, \dots, \mathcal{X}_{i-1,i-1}$, длины которых принадлежат отрезку $[i, di-1]$, входили соответственно в $\mathcal{X}_{i1}, \dots, \mathcal{X}_{ii}$. (Заметим, что $G_0 = \emptyset$, как видно из D-условия.) Тогда подмножества $\mathcal{X}_{ii}, i = 1, 2, \dots$, попарно не пересекаются.

Заметим, что в силу условия (D1) и вычислимости функции l в группе G алгоритмически разрешима проблема равенства. Значит, ее неединичные элементы (представленные словами в некотором алфавите) можно эффективно пронумеровать. Рассматривая произвольный элемент $g = g_k$, вычисляем значение $l(g) = i$ и сопоставляем ему в качестве X_g первое, не использованное ранее слово из подмножества $\mathcal{X}_{ii}$. Такое слово всегда найдется в силу условия (D3) и равенства $\text{card } \mathcal{X}_{ii} = a^i$.

Лемма доказана.

ЛЕММА 2.2. Если данная в теореме 1 функция l с D-условием вычислима, то группу R можно задать рекурсивно перечислимым множеством определяющих соотношений.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как отмечено выше, в группе G алгоритмически разрешима проблема равенства. Поэтому, проверяя последовательно справедливость в ней всех равенств вида $g_1 \dots g_n = 1$ для всевозможных неединичных сомножителей из G , получаем на основании леммы 2.1 и определения группы R перечисление определяющих для R соотношений.

§ 3. Гиперболические плоские графы

Рассмотрим конечный плоский 2-комплекс, т. е. граф Γ на плоскости с вершинами $v_0, v_1, \dots, v_n$, где $n \geq 1$. Выделенная вершина v_0 считается *внешней*, а остальные — *внутренние*. Предполагается, что граф Γ так расположен на плоскости, что в нем нет одноугольных граней с вершинами v_i и двухугольных граней с вершинами v_i, v_j при $i, j \geq 1$. Нет также петель в v_0 (но вершина v_0 вполне может соединяться с другой вершиной несколькими ребрами). Такой граф будем называть *l -графом*, если степень (инцидентности) каждой внутренней вершины не меньше числа $l \geq 6$.

Граф Γ считается так уложенным на плоскости, что вершина v_0 действительно является внешней, т. е. из нее можно провести кривую на бесконечность, не пересекая ребер графа Γ . Если p — простой замкнутый путь, составленный из ребер графа Γ , то можно говорить об области O , ограниченной этим путем (или внутренней относительно p). Для каждой вершины o пути p в этом случае определена ее внутренняя степень $d(o, p)$ относительно p — число ребер, выходящих из o внутрь области O . Приведем известную “формулу кривизны” (см. следствие 3.3 гл. 5 книги [9] для $(6, 3)$ -карт).

ЛЕММА 3.1. *Если $o_1, \dots, o_s$ — все вершины, последовательно проходимые простым замкнутым путем p в l -графе, причем p не проходит через внешнюю вершину, то*

$$\sum_{i=1}^s (2 - d(o_i, p)) \geq 6 \quad (3.1)$$

(т. е. в среднем внутренние степени вершин $o_1, \dots, o_s$ меньше 2).

Следующее свойство также хорошо известно.

ЛЕММА 3.2. *В l -графе Γ найдется внутренняя вершина o степени $d \geq l$ и не менее $d - 3$ последовательных ребер, выходящих из нее (при ее обходе по часовой стрелке), соединяющих o с внешней вершиной v_0 так, что между смежными ребрами нет других вершин графа Γ .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть o_1 — некоторая внутренняя вершина в Γ . Если первое утверждение леммы неверно, ее можно соединить ребром e_1 с некоторой внутренней вершиной o_2 . Если и для o_2 первое утверждение неверно, — проводим из o_2 ребро e_2 в некоторую внутреннюю вершину o_3 и т. д. пока не получим простой замкнутый путь p .

Существует поэтому несократимый замкнутый путь q без самопересечений (с точностью до произвольно малой деформации), который проходит через внутренние вершины и ограничивает максимально возможную область O . В силу такой максимальной в нем можно выделить простой замкнутый подпуть q' , имеющий не более одной общей вершины v со своим дополнением q'' до пути q . Но из неравенства (3.1) видно, что на q' должна быть по крайней мере еще одна вершина v' внутренней степени не больше 1. Если первое утверждение леммы и для нее неверно, то из v' можно выпустить в какую-то внутреннюю вершину некоторое ребро f_1 , не лежащее в O или на q . Тогда, продолжая построение ребер $f_2, \dots$, можно определить с помощью этих ребер и ребер пути q некоторый путь q_0 без самопересечений, ограничивающий область большую, чем O .

Итак, в графе Γ найдется вершина o , удовлетворяющая первому требованию леммы. Если при этом между смежными ребрами e' и e'' , соединяющими ее с v_0 , найдутся другие вершины, то задача сводится к подграфу с меньшим числом вершин, который заключен между e' и e'' (с v_0 , но без o).

Лемма доказана.

ЛЕММА 3.3. *l -граф связан при любом $l = 6, 7, \dots$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Иначе некоторая компонента связности не содержит внешнюю вершину, что противоречит предыдущей лемме, ибо $d - 3 \geq l - 3 \geq 3 > 0$.

ЛЕММА 3.4. *Пусть $d_0, d_1, \dots, d_n$ — степени вершин $v_0, v_1, \dots, v_n$ в l -графе Γ . Тогда $d_0 \geq 6 - 6n + \sum_{i=1}^n d_i$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение верно при $n = 1$, так как все вершины, выходящие из v_1 , должны кончаться в v_0 . При $n > 1$ можем считать, что именно для вершины $o = v_n$ справедливо утверждение леммы 3.2. Рассмотрим граф Γ' с вершинами $v_0, \dots, v_{n-1}$, в котором ребра графа Γ между каждой из вершин $v_1, \dots, v_{n-1}$ и вершиной v_n заменены на ребра между $v_1, \dots, v_{n-1}$ и вершиной v_0 . (Это можно сделать, так как вершина v_n соединена в Γ с v_0 по лемме 3.2.) Тогда $\Gamma' - l$ -граф, и по лемме 3.2 кратности d_0 и d'_0 вершины v_0 в Γ и в Γ' связаны неравенством $d'_0 - 3 \leq d_0 - (d_n - 3)$, откуда по предположению индукции

$$d_0 \geq d'_0 + d_n - 6 \geq \sum_{i=1}^{n-1} d_i - 6(n-1) + 6 + d_n - 6 = \sum_{i=1}^n d_i - 6n + 6.$$

На стандартной гиперболической плоскости кривая без самопересечений постоянной, но не слишком большой кривизны, вполне может быть неограниченной в обе стороны. Кроме того, две такие кривые, проведенные ортогонально в концах двух отрезков с общим началом, не пересекаются, если отрезки достаточно длинные, а угол между ними не слишком маленький. Далее в этом параграфе мы рассмотрим некоторые дискретные аналоги этого проявления гиперболичности в конечных графах, на которых базируются оценки в §10.

Пусть два ребра e и e' выходят из некоторой внутренней вершины v l -графа Γ . Тогда в циклическом порядке все ребра, выходящие из v , можно записать в виде $e, f_1, \dots, f_{n_1}, e', f'_1, \dots, f'_{n_2}$. Мы скажем, что ребра e и e' образуют *большой угол*, если $n_1 \leq 2n_2$ и $n_2 \leq 2n_1$.

Назовем любой путь вида $e_1 e_2 \dots e_\alpha$ в Γ *мало искривленным*, если концы ребер $(e_1)_+, \dots, (e_{\alpha-1})_+$ — внутренние вершины, а ребра $(e_i)^{-1}$ и e_{i+1} составляют большой угол в вершине $(e_i)_+ = (e_{i+1})_-$ для всех $i = 1, \dots, \alpha - 1$.

ЛЕММА 3.5. *Если мало искривленный путь p начинается во внутренней вершине $(e_1)_-$, то он не может быть замкнутым в l -графе при любом $l \geq 6$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выбирая при доказательстве “от противного” длину α пути p минимальной, можем считать, что p — простой путь. Ввиду его малой искривленности каждая вершина цикла p , кроме может быть одной — вершины $p_- = p_+$, имеет на p внутреннюю степень не меньше 2. Но это противоречит неравенству (3.1).

Из леммы 3.5 следует, что максимально продолженный в обе стороны мало искривленный путь в l -графе должен начинаться и кончаться во внешней вершине v_0 .

Пусть x — некоторая жорданова дуга на плоскости, имеющая с графом Γ ровно две общие точки, являющиеся вершинами графа: x_- и x_+ . Назовем ее Γ -*правильной*. Пусть простой путь p в Γ проходит через вершину v , равную x_- или x_+ . Тогда все ребра, выходящие из v , можно циклически выписать в виде $f_1, \dots, f_d$, так что дуга x входит в v между f_d и f_1 . Скажем, что она k -отделена от p , если ребра $f_1, \dots, f_k$ и $f_{d-k+1}, \dots, f_d$ (и им обратные) не встречаются в пути p .

Два максимальных мало искривленных пути p и p' назовем *расходящимися* в вершинах v и v' l -графа Γ , если некоторые две различные их внутренние вершины v и v' соответственно можно соединить Γ -правильной дугой x , которая 2-отделена от p и от p' .

ЛЕММА 3.6. *Два расходящихся пути не имеют общих внутренних в l -графе Γ вершин.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Во введенных выше обозначениях пусть граф $\Gamma(x)$ совпадает с Γ , если дуга x образует двухугольник вместе с некоторым ребром e в Γ и получается из Γ добавлением дуги x в качестве нового ребра в противном случае. Очевидно, что $\Gamma(x)$ — тоже l -граф.

Если p и p' имеют общую внутреннюю вершину, то из подпутей путей p, p' и пути x (или ребра e) можно составить простой замкнутый путь q в $\Gamma(x)$, не проходящий через внешнюю вершину. В силу малой искривленности путей p, p' не более трех вершин пути q могут дать положительный вклад в левую часть неравенства (3.1): $x_- = v, x_+ = v'$ и общая вершина путей p, p' . Но внутренняя степень каждой из вершин x_-, x_+ на q не меньше 1 (даже при замене x на e в $\Gamma(x)$ ввиду условия 2-отделенности в определении расходящихся путей). Поэтому левая часть в (3.1) меньше 6 вопреки утверждению леммы 3.1.

Полученное противоречие доказывает лемму.

По лемме 3.5 максимальный мало искривленный путь p в l -графе Γ является простым, а значит, разделяет две области O_1 и O_2 на плоскости (внутреннюю и внешнюю). Если из каждой вершины $v \neq v_0$ на p в область O_1 (в область O_2) направлено по крайней мере на восемь ребер больше, чем в O_2 (чем в O_1), то путь p назовем *овалом* и обозначим $O(p) = O_1$ ($O(p) = O_2$). (Легко понять, что овалы могут встречаться только при $l = 26$ или $l \geq 28$.)

Назовем некоторую простую плоскую жорданову кривую Γ -*трансверсальной*, если она не проходит через вершины графа Γ и трансверсально пересекает ребра этого графа. Скажем, что Γ -трансверсальная кривая *огибает* некоторую внутреннюю вершину графа Γ , если она последовательно пересекает выходящие из v ребра $f_1, \dots, f_s$, где $s - 2$ не меньше половины степени вершины v , причем в образовавшихся между смежными ребрами и этой кривой “секторах” нет других вершин графа Γ .

ЛЕММА 3.7. *Пусть Γ -трансверсальная кривая x целиком лежит в области $O(p)$, определенной овалом p l -графа Γ , кроме точек x_- и x_+ , лежащих на p . Тогда или (1) x пересекает подряд дважды одно и то же ребро f из Γ , так что в ограниченной x и f области нет вершин графа Γ , или (2) x огибает некоторую внутреннюю вершину графа Γ .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, что ситуация (1) не реализуется и обозначим $\overline{O}$ замкнутую область на плоскости, ограниченную кривой x и овалом p , не содержащую внешней вершины v_0 .

Предположим сначала, что найдется некоторая последовательность ребер $f_1, \dots, f_s$ в Γ , последовательно пересекаемых кривой x , где f_1 и f_s выходят из одной вершины o графа Γ , лежащей в $\overline{O}$, но не все векторы этой последовательности инцидентны вершине o . (Назовем здесь o $\star$ -вершиной.) Пусть вершина o выбрана так, что число вершин в области, ограниченной с помощью f_1, f_s и x , минимально возможное.

Рассмотрим вспомогательный граф $\Gamma(o)$, вершинами которого служат o, v_0 и все вершины внутри области U , ограниченной ребрами f_1, f_s и заключенной между ними дугой кривой x (рис. 1а). Такие вершины тоже есть по выбору вершины o . Все выходящие из o ребра в Γ , не направленные внутрь U , перенаправим в графе $\Gamma(o)$ в вершину v_0 .

Рис. 1

Заметим, что сектор, ограниченный частью дуги кривой x , заключенной между смежными ребрами какой-либо вершины внутри U , не может заключать других вершин из Γ , так как иначе возник бы в этом секторе l -граф, у которого не более одного внешнего ребра по выбору вершины o , но вопреки лемме 3.2. Поэтому, если x не огибает никакой вершины в l -графе $\Gamma(o)$, то число внешних ребер каждой вершины, кроме v_0 , в нем не превосходит половины ее степени плюс единицы по выбору вершины o . Но это противоречит лемме 3.4 для $\Gamma(o)$, так как $l \geq 26$, как было замечено при определении овалов.

Остается рассмотреть случай, когда нет $\star$ -вершин.

В новый граф $\Gamma(O)$ включим внешнюю вершину v_0 и все вершины, лежащие в $\overline{O}$. Оставим все старые ребра, находящиеся в $\overline{O}$, а каждое ребро, выходящее из $\overline{O}$ во вне, заменим на ребро с концом в v_0 . Очевидно, что $\Gamma(O)$ — тоже l -граф, так как в $\overline{O}$ есть хотя бы одна вершина.

По лемме 3.2 в $\Gamma(O)$ найдется вершина o степени $d \geq l$, у которой не менее $d - 3$ последовательных ребер являются внешними (и между ними нет вершин графа $\Gamma(O)$). Из них не более $\frac{1}{2}(d - 2) - 4$ могут выходить из o , не пересекая пути x , как видно из определения овала. Значит, оставшиеся, число которых не меньше

$\frac{1}{2}d + 2$, пересекаются кривой x , причем последовательно (а не как на рис. 1б), ибо o не является $\star$ -вершиной. Итак, вершина o огибается кривой x .

Рассмотрим теперь произвольный овал p в l -графе Γ , проходящий через некоторую внутреннюю вершину v . Пусть $v' \neq v$ — другая внутренняя вершина, расположенная в замыкании области $O(p)$, определенной этим овалом, а p' — овал, проходящий через v' . Если овалы p и p' являются расходящимися в вершинах v и v' , причем соответствующая Γ -правильная дуга x 3-отделена от p' и не лежит в замыкании области $O(p')$, то овал p' назовем *производным* от овала p в вершинах v, v' . По лемме 3.6 вершина v' не может при этом лежать на p .

ЛЕММА 3.8. (1) В приведенных обозначениях область $O(p)$ содержит область $O(p')$, определенную производным овалом p' .

(2) Пусть p'' — другой производный овал от овала p в вершинах v и v'' , причем $v'' \neq v'$. Тогда области $O(p'')$ и $O(p')$ не пересекаются.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) Первое утверждение следует из леммы 3.6 и того, что x не лежит в $\overline{O(p')}$.

(2) Из леммы 3.6 и данной по определению возможности соединить вершины v и v' Γ -правильной дугой следует, что область $O(p')$ не может содержаться в $O(p'')$. Верно обратное; поэтому, доказывая лемму “от противного”, можем считать, что овалы p' и p'' имеют общую внутреннюю вершину o . (См. рис. 2, но возможности $o = v'$ или $o = v''$ пока не исключаются.)

Рис. 2

Введем вспомогательный граф $\Gamma(x, y)$, добавляя к графу Γ дуги x и y или не добавляя их, как в доказательстве леммы 3.6, где x, y — Γ -правильные дуги между v, v' и v, v'' соответственно. Как и в лемме 3.6, составим простой замкнутый путь q , проходящий только через внутренние вершины графа Γ , из x (или ребра e , если x не включили в $\Gamma(x, y)$), y (или e') и подпуть овала p и p' от вершин v и v' до вершины o . По определению мало искривленных путей p и p' и по условию 3-отделенности дуг x, y от p', p'' соответственно только две вершины на q , а именно v и o , могут иметь внутренние степени вдоль q меньше, чем 2. Но это противоречит лемме 3.1, примененной к q .

Следовательно, второе утверждение леммы также верно.

§ 4. Список соотношений

Пусть группа из теоремы 3 имеет копредставление

$$R = \langle a_1, \dots, a_m \mid w = 1, w \in E \rangle, \quad (4.1)$$

где E – рекурсивно перечислимое множество слов от $a_1, \dots, a_m$. Добавляя, если нужно, новые порождающие и соотношения вида $a_j a'_j = 1$, можно считать в дальнейшем, что множество E состоит только из *положительных слов*, т.е. слова $w \in E$ не содержат вхождений вида a_j^{-1} .

Построим серию групп по копредставлению (4.1), следуя изложению из книги Ротмана [6] и изменяя лишь одно соотношение (4.10).

Напомним коротко [6, гл. 12], что ввиду положительности слов из E и рекурсивной перечислимости этого множества имеется некоторая детерминистская машина Тьюринга T с одной головкой, одной лентой и ленточным алфавитом $\{s_0, s_1, \dots, s_M\}$, содержащим $a_1, \dots, a_m$, которая останавливается (при этом очищая ленту и переходя в заключительное состояние q) тогда и только тогда, когда поданное на вход в начале ее работы положительное слово w от $s_0, \dots, s_M$ принадлежит множеству E .

По машине T строится полугруппа Маркова – Поста $\Gamma(T)$ с порождающими $s_0, \dots, s_M, h, q, q_0, \dots, q_N$, где буква h отмечает край ленты, а буквы $q, q_0, \dots, q_N$ отвечают возможным состояниям машины T . Она обладает следующим свойством [6, лемма 12.4].

ЛЕММА 4.1. *Равенство $hq_1wh = q$ для слова w в алфавите $s_0, \dots, s_M$ справедливо в полугруппе $\Gamma(T)$ тогда и только тогда, когда $w \in E$.*

Обозначим через $B_0 = \langle x \rangle$ бесконечную циклическую группу с порождающим x . Группа B_1 задается порождающими $x, h, s_0, \dots, s_M$ и соотношениями

$$h^{-1}xh = x^2, \quad s_\beta^{-1}xs_\beta = x^2, \quad \beta = 0, \dots, M. \quad (4.2)$$

Определение группы B_2 и последующих зависит уже от команд машины T . Для задания группы B_2 к порождающим группы B_1 добавляются буквы r_i (отвечающие различным командам машины T), где $i \in I$, I – конечное множество, а к соотношениям (4.2) добавляются соотношения

$$r_i^{-1}s_\beta x r_i = s_\beta x^{-1}, \quad i \in I, \quad \beta = 0, \dots, M, \quad (4.3)$$

$$r_i^{-1}h x r_i = h x^{-1}, \quad i \in I, \quad (4.4)$$

$$r_i^{-1}F_i^\# q_{i_1} G_i r_i = H_i^\# q_{i_2} K_i, \quad i \in I. \quad (4.5)$$

Здесь соотношения (4.5) выписаны по одному для каждого $i \in I$, в них $q_{i_1}, q_{i_2} \in \{q, q_0, \dots, q_N\}$ (q_{i_1} – состояние перед выполнением i -й команды, а q_{i_2} – после ее выполнения); F_i, G_i, H_i, K_i – положительные (возможно, пустые) (s, h) -слова (т.е. слова в алфавите $\{s_0, \dots, s_M, h\}$), а “ $V^\#$ ” означает переписывание слова V с заменой каждой его буквы на обратную. При этом суммарное число вхождений s -букв в эти четыре слова не превышает четырех. Их перечень, определяемый командами машины T , читатель при желании может найти в [6]. В частности, среди них есть

соотношение вида $r_{i_0}^{-1}h^{-1}q_0hr_{i_0} = q$ и нет других соотношений с буквой q или с подсловом $h^{-1}q_0h$. Буква h входит не более одного раза в каждое из слов F_i, G_i, H_i, K_i . Она может быть только первой у слов F_i, H_i и только последней у слов G_i, K_i , причем слово F_i (слово G_i) начинается с буквы h (кончается на h) тогда и только тогда, когда этим же свойством обладает слово H_i (слово K_i).

В [6] можно найти и следующие несложные факты (лемма 12.11, (i)–(iii)).

ЛЕММА 4.2. В цепи $B_0 \leq B_1 \leq B_1 * Q \leq B_2$, где Q – свободная группа с базисом $\{q_0, \dots, q_N\}$, каждая группа является HNN-расширением предыдущей. Точнее

- (1) B_1 есть HNN-расширение с базой B_0 и проходимыми (stable) буквами $h, s_0, \dots, s_M$;
- (2) B_1 и Q действительно порождают свое свободное произведение в B_2 ;
- (3) B_2 есть HNN-расширение с базой $B_1 * Q$ и проходимыми буквами $r_i, i \in I$.

ЛЕММА 4.3. Пусть для некоторого $i \in I$ H означает подгруппу группы B_2 , порожденную либо элементами $F_i^{\#}q_{i_1}G_i, hx$ и всеми $s_\beta x, \beta = 0, \dots, M$, либо элементами $H_i^{\#}q_{i_2}K_i, hx^{-1}$ и $s_\beta x^{-1}, \beta = 0, \dots, M$, а $K = \text{gr}\{x, r_i; i \in I\}$. Тогда $H \cap K = 1$, а подгруппы H и K свободно порождаются указанными элементами.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим в B_2 равенство вида $V = U$, где V – приведенное слово от x и $r_i, i \in I$, а U – произведение порождающих группы H и им обратных. Если V содержит некоторую букву r_i , то поскольку U не содержит таких букв, по лемме 4.2 и лемме Бриттона в слове V есть подслово вида $r_i^{\pm 1}x^n r_i^{\mp 1}$, где $x^n \in H$ и $n \neq 0$. Но ввиду свойств (1), (2) леммы 4.2 существует эндоморфизм группы $B_1 * \langle q_{i_1} \rangle$ (вариант с q_{i_2} вполне аналогичен), при котором $x \mapsto 1, q_{i_1} \mapsto q_{i_1}, s_\beta \mapsto s_\beta, h \mapsto h$. Под действием этого гомоморфизма элемент x^n перейдет в 1, а его запись через порождающие группы H , представляющая нетривиальное слово (ибо $x^n \neq 1$), перейдет в нетривиальный элемент, так как $q_{i_1}, s_\beta (\beta = 0, \dots, M)$ и h свободно порождают свободную подгруппу в силу леммы 4.2.

То же самое рассуждение показывает, что $V = 1$, если слово V не зависит от букв $r_i, i \in I$, и что H, K – свободные подгруппы.

Приведем еще утверждения лемм 12.14 и 12.15 [6].

ЛЕММА 4.4. Пусть L_1 и L_2 – несократимые слова в алфавите $\{x, r_i; i \in I\}$, а X, Y – несократимые (s, h) -слова. Тогда если $L_1 X^{\#}q_j Y L_2 = q$ в группе B_2 , где $q_j \in \{q, q_0, \dots, q_N\}$, то оба слова X, Y положительны и $X q_j Y = q$ в полу-группе $\Gamma(T)$.

Зафиксируем теперь целое число $L \geq 15$. (В [6] $L = 1$.) Копредставление группы B_3 получается, если к порождающим группы B_2 добавить буквы $t_1, \dots, t_L$, а к соотношениям добавить следующие:

$$t_j^{-1} r_i t_j = r_i, \quad i \in I, \quad j = 1, \dots, L, \quad (4.6)$$

$$t_j^{-1} x t_j = x, \quad j = 1, \dots, L. \quad (4.7)$$

В свою очередь, из этого копредставления получается копредставление группы $B = B(T)$, если к копредставлению группы B_3 добавить порождающие $k_1, \dots, k_L$ и соотношения

$$k_j^{-1} r_i k_j = r_i, \quad i \in I, \quad j = 1, \dots, L, \quad (4.8)$$

$$k_j^{-1} x k_j = x, \quad j = 1, \dots, L, \quad (4.9)$$

$$\prod_{j=1}^L k_j^{-1} (q^{-1} t_j q) k_j (q^{-1} t_j^{-1} q) = 1. \quad (4.10)$$

Под h -специальным словом понимается слово $\Sigma \equiv X_0^\# q_j Y_0$, где $X_0 \equiv hX$, $Y_0 \equiv Yh$, X, Y – положительные слова в алфавите $\{s_0, \dots, s_M\}$, $q_j \in \{q_0, \dots, q_N\}$, а “ $\equiv$ ” – знак побуквенного равенства. В этом случае по определению $\Sigma^* \equiv X_0 q_j Y_0$. Сделанная выше модификация соотношения (4.10) не меняет доказательства достаточности в лемме Буна (см. [6]).

ЛЕММА 4.5. Если Σ – h -специальное слово и $\Sigma^* = q$ в полугруппе $\Gamma(T)$, то

$$\prod_{j=1}^L k_j^{-1} (\Sigma^{-1} t_j \Sigma) k_j (\Sigma^{-1} t_j^{-1} \Sigma) = 1$$

в группе B .

Изменение в соотношении (4.10) влечет ниже изменения в определении групп Андера B_4, B_5, B_6 по сравнению с [6].

Запишем копредставление (4.1) группы R в новых порождающих:

$$R \cong R_u = \langle u_1, \dots, u_m \mid w_u = 1, w_u \in E_u \rangle, \quad (4.11)$$

где нижний индекс “ u ” означает переписывание слова $w = w(a_1, \dots, a_m)$ как $w(u_1, \dots, u_m)$ после подстановок $a_j \mapsto u_j$.

Пусть $B * R_u$ – свободное произведение. К его естественному копредставлению с определяющими соотношениями (4.2)–(4.11) добавим порождающие $b_1, \dots, b_m$ и соотношения (4.12)–(4.14), задающие группу B_4 (напомним, что каждая буква a_j входит в $\{s_0, \dots, s_M\}$):

$$b_i^{-1} u_j b_i = u_j, \quad i, j = 1, \dots, m; \quad (4.12)$$

$$b_i^{-1} a_j b_i = a_j, \quad i, j = 1, \dots, m; \quad (4.13)$$

$$b_i^{-1} h k_1 h^{-1} b_i = h k_1 h^{-1} u_i, \quad i = 1, \dots, m. \quad (4.14)$$

ЛЕММА 4.6. Подгруппы $gr\{u_1, \dots, u_m\}$ и $gr\{b_1, \dots, b_m\}$ порождают в группе B_4 свое прямое произведение.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Гомоморфизм группы B_4 на свободную группу с базисом $(x_1, \dots, x_m)$, при котором $b_i \mapsto x_i$, а порождающие группы $B * R_u$ отображаются в 1, показывает тривиальность пересечения указанных подгрупп. Поэтому утверждение следует из соотношений (4.12).

Добавляя к полученному копредставлению группы B_4 новый порождающий d и соотношения (4.15), (4.16), получим группу B_5 :

$$d^{-1}hk_1h^{-1}d = hk_1h^{-1}, \quad (4.15)$$

$$d^{-1}a_ib_id = a_i, \quad i = 1, \dots, m. \quad (4.16)$$

Наконец, группа B_6 получается после добавления к B_5 порождающего σ и соотношений (4.17)–(4.20):

$$\sigma^{-1}(q_1^{-1}ht_1h^{-1}q_1)\sigma = (q_1^{-1}ht_1h^{-1}q_1)d, \quad (4.17)$$

$$\sigma^{-1}(q_1^{-1}ht_jh^{-1}q_1)\sigma = q_1^{-1}ht_jh^{-1}q_1, \quad j = 2, \dots, L, \quad (4.18)$$

$$\sigma^{-1}(hk_jh^{-1})\sigma = hk_jh^{-1}, \quad j = 1, \dots, L, \quad (4.19)$$

$$\sigma^{-1}a_i\sigma = a_i, \quad i = 1, \dots, m. \quad (4.20)$$

Для доказательства теоремы 3 мы установим, что естественный гомоморфизм $R_u \rightarrow B_6$ является инъективным (лемма 10.1) и квазиизометричным (§12). Пока же приведем аналог леммы 12.26 [6].

ЛЕММА 4.7. *Группа B_6 может быть задана конечным множеством определяющих соотношений.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно показать, что каждое соотношение $w_u = 1$ из списка (4.11) следует из соотношений (4.2)–(4.10), (4.12)–(4.20). Ниже w_b – слово, полученное из слова $w = w(a_1, \dots, a_m)$ подстановкой $a_i \mapsto b_i$ для $i = 1, \dots, m$.

По лемме 4.1 для слова $w = w(a_1, \dots, a_m) \in E$ в полугруппе $\Gamma(T)$ имеем равенство $hq_1wh = q$, а значит, по лемме 4.5, примененной к $\Sigma \equiv h^{-1}q_1wh$,

$$hk_1^{-1}h^{-1}w^{-1}q_1^{-1}ht_1h^{-1}q_1whk_1h^{-1} = hP^{-1}h^{-1}w^{-1}q_1^{-1}ht_1h^{-1}q_1w \quad (4.21)$$

в группе B , где

$$P \equiv \prod_{j=2}^L k_j^{-1}(h^{-1}w^{-1}q_1^{-1}h)t_j(h^{-1}q_1wh)k_j(h^{-1}w^{-1}q_1^{-1}h)t_j^{-1}(h^{-1}q_1wh).$$

Умножим обе части равенства (4.21) слева на σ^{-1} , а справа на σ . В силу соотношений (4.18), (4.19) и (4.20) буква σ перестановочна с $hk_1^{-1}h^{-1}$, с $hP^{-1}h^{-1}$ и с w . Поэтому

$$hk_1^{-1}h^{-1}w^{-1}\sigma^{-1}(q_1^{-1}ht_1h^{-1}q_1)\sigma whk_1h^{-1} = hP^{-1}h^{-1}w^{-1}\sigma^{-1}(q_1^{-1}ht_1h^{-1}q_1)\sigma w,$$

что в силу (4.17) дает

$$hk_1^{-1}h^{-1}w^{-1}(q_1^{-1}ht_1h^{-1}q_1)dwhk_1h^{-1} = hP^{-1}h^{-1}w^{-1}(q_1^{-1}ht_1h^{-1}q_1)dw.$$

Замена P^{-1} по лемме 4.5 на

$$k_1^{-1}(h^{-1}w^{-1}q_1^{-1}h)t_1(h^{-1}q_1wh)k_1(h^{-1}w^{-1}q_1^{-1}h)t_1^{-1}(h^{-1}q_1wh)$$

приводит после сокращений к равенству $dwhk_1h^{-1} = whk_1h^{-1}w^{-1}dw$ или

$$d(whk_1h^{-1}w^{-1})d^{-1} = whk_1h^{-1}w^{-1}.$$

Левая часть этого соотношения с помощью (4.16), (4.13) и (4.15) может быть переписана в виде $ww_bhk_1h^{-1}w_b^{-1}w^{-1}$. Отсюда $w_bhk_1h^{-1}w_b^{-1} = hk_1h^{-1}$, т.е. $(hk_1^{-1}h^{-1})w_b^{-1}(hk_1h^{-1}) = w_b^{-1}$. В то же время

$$(hk_1^{-1}h^{-1})w_b^{-1}(hk_1h^{-1}) = w_u^{-1}w_b^{-1}$$

в силу (4.14) и (4.12). Отсюда $w_u = 1$, что и требовалось.

§ 5. Диаграммы, полосы, кольца

Напомним известную топологическую интерпретацию Ван Кампена–Линдона вывода следствий из определяющих соотношений в группах.

Под *диаграммой* Ван Кампена над некоторым копредставлением группы $G = \langle x_1, \dots, x_k \mid R_1, R_2, \dots \rangle$ с циклически несократимыми определяющими словами $R_1, R_2, \dots$ (или короче, хотя и менее точно, – над группой G) понимается конечный плоский ориентированный связный и односвязный 2-комплекс, каждому ориентированному ребру e которого сопоставлена *метка* $\varphi(e) \equiv x_i^{\pm 1}$, $i = 1, \dots, k$, причем $\varphi(e^{-1}) \equiv \varphi(e)^{-1}$, а слово, читаемое на контуре $\partial\Pi$ произвольной 2-клетки Π (просто *клетки* в дальнейшем), совпадает с точностью до циклической перестановки и взятия обратного с одним из определяющих слов $R_1, R_2, \dots$.

Согласно лемме Ван Кампена слово $w = w(x_1, \dots, x_k)$ равно 1 в группе G тогда и только тогда, когда существует диаграмма (Ван Кампена) Δ над G , метка граничного контура $\partial\Delta$ которой побуквенно равна w , если читать ее, обходя $\partial\Delta$ по часовой стрелке, начиная с некоторой вершины. За подробностями отсылаем читателя к [9] или к [10].

Если в граничную метку некоторой клетки входит какая-то буква $x^{\pm 1}$ или буква из некоторого подмножества букв $X^{\pm 1}$, то для краткости такую клетку будем называть x -клеткой (соответственно X -клеткой). Например, к t_j -клеткам (или короче, t -клеткам, если значение j не существенно) относится любая клетка, отвечающая соотношениям (4.6), (4.7), (4.10), (4.17) или (4.18), а (t, r) -клетки отвечают только соотношениям (4.6). Если в соотношение входит одна из букв $q, q_0, \dots, q_N$, то соответствующие клетки будем называть Q -клетками, а клетки, отвечающие соотношениям (4.11), назовем (u, u) -клетками, чтобы отличить их от (u, b) -клеток, отвечающих соотношениям (4.12) или (4.14).

По лемме 4.7 группа B_6 конечно определяема, а соотношения (4.10) можно было бы исключить из списка определяющих. Однако оказывается целесообразным этого не делать, так как в §9 важной является возможность замены некоторых пар (k, t) -клеток другими клетками, в частности, (u, u) -клетками. Аналогично, при наличии некоторых конфигураций в диаграммах удается понизить число

σ - или r -клеток. Поэтому удобно подсчитывать отдельно число клеток каждого типа в диаграммах (которые таким образом становятся градуированными в смысле § 13 [10]).

Самый высокий ранг будут иметь (k, t) -клетки, к которым относятся и так называемые диски, определяемые в § 7. Это означает, что из двух диаграмм больший тип имеет та, в которой большее число (k, t) -клеток.

Следующими по старшинству считаются (σ, t) -клетки, т.е. при одинаковом (например, нулевом) числе (k, t) -клеток в двух диаграммах больший тип имеет та, в которой больше (σ, t) -клеток. Далее по старшинству идут (r, Q) -клетки. После этого подсчитывается общее число всех остальных клеток. При сравнении типов двух диаграмм их число учитывается в последнюю очередь.

Очевидно, что по типу диаграммы можно вести индуктивные рассуждения. (Строго говоря, тип можно определить как конечный кортеж $\tau(\Delta) = (\tau_1, \dots)$, где τ_1 — число (t, k) -клеток в диаграмме Δ и т. д.)

Диаграмма Δ называется *минимальной*, если она имеет наименьший тип среди всех диаграмм с фиксированной граничной меткой.

ЛЕММА 5.1. Пусть в диаграмме Δ есть две клетки Π и Π' , на контурах $\partial\Pi$ и $\partial\Pi'$ которых при обходе их в противоположных направлениях, начиная с вершин o и o' , читается одно и то же слово V . Пусть в Δ имеется путь $p = o - o'$ без самопересечений, меткой которого является слово U , коммутирующее с V в силу соотношений меньших рангов, чем ранг r клеток Π , Π' . Тогда диаграмма Δ не является минимальной, т.е. число клеток ранга r можно уменьшить на 2 при сохранении граничной метки (и чисел клеток больших рангов).

Рис. 3

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Понизить тип диаграммы можно с помощью разреза вдоль пути p , удаления клеток Π, Π' и вклеивания в образовавшуюся дыру диаграммы, состоящей из клеток меньших рангов, интерпретирующей вывод соотношения $UVU^{-1}V^{-1} = 1$ (рис. 3). Более аккуратное объяснение имеется в [10, § 13]. (В частности, почему край дыры можно сделать гомеоморфным окружности с помощью предварительного “0-измельчения” диаграммы Δ .)

Некоторые условия и свойства диаграмм удобно формулировать, используя двойственные понятия. Для этой цели внутри каждой клетки Π фиксируется точка o_Π , а вне диаграммы Δ фиксируется на плоскости некоторая точка o_Δ . Аналогично фиксируются точки o_e внутри каждого ребра e диаграммы Δ . Если e — ребро на $\partial\Pi$ (на $\partial\Delta$), то фиксируется простая жорданова дуга $l(\Pi, e)$ ($l(\Delta, e)$ соответственно), соединяющая вершину o_Π (o_Δ) с o_e , не имеющая других общих точек с ребрами диаграммы Δ , кроме o_e . Требуется также, чтобы $l(\Pi, e)$ и $l(\Pi, e')$ имели общей лишь точку o_Π при $e \neq e'$. Аналогичное требование относится к линиям $l(\Delta, e)$.

Для фиксированного множества букв Y (или одной буквы) и некоторого множества определяющих слов $\mathcal{R}$ такого, что каждое слово из $\mathcal{R}$ содержит ровно одно вхождение буквы из Y с показателем 1 и одно — с показателем -1 , определяется понятие Y -полосы $S = [\pi_1, \dots, \pi_n]$ как поддиаграммы, составленной из клеток $\pi_1, \dots, \pi_n$. Именно, требуется, чтобы (1) каждая клетка $\pi_1, \dots, \pi_n$ отвечала одному из соотношений множества $\mathcal{R}$; (2) клетки π_i и π_{i+1} были склеены в S по общему ребру e_i , где $e_i \neq e_{i+1}$ для $i = 1, \dots, n-1$, и это ребро является Y -ребром, т.е. $\varphi(e_i) \in Y^{\pm 1}$.

Таким образом, граничный контур ∂S полосы S разбивается по определению в произведение вида $(e_0)^{-1}p_1e_n(p_2)^{-1}$, где e_0, e_n — Y -ребра клеток π_1 и π_n , называемые *торцами* полосы, а *края* полосы p_1, p_2 составлены каждый как произведение по i подпутей контуров клеток π_i , заключенных между их Y -ребрами. Края Y -полосы не содержат Y -ребер.

а

б

Рис. 4

Средняя линия l_S полосы S составляется по определению из дуг $l(\pi_1, e_1)$, $l(\pi_2, e_1)$, $l(\pi_2, e_2)$, $\dots$, $l(\pi_n, e_{n-1})$ (рис. 4а). В силу выбора множества соотношений $\mathcal{R}$ она не имеет самопересечений.

Y -полоса вида $[\pi_1, \dots, \pi_n, \dots, \pi_n']$ называется продолжением полосы S вправо. Аналогично определяется продолжение полосы влево. Полоса, не имеющая продолжений, называется *максимальной*. Очевидно, что полоса S максимальна, если или ее торцевые ребра совпадают, т.е. получается Y -кольцо (среднюю линию в этом случае тоже естественно замкнуть), или каждое из ее торцевых ребер лежит на границе диаграммы Δ , либо лежит на границе некоторой клетки Π , содержащей Y -ребро, но не отвечающей ни одному из соотношений выделенного множества $\mathcal{R}$. Такие клетки будем называть *терминальными* для Y -полос. В последнем случае

продолжения средней линии максимальной полосы S за торцевые ребра до точек o_Δ или o_Π (рис. 4б) назовем *медианой* максимальной полосы S . Медианы можно строить и в случае максимальной полосы без клеток, когда $e_0 = e_n$.

Если некоторая клетка π входит в Y -полосу и в Z -полосу, причем пара Y -ребер циклически разделяет в $\partial\pi$ пару Z -ребер, то эти полосы пересекаются по определению. (Их средние линии имеют общую точку o_π .)

Перечислим типы полос в диаграммах над группой B_6 из § 4 (а также группами B_2 – B_5), которые встретятся в дальнейшем.

1. По определению в σ -полосу (σ -кольцо) диаграммы Δ над группой B_6 разрешается включать любые σ -клетки. Они отвечают соотношениям (4.17)–(4.20). Терминальных клеток для σ -полос нет.

2. d -полоса (d -кольцо) составляется по определению из (d, k_1) -клеток и (d, a_i) -клеток. (См. (4.15), (4.16).) Терминальными клетками для d -полос служат (σ, t_1) -клетки. (См. (4.17).)

3. b_i -полосы (кольца) составляем из (b_i, u) -, (b_i, a_j) - и (b_i, k_1) -клеток. (См. (4.12)–(4.14).) Терминальными для b -полос являются (d, a) -клетки. (См. (4.16).)

4. k_j -полоса (кольцо) составляется из (k_j, r) -, (k_j, x) -, (k_j, σ) -клеток и при $j = 1$ из (k_1, d) -клеток (См. (4.8), (4.9), (4.19) и (4.15).) Терминальными для k -полос могут быть (k, t) -клетки, отвечающие соотношениям (4.10) (или *втулки* (hubs) в терминологии [8]), а также обобщающие их диски, вводимые в § 7, которые также являются (k, t) -клетками.

5. t_j -полоса (кольцо) составляется из (t_j, r) -, (t_j, x) - и (t_j, σ) -клеток. (См. (4.6), (4.7), (4.17) и (4.18).) Терминальными для t -полос служат (k, t) -клетки.

Максимальные k - и t -полосы, хотя бы один конец медианы которых находится внутри (k, t) -клетки (т.е. внутри втулки или, начиная с § 7, внутри диска) назовем k - и t -спицами.

6. r_i -полоса (кольцо) может состоять из (r_i, t) -, (r_i, k) -, (r_i, Q) -, (r_i, s_β, x) - и (r_i, h, x) -клеток. (См. (4.6), (4.8), (4.5), (4.3) и (4.4).) Терминальных клеток для r -полос не существует.

7. Q -полосу (кольцо) составляем только из (Q, r) -клеток. (См. (4.5).) В этом случае в отличие от остальных, определение Y -полосы используется не для одной буквы, а для множества $Y = \{q, q_0, \dots, q_n\}$. Терминальными для Q -полос могут быть (σ, t) -клетки (4.17), (4.18) и (k, t, Q) -клетки (4.10), а начиная с § 7, – диски, которые тоже являются (k, t, Q) -клетками.

8. s_β -полосы и кольца (в частности, a_i -полосы) составляются по определению из (s_β, x) - и (s_β, r, x) -клеток (но не (r, Q, s_β) -клеток!), – см. (4.2), (4.3), – а если $s_\beta = a_i$, то еще из (a_i, σ) -, (a_i, d) - и (a_i, b) -клеток. (См. (4.20), (4.16) и (4.13).) Терминальными для s -полос служат (r, Q) -клетки (4.5), а также, начиная с § 7, диски.

9. h -полосы и кольца составляются из (h, x) - и (h, r, x) -клеток. (См. (4.2), (4.4).) Терминальными могут служить клетки, отвечающие соотношениям (4.17)–(4.19), (4.15), (4.14), (4.5), а также диски, вводимые в § 7.

Наряду с Y -кольцами встретятся кольца, составленные из двух полос разных типов. Именно, рассмотрим некоторую Y -полосу $S = [\Pi_1, \pi_1, \dots, \pi_n, \Pi_2]$ и Z -полосу $S' = [\Pi_1, \pi'_1, \dots, \pi'_n, \Pi_2]$ при $Z \cap Y = \emptyset$, имеющие в точности две общие клетки Π_1 и Π_2 , причем все четыре торца этих полос лежат вне области O , ограни-

ченной простой замкнутой кривой x , составленной из двух средних линий полос S и S' (рис. 5а). Скажем в этом случае, что полосы S и S' составляют (Y, Z) -кольцо T с угловыми клетками Π_1 и Π_2 и с медианой x . Полосы S и S' будем называть Y - и Z -частями (Y, Z) -кольца T .

Рис. 5

ЛЕММА 5.2. Пусть определяющее слово R_0 циклически несократимо и имеет вид $z_1^{\varepsilon_1} W_1 y W_2 z_2^{\varepsilon_2} W_3 y^{-1} W_4$, где буквы z_1, z_2, y не входят в слова $W_1, \dots, W_4$, $\varepsilon_1, \varepsilon_2 = \pm 1$ и $z_1^{\varepsilon_1} \neq z_2^{\varepsilon_2}$. Допустим, что в некоторой диаграмме Δ две клетки Π_1 и Π_2 , отвечают определяющему слову R_0 и являются угловыми в некотором (Y, Z) -кольце (где $y \in Y, z_1, z_2 \in Z$), Z -часть которого состоит только из двух клеток Π_1 и Π_2 (т.е. Π_1 и Π_2 имеют общее Z -ребро e). Тогда диаграмма Δ не является минимальной.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим два варианта приклеивания клетки Π_2 к Π_1 в диаграмме Δ .

В первом из них одно и то же слово V , равное слову R_0 или его циклической перестановке, читается при обходе контуров клеток Π_1 и Π_2 в противоположных направлениях, начиная с ребра e . Но тогда диаграмма Δ не минимальна по лемме 5.1 (с пустым словом U).

Второй же вариант, когда слова, читаемые вдоль $\partial \Pi_1$ и $\partial \Pi_2$, начиная с e , различны, противоречит ориентируемости евклидовой плоскости и свойству (Y, Z) -кольца иметь все четыре торцевых ребра Y - и Z -частей вне области, ограниченной медианой x кольца (т.е. ситуация на рис. 5б невозможна).

Кольцо S_1 считается меньше кольца S_2 в некоторой диаграмме, если область $O(S_1)$, ограниченная медианой кольца S_1 , строго содержится в области $O(S_2)$, ограниченной медианой кольца S_2 . Из конечности диаграммы Δ следует, что введенное частичное упорядочение колец в Δ является индуктивным.

Лемма Жордана и рассмотрение медиан колец делает очевидными следующие утверждения.

ЛЕММА 5.3. Пусть в диаграмме Δ имеется Y -кольцо S , и $O(S)$ – область, ограниченная его медианой. Тогда

- (1) если S содержит клетку Π , в которой два Y -ребра циклически разделены парой Z -ребер, если этим же свойством обладают все

- (Y, Z)-клетки из S , а в S и в $O(S)$ нет Z -терминальных клеток, то в Δ имеется (Y, Z)-кольцо, которое меньше кольца S (рис. 6а);
- (2) если в $O(S)$ нет X -терминальных клеток, а кольцо S не содержит X -клеток, то либо в $O(S)$ нет X -клеток, либо есть X -кольцо.

Рис. 6

ЛЕММА 5.4. Пусть S – (Y, Z)-кольцо в диаграмме Δ , а $O(S)$ – область, ограниченная его медианой. Тогда

- (1) если его Y -часть содержит неугловую клетку Π , в которой два Y -ребра циклически разделены парой X -ребер, если этим же свойством обладают все (X, Y) -клетки из Y -части, а в S и в $O(S)$ нет X -терминальных клеток, то либо $Z \neq X$ и в Z -части кольца S есть X -клетки, либо в диаграмме есть (X, Y) -кольцо, которое меньше кольца S (рис. 6б);
- (2) если в $O(S)$ нет X -терминальных клеток, а кольцо S не содержит X -клеток, то в $O(S)$ либо нет X -клеток, либо есть X -кольцо.

§ 6. Отсутствие колец в диаграммах без (k, t) -клеток

Невозможность многократного пересечения двух полос в минимальных диаграммах без (k, t) -клеток базируется ниже, как и в статье [8], на доказательстве отсутствия колец различных типов в таких диаграммах. Доказательство леммы 6.1 построено таким образом, что в индуктивном рассуждении предполагается выбранным минимальный контрпример к одному из ее утверждений, а значит, все утверждения можно считать справедливыми для меньших колец, т.е. меньших колец поименованных видов не существует. Все перекрестные ссылки в доказательстве серии утверждений леммы 6.1 носят именно такой характер, и мы не будем повторять каждый раз, что такие ссылки корректны, поскольку используются индуктивные предположения. При рассмотрении полос того или иного вида нужно помнить, из клеток какого типа эти полосы состояются. Для этого полезно иметь под рукой перечень 1–9 из § 5.

ЛЕММА 6.1. Пусть Δ – минимальная диаграмма без (k, t) -клеток над копредставлением группы B_6 из § 4, т.е. в Δ могут входить только клетки,

отвечающие соотношениям (4.2)–(4.9) и (4.11)–(4.20), но не (4.10). Тогда в Δ нет

- (1) σ -колец;
- (2) r -колец;
- (3) (r, Q) -колец;
- (4) Q -колец;
- (5) (r, t) -колец;
- (6) (r, k) -колец;
- (7) t -колец;
- (8) k -колец;
- (9) (σ, k) -колец;
- (10) (σ, t) -колец;
- (11) (d, k) -колец;
- (12) (b, a) -колец без σ - и d -клеток;
- (13) (b, k) -колец без σ - и d -клеток;
- (14) (d, a) -колец без t - и Q -клеток;
- (15) (σ, a) -колец;
- (16) (r, s) -колец без Q -клеток;
- (17) (r, h) -колец без Q -клеток;
- (18) d -колец;
- (19) b -колец;
- (20) a -колец, содержащих (d, a) -клетки.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказывая утверждения леммы “от противного”, мы выбираем среди всех колец, являющихся контрпримерами к одному из утверждений (1)–(20), минимальное кольцо S . Через $\Delta(S)$ обозначаем поддиаграмму, составленную из всех клеток кольца S и всех клеток, находящихся в области $O(S)$, ограниченной медианой кольца S .

(1) Допустим, что S является σ -кольцом и в нем есть (σ, k) -клетка. Поскольку в этой клетке пара σ -ребер циклически разделяет пару k -ребер, а в диаграмме без (k, t) -клеток нет k -терминальных клеток, в диаграмме Δ есть (σ, k) -кольцо меньшее, чем S , по лемме 5.3(1). Но это противоречит свойству (9) и минимальности выбранного контрпримера S . Аналогично, наличие в S (σ, t) -клетки давало бы меньший контрпример к утверждению (10).

Значит, S состоит только из (σ, a) -клеток, и метка внешнего края кольца совпадает с внутренней. (См. (4.20).) В этом случае можно отождествить два края после удаления внутренности кольца S из Δ . Полученная диаграмма имеет меньший тип, вопреки минимальности диаграммы Δ .

(2) Допустим, что S – это r -кольцо. Наличие в S t -клеток противоречило бы по лемме 5.3(1) и свойству (5) минимальности контрпримера S . Значит, по свойству (7) и лемме 5.3(2) t -клеток нет и в $\Delta(S)$, т.е. нет терминальных клеток для Q -полос. Поэтому в S нет Q -клеток по лемме 5.3(1) и свойству (3), т.е. нет терминальных клеток для s - и h -колец. Следовательно, по утверждениям (16) и (17) в S не может быть и (r, s_β, x) - или (r, h, x) -клеток, т.е. в S нет никаких клеток.

(3) Предположим, что S – это (r, Q) -кольцо. Поскольку его Q -часть T может состоять только из r -клеток, в T нет неугловых клеток, так как в противном случае

по лемме 5.4(1) можно было бы найти меньшее, чем $S - (r, Q)$ -кольцо. В таком случае угловые клетки склеены в T по общему Q -ребру, и отвечают одному и тому же соотношению вида (4.5), так как входят в одну r_i -полосу. При $q_{i_1} \neq q_{i_2}$ эти клетки, очевидно, являются зеркальными копиями вопреки минимальности диаграммы, а при $q_{i_1} \equiv q_{i_2}$ получается противоречие с утверждением леммы 5.2, если принять $Y = \{r_i\}$, а $Z = Q$.

(4) Предположим, что $S - Q$ -кольцо. Поскольку оно состоит лишь из (r, Q) -клеток, лемма 5.3(1) и утверждение (3) приводят к противоречию с минимальностью контрпримера.

(5) Допустим, что $S - (r, t)$ -кольцо. Тогда в его t -части T нет σ -клеток по лемме 5.4(1) и свойству (10) для меньших колец. Аналогично, по свойству (5) для меньших колец, среди неугловых клеток в T нет (r, t) -клеток, т.е. они могут быть лишь (t, x) -клетками, причем их приклеивание вдоль t -ребер не может быть зеркальным по лемме 5.1. Таким образом, на каждом из краев p полосы T' , полученной из T отбрасыванием угловых клеток, написано слово вида $x^{\pm n}$, где n — число клеток в T' .

В $\Delta(S)$ нет σ -клеток по лемме 5.4(2) и свойству (1), так как их не может быть в S , т.е. нет терминальных клеток для Q -полос.

Снова по лемме 5.4(1) среди неугловых клеток r -части полосы S нет Q -, t - и k -клеток по свойствам (3), (5) и (6) для меньших колец. Поэтому они могут быть только (r, s, x) - или (r, h, x) -клетками, а на крае $\bar{p}$ r -части после отбрасывания угловых клеток читается слово V от hx и $s_\beta x$, $\beta = 0, \dots, M$ (или от hx^{-1} и $s_\beta x^{-1}$).

Рис. 7

Сравнивая теперь метки краев p и $\bar{p}$ с общими началом и концом (рис. 7), получаем по лемме ван Кампена равенство

$$x^n = V(hx, s_0x, \dots, s_Mx) \quad (6.1)$$

в силу соотношений, отвечающим клеткам, находящимся в области $O(S)$. (Второй вариант с hx^{-1} и т. д. может быть рассмотрен вполне аналогично.)

Поскольку буквы σ, t_j, k_j не входят в равенство (6.1), а в $O(S)$ не может быть σ -, t - или k -колец по свойствам (1), (7) и (8), там нет и σ -, t - или k -клеток. В частности, нет терминальных клеток для d -полос, а следовательно, нет и d -клеток по свойству (18). Поэтому нет терминальных клеток для b -полос, а значит, нет и b -клеток по свойству (19). Наконец в $O(S)$ нет (u, u) -клеток, так как с ними могут граничить только (u, u) - и (b, u) -клетки.

Таким образом, равенство (6.1) выполнено уже в группе B_2 . По лемме 4.3 это возможно только при $n = 0$. Это значит, что t -часть T состоит всего из двух угловых клеток. Их метки должны быть одинаковы, ибо они еще входят в одну r_i -полосу. В этом случае лемма 5.2 дает противоречие с минимальностью диаграммы Δ .

(6) Допустим, что $S - (r, k)$ -кольцо. В этом случае противоречие получается так же, как в предыдущем случае, с заменой ссылок на свойства (10) и (5) ссылками на (9) и (6). В случае $k = k_1$ b -клетки в k -части кольца S исключаются после исключения σ и d -клеток из $\Delta(S)$ с учетом леммы 5.4(1) и свойства (13) для меньших колец.

(7) Допустим, что $S - t$ -кольцо. Тогда по лемме 5.3(1) и свойству (10) в S нет σ -клеток, а по свойству (5) — нет r -клеток. Это означает, что в S входят лишь (t, x) -клетки, а внешний край кольца S имеет ту же метку, что и внутренний: x^n . В этом случае можно отождествить два края после вырезания кольца S из Δ . Полученная диаграмма имеет меньший тип вопреки минимальности диаграммы Δ .

(8) Предположим, что $S - k$ -кольцо. Тогда, последовательно применяя свойства (9), (6), (11), (18), (13) и лемму 5.3, выясняем, что в S нет σ -, r -, d - и b -клеток, т.е. оно состоит из (k, x) -клеток. Отсюда выводится противоречие, как и в пункте (7).

(9) Допустим, что $S - (k, \sigma)$ -кольцо. По свойствам (10), (7), (2) и (6) для меньших колец и по лемме 5.4 в $\Delta(S)$ нет t - и r -клеток. В частности, нет терминальных клеток для a -полос. Значит, и a -клеток нет в σ -части по свойству (15) и лемме 5.4(1). По свойству (9) и лемме 5.4(1) k -клетки присутствуют только в k -части кольца S . Таким образом, в σ -части кольца S имеются только угловые клетки. Эти клетки имеют одинаковые метки, так как входят также в одно k -кольцо. Но тогда к противоречию ведет ссылка на лемму 5.2.

(10) В случае, когда $S - (t, \sigma)$ -кольцо, рассуждение вполне аналогично предыдущему (с заменой “ k ” на “ t ”, а свойства (6) на свойство (5)).

(11) Допустим, что $S - (d, k)$ -кольцо. Тогда в нем нет σ -клеток по свойству (9) для меньших колец и лемме 5.4(1), а по свойству (1) и лемме 5.4(2) в $\Delta(S)$ тоже нет σ -клеток. В этом случае по свойству (11) для меньших колец и лемме 5.4(1) в d -части кольца S нет неугловых k -клеток.

Поскольку в $\Delta(S)$ нет Q -терминальных клеток, по лемме 5.4 и свойству (4) в этой поддиаграмме совсем нет Q -клеток, в частности, нет и a -терминальных клеток. По свойству (7) и лемме 5.4(2) в $\Delta(S)$ отсутствуют t -клетки. В таком случае лемма 5.3(1) вместе со свойством (14) означают отсутствие неугловых (d, a) -клеток в S .

Таким образом, в d -части кольца S нет неугловых клеток, что стандартным уже образом ведет к противоречию с леммой 5.2.

(12) Допустим, что $S - (a, b)$ -кольцо без σ - и d -клеток. По свойству (1) и лемме 5.4(2) σ -клеток нет и в поддиаграмме $\Delta(S)$. Тогда по свойству (18) в $\Delta(S)$ нет и d -клеток, в частности, нет терминальных клеток для b -полос. По лемме 5.4(2) и свойству (7) в $\Delta(S)$ нет t -клеток, т.е. нет Q -терминальных клеток, а значит, совсем нет Q -клеток по свойству (4). Поэтому нет и a -терминальных клеток.

В таком случае по свойствам (12) и (13) и лемме 5.4(1) среди неугловых клеток b -части кольца S нет ни a -, ни k -клеток. Они могут быть лишь (b, u) -клетками.

В кольце S не может быть r -клеток по лемме 5.3(1) и свойству (16), ибо $a_j \in$

$\{s_0, \dots, s_M\}$. В a -части неугловыми могут быть только (a, x) -клетки, так как клетки других типов исключаются тем же способом, как и из b -части.

Сравнивая выводы, сделанные относительно меток краев a - и b -частей, приходим, как и в пункте (5), к равенству вида

$$x^n = U, \quad (6.2)$$

где n — число (или удвоенное число) неугловых клеток в a -части кольца S , а $U = U(u_1, \dots, u_m)$. При этом соотношение (6.2) выполняется уже в группе $B_1 * R_u$, так как b -клетки тоже удаляются из диаграммы равенства (6.2) с помощью свойства (12). Но в свободном произведении равенство (6.2) возможно по лемме 4.2 лишь при $n = 0$.

Таким образом, в a -части кольца S нет неугловых клеток, что, как обычно, ведет к противоречию с леммой 5.2.

(13) Пусть $S - (b, k)$ -кольцо без σ - и d -клеток. Тогда таких клеток нет и в $\Delta(S)$, как в пункте (12). В b -части кольца S нет неугловых k -клеток по лемме 5.4(1) и свойству (13) для меньших колец.

По свойствам (6), (2) и лемме 5.4 в $\Delta(S)$ нет r -клеток, а значит, нет a -терминальных клеток. Тогда в b -части кольца S нет a -клеток по свойству (12).

Таким образом, неугловые клетки в b -части кольца могут быть лишь (b, u) -клетками, после чего, как и в пункте (12), получается равенство вида (6.2), приводящее к противоречию.

(14) Пусть S — это (d, a) -кольцо без t - и Q -клеток. По лемме 5.4 и свойствам (16) и (2) в поддиаграмме $\Delta(S)$ нет r -клеток, по свойствам (15) и (1) в ней нет σ -клеток, а по свойствам (11) и (8) — нет k -клеток. По свойству (4) и лемме 5.4(2) в $\Delta(S)$ нет Q -клеток, т.е. a -терминальных клеток. Поэтому по утверждению (14) и лемме 5.4(1) в d -части кольца S нет неугловых (d, a) -клеток. Приходим к отсутствию неугловых клеток вообще в d -части. Остается стандартным образом применить лемму 5.2.

(15) Допустим, что S — это (σ, a) -кольцо. По свойствам (16) и (2) для меньших колец и лемме 5.4 в поддиаграмме $\Delta(S)$ нет r -клеток, т.е. нет a -терминальных клеток. Поэтому по лемме 5.4(1) и свойству (15) неугловые клетки σ -части T кольца S не могут быть a -клетками.

По свойствам (9), (10) и лемме 5.4(1) в S нет также k - и t -клеток. Приходим к выводу, что в T есть только угловые клетки, что опять приводит к противоречию с леммой 5.2.

(16) Допустим, что S — это (r, s) -кольцо без Q -клеток. В поддиаграмме $\Delta(S)$ нет t -клеток по лемме 5.4 и утверждениям (5) и (7) и нет k -клеток по свойствам (6) и (8). Отсюда следует, что в $\Delta(S)$ нет Q -клеток по свойствам (3) и (4), т.е. нет s -терминальных клеток. В r -части T нет неугловых s -клеток по свойству (16) и лемме 5.3(1). В итоге, T не содержит никаких неугловых клеток, что снова ведет к противоречию с утверждением леммы 5.2.

(17) Пример (r, h) -кольца разбирается точно так же, как предыдущий.

(18) Допустим, что S — это d -кольцо. По лемме 5.3 и свойству (1) в поддиаграмме $\Delta(S)$ нет σ -клеток, а по свойствам (11), (8) и лемме 5.3 в S нет k -клеток.

По свойствам (7) и (2) и лемме 5.3(2) в $\Delta(S)$ нет t - и Q -клеток, т.е. терминальных клеток для a -полос. Значит, по свойству (14) в S нет и (d, a) -клеток. Другими словами, в S нет вообще никаких клеток.

(19) Предположим, что S — b -кольцо. В поддиаграмме $\Delta(S)$ нет σ -клеток по лемме 5.3(2) и свойству (1), т.е. нет d -терминальных клеток. В таком случае по свойству (18) и той же лемме в $\Delta(S)$ нет и d -клеток. После этого k -клетки исключаются из S с помощью свойства (13).

В Δ нет r -клеток по свойству (2) и лемме 5.3(2), т.е. нет a -терминальных клеток, что позволяет вообще исключить a -клетки из S с помощью свойства (12). Значит, в S остаются только (b, u) -клетки, а на внешнем и на внутреннем краях этого кольца написаны одинаковые слова. Последнее противоречит минимальности диаграммы Δ , как и в пункте (7).

(20) Пусть S — a -кольцо с (d, a) -клеткой. По свойствам (1), (15) и лемме 5.3 в $\Delta(S)$ нет σ -клеток, т.е. нет терминальных клеток для d -полос. Кроме того, по свойству (7) в Δ нет t -клеток. Тогда по свойству (4) нет и Q -клеток, ибо нет терминальных клеток для Q -полос. Поэтому наличие в S (d, a) -клетки ведет к противоречию со свойством (14) для меньшей полосы.

Таким образом, контрпримера к утверждению леммы 6.1 не существует.

§ 7. Диаграммы над группами B_2 , C и B

ЛЕММА 7.1. Пусть L_1, L_2 — приведенные слова от $x, r_i, i \in I$, а W_1, W_2 — приведенные слова от $q, q_0, \dots, q_N, s_0, \dots, s_M, h$, причем в W_2 имеется всего одно вхождение Q -буквы $q_j \in \{q, q_0, \dots, q_N\}$. Тогда из равенства $L_1 W_1 L_2 = W_2$ в группе B_2 следует, что слово W_1 содержит лишь одно вхождение Q -буквы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим минимальную диаграмму над B_2 с контуром $p_1 p_2 p_3 p_4$, где $\varphi(p_1) \equiv L_1$, $\varphi(p_2) \equiv W_1$, $\varphi(p_3) \equiv L_2$, $\varphi(p_4) \equiv W_2^{-1}$.

Если бы путь p_2 не был простым, то между написанными на нем буквами возникло бы нетривиальное соотношение вопреки лемме 4.2.

Если в p_2 имелось хотя бы два Q -ребра, то неизбежно возникла бы некоторая Q -полоса S с торцами на пути p_2 , так как путь $p_3 p_4 p_1$ содержит лишь одно Q -ребро. Эта полоса не может быть без клеток ввиду предыдущего замечания. В то же время, наличие в ней (Q, r) -клетки неизбежно привело бы к образованию (Q, r) -кольца, ибо в пути p_2 нет r -ребер (рис. 8а). Полученное противоречие с леммой 6.1(3) означает, что в пути p_2 не более одного Q -ребра.

Рис. 8

Q -ребро пути p_4 должно соединяться с каким-то ребром на p_2 Q -полосой (или просто лежать на p_2 , рис. 8б), и лемма доказана.

ЛЕММА 7.2. Пусть диаграмма Δ над группой B содержит две клетки Π_1 и Π_2 , отвечающие соотношению (4.10), причем эти клетки обладают общими смежными (в каждой из клеток) спицами, соединяющими точки o_{Π_1} и o_{Π_2} , а в области O , ограниченной этими спицами, нет других спиц и других (k, t) -клеток. Тогда Δ не является минимальной диаграммой, а именно, число ее (k, t) -клеток можно уменьшить на 2 при сохранении граничной метки.

Рис. 9

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Итак, имеем две полосы: t -полосу T и k -полосу K с терминальными клетками Π_1 и Π_2 , через которые проходят данные в условии спицы (рис. 9). Пусть U – слово, написанное на крае p полосы T , находящемся в области O , от клетки Π_1 до клетки Π_2 . Аналогично определяется метка края U' полосы K . Поскольку спицы выбраны смежными, получаем некоторую поддиаграмму (заштрихована на рис. 9) с граничной меткой $q^{-1}Uq(U')^{-1}$, причем равенство

$$U' = q^{-1}Uq \quad (7.1)$$

выполнено уже в группе C , заданной по определению всеми определяющими соотношениями группы B , кроме соотношения (4.10), так как в O нет (k, t) -клеток.

Отметим еще, что в группе C

$$Ut = tU, \quad U'k = kU', \quad (7.2)$$

так как все t -клетки, входящие в T (все k -клетки, входящие в K), отвечают соотношениям коммутации (4.6) и (4.7) (соответственно (4.8) и (4.9)).

Пусть V – граничная метка клетки Π_1 (клетки Π_2), которую можно прочитать, начиная с вершины p_- (с p_+) и Q -ребра. Она имеет вид $V \equiv V_1 \cdots V_{2L}$, где $V_i \equiv qkq^{-1}t$ для некоторых $k = k_j^{\pm 1}$, $t = t_l^{\pm 1}$. Ввиду (7.1) и (7.2)

$$V_i U V_i^{-1} = qkq^{-1}tU t^{-1}qk^{-1}q^{-1} = qkU'k^{-1}q^{-1} = qU'q^{-1} = U$$

в группе C , а значит, слово U коммутирует со словом V в группе C . Поэтому диаграмма Δ не является минимальной по лемме 5.1.

В дальнейших рассуждениях будет встречаться вспомогательный граф $\Gamma(k, t)$, построенный по диаграмме Δ . Его внутренними вершинами являются по определению точки o_{Π} , выбранные внутри (k, t) -клеток Π диаграммы Δ , а внешней – вершина o_{Δ} . Все k - и t -спицы считаются по определению ребрами графа $\Gamma(k, t)$.

ЛЕММА 7.3. *Естественный гомоморфизм $B_2 \rightarrow B$ инъективен.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассуждая “от противного”, рассмотрим минимальную диаграмму Δ , на контуре которой написано неединичное в B_2 слово от порождающих этой группы.

Допустим сначала, что в Δ есть (k, t) -клетки и рассмотрим граф $\Gamma(k, t)$. В нем нет одноугольников, поскольку t -ребра в (k, t) -клетках циклически разделены k -ребрами. В нем нет и 2-угольников с внутренними вершинами по лемме 7.2. Значит, этот граф является $4L$ -графом и, во всяком случае, 8-графом в терминологии §3, ибо $L > 1$. По лемме 3.2 найдется спица, инцидентная вершине o_Δ , а следовательно на $\partial\Delta$ есть k - и t -ребра. Но буквы k и t не входят в число порождающих группы B_2 . Таким образом, в Δ нет (k, t) -клеток.

В таком случае Δ – минимальная диаграмма над группой C , которая, очевидно, является HNN-расширением группы B_2 с проходными буквами $t_1, \dots, k_1, \dots$. Как известно, базовая подгруппа изоморфно вложена в HNN-расширение, а значит, рассматриваемая диаграмма Δ невозможна.

Лемма 12.13 [6] (где $L = 1$) видоизменяется теперь следующим образом.

ЛЕММА 7.4. *Пусть Σ – h -специальное слово и*

$$\prod_{j=1}^L k_j^{-1} \Sigma^{-1} t_j \Sigma k_j \Sigma^{-1} t_j^{-1} \Sigma = 1 \quad (7.3)$$

в группе B . Тогда в минимальной диаграмме Δ этого равенства содержится одна (k, t) -клетка, и существуют слова L_1, L_2 в алфавите $\{x, r_i; i \in I\}$ такие, что $L_1 \Sigma L_2 = q$ в группе B_2 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если бы в Δ не было (k, t) -клеток, т.е. терминальных клеток для k - и t -полос, то максимальные k - и t -полосы пересекались бы, как видно из формы левой части в (7.3). Но клеток, входящих одновременно в k - и t -полосу, не существует по определению таких полос, данному в §5.

Как было замечено при доказательстве леммы 7.3, граф $\Gamma(k, t)$ является l -графом для $l = 4L$. Поэтому, число (k, t) -клеток в Δ не больше одной, ибо иначе по лемме 3.4 общее число k - и t -ребер в $\partial\Delta$ было бы не меньше $8L - 6$, в то время как их ровно $4L$ (и $L > 1$).

Спицы единственной (k, t) -клетки должны проходить через $4L$ k - и t -ребер в $\partial\Delta$, а в образовавшихся между спицами “секторах” будут поддиаграммы над группой C с граничными метками вида $L_1 \Sigma L_2 q^{-1}$ для слов L_1 и L_2 , удовлетворяющих требованиям леммы, как видно из определения k - и t -полос и того обстоятельства, что Δ является диаграммой над B . По лемме 7.3 из равенства $L_1 \Sigma L_2 = q$ в группе C следует это же равенство в группе B_2 .

Лемма 7.3 вместе с леммами 4.1, 4.4 и 4.5 дает следующий аналог леммы Буна 12.20 [6].

ЛЕММА 7.5. *Для h -специального слова Σ равенство (7.3) выполнено в группе B тогда и только тогда, когда $\Sigma^* = q$ в полугруппе $\Gamma(T)$. В частности,*

положительное слово w в алфавите $\{s_0, \dots, s_M\}$ содержится в множестве E (см. §4) тогда и только тогда, когда слово

$$\prod_{j=1}^L k_j^{-1} (h^{-1} q_1 w h)^{-1} t_j (h^{-1} q_1 w h) k_j (h^{-1} q_1 w h)^{-1} t_j^{-1} (h^{-1} q_1 w h) \quad (7.4)$$

равно 1 в группе B .

Для последующего “выпрямления” r - и σ -полос удобно к определяющим соотношениям группы B (а также групп B_4, B_5, B_6) добавить их следствия (7.3) для всех h -специальных слов Σ таких, что $\Sigma^* = q$ в $\Gamma(T)$, в частности, добавить определяющие слова (7.4) для $w \in E$. Соотношения такого рода можно встретить в [6] (см. plate 2, лемма 12.24), а их аналоги в [8] названы дисками.

Диском или (k, t) -клеткой будем далее называть любую клетку в диаграмме, отвечающую соотношению вида (7.3) или соотношению (4.10). Формально (но не содержательно) понятие минимальной диаграммы, данное в §5, сохраняется и после добавления дисков к списку клеток, которыми заполняются диаграммы. Можно говорить о спицах, выходящих из диска и т.п.

ЛЕММА 7.6. Пусть диаграмма Δ над группой B содержит два диска D_1 и D_2 с общими смежными спицами, причем в области O между этими спицами нет других дисков и нет других спиц. Тогда диаграмма Δ не является минимальной, т.е. при сохранении граничной метки число ее дисков можно уменьшить на 2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Каждый из дисков можно заменить по лемме 7.4 одной стандартной (k, t) -клеткой, отвечающей соотношению (4.10), и клетками меньших рангов. Полученные вместо D_1, D_2 (k, t) -клетки Π_1, Π_2 удовлетворяют условию леммы 7.2, из которой и выводится теперь утверждение леммы 7.6.

ЛЕММА 7.7. Пусть $\Sigma \equiv q$ либо $\Sigma \equiv h^{-1} X^\# q_j Y h$ — h -специальное слово, содержащее для некоторого $i \in I$ вхождение слова $F_i^\# q_{i_1} G_i$ или вхождение слова $H_i^\# q_{i_2} K_i$, т.е. для некоторого соотношения (4.5) и некоторых слов U, V $q_j = q_{i_1}$, $hX_i \equiv UF_i$, $Y_i h \equiv G_i V$ (соответственно $q_j = q_{i_2}$, $hX_i \equiv UH_i$, $Y_i h \equiv K_i V$). Тогда слово $W \equiv U^\# r_i H_i^\# q_{i_2} K_i r_i^{-1} V$ (слово $U^\# r_i^{-1} F_i^\# q_{i_1} G_i r_i V$), полученное из Σ с помощью однократного применения соотношения (4.5), равно в ранге меньшем, чем ранг соотношений (4.5), слову вида $x^{n_1} r_i x^{n_2} \Sigma_1 x^{n_3} r_i^{-1} x^{n_4}$ (вида $x^{n_1} r_i^{-1} x^{n_2} \Sigma_1 x^{n_3} r_i x^{n_4}$), где Σ_1 является h -специальным словом или $\Sigma_1 \equiv q$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Случай $\Sigma \equiv q$ очевиден (с $n_1 = \dots = n_4$) ввиду единственности соотношения вида $r_{i_0}^{-1} h^{-1} q_0 h r_{i_0} = q$ среди соотношений (4.5). Только это соотношение содержит $h^{-1} q_0 h$, что делает очевидным и случай $i = i_0$.

В любом другом случае Σ — h -специальное слово, а после применения соотношения (4.5) опять получится слово с началом h^{-1} и концом h , в котором нет других вхождений $h^{\pm 1}$, по определению соотношений (4.5).

Рассмотрим далее только первый вариант. Для положительного слова T от $s_0, \dots, s_M, h$ обозначим через T_x (через T_{-x}) результат замены каждой буквы s_j, h на $s_j x, h x$ (на $s_j x^{-1}, h x^{-1}$).

В силу соотношений (4.2) и положительности слова V подслово V слова W равно слову вида $V_x x^{n_4}$ для некоторого показателя n_4 . После такой замены в слове W подслово $r_i^{-1} V_x$ заменим равным ему в силу соотношений (4.3) словом $V_{-x} r_i^{-1}$. Затем подслово V_{-x} с помощью соотношений (4.2) можно заменить на слово вида $V x^{n_3}$ опять-таки ввиду положительности слова V .

После аналогичной переработки подслова слова W , находящегося левее буквы q_{i_2} , получается требуемый результат.

Вхождение в слово Σ , указанное для некоторого $i \in I$ в условии леммы 7.7, назовем для краткости *i -вхождением*.

Рассмотрим следующую вспомогательную конструкцию. Пусть D – диск в некоторой минимальной диаграмме Δ над группой B , а S – некоторая r_i -полоса в Δ , последовательно пересекающая t -полосу T и k -полосу K , определяемые смежными t - и k -спицами диска D , которые пересекают среднюю линию полосы S ровно в одной точке o_{Π_1} , o_{Π_2} каждая (рис. 10а). Обозначим через $\Delta(S, T, K)$ поддиаграмму, составленную из клеток полос T, K (идущих от диска D до клеток Π_1, Π_2 включительно), клеток полосы S (от Π_1 до Π_2 включительно) и всех клеток, целиком лежащих в области $O(S, T, K)$, ограниченной указанными спицами и средней линией полосы S . (Она заштрихована на рис. 10а.)

Рис. 10

ЛЕММА 7.8. Если в поддиаграмме $\Delta(S, T, K)$ нет дисков и все ее r -клетки входят в полосу S , то некоторая (r_i, Q) -клетка полосы S имеет общее Q -ребро с участком p границы диска D , заключенным между торцами полос T и K (рис. 10б), а метка $\Sigma \equiv \varphi(p)$ участка p содержит i -вхождение.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению диска $\Sigma \equiv q$, или слово Σ h -специально. Поэтому путь p имеет единственное Q -ребро e , к которому в $\Delta(S, T, K)$ должна быть приклеена клетка полосы S , ибо в клетках полос T и K не может быть Q -ребер ни в какой диаграмме над группой B .

Пусть $\delta(S, T, K)$ – максимальная поддиаграмма, составленная из всех клеток области $O(S, T, K)$. (Она получается из $\Delta(S, T, K)$ удалением клеток, входящих в полосы S, T и K .) Заметим, что среди клеток r_i -полосы $[\Pi_1, \dots, \Pi_2]$ нет t - и k -клеток кроме первой и последней, ибо их наличие привело бы к образованию (t, r_i) - или (k, r_i) -кольца вопреки лемме 6.1(5), (6). Поэтому граничная метка диаграммы $\delta(S, T, K)$ – это слово в порождающих группы B_2 , и далее в доказательстве эту поддиаграмму можно рассматривать как диаграмму над B_2 по лемме 7.3.

Вспоминая определение t - и k -полос, приходим к выводу, что к словам, написанным на $\partial\delta(S, T, K)$, применима лемма 7.1, в соответствии с которой в границе этой

поддиаграммы нет других Q -ребер, кроме $e^{\pm 1}$. При удалении этого ребра диаграмма $\delta(S, T, K)$ распадается на две части Δ_1 и Δ_2 без Q -ребер в контурах. В их контурах нет и r -ребер, так как все r -клетки диаграммы $\Delta(S, T, K)$ входят в полосу S . Значит, по лемме 4.2 Δ_1, Δ_2 можно считать диаграммами над группой B_1 .

Рассмотрим, например, поддиаграмму Δ_2 . Ее контур имеет вид $p^1 p^2 p^3$, где p^1 входит в край полосы S , p^2 – в край полосы K , а p^3 – подуть пути p^{-1} . По определению диска $\varphi((p^3)^{-1})$ – положительное слово от $s_0, \dots, s_M, h$, а по определению k -полосы $\varphi(p^2)$ – слово от x .

Слово $U \equiv \varphi(p^1)$ свободно равно произведению вида $G_i V_1 \dots V_n$, где $V_1, \dots, V_n$ имеют вид $(s_\beta x)^{\pm 1}$ или $(hx)^{\pm 1}$. (Вариант с K_i может быть разобран аналогично.) Ввиду минимальности полосы S при приведении слова U к каноническому виду в HNN-расширении B_1 сокращения проходных s -букв могли бы возникнуть только на стыке G_i и V_1 . Но в произведении $G_i V_1$ встречается тогда ровно одна буква $x^{\pm 1}$, и оно приведено в B_1 ввиду положительности слова G_i .

Таким образом, в приведенной в B_1 форме слова U началом является слово G_i . По лемме Бриттона такое же начало должно быть у слова $\varphi((p^3)^{-1})$ (которое отличается от U в B_1 только правым множителем из $\langle x \rangle$).

После аналогичного рассмотрения поддиаграммы Δ_1 получается искомое i -вхождение, и лемма доказана.

В заключение параграфа рассмотрим более сложную конфигурацию в некоторой минимальной диаграмме Δ над группой B .

Пусть D – диск, а S – r -полоса, которая последовательно пересекает по одному разу t - и k -полосы $S_1, \dots, S_n$, определенные циклически занумерованными спицами, выходящими из D . Если для любых смежных полос $T = S_j, K = S_{j+1}$ (или $K = S_j, T = S_{j+1}$) этой системы диаграмма $\Delta(S, T, K)$ не содержит дисков и $n > 2L + 1$, то скажем, что полоса S *искривляется диском* D .

ЛЕММА 7.9. *В минимальной диаграмме Δ над группой B нет r -полос, искривляемых дисками.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, что такая r -полоса S имеется, и предположим сначала, что в области O , ограниченной средней линией полосы S и спицами с номерами 1 и n , есть r -клетки. Тогда из них можно составить другую искривляемую r -полосу, так как в O не может быть r -колец или (r, t) -, (r, k) -колец по лемме 6.1 ((2), (5) и (6)). Поэтому из индуктивных соображений (по числу r -клеток в O) можно считать, что все поддиаграммы $\Delta(S, S_j, S_{j+1})$ ($j = 1, \dots, n-1$) удовлетворяют условию леммы 7.8.

На основании леммы 7.8 в Δ можно выделить поддиаграмму $\Delta(S)$, составленную из диска D и $(n-1)$ -й (r_i, Q) -клетки π_j , приклеенных к D вдоль Q -ребер в каждом промежутке между торцами полос $S_1, \dots, S_n$ (рис. 11а). По определениям (7.3), (4.10) граничной метки диска все клетки $\pi_1, \dots, \pi_{n-1}$ отвечают одному соотношению вида (4.5), причем, находясь в одной r_i -полосе, они все приклеены единообразно: либо их r -ребра направлены “от” D , либо у всех – “к” D .

Вырежем поддиаграмму $\Delta(S)$ из Δ и увеличим ее следующим образом. Сначала приклеим (r_i, Q) -клетки к оставшимся свободными $4L - n + 1$ Q -ребрам диска D (рис. 11б). Потом с помощью леммы 7.7 приклеим $4L$ диаграмм меньших рангов. При переходе от одного участка между торцами спиц в ∂D к смежному

Рис. 11

они получаются одна из другой зеркальным отражением ввиду того, что метки смежных участков взаимно обратны. Поэтому возникающие после таких приклеиваний участки границы с метками, зависящими от r_i , x , попарно разделены k - и t -ребрами диска D и взаимно обратны. На основании соотношений (4.6)–(4.9) эти участки можно заклеить с помощью $4L$ диаграмм (заштрихованы на рис. 11б) так, что меткой границы, полученной в итоге диаграммы Δ_0 , будет слово вида (7.3), но с полученным из леммы 7.7 словом Σ_1 вместо Σ .

Из полученного соотношения вида (7.3) и леммы 7.5 следует, что $\Sigma_1 = q$ в полугруппе $\Gamma(T)$, т.е. ту же граничную метку, что и диаграмма Δ_0 , имеет некоторый диск D_1 . Поскольку диаграмма Δ_0 получена путем добавления к $\Delta(S)$ некоторой диаграммы (обозначим ее Δ'), состоящей из $4L - n + 1$ (r, Q) -клеток и клеток меньших рангов, диаграмма $\bar{\Delta}(S)$ с той же граничной меткой, что и у $\Delta(S)$, может быть получена путем приклеивания к диску D_1 зеркальной копии диаграммы Δ' . Тип диаграммы $\bar{\Delta}(S)$ меньше, чем у $\Delta(S)$. (Столько же дисков -1 , но меньшее число (r, Q) -клеток, ибо $4L - n + 1 < n - 1$.) Поэтому поддиаграмма $\Delta(S)$ в Δ , а вместе с ней и вся диаграмма Δ , не минимальны.

§ 8. Отсутствие огибающих r -полос в диаграммах над B_6

Включение “лишних” соотношений в список определяющих и предписанный в § 5 ранг (σ, t) -клеткам делают возможным избежать ситуации огибания для r - и σ -полос не только в диаграммах над B , но и над группой B_6 .

Определим аналог конструкции $\Delta(S, T, K)$, данной перед леммой 7.8. Пусть D — диск в минимальной диаграмме Δ над группой B_6 , соотношения (4.2)–(4.20) которой даны в § 4. Пусть S — σ - или r -полоса, последовательно пересекающая по одному разу t -полосу T_1 , k -полосу K и t -полосу T_2 , определенные тремя спицами последовательно выходящими из диска D . Обозначим через $\Delta(S, T_1, T_2)$ поддиаграмму, составленную из клеток полос S, T_1, T_2 (точнее, как и в § 7, их подполос, выделяемых клетками Π_1, Π_2 , находящимися на пересечении полосы S с T_1 и T_2 соответственно) и всех клеток, целиком входящих в область $O(S, T_1, T_2)$, ограниченную указанными двумя t -спицами и средней линией полосы S .

ЛЕММА 8.1. *Если в поддиаграмме $\Delta(S, T_1, T_2)$ нет дисков и r -клеток, а все ее σ -клетки входят в σ -полосу S , то в $\Delta(S, T_1, T_2)$ содержится только по одной клетке из полос T_1, T_2 , а именно Π_1 и Π_2 , которые, следовательно,*

но, имеют общие t -ребра границ с диском D . Кроме того, если граничной меткой диска D является левая часть равенства (7.3) с h -специальным словом $\Sigma \equiv h^{-1}X\#q_jYh$, то $q_j \equiv q_1$, а X – пустое слово, т.е. по лемме 7.5 граничная метка диска D имеет вид (7.4) с $w \equiv Y \in E$; диск D не может отвечать соотношению (4.10).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поддиаграмма $\Delta(S, T_1, T_2)$ является объединением двух поддиаграмм $\Delta_1 = \Delta(S, T_1, K)$ и $\Delta_2 = \Delta(S, T_2, K)$ по общим клетками полосы K . Как видно из условия леммы, (σ, t) -клетки могут встречаться в Δ_1 только в полосе S . Если бы такие клетки, кроме Π_1 , действительно встретились, то неизбежно появление (σ, t) -колец, ибо в поддиаграмме $\delta(S, T_1, K)$, определенной так же, как в доказательстве леммы 7.8, граничные t -ребра могут лежать только на общей с S границей. Но такие кольца невозможны по лемме 6.1(10).

Заметим далее, что при обходе границы поддиаграммы $\delta(S, T_1, K)$ встречается ровно два Q -ребра: одно из них на границе диска D , где написано слово Σ или одна буква q , а другое – на границе (σ, t) -клетки Π_1 , ибо других (σ, t) - или (r, Q) -клеток в Δ_1 нет. Эти два ребра должны быть просто взаимно обратны, поскольку в $\delta(S, T_1, K)$ нет Q -клеток. Значит, $q_j \equiv q_1$. При удалении ребра с этой меткой диаграмма $\delta(S, T_1, K)$ распадается на две диаграммы, на контуре одной из которых написано слово $h^{-1}(X\#)^{-1}hx^{\pm l}$, где l – число (t, x) -клеток в полосе T_1 между диском D и клеткой Π_1 . (См. соотношения (4.7), (4.17) и (4.18).)

Для доказательства утверждения леммы для клетки Π_1 заметим, что $l = 0$. Это следует из леммы 4.2, если равенство $h^{-1}(X\#)^{-1}hx^{\pm l} = 1$ выполнено не только в группе B_6 , но и в B_2 . В самом деле, из условия леммы известно, что в выводе этого соотношения не участвуют (k, t) -клетки, а группа, заданная всеми остальными определяющими соотношениями группы B_6 , допускает очевидную ретракцию на группу B_2 , при которой порождающие $\sigma, d, b_j, u_j, k_i, t_i$ при $j = 1, \dots, M$; $i = 1, \dots, L$ отправляются в 1. Наконец, слово $X\#$, равное $hx^{\pm l}h^{-1}$ в группе B_2 , должно быть пустым по лемме 4.2.

Утверждение леммы о Π_2 получается из рассмотрения поддиаграммы Δ_2 .

ЛЕММА 8.2. Для любого слова $w \in E$ равенство слова

$$(h^{-1}q_1wh)k_1(h^{-1}q_1wh)^{-1}$$

слову $(h^{-1}q_1dwh)k_1(h^{-1}q_1dwh)^{-1}$ в группе B_6 может быть выведено из соотношений этой группы, данных в §4, без использования (k, t) -соотношений (4.10) и (σ, t) -соотношений (4.17), (4.18).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу соотношений (4.16) и (4.13) $dw = ww_b d$, а $d(hk_1h^{-1})d^{-1} = hk_1h^{-1}$ ввиду (4.15). Поэтому задача сводится к сравнению слов $w_bhk_1h^{-1}w_b^{-1}$ и hk_1h^{-1} , т.е. к доказательству перестановочности слов w_b и hk_1h^{-1} . Но, действительно, из соотношений (4.14), (4.12) и (4.11) получаем: $(hk_1h^{-1})^{-1}w_b(hk_1h^{-1}) = w_bw_u$, причем $w_u = 1$, так как $w_u \in E_u$.

ЛЕММА 8.3. Пусть D – диск в некоторой диаграмме Δ над группой B_6 , граница которого имеет общие t -ребра с каждой из n (σ, t) -клеток $\Pi_1, \dots, \Pi_n$, причем эти клетки единообразно приклеены к D , т.е. либо все их σ -ребра направлены от D , либо все их σ -ребра направлены к D . Тогда если граничная метка диска D имеет вид (7.4), а $n > L$, то диаграмма Δ не минимальна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно показать, что не является минимальной под-
диаграмма Δ_1 , составленная из диска D и клеток $\Pi_1, \dots, \Pi_n$ (рис. 12а).

Рассматривая диаграмму Δ_1 отдельно, проведем следующие дополнительные
построения. Сначала приклеим $2L - n$ новых (σ, t) -клеток к каждому из остав-
шихся свободными $2L - n$ t -ребер в ∂D (рис. 12б), причем так, чтобы σ -ребра
всех $2L$ (σ, t) -клеток в полученной таким образом диаграмме Δ_2 были направлены
к D (случай А), либо все – от D (случай Б).

Рис. 12

Поскольку между t -ребрами границы диска D расположены подпути с метка-
ми вида $U_j^{\pm 1}$, где $U_j \equiv (h_1^{-1} q_1 w h) k_j^{\pm 1} (h^{-1} q_1 w h)^{-1}$, $w \in E$, граничной меткой
диаграммы Δ_2 будет слово

$$\prod_{j=1}^L V_j t_j V_j' t_j^{-1},$$

где в случае А

$$\begin{aligned} V_1' &\equiv (h^{-1} q_1 \sigma d^{-1} q_1^{-1} h) U_1 (h^{-1} q_1 \sigma d^{-1} q_1^{-1} h)^{-1}, \\ V_1 &\equiv (h^{-1} q_1 \sigma q_1^{-1} h) U_1^{-1} (h^{-1} q_1 \sigma q_1^{-1} h)^{-1} \end{aligned}$$

и

$$V_j^{-1} \equiv V_j' \equiv (h^{-1} q_1 \sigma q_1^{-1} h) U_j (h^{-1} q_1 \sigma q_1^{-1} h)^{-1}$$

при $j > 1$, а в случае Б

$$\begin{aligned} V_1' &\equiv (h^{-1} q_1 d \sigma^{-1} q_1^{-1} h) U_1 (h^{-1} q_1 d \sigma^{-1} q_1^{-1} h)^{-1}, \\ V_1 &\equiv (h^{-1} q_1 \sigma^{-1} q_1^{-1} h) U_1^{-1} (h^{-1} q_1 \sigma^{-1} q_1^{-1} h)^{-1} \end{aligned}$$

и

$$V_j^{-1} \equiv V_j' \equiv (h^{-1} q_1 \sigma^{-1} q_1^{-1} h) U_j (h^{-1} q_1 \sigma^{-1} q_1^{-1} h)^{-1}$$

при $j > 1$. (См. соотношения (4.17) и (4.18).)

В случае А в слове V_1' после сокращений буква d может быть также вычеркнута
по лемме 8.2 без использования соотношений вида (4.10), (4.17) и (4.18). Если по-
том применить соотношения (4.19) и (4.20), то можно вычеркнуть и вхождения букв
вы σ , что приводит к слову U_1 . В случае Б слово V_1' также равно слову U_1 в силу

соотношений группы B_6 , но без использования соотношений (4.10), (4.17), (4.18). (В этом случае сначала избавляемся от σ , а потом от d .) Аналогичное равенство каждого из слов V_j' слову U_j при $j > 1$ объясняется проще, так как не требуется ссылка на лемму 8.2.

Проведенные выкладки означают, что с помощью клеток, ранги которых меньше, чем ранги (k, t) - и (σ, t) -клеток, диаграмма Δ_2 может быть достроена до диаграммы Δ_3 с такой же граничной меткой, как у диска D (рис. 126). Поскольку диаграмма Δ_3 получена из диаграммы Δ_1 с помощью добавления некоторой диаграммы (обозначим ее Δ'), состоящей из $2L - n$ (σ, t) -клеток и клеток меньшего ранга, диаграмма $\overline{\Delta}$ с той же граничной меткой, что и у Δ_1 , может быть получена посредством приклеивания к D зеркальной копии диаграммы Δ' . Но тип диаграммы $\overline{\Delta}$ меньше типа диаграммы Δ_1 , — у нее меньше (σ, t) -клеток, ибо $2L - n < n$. Поэтому диаграмма Δ_1 не минимальна.

Пусть D — диск в диаграмме Δ над группой B_6 , а S — r - или σ -полоса, последовательно пересекающая по одному разу смежные t - и k -полосы $T_1, K_1, T_2, K_2, \dots, T_n$, определенные последовательными смежными спицами диска D . Если при этом поддиаграммы $\Delta(S, T_j, T_{j+1})$ (определенные в начале параграфа) не содержат дисков, а $n > L + 1$, то скажем, что полоса S *огibt* диск D .

ЛЕММА 8.4. *В минимальной диаграмме Δ над группой B_6 нет r - или σ -полос, огibающих диски.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказывая лемму “от противного”, можно считать, что все r - или σ -клетки поддиаграмм $\Delta_j = \Delta(S, T_j, T_{j+1})$ входят в полосу S . (Это достигается путем выбора “ближайшей” к D огibающей полосы, как и в начале доказательства леммы 7.9 с добавлением ссылок на пункты (1) и (9), (10) леммы 6.1 при исключении σ -клеток.)

Допустим сначала, что S состоит из r -клеток. Тогда на границе каждой из поддиаграмм Δ_j нет σ -ребер. Поэтому по лемме 6.1(1) в этих диаграммах нет σ -клеток, т.е. нет d -терминальных клеток. Поскольку в $\partial\Delta_j$ нет d -ребер, в Δ_j нет d -клеток по лемме 6.2(18). Аналогично исключаются b -клетки по лемме 6.1(19), а значит, и (u, u) -клетки. Поэтому Δ_j — диаграмма над группой B , а полоса S оказывается искривляемой диском D в некоторой поддиаграмме диаграммы Δ , определенной над B , так как $2n - 1 > 2L + 1$. Но это противоречит лемме 7.9.

Пусть теперь S — σ -полоса. Применяя в этом случае лемму 8.1 к каждой из поддиаграмм Δ_j , получаем n (σ, t) -клеток $\Pi_1, \dots, \Pi_n$, единообразно приклеенных к диску D , ибо они входят в одну полосу S . Кроме того, граничная метка диска D должна иметь вид (7.4). В таком случае утверждение леммы следует из леммы 8.3.

§9. Диски и спицы в диаграммах над группой B_6

Этот параграф посвящен описанию трюка, с помощью которого можно избавляться от пары дисков, связанных несколькими спицами не только в диаграммах над группой B (типа Новикова–Буна), но и над группой B_6 (типа Андера).

ЛЕММА 9.1. *Пусть для слова $w \in E$ составлено произведение (7.4), в котором как в циклическом слове выбрано подслово V_0 , полученное вычеркиванием одного из дополнительных подслов вида $q_1^{-1}ht_jh^{-1}q_1whk_jh^{-1}$, где $j \neq 1$ или*

$hk_j h^{-1} w^{-1} q_1^{-1} h t_j^{-1} h^{-1} q_1$, где $j \neq 1$, или $q_1^{-1} h t_j^{-1} h^{-1} q_1 w h k_{j+1}^{-1} h^{-1}$, где $j \neq 1$ (а индексы рассматриваются по модулю L), или $h k_j^{-1} h^{-1} w^{-1} q_1^{-1} h t_j h^{-1} q_1$, где $j \neq 1$. (То есть, индекс t -буквы всегда отличен от 1.) Тогда равенство $V_0 \sigma^{-1} V_0^{-1} \sigma = 1$ в группе B_6 можно вывести из определяющих соотношений этой группы, данных в §4, без использования (k, t) -соотношений (4.10).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Буква σ перестановочна со словом w ввиду соотношений (4.20), а с произведениями вида $q_1^{-1} h t_j h^{-1} q_1$ при $j \neq 1$ и с произведениями $h k_j h^{-1}$ в силу (4.18) и (4.19). Поэтому для доказательства леммы достаточно слово V_0 заменить его подсловом $V \equiv (q_1^{-1} h t_1 h^{-1} q_1) w h k_1 h^{-1} w^{-1} (q_1^{-1} h t_1^{-1} h^{-1} q_1)$.

Ввиду соотношений (4.17), (4.20) и (4.19)

$$\sigma^{-1} V \sigma = (q_1^{-1} h t_1 h^{-1} q_1 d) w (h k_1 h^{-1}) w^{-1} (d^{-1} q_1^{-1} h t_1^{-1} h^{-1} q_1). \quad (9.1)$$

К подслову правой части равенства (9.1), заключенному между двумя вхождениями буквы t_1 , можно применить лемму 8.2. С ее помощью можно вычеркнуть оба вхождения буквы d , после чего правая часть превращается в слово V , что и требовалось.

Рассмотрим теперь вспомогательную конфигурацию $\Delta(S, T, K)$, определяемую некоторым диском диаграммы Δ , выходящими из него смежными t - и k -спицами и полосой S , как она была определена перед леммой 7.8, с той лишь разницей, что S — σ -полоса (а не r -полоса), а Δ — диаграмма над группой B_6 (а не B). Обозначение $\delta(S, T, K)$ будем употреблять, как и в доказательстве леммы 7.8, для поддиаграммы, заключенной внутри области, ограниченной двумя спицами и средней линией полосы S . Если Π_1 и Π_2 — клетки, общие для полос T, S и K, S соответственно, то подполосу полосы S вида $[\Pi_1, \pi_1, \dots, \pi_n, \Pi_2]$ обозначим S_1 .

ЛЕММА 9.2. Если в приведенных обозначениях поддиаграмма $\Delta(S, T, K)$ минимальна и не содержит дисков, все ее σ -клетки входят в полосу S_1 , а полоса T является t -полосой для $t \neq t_1$, то метки обоих краев полосы S_1 одинаковы и имеют вид $W \equiv q_1^{-1} h t^{\pm 1} h^{-1} q_1 w h k^{\pm 1} h^{-1}$, где $t \in \{t_2, \dots, t_L\}$, $k \in \{k_1, \dots, k_L\}$, а $w \in E$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Граничные t - или k -ребра поддиаграммы $\delta(S, T, K)$ могли бы входить только в границы клеток $\pi_1, \dots, \pi_n$ полосы S_1 . Но тогда неизбежно появление (σ, t) - или (σ, k) -колец вопреки утверждениям (10) и (9) леммы 6. Поэтому клетки $\pi_1, \dots, \pi_n$ — это (σ, a) -клетки. Учитывая вставки с метками $(h^{-1} q_1)^{\pm 1}$ между t - и σ -ребрами в клетке Π_1 и аналогичные вставки $h^{\pm 1}$ в Π_2 , получаем, что $W \equiv q_1^{-1} h t^{\pm 1} h^{-1} q_1 w h k^{\pm 1} h^{-1}$, где w — слово от $a_1, \dots, a_m$. При этом метки краев полосы S_1 совпадают ввиду того, что все ее клетки отвечают соотношениям коммутации (4.18)–(4.20).

Поскольку в $\partial\delta(S_1, T, K)$ нет σ -, d -, b -, t - и k -ребер, то на основании леммы 6.1 (пункты (1), (18), (19), (7) и (8)) последовательно заключаем, что в $\delta(S, T, K)$ нет σ -, d -, b -, t - и k -клеток. Следовательно нет и (u, u) -клеток, т.е. $\delta(S, T, K)$ — это диаграмма над группой B_2 . Из нее получается равенство вида $L' h^{-1} q_1 w h L'' = \Sigma$, где слова L', L'' зависят от x, r_i ; $i \in I$, а $\Sigma = q$ в полугруппе $\Gamma(T)$ по определению граничной метки диска D . По лемме 4.5 для слова Σ выполнено соотношение (7.3), откуда по лемме 7.4 $q = L_1 \Sigma L_2 = L_1 L' h^{-1} q_1 w h L'' L_2$ в группе B_2 для некоторых

слов L_1, L_2 от $x, r_i; i \in I$. Отсюда по лемме 4.4 $hq_1wh = q$ в полугруппе $\Gamma(T)$ и w – положительное слово. Наконец, по лемме 4.1 получается, что $w \in E$.

ЛЕММА 9.3. Пусть диаграмма Δ над группой B_6 содержит два диска D_1 и D_2 с общими смежными t - и k -спицами, причем $t \neq t_1$, а в области O между этими спицами нет других дисков и нет других спиц. Тогда диаграмма Δ не является минимальной: при сохранении ее граничной метки число дисков можно уменьшить на два.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства можно считать, что в диаграмме нет иных клеток, кроме дисков D_1, D_2 , клеток полос T и K , через которые проходят общие спицы дисков, и клеток, целиком содержащихся в области O . Можно считать также, что поддиаграмма $\bar{\Delta}$, составленная из тех же клеток, но без дисков (заштрихована на рис. 13а), является минимальной, так как при ее приведении к минимальному виду единственная пара граничных t -ребер и пара k -ребер по-прежнему останутся торцами максимальной t - и k -полосы.

Выделим далее в $\bar{\Delta}$ максимальные σ -полосы $S_1, \dots, S_n$. (Возможно, $n = 0$.) Поскольку по лемме 6.1(9),(10) в $\bar{\Delta}$ нет (σ, t) - и (σ, k) -колец, а в $\partial D_1, \partial D_2$ нет σ -ребер, первая и последняя клетка каждой полосы $S_1, \dots, S_n$ входят в полосы T и K соответственно. Это позволяет считать, что σ -полосы занумерованы “от D_1 к D_2 ”.

Утверждение леммы будет доказываться индукцией по числу n максимальных σ -полос в $\bar{\Delta}$. Заметим, что $2n$ – это число σ -ребер в $\partial \Delta$.

Если $n = 0$, то в границе диаграммы Δ нет σ -ребер. Нет также и d -ребер, ибо $t \neq t_1$. Очевидно также, что в $\partial \Delta$ нет b - и u -ребер. Поэтому по утверждениям (1), (18) и (19) леммы 6.1 в диаграмме $\bar{\Delta}$ нет σ -, d -, b - и u -клеток, т.е. $\bar{\Delta}$ – это диаграмма над группой B . В таком случае утверждение леммы следует из леммы 7.6.

Рис. 13

При $n \geq 1$ σ -полоса S_1 вместе с полосами T, K и диском D_1 образуют конфигурацию, к которой применима лемма 9.2. Поэтому края p_1, p_2 полосы S_1 (рис. 13б) имеют одинаковую метку $W \equiv q_1^{-1}ht^{\pm 1}h^{-1}q_1whk^{\pm 1}h^{-1}$ для некоторого слова $w \in E$.

По лемме 4.1 можно построить вспомогательную диаграмму-диск из одной клетки D^1 с граничной меткой (7.4), в которой слово W будет подсловом. Обозначим через $\overline{W}$ циклически дополнительное к W подслово в слове (7.4). К диску D^1 приклеим его зеркальную копию D^2 по подпутям границ с одинаковой меткой $\overline{W}$. Получим диаграмму D^{12} с граничной меткой побуквенно равной слову WW^{-1} .

Равенство $\varphi(p_1) \equiv W$ позволяет провести следующую операцию над диаграммой Δ : разрезать ее вдоль пути p_1 и вклеить в образовавшуюся дыру диаграмму D^{12} (рис. 13в). Аналогично, вдоль разреза по другому краю p_2 полосы S_1 можно вклеить диаграмму D^{34} , составленную из взаимно зеркальных копий двух дисков с граничной меткой (7.4).

Полученную диаграмму Δ' можно считать также составленной из следующих трех частей Δ_1 , Δ_2 и Δ_3 : средняя состоит из дисков D^2 , D^3 и полосы S_1 между ними. В две оставшиеся после вырезания из Δ' компоненты Δ_1 и Δ_3 входят соответственно D_1 , D^1 и D^4 , D_2 вместе со всеми прочими клетками диаграммы Δ' .

Из определения диаграммы Δ_2 видно, что ее граничная метка имеет вид $\overline{W}\sigma^{\pm 1}\overline{W}^{-1}\sigma^{\mp 1}$. Здесь слово $\overline{W}$ удовлетворяет условиям леммы 9.1 (с $V_0 \equiv \overline{W}$), так как $t \neq t_1$. Поэтому поддиаграмму Δ_2 можно заменить в Δ' некоторой диаграммой без дисков.

В границе диаграммы Δ_1 уже нет σ -ребер. Ввиду разобранных выше случаев, когда $n = 0$, эту поддиаграмму в Δ' тоже можно заменить на диаграмму без дисков. Наконец, к поддиаграмме Δ_3 можно применить индуктивное предположение, так как ее граница содержит $2(n-1)$ σ -ребер.

Проведенная хирургия позволила получить диаграмму с той же граничной меткой, какая имеется у Δ , но без дисков.

Обозначим через $\Gamma_t(\Delta)$ граф, построенный для произвольной диаграммы Δ над группой B_6 следующим образом. Его внутренними вершинами считаются все точки o_D внутри дисков, а внешней – вершина o_Δ ; ребрами же являются все t -спицы; однако, если два диска оказываются соединенными двумя t_1 -спицами, то из них включается в $\Gamma_t(\Delta)$ только одна (любая).

ЛЕММА 9.4. *Если диаграмма Δ минимальна и содержит диски, то $\Gamma_t(\Delta)$ является $(2L-1)$ -графом.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В графе Γ_1 нет одноугольников, так как между t -спицами из каждого диска диаграммы Δ выходят k -спицы, и наоборот.

Допустим, некоторые две спицы графа Γ_t , исходящие из диска D_1 и входящие в диск D_2 , образуют двухугольник. Очевидно, что и все промежуточные k -спицы, выходящие из D_1 , кончаются в D_2 . Поэтому среди них найдутся смежные t - и k -спицы с $t \neq t_1$. Но это противоречит лемме 9.3.

Поскольку общее число t -спиц каждого диска равно $2L > 7$, лемма доказана.

ЛЕММА 9.5. *В минимальной диаграмме над группой B_6 нет r -колец.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, что S – r -кольцо, и рассмотрим максимальную поддиаграмму Δ , лежащую в области, ограниченной его медианой. По лемме 6.1(2) в диаграмме Δ есть диски. Поэтому по леммам 9.4 и 3.2 (а также лемме 6.1(5),(6)) в графе $\Gamma_t(\Delta)$ найдется диск, огибаемый полосой S . (Напомним, что $2L-1-3 > L+1$.) Но это противоречит лемме 8.4.

§ 10. Сравнение длин элементов некоторых подгрупп

Прежде, чем провести сравнение длин, необходимое для доказательства теоремы 3, в настоящем параграфе проводятся сравнения длин элементов в некоторых промежуточных подгруппах. Но сначала докажем, что $R_u \cong R$ – подгруппа в B_6 .

ЛЕММА 10.1. *Естественный гомоморфизм $R_u \rightarrow B_6$ инъективен.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим минимальную диаграмму Δ над группой B_6 для равенства некоторого u -слова U единице. По определению в $\partial\Delta$ нет t -ребер, а поэтому в диаграмме Δ не может быть дисков по леммам 9.4 и 3.4, ибо $2L - 1 > 6$. Из утверждений (1), (18) и (19) леммы 6.1 последовательно заключаем, что в Δ нет σ -, d - и b -клеток, т.е. слово U равно 1 в группе $B * R_u$, а значит, и в группе R_u .

Итак, можно считать, что R_u – это подгруппа в группе B_6 . Введем далее цепь $R_u \leq A_1 \leq A_2 \leq A_3 \leq A_4 \leq B_6$ со следующими промежуточными подгруппами.

Положим $A_1 = \langle R_u, b_1, \dots, b_m \rangle$, $A_2 = \langle A_1, k_1 \rangle$, $A_3 = \langle A_2, a_1, \dots, a_m \rangle$ и $A_4 = \langle A_3, x, d, \sigma, r_i; i \in I \rangle$. Системы порождающих этих подгрупп выделяются естественно: $\{u_1, \dots, u_m, b_1, \dots, b_m\}$ – для подгруппы A_1 и т. д.

Ниже запись $|V|_u$ означает число вхождений букв $u_1^{\pm 1}, \dots, u_m^{\pm 1}$ в слово V , т.е. длину слова после вычеркивания всех других букв.

ЛЕММА 10.2. *Пусть u -слово U не равно в B_6 никакому u -слову меньшей длины, а V – слово в порождающих подгруппы A_1 , равное слову U в группе B_6 . Тогда $|V|_u \geq |U|_u (= \|U\|)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть Δ – минимальная диаграмма равенства слов U и V . Как и в доказательстве леммы 10.1, заключаем, что в Δ нет дисков, σ - и d -клеток. Значит, Δ – диаграмма над группой B_4 , и утверждение следует из леммы 4.6.

Далее через $|W|_{u,b}$ обозначим число вхождений букв $u_1^{\pm 1}, \dots, u_m^{\pm 1}, b_1^{\pm 1}, \dots, b_m^{\pm 1}$ в слово W .

ЛЕММА 10.3. *Пусть W – слово в порождающих подгруппы A_2 , представляющее элемент из подгруппы A_1 , а V – такое несократимое слово в порождающих подгруппы A_1 , для которого диаграмма Δ равенства $W = V$ в группе B_6 имеет минимальный тип среди всех диаграмм равенств $W = V'$ для слов V' в порождающих группы A_1 . Тогда $|W|_{u,b} \geq |V|_u$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как и в леммах 10.1, 10.2, диаграмма Δ не содержит дисков, а затем из нее исключаются σ - и d -клетки с помощью утверждений (1) и (18) леммы 6.1.

Введем обозначение $p_V p_W^{-1}$ для контура диаграммы Δ , где $\varphi(p_V) \equiv V$, $\varphi(p_W) \equiv W$.

Заметим сначала, что путь p простой, в частности, если e – ребро пути p_V , то ребро e^{-1} не входит в путь p_V . Действительно, в противном случае от Δ можно было бы отрезать поддиаграмму, ограниченную петлей пути p_V , удаляя из V единичное в группе B_5 подслово и понижая тип диаграммы Δ . Но это противоречило бы условию леммы, наложенному на V .

Никакая (u, b) - или (u, u) -клетка диаграммы Δ не может иметь общих граничных ребер с путем p_V , так как иначе можно было бы вырезать такую клетку из Δ и заменить соответственно путь p_V на путь $p_{V'}$ с понижением типа диаграммы вопреки условию леммы, наложенному на слово V .

Поэтому для каждого u -ребра e пути p_V имеется лишь две возможности:

- (1) ребро e^{-1} входит в путь p_W^{-1} ;
- (2) ребро e лежит на границе некоторой (u, b, k_1) -клетки Π . (См. (4.14).)

Во втором случае выберем в $\partial\Pi$ b -ребро, которое не смежно с u -ребром e , и продолжим максимально b -полосу $S = [\Pi, \Pi_1, \dots, \Pi_n]$ за это ребро (рис. 14а). По лемме 6.1(19) эта полоса не может оказаться кольцом.

У полосы S два торца e_1, e_2 , где e_1 — смежное с e b -ребро в $\partial\Pi$. Допустим, что торец e_2 полосы S оказался на пути p_V (рис. 14б). В этом случае полоса S вместе с путем p_V ограничивают некоторую максимальную поддиаграмму $\delta(S)$, в контуре которой есть k_1 -ребро f из $\partial\Pi$. Это позволяет определить k_1 -полосу $K = [\Pi, \pi_1, \dots]$, начатую с Π и максимально продолженную за f . Полоса K должна еще раз пересечь полосу S , так как в пути p_V нет k_1 -ребер. Но в таком случае из полос S и K можно составить (b, k) -кольцо вопреки лемме 6.1(13).

Рис. 14

Таким образом, торец e_2 полосы S обязательно лежит на пути p_W .

Заметим еще, что клетка Π не может входить в b -полосу S' , начатую с другой (u, b, k_1) -клетки Π' , имеющей общее граничное u -ребро $e' \neq e$ с путем p_V , так как это опять с неизбежностью приводит к (b, k_1) -кольцу или к b -кольцу (см. варианты на рис. 14в, г) вопреки лемме 6.1(13). Поэтому построенные таким образом b -полосы S и S' для разных u -ребер e и e' пути p_V имеют разные торцы на пути p_W .

Итак, разным u -ребрам пути p_V в случае (1) сопоставлены разные u -ребра пути p_W , а в случае (2) — разные b -ребра пути p_W . Отсюда следует утверждение леммы.

ЛЕММА 10.4. Пусть X — слово в порождающих подгруппы A_3 , представляющее некоторый элемент из A_2 , а W — такое несократимое слово в порождающих подгруппы A_2 , для которого диаграмма Δ равенства $X = W$ в группе B_6 имеет минимальный тип среди всех диаграмм равенств $X = W'$ для слов W' в порождающих группы A_2 . Тогда $|X|_{u,b} \geq |W|_{u,b}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как и в леммах 10.1–10.3, диаграмма Δ не содержит дисков, а также σ - и d -клеток. По лемме 6.1(4) нет в ней и Q -клеток, т.е. терминальных клеток для a -полос. Ее границу обозначим $p_W p_X^{-1}$, где $\varphi(p_W) \equiv W$, $\varphi(p_X) \equiv X$. Как и в лемме 10.3, путь p_W является простым, но теперь никакое его u -ребро e не может принадлежать границе не только (u, b) - или (u, u) -клетки, но и (u, b, k_1) -клетки. Поэтому ребро e должно также входить и в путь p_X .

По той же причине, если ребро e пути p_W является b -ребром, то для него имеется только две возможности:

- (1) ребро e входит в путь p_X ;
- (2) e лежит на границе некоторой (b, a) -клетки, т.е. является торцом некоторой максимальной b -полосы S .

Если второй торец полосы S также входит в путь p_W , то можно определить максимальную поддиаграмму $\delta(S)$, ограниченную путем p_W и медианой полосы S . Наличие в S (b, a) -клетки позволяет построить некоторую максимальную a -полосу T , которая должна дважды пересекаться с полосой S , образуя (b, a) -кольцо, поскольку в пути p_W нет a -ребер. Но это противоречит лемме 6.1(12). Следовательно, в случае (2) второй торец полосы S является b -ребром пути p_X .

Таким образом, разным b -ребрам пути p_W сопоставлены разные b -ребра пути p_X . Поскольку для u -ребер это было сделано еще раньше, лемма доказана.

Через $|Y|_{u,b,a}$ обозначается далее число вхождений букв $u_1^{\pm 1}, \dots, u_m^{\pm 1}, b_1^{\pm 1}, \dots, b_m^{\pm 1}, a_1^{\pm 1}, \dots, a_m^{\pm 1}$ в слово Y . (Аналогично определяется величина $|Y|_{u,b,s}$, которая не меньше $|Y|_{u,b,a}$, так как a -буквы являются s -буквами.)

ЛЕММА 10.5. Пусть Y – слово в порождающих подгруппы A_4 , представляющее некоторый элемент из A_3 , а X – такое несократимое слово в порождающих подгруппы A_3 , для которого диаграмма Δ равенства $Y = X$ в группе B_6 имеет минимальный тип среди всех диаграмм равенств $Y = X'$ для слов X' в порождающих подгруппы A_3 . Тогда $|Y|_{u,b,a} \geq |X|_{u,b}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как и в леммах 10.1–10.4, диаграмма Δ не содержит дисков, а по лемме 6.1(7) в ней нет t -клеток, ибо в границе $\partial\Delta$ нет t -ребер. Из утверждения (4) леммы 6.1 следует также, что в Δ нет Q -клеток, ибо нет Q -терминальных клеток, а $\partial\Delta$ не имеет Q -ребер.

Контур диаграммы Δ имеет вид $p_X p_Y^{-1}$, где $\varphi(p_X) \equiv X$, $\varphi(p_Y) \equiv Y$. Как и в лемме 10.4, путь p_X должен быть простым, а любое его u -ребро должно содержаться в пути p_Y .

В силу условия на слово X никакое b -ребро e пути p_X не входит в границу (b, u) -, (b, k_1) - или (b, a) -клетки, так как такую клетку можно было бы вырезать из Δ с переходом к диаграмме равенства $Y = X'$ меньшего типа. Поэтому для e имеется две возможности:

- (1) b -ребро e пути p_X входит также в путь p_Y ;
- (2) b -ребро e лежит на границе некоторой (d, a, b) -клетки Π . (См. (4.16).)

Во втором случае проведем построение, аналогичное проделанному ранее в лемме 10.3. Именно, выберем в Π a -ребро, которое не смежно в $\partial\Delta$ с b -ребром e , и максимально продолжим за него a -полосу $S = [\Pi, \Pi_1, \dots, \Pi_n]$ (рис. 14а с изменением обозначений).

Допустим, что S есть a -кольцо, получим противоречие с леммой 6.1(20). Допустим, что торец e_2 кольца S , отличный от торца e_1 , смежного в $\partial\Delta$ с e , входит в p_X (рис. 14б), получаем (a, d) -кольцо (так же, как возникло (b, k_1) -кольцо в лемме 10.3), что, однако, противоречит лемме 6.1(14).

Следовательно, торец e_2 полосы S обязательно входит в путь p_Y .

Клетка Π не может входить в a -полосу, начатую с другой (d, a, b) -клетки Π' (рис. 14в,г), имеющей b -ребро e' на p_X , так как это бы опять приводило к (d, a) -кольцу или к a -кольцу с (d, a) -клеткой (по аналогии с появлением (b, k_1) -кольца или b -кольца в лемме 10.3), поскольку в Δ нет d -терминальных клеток. Поэтому построенные таким образом a -полосы S и S' для разных b -ребер e и e' пути p_X имеют разные торцы e_2 и e'_2 на пути p_Y .

Таким образом, закончено построение инъективного соответствия: u -ребрам пути p_X сопоставлены u -ребра пути p_Y , а b -ребрам пути p_X сопоставлены b -ребра пути p_Y в случае (1) или a -ребра пути p_Y в случае (2), а именно, торцы построенных по ним a -полос S , входящие в путь p_Y .

§ 11. Расположение s -полос

Наименее тривиальным при доказательстве теоремы 3 является переход от длин элементов подгруппы A_4 к их длинам в группе B_6 . Исследуемые при этом s -полосы включают в себя a -полосы. Связанные с ними оценки опираются, в частности, на свойства овалов из § 3, гиперболичность “оценочного” графа $\Gamma_t(\Delta)$ (лемма 9.4) и отсутствие r -огибаний (лемма 8.4).

ЛЕММА 11.1. *Пусть S – s -полоса в минимальной диаграмме Δ над группой B_6 . Тогда ее торцы e_1 и e_2 не могут одновременно лежать на границе одного диска D .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассуждая “от противного”, обозначим через $\delta(S)$ максимальную поддиаграмму в Δ , ограниченную медианой полосы S . Ее граница имеет вид p_1p_2 , где p_1 – край полосы S , а путь p_2 входит в ∂D .

Предположим сначала, что в пути p_2 встречаются t - или k -ребра. Из вида (7.3) граничной метки диска следует, что t -ребра чередуются в p_2 с k -ребрами. Поэтому в $\delta(S)$ есть диски, ибо в p_1 не может быть t - или k -ребер, а t -полоса не может пересекаться с k -полосой. Рассмотрим граф $\Gamma_t(\delta(S))$, который должен быть $(2L - 1)$ -графом по лемме 9.4. По лемме 3.2 в нем найдется вершина o , из которой во вне, т.е. в диск D , выходит не меньше $2L - 4 > 2$ спиц, причем между ними нет других дисков диаграммы Δ . Но $o = o_{D'}$ для некоторого диска D' , и мы получаем противоречие с леммой 9.4, примененной уже к Δ . Таким образом, путь p_2 не содержит t - или k -ребер, а в поддиаграмме $\delta(S)$ нет дисков.

Допустим, что торцы e_1 и e_2 разделены в p_2 Q -ребром, которое может быть лишь одно, как видно из (7.3) и определения h -специального слова Σ . Поскольку в p_1 нет Q -ребер, граница $\partial\delta(S)$ содержит ровно одно Q -ребро. Но такого быть не может ввиду отсутствия в $\delta(S)$ Q -терминальных клеток.

Остается рассмотреть случай, когда $\varphi(p_2)$ – подслово слова $(X^\#)^{-1}$ или слова Y^{-1} , где $\Sigma \equiv h^{-1}X^\#q_jYh$. Но здесь слова X, Y положительны, как видно из определения диска. Поэтому ориентируемость плоскости не позволяет обоим торцам полосы S лежать на ∂D .

Назовем s -участком подпуть в границе диска, меткой которого является s -слово.

ЛЕММА 11.2. Пусть $S_1, \dots, S_n$ – максимальные s -полосы (возможно, без клеток), торцы $e_1, \dots, e_n$ которых лежат на одном s -участке диска D минимальной диаграммы Δ над группой B_6 (или на одном подпути p границы $\partial\Delta$, не содержащем Q - и t -ребер), а другие торцы $e'_1, \dots, e'_n$ – на границах (r, Q) -клеток, входящих в одну r -полосу S (рис. 15а). Тогда $n \leq 8$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства можно уменьшить полосу $S = [\Pi_1, \dots, \Pi_l]$, считая, что как клетка Π_1 , так и клетка Π_l являются терминальными (r, Q) -клетками для названных s -полос, скажем для S_1 и S_2 . Поскольку в границе каждой (r, Q) -клетки не больше четырех s -ребер, достаточно опровергнуть предположение, что в полосе S имеется (r, Q) -клетка $\Pi = \Pi_j$, где $j \neq 1, l$. Покажем, что такое допущение ведет к появлению некоторого (r, Q) -кольца в поддиаграмме без дисков вопреки лемме 6.1(3).

Рис. 15

Рассмотрим любую простую замкнутую кривую $c = y'x'z'p'$, составленную из частей медиан y, z полос S_1, S_2 , части средней линии x полосы S и части s -участка p диска D . (Таких кривых можно составить несколько, если средние линии полос имеют по несколько пересечений.) Если в максимальной поддиаграмме $\delta(c)$, лежащей внутри c , есть диски, то по леммам 9.4 и 3.2 r -полоса S должна огибать некоторый диск, ибо $2L - 4 > L + 1$, а в S_1, S_2 нет t -клеток и в p нет t -ребер. Но это противоречит лемме 8.4.

Напомним, что (r, Q) -клетка Π не может входить в s -полосы. Допустим, что линия y пересекает среднюю линию x по разные стороны от клетки Π (рис. 15б). Тогда начатая с клетки Π Q -полоса непременно пересечет еще раз r -полосу S , так как ее средняя линия не может пересечь линию y . Появляется (r, Q) -кольцо.

Следовательно, можно составить простую замкнутую кривую $y'x'z'p'$ такую, что ее x -часть x' проходит через клетку Π (рис. 15в). Но тогда, как и выше, клетка Π оказывается угловой в некотором (r, Q) -кольце, так как средняя линия Q -полосы не может пересекаться с дугами y, z или p .

Лемма доказана.

Для произвольного слова W обозначим через $|W|_s$ и $|W|_r$ соответственно число вхождений букв $s_0^{\pm 1}, \dots, s_m^{\pm 1}$ и число вхождений букв $r_i^{\pm 1}, i \in I$, в W . Положим также по определению

$$|W|_{s,r} = |W|_s + 60|W|_r. \quad (11.1)$$

Если в минимальной диаграмме Δ над группой B_6 имеются диски, то граф $\Gamma_t(\Delta)$ является по лемме 9.4 $(2L - 1)$ -графом. Рассмотрим некоторый овал p , проведенный через вершину o_D , лежащую внутри диска D . Напомним, что в §3 было показано на основании леммы 3.5, что в овал входит ровно два внешних ребра и он, являясь простой замкнутой кривой, определяет область $O(p)$ на плоскости. Внешние ребра, т.е. t -спицы из p , высекают из границы $\partial\Delta$ некоторый подпуть $\bar{p} = \bar{p}(D, p)$ целиком лежащий внутри области $O(p)$. (В него не входят два t -ребра диаграммы Δ , пересекаемые внешними ребрами-спицами овала.) Назовем путь $\bar{p}$ *тенью* диска D на $\partial\Delta$, определенной овалом p .

По определению диска его граничной меткой является левая часть равенства (7.3) для некоторого слова $\Sigma(D) = \Sigma \equiv h^{-1}X\#q_jYh$ (или $\Sigma \equiv q$), где $\Sigma^* = q$ в полугруппе $\Gamma(T)$. Подпути контура диска D с меткой $\Sigma^{\pm 1}$ назовем Σ -дугами. Ключевой в этом параграфе является

ЛЕММА 11.3. *Пусть W – слово, написанное на тени $\bar{p}$ диска D минимальной диаграммы Δ над группой B_6 . Тогда для слова $\Sigma = \Sigma(D)$ справедливо неравенство: $3|\Sigma|_{s,r} = 3|\Sigma|_s \leq |W|_{s,r}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проведем с помощью индукции по числу вершин графа $\Gamma_t(\Delta)$, расположенных в определенной овалом p области $O(p)$.

Поскольку $2L - 1 \geq 29$, в область $O(p)$ выходит из D по определению овала не менее $\frac{1}{2}(2L-3)+4$ спиц, т.е. в $O(p)$ находится не менее $2 \times 19 = 38$ последовательных Σ -дуг диска D . Отбрасывая по крайней мере по 4 первых и последних в этом ряду, обозначим 30 средних из них $p_1, \dots, p_{30}$. Обозначим $\Delta(p)$ поддиаграмму, составленную из клеток, пересекаемых овалом p , а также целиком лежащих в $O(p)$. Отметим, что по лемме 9.5 в Δ нет r -колец, и рассмотрим далее два случая.

(1) Число N_r максимальных r -полос в диаграмме $\Delta(p)$ не меньше $\frac{1}{20}|\Sigma|_s$.

Заметим, что хотя бы один торец каждой из этих полос должен лежать в тени $\bar{p}$. Действительно, в противном случае к графу $\Gamma = \Gamma_t(\Delta)$ и к медиане x такой полосы можно применить лемму 3.7, которая предоставляет либо (r, t) -кольцо в Δ без дисков внутри него вопреки лемме 6.1(5), либо огибание r -полосой некоторого диска вопреки лемме 8.4.

Следовательно, $|W|_{s,r} \geq 60|W|_r \geq 60N_r \geq 3|\Sigma|_s$.

(2) $N_r < \frac{1}{20}|\Sigma|_s$.

Рассмотрим систему $\mathcal{S}$ максимальных s -полос с торцами на Σ -дугах $p_1, \dots, p_{30}$. Отметим, что они не могут пересекать t -спицы, т.е. все они содержатся в $\Delta(p)$. Для полос, начинающихся на одной Σ -дуге p_i , не более 8×2 могут иметь торцы на (r, Q) -клетках одной r -полосы по лемме 11.2. Значит, на каждой из r -полос заканчивается не более $30 \times 16 = 480$ полос системы $\mathcal{S}$, а на всех r -полосах – меньше $\frac{480}{20}|\Sigma|_s = 24|\Sigma|_s$ полос ввиду условия (2). В дополнительной системе $\mathcal{T}$ содержится не менее $(30 - 24)|\Sigma|_s$ полос из $\mathcal{S}$, так как по лемме 11.1 вторые торцы полос из $\mathcal{S}$ не могут находиться на ∂D .

Рассмотрим две полосы S_1, S_2 системы $\mathcal{T}$, заканчивающиеся на одном диске D' (если такие есть). В ограниченной их медианами области не может быть дисков, ибо по лемме 3.2, примененной к соответствующему графу, вершина o внутри одного из таких дисков давала бы 2-угольник в $\Gamma_t(\Delta)$ вместе с o_D или $o_{D'}$. Поэтому полосы S_1 и S_2 стартуют с Σ -дуг (и кончаются на Σ' -дугах), разделенных не более

чем одним ребром графа $\Gamma_t(\Delta)$, т.е. не более чем двумя t -ребрами на ∂D ($\partial D'$). (Напомним, что одна из t_1 -спиц диска D может быть стерта в графе $\Gamma_t(\Delta)$.) Это (и неравенство $2L - 1 \geq 29$) позволяет с помощью медианы x любой полосы системы $\mathcal{T}$ между D и D' определить один и тот же производный овал p' , проходящий через $o_{D'}$ (рис. 16а).

Рис. 16

Пусть $p', \dots, p^{(n)}$ – всевозможные производные овалы, построенные для спиц подсистемы $\mathcal{T}_1$ системы $\mathcal{T}$, заканчивающихся на каких-либо дисках $D', \dots, D^{(n)}$ (рис. 16б). Из леммы 3.8 следует, что тени этих дисков не пересекаются и находятся в тени диска D . Терминальными ребрами для полос из $\mathcal{T}_2 = \mathcal{T} \setminus \mathcal{T}_1$ могут быть только ребра из тени $\overline{\mathcal{P}}$, не входящие в тени перечисленных дисков. Поэтому ввиду линейности соотношения (11.1) для меток $W', \dots, W^{(n)}$ теней этих дисков справедливо неравенство

$$|W'|_{s,r} + \dots + |W^{(n)}|_{s,r} + \text{card } \mathcal{T}_2 \leq |W|_{s,r}. \quad (11.2)$$

По той же лемме каждая область $O(p'), \dots, O(p^{(n)})$ содержит меньше вершин графа $\Gamma_t(\Delta)$, чем $O(p)$. По индуктивному предположению

$$3|\Sigma^{(i)}|_s \leq |W^{(i)}|_{s,r} \quad (11.3)$$

для $i = 1, \dots, n$ и слов $\Sigma^{(i)} = \Sigma(D(i))$. В то же время

$$6(|\Sigma'|_s + \dots + |\Sigma^{(n)}|_s) \geq \text{card } \mathcal{T}_1 \geq 6|\Sigma|_s - \text{card } \mathcal{T}_2, \quad (11.4)$$

ибо разные полосы из $\mathcal{T}_1$ имеют торцы не более чем на шести Σ -дугах каждого из дисков $D', \dots, D^{(n)}$. Из неравенств (11.2)–(11.4) следует, что

$$3|\Sigma|_s \leq \sum_{i=1}^n 3|\Sigma^{(i)}|_s + \frac{1}{2} \text{card } \mathcal{T}_2 \leq \sum_{i=1}^n |W^{(i)}|_{s,r} + \frac{1}{2} \text{card } \mathcal{T}_2 \leq |W|_{s,r}.$$

§ 12. Доказательства теорем

Докажем сначала возможность квазигеодезического вложения в теореме 3, т.е. неравенство (12.1) для u -слов U . (Напомним, что группу R можно отождествить с подгруппой R_u группы B_6 по определению группы R_u и лемме 10.1.)

Итак, пусть произвольный элемент g подгруппы R_u представлен u -словом U длины $\|U\| = |U|_u = |g|_{u_1, \dots, u_m}$. Для произвольного слова Z в порождающих группы B_6 обозначим $|Z|_{u,b,s,r} = |Z|_{u,b,s} + 60|Z|_r$. Мы покажем, что если слово Z представляет тот же элемент g , то

$$\|U\| = |U|_u \leq |Z|_{u,b,s,r} \leq 60\|Z\|. \quad (12.1)$$

Для этой цели зафиксируем какое-нибудь несократимое слово Y в порождающих подгруппы A_4 (см. § 10), диаграмма Δ равенства которого слову Z в группе B_6 имеет минимальный возможный тип. Такое слово Y существует, так как $U = Z$ в B_6 . Аналогично, для слова Y существуют слова X , W и V , удовлетворяющие условиям лемм 10.5, 10.4 и 10.3 соответственно. На основании лемм 10.2–10.5 имеем:

$$|U|_u \leq |V|_u \leq |W|_{u,b} \leq |X|_{u,b} \leq |Y|_{u,b,a}.$$

Поэтому для обоснования неравенства (12.1) нужна

ЛЕММА 12.1. *Справедливо неравенство: $|Y|_{u,b,a} \leq |Z|_{u,b,s,r}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Запишем контур диаграммы Δ в виде $p_Y p_Z^{-1}$, где $\varphi(Y) \equiv Y$, $\varphi(Z) \equiv Z$. Как и в леммах 10.2–10.5, из выбора слова Y следует, что путь p_Y простой.

Граница никакой u - или b -клетки диаграммы Δ не может иметь общее ребро с p_Y , так как граничные метки таких клеток записаны в порождающих подгруппы A_4 , и, отрезая их от Δ с заменой Y на Y' , можно было бы уменьшить тип диаграммы. Значит, каждое u - или b -ребро пути p_Y входит и в путь p_Z . Поэтому для доказательства леммы достаточно установить неравенство $|Y|_a \leq |Z|_{s,r}$.

По той же причине, что и выше, никакое ребро пути p_Y не может лежать на границе (σ, a) -, (b, a) -, (a, d) -, или (a, r, x) -клеток. Значит, для a -ребер пути p_Y есть три возможности: принадлежать пути p_Z , принадлежать границе некоторой (r, Q) -клетки или принадлежать границе некоторого диска диаграммы. Первую возможность можем исключить: выбрасывая a -ребра первого типа, мы разрежем диаграмму Δ на несколько поддиаграмм, для каждой из которых утверждение леммы можно доказывать отдельно, так как мы будем использовать лишь минимальность типа диаграммы равенства $Y = Z$.

В диаграмме Δ нет r -колец по лемме 9.5. Рассмотрим два случая.

(1) Число N_r максимальных r -полос в Δ не меньше $\frac{1}{60}|Y|_a$.

Допустим, что оба торца некоторой r -полосы S находятся на пути p_Y . Тогда в максимальной поддиаграмме $\delta(S)$, расположенной в области, ограниченной медианой этой полосы и путем p_Y , нет дисков, как видно из сопоставления лемм 9.4, 3.2 и 8.4, ибо путь p_Y не содержит t -ребер. Более того, в S нет t - или k -клеток при $k \neq k_1$, так как в этом случае возникли бы (r, t) - или (r, k) -кольца вопреки лемме 6.1(5,6). Аналогично, в S нет Q -клеток по лемме 6.1(3), ибо в пути p_Y нет

Q -ребер. В таком случае метки клеток полосы S — это слова в порождающих группы A_4 . Поэтому слово Y можно заменить словом Y' , отрезая от Δ полосу S вместе с поддиаграммой $\delta(S)$. Но такое уменьшение типа диаграммы противоречит выбору слова Y .

Таким образом, в пути p_Z не меньше чем N_r r -ребер, откуда $|Z|_{s,r} \geq 60|Z|_r \geq 60N_r \geq |Y|_a$.

$$(2) N_r < \frac{1}{60}|Y|_a.$$

В этом случае из леммы 11.2 выводим, что не более 8 a -ребер пути p_Y могут принадлежать клеткам одной r -полосы, а общее число a -ребер пути p_Y , лежащих на границах (r, Q) -клеток, меньше $\frac{1}{7}|Y|_a$.

Пусть $\mathcal{T}$ — множество a -ребер пути p_Y , входящих в границы некоторых дисков. Мы установили уже, что $\text{card } \mathcal{T} > \frac{6}{7}|Y|_a$.

Если некоторые ребра множества $\mathcal{T}$ входят в границу одного диска D , то они не могут быть разделены в ∂D t -ребрами. Для обоснования нужно рассмотреть поддиаграмму $\delta(D)$, заключенную между D и путем p_Y . В ней нет дисков по леммам 9.4, 3.2, так как в пути p_Y нет t -ребер. Поэтому начатая с t -ребра диска D t -полоса не могла бы закончиться.

Таким образом, a -ребра пути p_Y входят не более чем в два Σ -участка диска D . Поэтому (и ввиду неравенства $2L - 1 \geq 29$) для диска D можно построить овал p в графе $\Gamma_t(\Delta)$ такой, что никакое лежащее на диске a -ребро пути p_Y не попадает в область $O(p)$, определенную этим овалом. В таком случае заданная овалом p тень диска D содержится в пути p_Z , поскольку в пути p_Y нет t -ребер. Для метки Z_p этой тени по лемме 11.3 справедливо неравенство

$$|Z_p|_{s,r} \geq 3|\Sigma|_s \geq 3|\Sigma|_a \geq \frac{3}{2}n_D, \quad (12.2)$$

где n_D — число a -ребер границы диска D , лежащих на пути p_Y .

Неравенство $2L - 1 \geq 29$ позволяет выбрать овал p так, что любая Γ -правильная дуга x с концом на общем a -ребре для ∂D и p_Y является 2-отделенной от овала p . Тогда овалы p_1 и p_2 , построенные таким образом для двух дисков D_1 и D_2 , имеющих общие граничные ребра e_1 и e_2 с p_Y , будут расходящимися, поскольку точки на e_1 и e_2 всегда можно соединить подходящей Γ -правильной дугой x . (Напомним, что эти ребра лежат на одном пути p_Y без t -ребер.)

По лемме 3.6 овалы p_1 и p_2 не пересекаются во внутренних точках графа $\Gamma_t(\Delta)$. Поскольку дуга x находится вне областей $O(p_1)$, $O(p_2)$, эти области также не пересекаются. Значит, не пересекаются и тени дисков D_1 и D_2 . Поэтому можно просуммировать неравенства вида (12.2) по всем дискам, имеющим общие ребра границы с путем p_Y и получить:

$$|Z|_{s,r} \geq \frac{3}{2} \sum n_D \geq \frac{3}{2} \frac{6}{7} |p_Y|_a \geq |Y|_a,$$

что и требовалось.

Если группа G и функция l заданы в теореме 2, то сначала группу G можно вложить в рекурсивно определяемую группу R по лемме 2.2 и теореме 1, так что функция $g \mapsto |g|_R$ эквивалентна функции l . Доказанное неравенство (12.1) и лемма 10.1

означает эквивалентность функций длин в произвольной рекурсивно определенной конечно порожденной группе R и построенной по ней большей группе B_6 , которая может быть задана конечным множеством соотношений по лемме 4.7. Полагая $H = B_6$, завершаем доказательство теоремы 2.

Чтобы перейти от неравенства (12.1) к равенству в теореме 3, можно увеличить конечную систему порождающих подгруппы R_u , включив в нее, например, все элементы длины ≤ 60 от порождающих $u_1, \dots, u_m$. М. В. Сапир предложил автору другой прием.

Именно, введем новые буквы r_{ij} , где $i \in I$, $j = 1, \dots, 60$, и зададим группу H теми же соотношениями, которыми определена группа B_6 в § 4, но с заменой каждого из порождающих r_i во всех соотношениях на $\prod_{j=1}^{60} r_{ij}$. Из определения ясно, что корректно определен гомоморфизм $\psi: B_6 \rightarrow H$, тождественный на всех порождающих кроме r_i , а $\psi(r_i) = \prod_{j=1}^{60} r_{ij}$. Левым обратным для него будет каждый из гомоморфизмов ε_j , $j = 1, \dots, 60$, тождественный на всех порождающих кроме r_{ik} , а $\varepsilon_j(r_{ij}) = r_i$ и $\varepsilon_j(r_{ik}) = 1$ при $k \neq j$. Поэтому ψ является изоморфным вложением группы B_6 в H .

Очевидно, что для каждого элемента g группы R_u его длина относительно выделенной системы порождающих $\mathcal{B}$ группы H не превосходит длины в порождающих $u_1, \dots, u_m$, ибо $u_1, \dots, u_m \in \mathcal{B}$. Допустим, что наоборот, $|Z_0|_{\mathcal{B}} < |U|_u$ для некоторого кратчайшего слова U , представляющего элемент $g \in R_u \leq H$, и некоторого слова Z_0 над алфавитом $\mathcal{B}$, представляющего тот же элемент. Выберем тогда такой индекс j , что общее число вхождений в Z_0 всех букв из множества $\mathcal{R}_j = \{r_{ij}\}_{i \in I}$ не превосходит $\frac{1}{60}$ доли вхождений всех r -букв в слово Z_0 . Очевидно тогда, что

$$|Z_0|_u + |Z_0|_b + |Z_0|_s + 60|Z_0|_j \leq \|Z_0\| < \|U\|, \quad (12.3)$$

где $|Z_0|_j$ — число r_{ij} -букв в Z_0 , $i \in I$. Но тогда, применяя гомоморфизм ε_j , мы получим для образа Z слова Z_0 равенство $U = Z$ в группе B_6 , а из неравенства (12.3) — неравенство $|Z|_{u,b,s,r} < \|U\|$ вопреки неравенству (12.1).

Итак, построенное изоморфное вложение группы $R_u \cong R$ в конечноопределенную группу H сохраняет длины элементов, и теорема 3 полностью доказана.

Для доказательства теоремы 4 достаточно сформулированное в ней свойство обеспечить для всех конечно-определенных групп H ввиду теоремы 3. Конечно-определенные группы вместе с выделенными в них непересекающимися системами порождающих можно эффективно перенумеровать: $(H_1, \mathcal{A}_1), (H_2, \mathcal{A}_2), \dots$. Пусть F — их свободное произведение с системой порождающих $\mathcal{A} = \{a_1, a_2, \dots\}$, где $\mathcal{A} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{A}_i$. Определим группу K , добавляя к естественному копредставлению группы F три порождающих x, y, z и соотношения

$$z^{-1}x^{-i}yx^iz = x^{-i}yx^ia_i, \quad i = 1, 2, \dots \quad (12.4)$$

Очевидно, что K — конечно-порожденная рекурсивно определяемая группа. Ее с сохранением длин можно вложить по теореме 3 в конечно-определенную группу U . Естественные гомоморфизмы групп H_j в K инъективны, ибо K является в силу

соотношений (12.4) HNN-расширением с базой $F * \langle x \rangle * \langle y \rangle$ и сопряженными с помощью z свободными подгруппами. Поэтому для доказательства теоремы 4 достаточно проверить, что длина любого элемента из H_j в порождающих $\mathcal{A}_j$ не превосходит его длины в порождающих x, y, z .

С этой целью рассмотрим некоторое слово W в порождающих x, y, z , представляющее некоторый элемент из подгруппы H_j в K . Пусть V – слово в порождающих системы $\mathcal{A}_j$ такое, что диаграмма Δ равенства $W = V$ имеет минимально возможное число клеток, отвечающих соотношениям группы F и соотношениям (12.4). Достаточно показать, что $\|V\| \leq \|W\|$.

Граница диаграммы Δ имеет вид $p_V p_W^{-1}$, где $\varphi(p_V) \equiv V$, $\varphi(p_W) \equiv W$. При этом, как и в лемме 10.3, путь p_V простой и не имеет общих ребер с a -клетками, отвечающим соотношениям группы H_j . Как и в лемме 10.3, каждое его ребро либо входит также в путь p_W , либо для него строится z -полоса из клеток типа (12.4) с торцом на пути p_W . Отсюда получается нужное неравенство $\|V\| \leq \|W\|$. Однако для полной аналогии с доказательством леммы 10.3 нужно объяснить еще, почему в минимальной диаграмме нет z - и (y, z) -колец.

Последние свойства следуют из стандартных аргументов леммы 6.1. В частности, из них вытекает (см. доказательства свойств (9) или (11) в лемме 6.1), что гипотетическое (y, z) -кольцо должно состоять только из двух угловых клеток. Эти клетки дают сократимую пару, так как если они отвечали бы разным индексам i из списка (12.4), то ограниченная медианой (y, z) -кольца поддиаграмма дала бы единичное в K слово с ненулевой по x суммой показателей. Но такое слово неединично даже в ретракте $\langle x \rangle$ группы K .

Теорема 4 доказана.

Список литературы

1. Olshanskii A. Yu. Distortion functions for subgroups // Proc. Conf. on Geometric Group Theory, Canberra, July 1996; Walter de Gruyter, 1997 (to appear).
2. Gromov M. Asymptotic invariants of infinite groups. Geometric group theory, № 2 // London Math. Soc. Lecture Note Ser. 1993. V. 182. P. 1–125.
3. Gersten S. Dehn functions and l_1 -norms of finite presentations // Algorithms and computations in combinatorial group theory / ed. G. Baumslag, C. Miller. №23: MSRI Publ., Springer, 1993.
4. Bridson M. Fractional isoperimetric inequalities and subgroup distortion // Preprint, 1996.
5. Birget J.-C. Time complexity of the word problem for semigroups and the Higman embedding theorem // LITP 95/26, Institut Blaise Pascal-4, Place Jusseu – 75252 Paris Cedex 05.
6. Rotman J. An introduction to the theory of groups. 3rd ed: Allyn & Bacon, 1984.
7. Aanderaa S. A proof of Higman embedding theorem using Britton extensions of groups // In Word problems, decision problems and the Burnside problem in group theory. Amsterdam: North-Holland, 1973. P. 1–18.
8. Birget J.-C., Rips E., Sapir M. V. Dehn functions of groups // Preprint, 1997.
9. Линдон Р. и Шупп П. Комбинаторная теория групп. М.: Мир, 1980.
10. Ольшанский А. Ю. Геометрия определяющих соотношений в группах. М.: Наука, 1989.